การวิเคราะห์ความเค้นในกระดูกรอบรากฟันเทียมโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

นายสุธี โอฬารฤทธินันท์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2546

ISBN 974-17-4342-4

BONE STRESS ANALYSIS AROUND OSSEOINTEGRATED IMPLANT BY FINITE ELEMENT METHOD

Mr.Sutee Olarnrithinun

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2003
ISBN 974-17-4342-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์ความเค้นในกระดูกรอบรากฟันเทียมโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
โดย	นายสุธี โอฬารฤทธินันท์
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ทญ.ดร. ปรารมภ์ ซาลิมี)

สุธี โอฬารฤทธินันท์ : การวิเคราะห์ความเค้นในกระดูกรอบรากฟันเทียมโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. (BONE STRESS ANALYSIS AROUND OSSEOINTEGRATED IMPLANT BY FINITE ELEMENT METHOD) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 164 หน้า. ISBN 974-17- 4342- 4.

ปัญหาของรากฟันเทียมได้ทำการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบกับเงื่อนไขของการสัมผัสที่ประยุกต์เข้ากับสมการหลักด้วยวิธีออกเมนเตดลากรางเจียน ปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทานให้พิจารณาเป็นปัญหาสถิต แบบความเครียดในระนาบสองมิติ โดยสมมติให้วัสดุที่ทำการวิเคราะห์เป็นเนื้อเดียวกัน มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น และรอยต่อระหว่างกระดูกกับรากฟันเทียมนั้นเป็นการยึดติดแบบไม่สมบูรณ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ แสดงให้เห็นถึงสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน เพื่อนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมด้วยปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ และเพื่อเพิ่มความถูกต้องของโปรแกรมได้นำวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับการวิเคราะห์ด้วย หลังจากนั้นทำการวิเคราะห์กับปัญหารากฟันเทียม โดยทำการเปรียบเทียบการกระจายความเค้นของเกลียวสามแบบ คือ เกลียวแบบบัทเทรส เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส และเกลียวรูปตัววี จากการวิเคราะห์การกระจายความเค้นของเกลียวทั้งสามแบบ บอกได้ว่าเกลียวที่เหมาะสมต่อการใช้งานก็คือ เกลียวรูปตัววีปลายตัด

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....
ปีการศึกษา 2546 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

4370570221 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD: FINITE ELEMENT / CONTACT PROBLEMS / FRICTION / DENTAL IMPLANT / AUGMENTED LAGRANGIAN

SUTEE OLARNRITHINUN : BONE STRESS ANALYSIS AROUND OSSEOINTEGRATED IMPLANT BY FINITE ELEMENT METHOD THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D.
164 pp. ISBN 974-17-4342-4.

The finite element method and the contact constraints given as complemental conditions are performed by applying an augmented Lagrangian formulation for static two-dimensional contact problems with friction. These problems are assumed that materials are homogeneous, linear elastic and imperfect bonding between bone and the dental implant. Two-dimensional representation of geometry is based on the plane strain behavior.

A finite element formulation and a corresponding computer program have been developed and validated by several problems. An adaptive remeshing technique is also incorporated into the program to increase accuracy of results. Several examples are presented to demonstrate the capability the finite element method for analysis of dental implants. Three thread designs of implants, buttress, reverse buttress and V-thread, were evaluated the stress distribution within surrounding bone. The results indicated that a modified V-thread would be most suitable for clinical use.

Department Mechanical Engineering	Student's signature ....
Field of study Mechanical Engineering	Advisor's signature ....
Academic Year 2003	Co-advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์.ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ซึ่งให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนคำสั่งสอนต่าง ๆ ที่มีคุณค่า และเป็นประโยชน์อย่างยิ่งสำหรับการทำงานต่อไปในอนาคต

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์ ประธานกรรมการ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ และ ทญ.ดร.ปรารมภ์ ซาลิมี อาจารย์ประจำคณะทันตแพทยศาสตร์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อคิดเห็น ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ดร.วิโรจน์ ลิ่มตระการ พี่สุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพานิช อาจารย์นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ พี่เสฏฐวรรธ สุจริตภวัตสกุล ที่ให้คำปรึกษา ขอขอบคุณ อาจารย์สิริชนก จันทร์ใบ ที่คอยให้กำลังใจ และความหวังดีเรื่อยมา ตลอดจนเพื่อน ๆ น้อง ๆ ร่วมห้องปฏิบัติการกลศาสตร์การคำนวณ ทุกคน ที่คอยให้กำลังใจ และรอยยิ้มตลอดการทำวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่คอยให้การสนับสนุนการศึกษา และเป็นแรงบันดาลใจของผู้วิจัยมาโดยตลอด ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

		หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย		**ง**
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ		**จ**
กิตติกรรมประกาศ		**ฉ**
สารบัญ		**ช**
สารบัญภาพ		**ญ**
สารบัญตาราง		**ฒ**
คำอธิบายสัญลักษณ์		**ณ**
บทที่ 1	**บทนำ**	**1**
1.1	ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์	1
1.2	วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์	2
1.3	ขอบเขตของวิทยานิพนธ์	2
1.4	ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์	3
1.5	ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
1.6	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในอดีต	4
บทที่ 2	**กลศาสตร์ของแข็งและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์**	**6**
2.1	กลศาสตร์ของแข็ง	6
	2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	7
	2.1.2 สมการเงื่อนไขขอบเขต	7
	2.1.3 สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด	8
	2.1.4 สมการแปรผัน	8
2.2	ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	10
	2.2.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	10
	2.2.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็งแบบเชิงเส้น	12
2.3	วิธีการหาคำตอบโดยการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น	15

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

2.3.1 สมการการแปรผันในรูปแบบของการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น 17

2.3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบของการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น 18

บทที่ 3 ปัญหาการสัมผัสด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 21

3.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุสัมผัส 21

3.1.1 การสัมผัสในแนวตั้งฉาก 22

3.1.2 การสัมผัสในแนวสัมผัส 23

3.1.3 ค่าการแปรผันของระยะห่างในแนวตั้งฉากและระยะห่างในแนวสัมผัส 24

3.2 พลังงานเสมือนจากการสัมผัส 25

3.3 กฎความเสียดทานของคูลอมบ์และการปรับใช้สำหรับการคำนวณ 26

3.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสัมผัส 28

3.4.1 เอลิเมนต์สัมผัส 28

3.4.2 พลังงานจากการสัมผัส 31

3.4.3 เมตริกซ์ความแข็งแกร็งของแรงสัมผัสในแนวตั้งฉาก 32

3.4.4 เมตริกซ์ความแข็งแกร็งของแรงสัมผัสในแนวสัมผัส 34

3.5 ขั้นตอนการคำนวณของปัญหาการสัมผัส 37

บทที่ 4 เทคนิคเพิ่มเติมสำหรับการคำนวณ 42

4.1 เทคนิคการค้นหาจุดสัมผัส 42

4.1.1 เทคนิคการค้นหาแบบ HITA (hierarchy territory algorithm) 42

4.1.2 ขั้นตอนการค้นหาจุดสัมผัส 48

4.2 ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ 49

4.3 วิธีการค้นหาแนวเส้น (Line Search Method) 50

บทที่ 5 โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสัมผัสของวัสดุยืดหยุ่น 53

สารบัญ(ต่อ)

		หน้า
5.1	ขั้นตอนการคำนวณ	53
5.2	รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า	53
5.3	รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์	57
บทที่ 6	**ตัวอย่างการทดสอบโปรแกรม**	**60**
6.1	ปัญหาทรงกระบอกยืดหยุ่นระหว่างแผ่นแข็งเกร็งคู่ขนาน	60
6.2	ปัญหาทรงสี่เหลี่ยมแข็งเกร็งบนพื้นยืดหยุ่นเชิงเส้น	63
6.3	ปัญหาลิ่มแข็งเกร็งบนพื้นยืดหยุ่น	65
6.4	ปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่งที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางไม่เท่ากัน	73
6.5	ปัญหาทรงกระบอกยืดหยุ่นระหว่างแผ่นแข็งเกร็งคู่ขนานแบบคิดความเสียดทาน	79
6.6	ปัญหาความเสียดทานของก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง	82
บทที่ 7	**การวิเคราะห์รากฟันเทียม**	**87**
7.1	แบบจำลองของรากฟันเทียมและผลการคำนวณ	87
7.2	สรุปผลการวิเคราะห์	97
บทที่ 8	**บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ**	**102**
8.1	บทสรุป	102
8.2	ปัญหาที่พบและวิธีการแก้ปัญหา	102
8.3	ข้อเสนอแนะ	104
รายการอ้างอิง		**105**
ภาคผนวก		**108**
	ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรม LEContact	109
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์		**164**

สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 2.1	โดเมนและขอบเขตสำหรับปัญหาของของแข็งทั่วไป	6
รูปที่ 2.2	แสดงการแบ่งขอบเขตของปัญหาให้เป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ	10
รูปที่ 2.3	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ	11
รูปที่ 2.4	แสดงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ	13
รูปที่ 3.1	ค่าที่เกิดขึ้นบนวัตถุสัมผัส	21
รูปที่ 3.2	การเคลื่อนที่ของวัตถุหลังจากการสัมผัส	22
รูปที่ 3.3	ระยะห่างในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัส	23
รูปที่ 3.4	เส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด $\mathbf{x}^2$ สัมพัทธ์กับขอบของวัตถุหลักบนพิกัดเชิงการพา	23
รูปที่ 3.5	กราฟแสดงเงื่อนไขกฎความเสียดทานของคูลอมบ์	26
รูปที่ 3.6	การปรับเงื่อนไขความเสียดทานของคูลอมบ์	27
รูปที่ 3.7	การเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสหลังการปรับเงื่อนไขความเสียดทานของคูลอมบ์	28
รูปที่ 3.8	เอลิเมนต์สัมผัสแบบจุดถึงขอบ	29
รูปที่ 3.9	ขบวนการขั้นตอนการปรับค่าของแรงสัมผัสในแต่ละรอบชดเชย	38
รูปที่ 3.10	การปรับค่าแรงเสียดทานด้วยการฉายเงาลงบนผิวของการเลื่อนไถล	40
รูปที่ 3.11	ขั้นตอนการคำนวณแบบอูซาวาสำหรับปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน	41
รูปที่ 4.1	แนวเขตของแต่ละขอบวัตถุหลัก และส่วนของแนวเขตขยาย E_p	43
รูปที่ 4.2	(a) เวคเตอร์ตั้งฉากและเวคเตอร์ในแนวสัมผัส	44
	(b) ตัวกำหนดเงื่อนไขของการสัมผัสบนขอบหลัก	44
รูปที่ 4.3	แสดงถึงแนวเขตของขอบวัตถุ	45
รูปที่ 4.4	แสดงถึงแนวเขตของขอบวัตถุที่ทำการขยายแล้วหรือเรียกว่าแนวเขตขยาย	46
รูปที่ 4.5	การเหลื่อมล้ำกันของแนวเขตขยาย	46
รูปที่ 4.6	การตรวจสอบของจุดสัมผัสกับขอบหลักและขอบข้างเคียงกับขอบหลัก	47
รูปที่ 4.7	(a) จุดสัมผัสตกอยู่บนขอบมุมแหลม	47
	(b) จุดสัมผัสตกอยู่ในร่องมุม	47
รูปที่ 4.8	แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นในแนวแกน X และ Y	49
รูปที่ 4.9	การค้นหาแนวเส้นแบบกำลังสอง	52
รูปที่ 5.1	ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม LEContact ภายในหนึ่งขั้นภาระ	58

สารบัญภาพ(ต่อ)

หน้า

รูปที่ 5.2	ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม LEContact เพิ่มรอบชดเชยและหลายขั้นภาระ	59
รูปที่ 6.1	ปัญหาของทรงกระบอกยาวที่ถูกกดโดยแผ่นเหล็กแข็งบนพื้นแข็งเกร็ง	60
รูปที่ 6.2	(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาทรงกระบอกบนพื้นแข็ง	61
	(b) รูปร่างที่เปลี่ยนแปลงหลังจากให้ภาระ	61
รูปที่ 6.3	แสดงค่าความดันที่เกิดขึ้นบริเวณผิวสัมผัสของปัญหาทรงกระบอกบนพื้นแข็ง	62
รูปที่ 6.4	แสดงรูปแบบของปัญหากล่องสี่เหลี่ยมแข็งกดบนพื้นยืดหยุ่น	63
รูปที่ 6.5	แสดงแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	64
รูปที่ 6.6	แสดงผลความดันบริเวณผิวสัมผัสที่ได้จากการคำนวณจากโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง	65
รูปที่ 6.7	แสดงรูปแบบของปัญหาลิ่มแข็งเกร็งกดบนพื้นยืดหยุ่น	66
รูปที่ 6.8	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่น 1238 จุดต่อ 2339 เอลิเมนต์	67
รูปที่ 6.9	รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริมต้นของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ	67
รูปที่ 6.10	รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นที่แสดงผลการกระจายค่าความเค้นวอนมิส	68
รูปที่ 6.11	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่น 1396 จุดต่อ 2541 เอลิเมนต์	69
รูปที่ 6.12	รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ	69
รูปที่ 6.13	รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ที่แสดงผลการกระจายค่าความเค้นวอนมิส	70
รูปที่ 6.14	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์หลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่น 2112 จุดต่อ 3893 เอลิเมนต์	71
รูปที่ 6.15	รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ	71

สารบัญภาพ(ต่อ)

หน้า

รูปที่ 6.16 รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ที่แสดงผลการกระจายค่าความเค้นวอนมิส 72

รูปที่ 6.17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันที่ผิวสัมผัสกับระยะห่างจากจุดกึ่งกลางลิ่ม 73

รูปที่ 6.18 ปัญหาการสัมผัสแบบเฮิร์ตซระหว่างทรงกระบอกสองแท่ง

(a) ก่อนให้ภาระ 74

(b) หลังให้ภาระ 74

รูปที่ 6.19 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่ง 75

รูปที่ 6.20 ครึ่งความกว้างหน้าสัมผัสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ 76

รูปที่ 6.21 การกระจายความเค้นวอนมิสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ 76

รูปที่ 6.22 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์ของปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่ง 77

รูปที่ 6.23 ครึ่งความกว้างหน้าสัมผัสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์ของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ 77

รูปที่ 6.24 การกระจายความเค้นวอนมิสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์ของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ 78

รูปที่ 6.25 บริเวณที่เกิดการยึดติดกับการเลื่อนไถลของปัญหาทรงกระบอกระหว่างแผ่นคู่ขนาน 80

รูปที่ 6.26 ความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเสียดทานที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 81

รูปที่ 6.27 ความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเสียดทานที่ได้จากการคำนวณที่ค่า $\mu = 0.2875$ 81

รูปที่ 6.28 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง 82

สารบัญภาพ(ต่อ)

หน้า

รูปที่ 6.29 การเสียรูปของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง 83
รูปที่ 6.30 เปรียบเทียบความเค้นที่ผิวจากการคำนวณของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง 83
รูปที่ 6.31 แสดงการเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสที่ได้จากการคำนวณ 84
รูปที่ 6.32 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบที่สองของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง 84
รูปที่ 6.33 การเสียรูปของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบที่สองของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง 85
รูปที่ 6.34 เปรียบเทียบความเค้นที่ผิวจากการคำนวณของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็งของแบบจำลองที่สอง 85
รูปที่ 6.35 แสดงการเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสที่ได้จากการคำนวณของแบบจำลองที่สอง 86
รูปที่ 7.1 (a) เกลียวรูปตัววี 87
(b) เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส 87
(c) เกลียวแบบบัทเทรส 87
รูปที่ 7.2 รูปร่างแบบจำลองของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส 89
รูปที่ 7.3 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส 89
รูปที่ 7.4 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรสของแบบจำลองเริ่มต้น 90
รูปที่ 7.5 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่งของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส 91
รูปที่ 7.6 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรสของแบบจำลองของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง 91
รูปที่ 7.7 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส 92

สารบัญภาพ(ต่อ)

หน้า

รูปที่ 7.8 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบบัททเรสของแบบจำลองของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง........ 92

รูปที่ 7.9 รูปร่างแบบจำลองของรากฟันเทียมเกลียวแบบรีเวิร์สบัททเรส........ 93

รูปที่ 7.10 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองของรากฟันเทียมเกลียวแบบรีเวิร์สบัททเรส........ 94

รูปที่ 7.11 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบรีเวิร์สบัททเรสของแบบจำลองของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง........ 94

รูปที่ 7.12 รูปร่างแบบจำลองของรากฟันเทียมเกลียวรูปตัววี........ 95

รูปที่ 7.13 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองของรากฟันเทียมเกลียวรูปตัววี........ 96

รูปที่ 7.14 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวรูปตัววีของแบบจำลองของการปรับขนาดครั้งที่สอง........ 96

รูปที่ 7.15 การกระจายความเค้นวอนมิสของกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียมของเกลียวแบบบัททเรส........ 97

รูปที่ 7.16 การกระจายความเค้นวอนมิสของกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียมของเกลียวแบบรีเวิร์สบัททเรส........ 98

รูปที่ 7.17 การกระจายความเค้นวอนมิสของกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียมของเกลียวรูปตัววี........ 98

รูปที่ 7.18 การกระจายแรงที่เกิดขึ้นบนผิวสัมผัสของแต่ละเกลียว........ 99

รูปที่ 7.19 การกระจายแรงและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นบนสันด้านบนของกระดูกทึบ........ 100

รูปที่ 7.20 เกลียวรูปตัววีปลายตัด........ 101

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 6.1 เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรม 63

ตารางที่ 6.2 แสดงผลการเปรียบเทียบขนาดครึ่งความกว้างของหน้าสัมผัสของปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่ง 78

ตารางที่ 7.1 แสดงค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหารากฟันเทียม 88

คำอธิบายสัญลักษณ์

σ_{xx}	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x
σ_{yy}	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y
τ_{xy}	ความเค้นเฉือน
f	แรงเนื่องจากตัววัตถุ
$\mathbf{u}$, $\{u\}$	เวคเตอร์ระยะการเคลื่อนตัว
$\mathbf{t}$, $\{t\}$	เวคเตอร์ความเค้นที่ผิว
δ	ค่าแปรผัน
Δ	ค่าเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้น
$\bar{\mathbf{n}}$	เวคเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับผิว
$\bar{\mathbf{a}}$	เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสกับผิว
$\mathbf{n}$	เวคเตอร์ตั้งฉากกับผิว
$\mathbf{a}$	เวคเตอร์ในแนวสัมผัสกับผิว
$\{R\}$	เวคเตอร์แรงภายนอกที่กระทำบนจุดต่อ
$\{F\}$	เวคเตอร์แรงภายในจุดต่อเนื่องจากความเค้นบนเอลิเมนต์
$[K]$	เมตริกซ์ความแข็งเกร็ง
g_N	ค่าการเหลื่อมล้ำ
$\mathbf{g}_T$	การเคลื่อนตัวสัมพัทธ์ในแนวสัมผัส
ξ	พิกัดเชิงการพา
μ	สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน
t_N	ค่าความดันที่ผิวในแนวตั้งฉาก
$\mathbf{t}_T$	ค่าความดันที่ผิวในแนวสัมผัส
$\mathbf{\Phi}$	ฟังก์ชันการเลื่อนไถล
$\mathbf{g}_T^e$	การเคลื่อนตัวสัมพัทธ์บนผิววัตถุที่อยู่ในช่วงยืดหยุ่น
$\mathbf{g}_T^s$	การเคลื่อนตัวสัมพัทธ์บนผิววัตถุที่อยู่ในช่วงเลื่อนไถล
ε_N	พีนอลทีพารามิเตอร์ในแนวตั้งฉาก
ε_T	พีนอลทีพารามิเตอร์ในแนวสัมผัส
λ_N	ลากรางจ์มัลติไพลเออร์ในแนวตั้งฉาก
$\boldsymbol{\lambda}_T$	ลากรางจ์มัลติไพลเออร์ในแนวสัมผัส

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

T_N	ค่าแรงในแนวตั้งฉากกับผิว
T_T	ค่าแรงในแนวสัมผัสกับผิว
E_P	แนวเขตขยาย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

รากฟันเทียม (osseointegrated implant) เป็นอุปกรณ์ที่ใช้กับผู้ป่วยที่ไม่มีฟัน โดยอาศัยการยึดติดระหว่างรากฟันเทียมกับกระดูกที่มีชีวิต ซึ่งรากฟันเทียมมีรูปร่างได้หลายแบบ เช่น ทรงกระบอกผิวเรียบ หรือทรงกระบอกที่มีฟันเกลียว เป็นต้น พบว่าปัญหาที่สำคัญ คือ การละลายตัวของสันกระดูก (crestral bone) บริเวณรอบรากฟันเทียม เนื่องจากความเค้นเชิงกล และการติดเชื้อจากแบคทีเรียภายในช่องปาก ทำให้ประสิทธิภาพในการยึดติดของรากฟันเทียมลดลง อย่างไรก็ตามประสิทธิภาพในการยึดติดของรากฟันเทียมยังขึ้นอยู่กับคุณภาพของกระดูกในบริเวณที่ทำการฝังรากฟันเทียม และคุณสมบัติความเข้ากันกับเนื้อเยื่อ (biocompatibility) ของวัสดุที่นำมาทำเป็นรากฟันเทียมด้วย

ดังนั้นการกระจายความเค้นของรากฟันเทียมไปยังกระดูกรอบรากฟันเทียมมีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับการออกแบบรูปร่างลักษณะของรากฟันเทียม เพื่อทำให้การกระจายความเค้นเกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอ รากฟันเทียมส่วนใหญ่ถูกออกแบบให้มีลักษณะคล้ายกับสกรู ซึ่งมีเกลียวช่วยเพิ่มพื้นที่ในการยึดเกาะและกระจายแรง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้โดยแพร่หลายในทางทันตกรรมประดิษฐ์ เพื่อออกแบบและปรับปรุงรูปร่าง รวมถึงการเลือกใช้ รูปร่างของรากฟันเทียมให้ได้เหมาะสมที่สุด โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแสดงผลการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นระหว่างการสัมผัสกันของรากฟันเทียมกับกระดูกได้เป็นอย่างดี ความยากที่สำคัญสำหรับการแสดงผลทางพฤติกรรมเชิงกลของรากฟันเทียม ก็คือ การจำลองเยื่อกระดูกที่ใช้ในการประสานระหว่างกระดูกกับรากฟันเทียมและผลตอบสนองต่อแรงที่กระทำ เนื่องจากความซับซ้อนทางลักษณะเชิงกลของกระดูกและปฏิกิริยาระหว่างกระดูกกับรากฟันเทียม นำไปเป็นหลักเกณฑ์ของการวิเคราะห์ และมีการตั้งสมมติฐานบางอย่างเพื่อทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ โดยเฉพาะสมมติฐานของการเชื่อมต่อระหว่างกระดูกกับรากฟันเทียมมีความสำคัญต่อความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ ทั่วไปแล้วจะสมมติให้เป็นการยึดติดแบบสมบูรณ์ ในการจำลองแบบวิเคราะห์ ซึ่งเป็นกรณีที่เกิดขึ้นน้อยในความเป็นจริง ดังนั้นการสัมผัสแบบไม่สมบูรณ์ ที่มีผลต่อการส่งผ่านภาระจากรากฟันเทียมสู่กระดูกที่รองรับจึงมีความจำเป็นสำหรับการจำลองแบบวิเคราะห์ ลักษณะพฤติกรรมเชิงกลโดยทั่วไปของหน้าสัมผัสระหว่างกระดูกกับรากฟันเทียมเปรียบได้กับวัสดุที่มีความทนต่อ

ความเค้นดึงได้ต่ำมาก เมื่อเทียบกับความทนต่อความเค้นกด ด้วยพฤติกรรมเช่นนี้ ปัญหาแบบการสัมผัส (contact problem) จึงมีความเหมาะสมในการนำมาประยุกต์ใช้สำหรับการวิเคราะห์แบบจำลองของกระดูกกับรากฟันเทียม

วิทยานิพนธ์ที่นำเสนอนี้เป็นการศึกษาลักษณะการกระจายความเค้นของรากฟันเทียมที่เกิดขึ้นกับกระดูกขากรรไกรในบริเวณที่กระทำการฝังรากฟันเทียมโดยคิดเป็นปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน พิจารณาเป็นปัญหาแบบความเครียดในระนาบ (plane strain) ประกอบกับการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีการแปรผัน (variational approach) และประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา จากนั้นเพื่อให้ได้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงได้ประยุกต์เข้ากับเทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพทางการคำนวณสูงสุดโดยอิงกับพื้นฐานความเข้าใจกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ว่าบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูง ควรมีจำนวนเอลิเมนต์มากกว่าบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยน้อย วิธีนี้ยังช่วยให้ประหยัดเวลาในการคำนวณมากขึ้นสำหรับการคำนวณครั้งใหม่ที่มีการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์แล้ว เนื่องจากจำนวนเอลิเมนต์ที่ทำการคำนวณใหม่จะมีจำนวนใกล้เคียงกับจำนวนเอลิเมนต์ครั้งก่อน ในขณะที่ให้ค่าผลเฉลยถูกต้องมากขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1) ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการแปรผันที่สอดคล้องกับปัญหาของของแข็ง

2) ประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกัน

3) ศึกษาอิทธิพลของรูปร่างของรากฟันเทียมและชนิดของเกลียวที่แตกต่างกันเพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปใช้สำหรับการออกแบบรากฟันเทียมที่มีการกระจายความเค้นได้อย่างเหมาะสม

4) ปรับปรุงผลการคำนวณโดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนของขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลการคำนวณ

5) สรุปผลพร้อมกับเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณของรูปร่างรากฟันเทียมในแบบต่างๆ

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1) ศึกษาและประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาแบบความเครียดในระนาบ (plane strain) โดยใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ เพื่อหาระยะการเคลื่อนตัว (displacement) ของแต่ละจุดต่อ

2) นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาทำการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งอย่างง่ายที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เพื่อทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม

3) นำระเบียบวิธีการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ มาประยุกต์เข้ากับปัญหาที่ทำการวิเคราะห์

4) นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาวิเคราะห์กับปัญหาของรากฟันเทียม เพื่อหาผลของการกระจายความเค้นของกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียม

5) ทำการเปรียบเทียบลักษณะเกลียวของรากฟันเทียมในแบบต่างๆ และสรุปผล

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1) รวบรวมข้อมูลของรากฟันเทียม พร้อมกับศึกษาขอบเขตและเงื่อนไขของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์

2) ศึกษาการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับการวิเคราะห์การกระจายความเค้นของรากฟันเทียม

3) ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหาด้วยวิธีการแปรผัน

4) ประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้

5) ทดสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

6) ทำการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

7) ทำการคำนวณผลเฉลยของการกระจายค่าความเค้นในกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียม

8) เขียนวิทยานิพนธ์

9) ตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพนธ์

10) สอบวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ทำให้ทราบถึงอิทธิพลของลักษณะเกลียว และรูปร่างของรากฟันเทียมที่มีผลต่อการกระจายความเค้นในกระดูก

2) สามารถนำไปออกแบบลักษณะรูปร่างของรากฟันเทียมที่เหมาะสมและเป็นข้อมูลในการพิจารณาการเลือกใช้รากฟันเทียมของทันตแพทย์ได้

3) นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น ประกอบกับการประยุกต์การปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ทำให้ช่วยลดจำนวนหน่วยความจำ และเวลาที่ใช้สำหรับคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้มากขึ้น

1.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในอดีต

S. K. Chan และ I. S. Tuba [1]: ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการสัมผัสด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยที่มีตัวไม่รู้ค่าคือค่าการเคลื่อนตัวและแรงเนื่องจากการสัมผัส เพื่อทำให้สมการที่ทำการวิเคราะห์มีความสมดุล ค่าแรงนี้ได้มาจากการสุ่มค่าแล้วทำการคำนวณซ้ำจนกว่าค่าการเคลื่อนตัวจะอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้

Heegaard และ Curnier [2]: ใช้อสมการแปรผัน โดยประยุกต์วิธีซับดิฟเฟอเรนเชียล (subdifferential approach) เข้ากับปัญหาการสัมผัสแบบไร้ความเสียดทาน ซึ่งเป็นวิธีการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดภายใต้เงื่อนไขบังคับที่ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับเงื่อนไขบังคับของปัญหาการสัมผัส แล้วใช้วิธีนิวตัน (generalized Newton method) ทำการหาผลเฉลยโดยทำการปรับค่าการเคลื่อนตัว และค่าของแรงปฏิกิริยาจากการสัมผัสไปพร้อมๆ กันในแต่ละรอบของการทำซ้ำ

Alart และ Curnier [3]: เสนอว่าปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทานมีลักษณะเป็นฟังก์ชัน ที่ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ เนื่องจากพจน์พลังงานของความเสียดทานที่ฝังตัวอยู่ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (objective function) โดยการเพิ่มพจน์พลังงานศักย์เทียมสำหรับกฎของความเสียดทานในรูปของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น พร้อมกับใช้วิธีนิวตันทำการแก้ปัญหาความไม่ราบเรียบแต่ต่อเนื่องของกฎความเสียดทานของคูลอมบ์ (Coulomb's friction law) เพื่อทำการปรับค่าการเคลื่อนตัวและแรงปฏิกิริยาไปพร้อมๆกัน

Refaat และ Maguid [4]: เสนอกระบวนการแก้ปัญหาการสัมผัสทั้งแบบไร้ความเสียดทานและมีความเสียดทาน ในรูปแบบของอสมการแปรผัน ซึ่งกระบวนการที่ใช้จะแตกต่างไปจากวิธีมาตรฐานของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด แต่อยู่บนพื้นฐานของเทคนิคกำหนดการเชิงคณิตศาสตร์และหลีกเลี่ยงการใช้วิธีพีนอลที (penalty method) ในการหาค่าแรงเสียดทาน

Bathe และ Chaudhary [5]: เสนอกระบวนการหาผลเฉลยกับปัญหาการสัมผัสในระนาบและสมมาตรรอบแกน แบบคิดความเสียดทาน โดยใช้วิธีลากรางจ์มัลติไพลเออร์ช่วยในการเพิ่มพจน์พลังงานจากการสัมผัส แล้วนำค่าความผิดพลาดที่เกิดจากผลต่างของแรงภายนอกและแรงภายในของจุดที่เกิดการสัมผัส มาแปลงเป็นแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้น และใช้ค่าของแรงที่เกิดขึ้นนี้นำมาเป็นตัวพิจารณาว่า จุดที่สัมผัสกันจะเป็นแบบยึดติด (sticking) หรือแบบเลื่อนไถล (sliding)

Giannakopoulos [6]: ได้นำวิธี รีเทิร์นแมพพิง (return mapping) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้สำหรับหาผลเฉลยของวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบไม่เชิงเส้น มาประยุกต์เข้ากับปัญหาการสัมผัสแบบมีความเสียดทานเพื่อหาแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นในช่วงการเปลี่ยนแปลงจากการสัมผัสแบบยึดติดไปเป็นการสัมผัสแบบเลื่อนไถล โดยใช้วิธีพีนอลที เพิ่มพจน์ของการสัมผัสเข้ากับสมการหลัก

Simo และ Wriggers [7]: จัดการกับปัญหาการสัมผัสแบบไร้ความเสียดทานในรูปแบบของสมการแปรผัน ภายใต้เงื่อนไขบังคับของการสัมผัสแบบด้านเดียว (unilateral contact constraints) แล้วนำไปเพิ่มเข้ากับสมการแปรผันด้วยวิธี เพอร์เทิร์บลากรางเจียน (perturbed Lagrangian) โดยวิธีนี้มีพื้นฐานจากลากรางจ์มัลติไพลเออร์ซึ่งสามารถอธิบายความแตกต่างทางด้านกายภาพได้ว่า วิธีลากรางจ์มัลติไพลเออร์จะไม่ยอมให้จุดของวัตถุสัมผัสมีการเหลื่อมล้ำเข้าไปในวัตถุเป้าหมาย แต่วิธีเพอร์เทิร์บลากรางเจียนจะยอมให้วัตถุเกิดการเหลื่อมล้ำได้แต่ต้องอยู่ภายในช่วงที่ยอมรับได้ (tolerance) หรือเรียกอีกอย่างว่า เพอร์เทิร์บพารามิเตอร์ (perturbed parameter)

Wriggers ,Vu Van และ Stein [8]: ได้แสดงสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการสัมผัสและการกระแทกแบบมีความเสียดทาน โดยใช้วิธีพีนอลที เพิ่มพจน์ของการสัมผัสเข้ากับสมการหลัก และใช้กฎของความเสียดทานแบบใหม่ที่จำลองพฤติกรรมของความเสียดทานจากการทดลอง พร้อมกับแสดงสมการที่ได้จากการแปลงเชิงเส้น (linearization) เพื่อการทำซ้ำแบบนิวตัน รวมทั้งแสดงขั้นตอนการคำนวณแบบรีเทิร์นแมพพิงไว้อย่างชัดเจน

Simo และ Laursen [9]: คิดระบบขั้นตอนการคำนวณของปัญหาการสัมผัสแบบมีความเสียดทาน ด้วยสมการแปรผันโดยใช้วิธีออกเมนเตดลากรางเจียน ทำการปรับเงื่อนไขบังคับของการสัมผัส และกฎความเสียดทานของคูลอมบ์เข้ากับสมการแปรผัน เทคนิคที่ใช้การคำนวณนั้นจะเหมือนกับวิธีพีนอลที แต่สามารถแก้ปัญหาของการไม่ลู่เข้าสู่คำตอบได้ และเป็นวิธีที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เลือก เพื่อนำมาทำการวิเคราะห์ปัญหาต่อไป

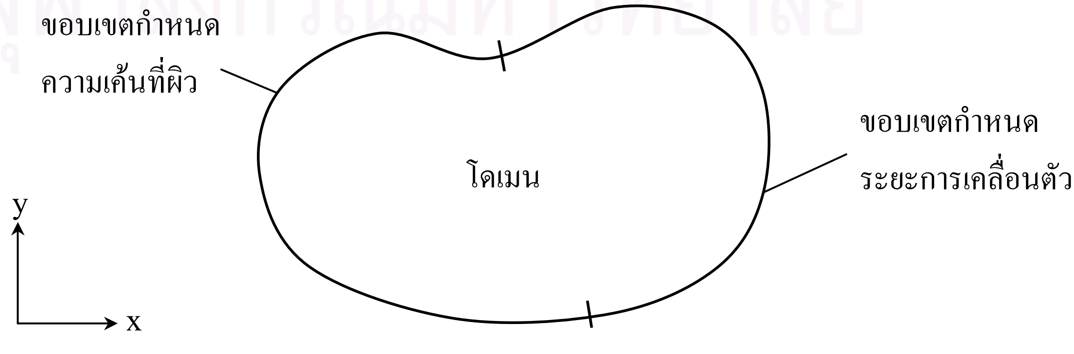
บทที่ 2

กลศาสตร์ของแข็งและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

บทนี้อธิบายการวิเคราะห์ปัญหากลศาสตร์ของแข็งแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น มีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกันและมีคุณสมบัติเท่ากันทุกทิศทางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งประกอบกับสมการเงื่อนไขขอบเขตและสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดแบบความเครียดในระนาบ (plane strain) จากนั้นทำการลดรูปสมการเหล่านี้ให้อยู่ในรูปแบบของสมการการแปรผัน หัวข้อที่ 2.1 แสดงรูปแบบสมการพื้นฐานของปัญหาวัสดุที่มีการเคลื่อนตัวน้อย ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเคลื่อนตัวเป็นแบบเชิงเส้น หัวข้อที่ 2.2 กล่าวถึงการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการการแปรผัน และหัวข้อที่ 2.3 เปลี่ยนสมการการแปรผันเดิมไปเป็นสมการการแปรผันของการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น ซึ่งเป็นรูปแบบของสมการที่ใช้สำหรับการหาผลคำตอบด้วยการทำซ้ำ พร้อมกับเพิ่มพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเคลื่อนตัวเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับการแก้ปัญหาการสัมผัสด้วยระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ต่อไปในบทที่ 3

2.1 กลศาสตร์ของแข็ง

จุดใดๆ ที่อยู่ในเนื้อวัตถุที่เรียกว่าโดเมนของปัญหาสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์หรือกฎความเป็นจริงที่เกิดจากหลักการสมดุลแรง เมื่อมีสิ่งรบกวนจากรอบนอกของโดเมนหรือขอบเขตกำหนด ระบบจะทำการปรับสมดุลและเกิดเป็นความเค้นภายในโดเมน ซึ่งขอบเขตของปัญหาของของแข็งสามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือ ขอบเขตที่กำหนดจากระยะการเคลื่อนตัว และขอบเขตกำหนดจากความเค้นที่ผิวดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 โดเมนและขอบเขตสำหรับปัญหาของแข็งทั่วไป

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาสองมิติของของแข็งแบบสถิตโดยทั่วไป คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{2.1}$$

โดย $i, j = 1, 2$ แทนทิศทางในแนว x และ y ตามลำดับ

σ_{xx}, σ_{yy} แทนความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ

τ_{xy} แทนความเค้นเฉือน

f_i แทนแรงต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่เกิดเนื่องจากตัววัตถุเอง

2.1.2 สมการเงื่อนไขขอบเขต

ในการกำหนดปัญหานั้น สิ่งสำคัญที่ทำให้เกิดความสมบูรณ์ของปัญหา คือ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาตรงบริเวณขอบรอบนอกของวัตถุ แบ่งออกได้เป็นสองลักษณะ คือ การกำหนดระยะการเคลื่อนตัวบนผิววัตถุ (displacement boundary condition)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \qquad \text{บนขอบเขตกำหนดระยะการเคลื่อนตัว} \tag{2.2}$$

และการกำหนดเงื่อนไขความเค้นที่ผิว (surface traction boundary condition) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเค้นย่อยต่างๆได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad t_i = \sigma_{ij} \cdot \bar{n}_j \quad \text{บนขอบเขตกำหนดความเค้นที่ผิว} \tag{2.3}$$

โดย t_x, t_y แทนความเค้นที่ผิวในทิศแกน x ,y ตามลำดับ

$\bar{n}_x, \bar{n}_y$ เป็นทิศทางโคไซน์ของเวคเตอร์

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{n}_x \hat{\mathbf{i}} + \bar{n}_y \hat{\mathbf{j}} \tag{2.4}$$

โดย $\bar{\mathbf{n}}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิว

2.1.3 สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด สำหรับกรณีของความเครียดในระนาบและวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น แสดงได้ดังนี้

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl} \tag{2.5}$$

สมการ (2.5) ในรูปแบบของเมตริกซ์ คือ

$$\{\sigma\} = [C]\{e\} \tag{2.6}$$

โดยที่

$$\{\sigma\} = \lfloor \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \rfloor^T \tag{2.7}$$

$$\{e\} = \lfloor e_{xx} \quad e_{yy} \quad \gamma_{xy} \rfloor^T \tag{2.8}$$

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

2.1.4 สมการการแปรผัน

สำหรับการแก้ปัญหาของแข็งทั่วไปในทางคำนวณเชิงตัวเลขจะเริ่มจากสมการที่อยู่ในรูปแบบการแปรผันของสมการเบื้องต้น ที่สามารถเปลี่ยนไปเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยตรง การสร้างสมการการแปรผันสำหรับปัญหาของของแข็งสามารถทำได้โดยใช้หลักการพลังงานเสมือน กล่าวคือ ในขณะที่ระบบอยู่ในสภาวะสมดุล แล้วมีสิ่งรบกวนระบบซึ่งในที่นี้คือค่าการเคลื่อนตัวแบบต่อเนื่องใดๆ $\{\delta u\}$ โดยเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

$$\{\delta u\} = \delta u_i = 0 \qquad \text{บนขอบเขตกำหนดระยะการเคลื่อนตัว} \tag{2.10}$$

และ

$$(\sigma_{ij},_j + f_i)\delta u_i = 0 \tag{2.11}$$

ต่อจากนั้น ทำการอินทิเกรตตลอดปริมาตร

$$\int_V (\sigma_{ij},_j + f_i)\delta u_i dV = 0 \tag{2.12}$$

ซึ่งเรียก δu_i ว่า การเคลื่อนตัวเสมือน (virtual displacement) และเนื่องจาก δu_i เป็นการเคลื่อนตัวใดๆที่เกิดขึ้น ดังนั้นสมการ (2.12) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ ค่าในวงเล็บนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ ที่ตรงกับสมการ (2.1) จากกฎการหาค่าอนุพันธ์ของผลคูณฟังก์ชัน

$$(\sigma_{ij}\delta u_i),_j = \sigma_{ij},_j \delta u_i + \sigma_{ij}\delta u_i,_j \tag{2.13}$$

ทำให้สมการ (2.12) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\int_V [(\sigma_{ij}\delta u_i),_j - \sigma_{ij}\delta u_i,_j + f_i \delta u_i]\, dV = 0 \tag{2.14}$$

แล้วใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem)

$$\int_V (\sigma_{ij}\delta u_i),_j dV = \int_S (\sigma_{ij}\delta u_i)\overline{n}_j dS \tag{2.15}$$

เขียนสมการ (2.14) เป็น

$$\int_V (-\sigma_{ij}\delta u_i,_j + f_i \delta u_i) dV + \int_S (\sigma_{ij}\delta u_i)\overline{n}_j dS = 0 \tag{2.16}$$

จากสมการ (2.3)

$$\int_V (-\sigma_{ij}\delta u_i,_j + f_i \delta u_i) dV + \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \tag{2.17}$$

เนื่องจากความเป็นสมมาตรของเทนเซอร์ความเค้น $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ จะได้ว่า

$$\sigma_{ij}\delta u_i,_j = \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}(\delta u_i,_j + \delta u_j,_i)\right] = \sigma_{ij}\delta e_{ij} \tag{2.18}$$

ดังนั้นสมการ (2.17) เขียนใหม่เป็น

$$\int_V \sigma_{ij}\delta e_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS \tag{2.19}$$

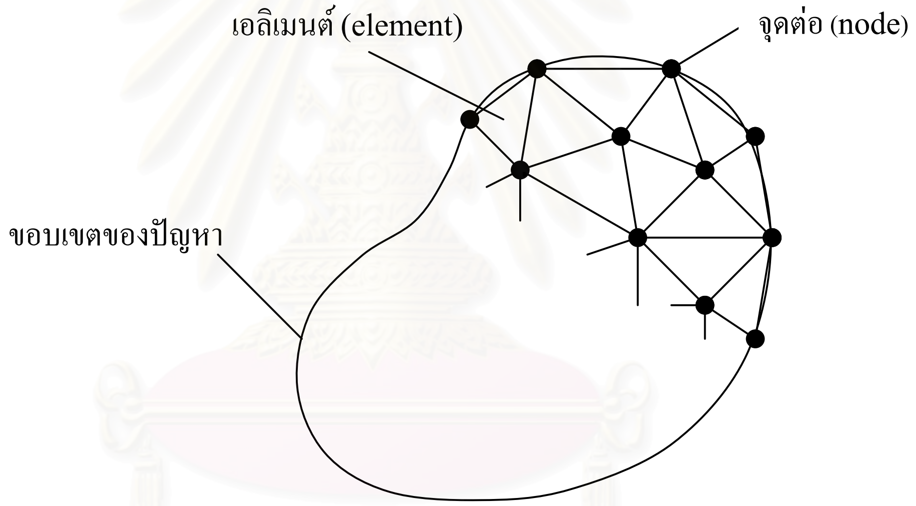
สังเกตว่าสมการ (2.19) เป็นสมการที่ได้จาก หลักการของพลังงานเสมือน โดยอาศัยการเคลื่อนตัวเสมือนทำการเปลี่ยนรูปของสมการเชิงอนุพันธ์กับสมการเงื่อนไขขอบเขต หรือเรียกอีกอย่างได้ว่า สมการการแปรผัน (variational equation)

2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2.2.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยขั้นตอนหลัก 5 ขั้นตอน [10] ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาที่ต้องการจะหาผลเฉลยออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.2

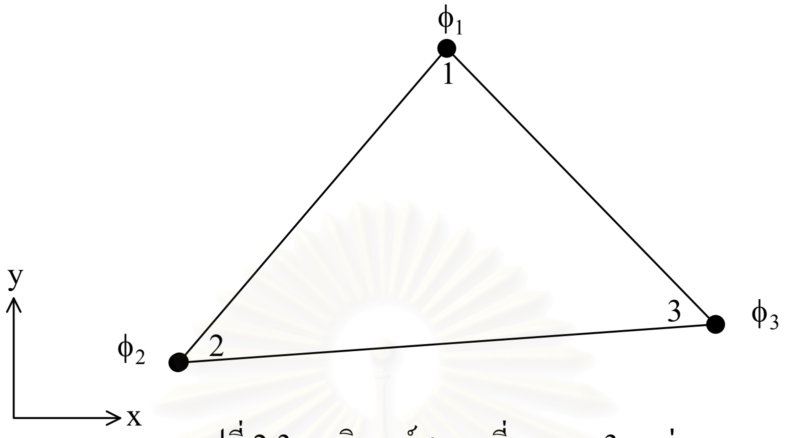


รูปที่ 2.2 แสดงการแบ่งขอบเขตของปัญหาให้เป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชั่นประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation function) ซึ่งเป็นรูปแบบการประมาณของผลเฉลยเหนือขอบเขตที่ทำการแบ่งในขั้นตอนที่ 1 ซึ่งการประมาณนี้จะมีอยู่หลายรูปแบบด้วยกัน แต่ตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นเป็นการประมาณแบบเชิงเส้นโดยใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม ที่ประกอบด้วยสามจุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 2.3 โดยจุดต่อแต่ละจุดเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknown) สมมติให้ เป็น ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ดังนั้นลักษณะการกระจายของคำตอบบนเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \tag{2.20}$$

โดย $N_i(x, y)$; $i = 1, 2, 3$ คือฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์



รูปที่ 2.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ

สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\phi(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = N_i \phi_i \tag{2.21}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> สร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equation) ตัวอย่างเช่นสมการเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังแสดงในรูปที่ 2.3 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \tag{2.22}$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$[K]_e \{\Phi\}_e = \{F\}_e \tag{2.23}$$

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (2.22) สามารถทำได้จากสมการการแปรผัน

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> นำสมการที่ได้ของแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบกัน ทำให้เกิดระบบสมการในรูปแบบดังนี้

$$\Sigma(\text{element equation}) = [K]_{sys} \{\Phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \tag{2.24}$$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ลงในสมการแล้วแก้สมการเพื่อหาค่าของ $\{\Phi\}_{sys}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้าง หรืออาจจะเป็นค่าความเร็วของ ของไหลหากเป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหล

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> เมื่อทำการหาค่าที่จุดต่อออกมาได้แล้ว ก็สามารถหาค่าอื่นๆที่ต้องการรู้ต่อไปได้ เช่น ค่าความเครียด และค่าความเค้นทั้งหมดได้

2.2.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของของแข็งแบบเชิงเส้น

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาสองมิติ ในที่นี้เลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ โดยมีลักษณะการกระจายค่าการเคลื่อนตัวในแต่ละทิศทางเป็นแบบเชิงเส้น ดังรูปที่ 2.4 และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$u(x,y) = N_i u_i \tag{2.25}$$

$$v(x,y) = N_i v_i \tag{2.26}$$

เขียนอยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{\bar{u}(x,y)\} = [u \quad v]^T \tag{2.27}$$

$$\{\bar{u}(x,y)\} = [N]\{u\} \tag{2.28}$$

$$\{u\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T \tag{2.29}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

โดย $[N]$ แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบเชิงเส้น

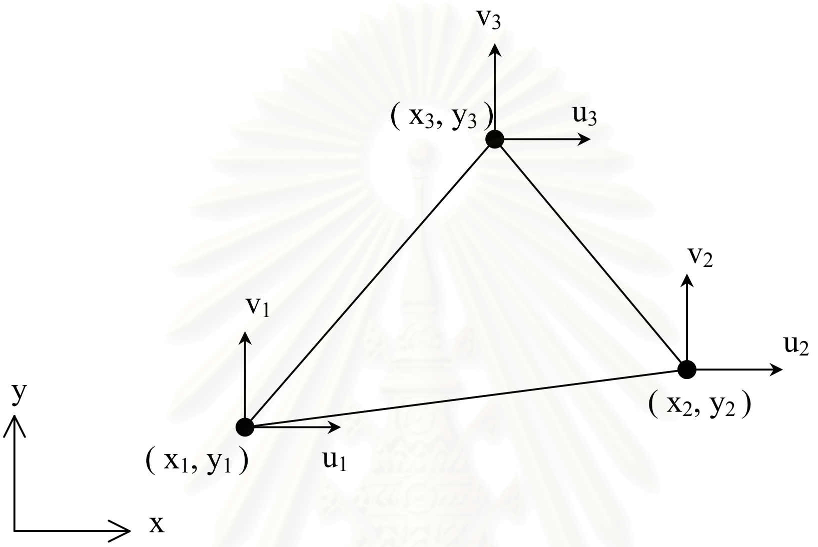
$\{u\}$ แทนเวคเตอร์การเคลื่อนตัวของจุดต่อ

ฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชั่นพิกัดของพื้นที่ในรูปแบบดังนี้

$$N_i = L_i \quad ; \quad i = 1,2,3 \tag{2.31}$$

ซึ่ง L_i เป็นฟังก์ชั่นพิกัดของพื้นที่ โดยมีสมการดังนี้

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad ; \quad i = 1,2,3 \tag{2.32}$$



รูปที่ 2.4 แสดงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม คำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right] \tag{2.33}$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 = y_2 - y_3 & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 = y_1 - y_2 & c_3 = x_2 - x_1 \end{array} \tag{2.34}$$

จากหัวข้อที่ 2.1.4 โดยละพจน์พลังงานเนื่องจากแรงของตัววัตถุ f_i กล่าวได้ว่าสมการการแปรผัน (2.19) เป็นสมการความสมดุลระหว่างพลังงานเสมือนจากภายนอก δW_R กับพลังงานเสมือนจากภายใน δW_S ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการสัมผัสได้ โดยการพิจารณาว่าพจน์ของพลังงานเสมือนจากภายนอกแบ่งออกเป็นสองชนิด คือ พลังงานเสมือนจากเงื่อนไขความเค้นที่ผิว และพลังงานเสมือนจากความเค้นเนื่องจากการสัมผัสซึ่งจะกล่าวไว้ในบทที่ 3 ดังนั้นจากสมการแปรผัน (2.19) เขียนใหม่ได้ ดังนี้

$$\delta W_S - \delta W_R = \int_V \sigma_{ij}\delta e_{ij} dV - \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \tag{2.35}$$

เวคเตอร์ของความเครียด ดังที่แสดงไว้ในสมการ (2.8) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าเคลื่อนตัวเป็น

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\delta e\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \delta u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \delta u}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta v}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

จากนั้นสามารถนำสมการ (2.35) หรือเรียกว่าพลังงานภายในจากการเสียรูปของวัตถุ δW_S เขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_V \{\delta e\}^T [C] \{e\} dV \Rightarrow \{\delta u\}^T [K_L] \{u\} = \{\delta u\}^T \left(\int_V [B_L]^T [C][B_L] dV \right) \{u\} \tag{2.37}$$

$[B_L]$ แทนเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความแครียดและการเคลื่อนตัว และค่า $\{\delta e\} = [B_L]\{\delta u\}$ โดยที่

$$\{\delta u\} = \lfloor \delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta u_3 \quad \delta v_3 \rfloor^T \tag{2.38}$$

$$\{u\} = \lfloor u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rfloor^T \tag{2.39}$$

โดยที่

$[K_L]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของวัสดุแบบเชิงเส้น

$$[B_L] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

ต่อมาพิจารณาพลังงานเสมือนเนื่องจากภาระหรือเรียกว่าพลังงานภายนอก δW_R ในที่นี้จะพิจารณาถึงความเค้นที่ขอบเอลิเมนต์

$$\delta W_R = \{\delta u\}^T \left(\int_0^l \begin{bmatrix} 1-\frac{s}{l} & \frac{s}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} ds \right) = \{\delta u\}^T \begin{bmatrix} \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \{\delta u\}^T \{R\} \tag{2.41}$$

ดังนั้นสมการสำหรับการคำนวณของปัญหาของแข็งแบบเชิงเส้นในแต่ละเอลิเมนต์เขียนได้เป็น

$$[K_L]\{u\} = \{R\} \tag{2.42}$$

2.3 วิธีการหาคำตอบโดยการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น

การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยทั่วไป กล่าวได้ว่าเป็นการหาสภาวะสมดุลของวัตถุที่กระทำจากภาระ โดยที่เงื่อนไขของการสมดุลของระบบทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถเขียนได้เป็น

$$^t\{R\} - {}^t[K_L]\{u\} = {}^t\{R\} - {}^t\{F\} = 0 \tag{2.43}$$

โดยที่

$^t\{R\}$ แทน แรงภายนอกที่กระทำบนจุดต่อของวัตถุที่เวลา t

$^t\{F\}$ แทน แรงภายในหรือแรงบนจุดต่ออันเนื่องมาจากความเค้นบนเอลิเมนต์ (element stress) ที่เวลา t

สำหรับแนวคิดพื้นฐานของการหาผลเฉลยโดยการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น[11] ก็คือการประมาณค่าความเค้นและความเครียด เนื่องจากระยะการเคลื่อนตัวของจุดทุกๆจุดบนวัตถุ ณ เวลาปัจจุบัน เพื่อหาความเค้นและความเครียดที่ทำให้ตัววัตถุเกิดความสมดุลของระบบในเวลาถัดไป ซึ่งความสมดุลของระบบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ได้แสดงไว้ดังสมการ(2.43) และสำหรับในเชิงการคำนวณแล้วค่าความสมดุลจะไม่สามารถเท่ากับศูนย์ได้ แต่ต้องมีค่าอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้หรือใกล้เคียงศูนย์ ดังนั้นการคำนวณในแต่ละขั้นเวลาจะต้องใช้วิธีการทำซ้ำเพื่อหาค่าการเคลื่อนตัวที่เหมาะสมที่สุด โดยเริ่มจากพิจารณาสมการสมดุลที่เวลา $t+\Delta t$

$$^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\} = 0 \tag{2.44}$$

กำหนดว่า $^{t+\Delta t}\{R\}$ เป็นอิสระต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุ แล้วพิจารณาพจน์ของ $^{t+\Delta t}\{F\}$

สามารถทำการประมาณเชิงเส้นเขียนใหม่ได้ว่า

$$ {}^{t+\Delta t}\{F\} = {}^{t}\{F\} + \{\Delta F\} \tag{2.45} $$

โดยที่ $\{\Delta F\}$ แทนเวคเตอร์ของแรงบนจุดต่อที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของความเค้นที่เกิดขึ้นภายในเอลิเมนต์ จากเวลา t ไปยัง $t + \Delta t$ ซึ่งเวคเตอร์ $\{\Delta F\}$ นี้สามารถประมาณค่าโดยการใช้เมตริกซ์แข็งเกร็ง (tangent stiffness matrix ; ${}^{t}[K]$) เป็นผลมาจากเงื่อนไขของรูปร่างและวัสดุ ณ เวลา t ด้วยสมการ หรือกล่าวได้ว่าเป็นการแปลงเชิงเส้นของพจน์ ${}^{t+\Delta t}\{F\}$ โดยที่

$$ \{\Delta F\} = {}^{t}[K]\{\Delta u\} \tag{2.46} $$

โดย $\{\Delta u\}$ เป็นเวคเตอร์การเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นบนจุดต่อ และ

$$ {}^{t}[K] = \frac{\partial\,{}^{t}\{F\}}{\partial\,{}^{t}\{u\}} \tag{2.47} $$

จากสมการ (2.44) ถึง (2.47) จะได้ว่า

$$ {}^{t}[K]\{\Delta u\} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t}\{F\} \tag{2.48} $$

แล้วทำการคำนวณหาค่าเวคเตอร์ Δu จากนั้นนำไปประมาณค่าของระยะเคลื่อนตัวที่เวลา $t + \Delta t$

$$ {}^{t+\Delta t}u = {}^{t}u + \Delta u \tag{2.49} $$

จากสมการดังกล่าวจะเห็นว่าค่าการเคลื่อนตัวของจุดต่อ ที่เวลา $t + \Delta t$ ที่ได้ จากสมการ (2.49) เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น เนื่องจากการใช้สมการ (2.45)

ดังนั้นจะเห็นว่าค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นนี้ จะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับขนาดของช่วงเวลาหรือขนาดของลำดับขั้นภาระ (load step sizes) โดยทั่วไปแล้วในแต่ละขั้นเวลาหรือลำดับขั้นภาระจะต้องทำการคำนวณซ้ำจนกว่าจะได้ค่าความผิดพลาดอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้

วิธีการทำซ้ำที่นิยมใช้ทั่วไปในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ วิธีนิวตัน-ราฟสัน[12] ซึ่งผลจากสมการ (2.48) และ (2.49) สามารถนำมาใช้ในการคำนวณวิธีการทำซ้ำแบบ นิวตัน-ราฟสันได้ดังนี้

$$
\begin{gathered}
{}^{t+\Delta t}[K]^{(i-1)}\{\Delta u\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{R\}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(i-1)} \\
{}^{t+\Delta t}\{u\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{u\}^{(i-1)} + \{\Delta u\}
\end{gathered}
\tag{2.50}
$$

โดย i คือรอบการทำซ้ำครั้งที่ i และเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$
{}^{t+\Delta t}\{u\}^{(0)} = {}^{t}\{u\} \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}[K]^{(0)} = {}^{t}[K] \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(0)} = {}^{t}\{F\}
\tag{2.51}
$$

หลังจากการคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวได้ในแต่ละครั้งแล้ว จะต้องนำค่าการเคลื่อนตัวล่าสุดบนจุดต่อมาทำการปรับรูปร่างของวัตถุ พร้อมกับคำนวณหาแรงบนจุดต่ออันเนื่องจากความเค้นบนเอลิเมนต์และเมตริกซ์แข็งเกร็งในแต่ละรอบการทำซ้ำ เพื่อทำการคำนวณรอบต่อไปจนค่า $\{\Delta u\}^{(i)}$ มีค่าน้อยอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ในแต่ละขั้นภาระ

2.3.1 สมการการแปรผันในรูปแบบของการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น

สมการของการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้นจะเปรียบได้กับเป็นการแปลงเชิงเส้นของพจน์พลังงานภายใน δW_S ส่วนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับพลังงานภายนอก δW_R จะสมมติว่าเป็นอิสระต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุ จากสมการ (2.19) และละพจน์ที่เกี่ยวข้องกับแรงเนื่องจากตัววัตถุเอง คือ

$$
{}^{t+\Delta t}\delta W_S - {}^{t+\Delta t}\delta W_R = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\{\delta e + \delta\eta\}^T \, {}^{t+\Delta t}\{\sigma\}\, dV - \int_{{}^{t}S} \{\delta u\}^T \{t\}\, dS = 0
\tag{2.52}
$$

เนื่องจากวิธีการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้นจะอ้างอิงถึงรูปร่างปัจจุบันในรูปแบบลากรางเจียน (updated Lagrangian formulation) ดังนั้นความเค้นที่ใช้อ้างอิงรูปร่างปัจจุบันก็คือความเค้นคอว์ชี (Cauchy stress) ส่วนความเครียดที่อ้างอิงรูปร่างปัจจุบันจะเป็นความเครียดอัลมานซี (Almansi strain) สามารถแยกได้เป็นสองพจน์คือพจน์ที่เป็นเชิงเส้นกับพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นดังสมการ (2.52) ซึ่งความเครียดจะได้มาจากการเปลี่ยนแปลงของระยะการเคลื่อนตัวในแต่ละรอบการทำซ้ำ Δu

$$
\{\Delta e\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Delta u}{\partial y} + \dfrac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\delta e\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \delta u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \delta u}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta v}{\partial x} \end{Bmatrix}
\tag{2.53}
$$

$$\{\Delta\eta\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta v}{\partial x}\right)^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta v}{\partial y}\right)^2\right) \\ \frac{\partial\Delta u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta v}{\partial y} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\{\delta\eta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\Delta u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta v}{\partial x} \\ \frac{\partial\Delta u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Delta v}{\partial y}\cdot\frac{\partial\delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial\Delta u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta v}{\partial y} + \frac{\partial\delta u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta v}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

ทำการกระจายเทอมของความเค้นที่เวลา $t+\Delta t$

$$^{t+\Delta t}\{\sigma\} = {}^{t}\{\sigma\} + \{\Delta\sigma\} \tag{2.55}$$

โดยที่ $\{\Delta\sigma\}$ ประมาณค่าได้เป็น

$$\{\Delta\sigma\} = [C]\{\Delta e\} \tag{2.56}$$

สามารถเขียน $^{t+\Delta t}\delta W_S$ ใหม่ โดยที่ละทิ้งพจน์อันดับสูงออก

$$^{t+\Delta t}\delta W_S = \underbrace{\int_{^tV}\{\delta e\}^{T}\,{}^{t}\{\sigma\}\,dV + \int_{^tV}\{\delta\eta\}^{T}\,{}^{t}\{\sigma\}\,dV}_{^t\delta W_S} + \underbrace{\int_{^tV}\{\delta e\}^{T}[\mathbf{C}]\{\Delta e\}dV}_{D^t\delta W_S\cdot\Delta\mathbf{u}} \tag{2.57}$$

โดย $D\delta^t W_S\cdot\Delta u$ เป็นพจน์จากการแปลงเชิงเส้น (linearizeation)ของ $\delta^t W_S$ ในทิศทางของ $\{\Delta u\}$ โดยอ้างอิงจากรูปร่างปัจจุบัน [13]

2.3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบของการปรับรูปร่างแบบเป็นลำดับขั้น

จากสมการ (2.57) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมตริกซ์ [11]ได้ดังนี้

$$\int_V\{\delta e\}^T[C]\{\Delta e\}dV \Rightarrow \{\delta u\}^T[K_L]\{\Delta u\} = \{\delta u\}^T\left(\int_V[B_L]^T[C][B_L]dV\right)\{\Delta u\} \tag{2.58.1}$$

$$\int_V \{\delta\eta\}^T \{\sigma\}\ dV \Rightarrow \{\delta\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}_{NL}]\{\Delta\mathbf{u}\} = \{\delta\mathbf{u}\}^T \left(\int_V [\mathbf{B}_{NL}]^T [\hat{\sigma}][\mathbf{B}_{NL}] dV\right)\{\Delta\mathbf{u}\} \tag{2.58.2}$$

$$\int_V \{\delta e\}^T \{\sigma\} dV \Rightarrow \{\delta\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} = \{\delta\mathbf{u}\}^T \left(\int_V [\mathbf{B}_L]^T \{\sigma\} dV\right) \tag{2.58.3}$$

$[B_L]$ แทนเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว และค่า $\{\delta e\} = [B_L]\{\delta u\}$ โดยที่

$$\{\delta u\} = \lfloor \delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta u_3 \quad \delta v_3 \rfloor^T \tag{2.59}$$

$$\{\Delta u\} = \lfloor \Delta u_1 \quad \Delta v_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta v_2 \quad \Delta u_3 \quad \Delta v_3 \rfloor^T \tag{2.60}$$

$[K_L]$ คือเมตริกซ์แข็งเกร็งแบบเชิงเส้น

$[K_{NL}]$ คือเมตริกซ์แข็งเกร็งแบบไม่เชิงเส้น

$\{F\}$ คือเวคเตอร์ของแรงภายในที่จุดต่อเนื่องจากความเค้นบนเอลิเมนต์

$$[B_{NL}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$[\hat{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & \tau_{xy} \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

เมื่อนำพจน์ของแรงภายนอก $\{R\}$ พจน์ของแรงภายใน $\{F\}$ และพจน์การแปลงเชิงเส้นของ $\{F\}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่พร้อมนำไปทำการคำนวณแบบการทำซ้ำได้ดังนี้

$$\left[K_L(u_i)+K_{NL}(u_i)\right]\{\Delta u\}_{i+1}=\{R(u_i)\}-\{F(u_i)\} \;\; ; \; \{u\}_{i+1}=\{u\}_i+\{\Delta u\}_{i+1} \qquad (2.63)$$

จากสมการ (2.63) นี้จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาการสัมผัส โดยการเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวข้องกับพลังงานจากการสัมผัสเข้าไปในสมการ ซึ่งแสดงในบทที่ 3 ต่อไป

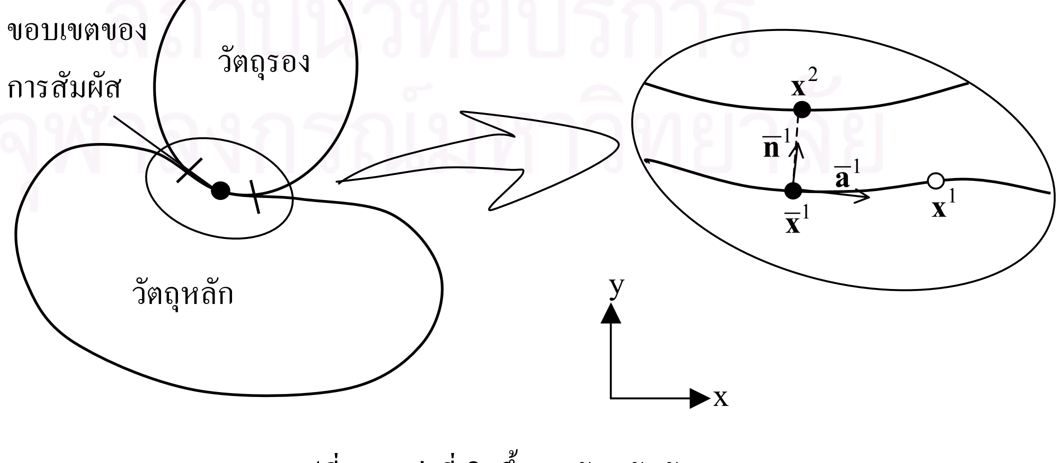
บทที่ 3

ปัญหาการสัมผัสด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ปัญหาการสัมผัสเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นเนื่องจากขอบเขตเงื่อนไข ที่ไม่สามารถบอกได้ว่าบริเวณขอบใดบ้างของวัตถุที่เกิดการสัมผัสกัน แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นกับระยะการเคลื่อนตัวของขอบที่ผิวสัมผัสมีค่าเป็นเท่าไร ในเชิงการคำนวณแล้วสิ่งที่บ่งบอกว่าวัตถุจะเริ่มสัมผัสกันก็คือมีการเหลื่อมล้ำกันขึ้นระหว่างขอบของวัตถุ ในบทนี้ได้ทำการสร้างพจน์พลังงานจากการสัมผัสระหว่างวัตถุทั้งสองได้จากค่าการเหลื่อมล้ำนี้ เพื่อนำไปประยุกต์ใช้กับสมการการแปรผันของปัญหากลศาสตร์ของแข็งได้โดยตรง โดยพิจารณาการเหลื่อมล้ำนี้เป็นการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้น ซึ่งแยกการเคลื่อนที่ออกได้เป็นสองลักษณะคือการเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัส และการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสกับผิวสัมผัส หลังจากนั้นได้ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการสัมผัส โดยพิจารณาเป็นการสัมผัสกันระหว่างจุดต่อกับขอบของเอลิเมนต์

3.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุสัมผัส

ปัญหาการสัมผัสในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะพิจารณาเป็นการสัมผัสกันระหว่างวัตถุสองชนิดคือ วัตถุหมายเลข 1 เรียกว่าวัตถุหลัก (master body) กับวัตถุหมายเลข 2 เรียกว่าวัตถุรอง (slave body) โดยกำหนดให้ตัวยก 1 และ 2 บ่งบอกถึงค่าที่เกิดขึ้นบนวัตถุหลักและวัตถุรองตามลำดับ [14] ขณะที่วัตถุทั้งสองมาสัมผัสกันจะเกิดค่าต่างๆ ที่สนใจ แสดงไว้ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ค่าที่เกิดขึ้นบนวัตถุสัมผัส

โดย $\mathbf{x}^1$ แทนจุดบนขอบของวัตถุหลักที่อ้างอิงจากค่าพิกัดฉาก x y

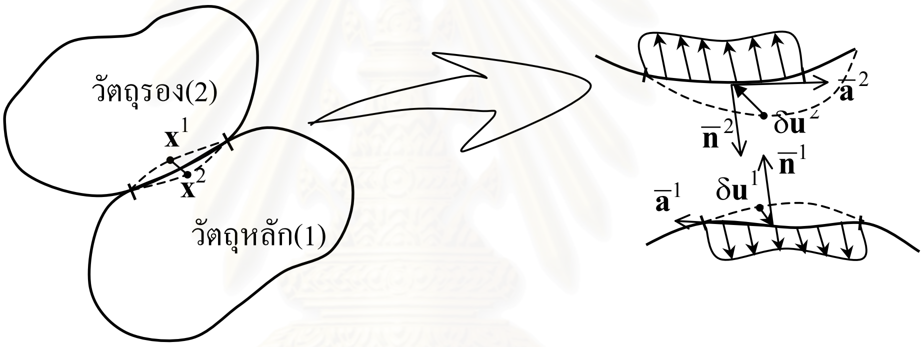
$\mathbf{x}^2$ แทนจุดบนขอบของวัตถุรองที่อ้างอิงจากค่าพิกัดฉาก x y

$\bar{\mathbf{x}}^1$ แทนภาพฉายของจุด $\mathbf{x}^2$ บนขอบของวัตถุหลัก หรือระยะที่สั้นที่สุดที่วัดจากจุด $\mathbf{x}^2$ ไปยังขอบของวัตถุหลัก

$\bar{\mathbf{n}}^1$ แทนเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉากที่จุดสัมผัสบนขอบของวัตถุหลัก

$\bar{\mathbf{a}}^1$ แทนเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสที่จุดสัมผัสบนขอบของวัตถุหลัก

เมื่อทำการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มาสัมผัสกันดังรูปที่ 3.2 โดยเฉพาะบริเวณผิวสัมผัส วัตถุจะเกิดการยุบตัวหรือเคลื่อนตัวเป็นระยะ $\delta\mathbf{u}^1$ และ $\delta\mathbf{u}^2$ ของจุด $\bar{\mathbf{x}}^1$ และ $\mathbf{x}^2$ ตามลำดับ และการเคลื่อนตัวนี้สามารถอธิบายได้เป็นสองแนวแกน คือแนวตั้งฉากกับแนวสัมผัสของผิววัตถุ

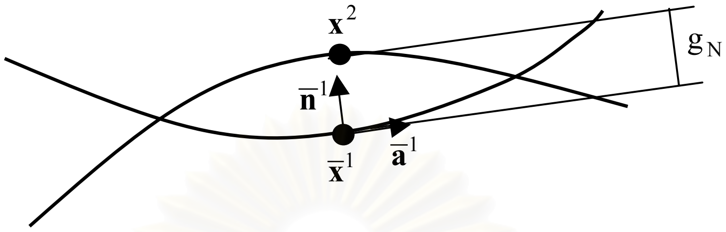


รูปที่ 3.2 การเคลื่อนที่ของวัตถุหลังจากการสัมผัส

3.1.1 การสัมผัสในแนวตั้งฉาก

ในการคำนวณเชิงตัวเลขจะไม่สามารถหาค่าการเคลื่อนตัวหลังการสัมผัสได้โดยตรง แต่สิ่งที่บ่งบอกว่าวัตถุทั้งสองเกิดการสัมผัสกันคือ ขอบของวัตถุจะต้องเกิดการเหลื่อมล้ำกันเป็นระยะ $\left|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\right|$ ดังรูปที่ 3.2 และนำระยะห่างจากการเหลื่อมล้ำนี้แปลงเป็นค่าแรงปฏิกิริยาที่ผิวสัมผัส โดยการคูณกับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้น ที่เรียกว่าพีนอลทีพารามิเตอร์ (penalty parameter) ซึ่งการเหลื่อมล้ำที่เกิดขึ้นได้แยกพิจารณาออกเป็นสองทิศทาง คือ ในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัสกับผิวสัมผัสของวัตถุหลัก ทำให้ค่าการเหลื่อมล้ำสามารถมองเป็นการเคลื่อนที่รวมที่เกิดจากแรงปฏิกริยาที่ผิวสัมผัส สำหรับการเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉาก ค่าแรงที่ได้จะอยู่ในแนวของเวคเตอร์ $\bar{\mathbf{n}}^1$ ดังรูปที่ 3.3 แสดงให้เห็นว่าในการหาค่าระยะห่างในแนวตั้งฉากนั้น จำเป็นจะต้องรู้ค่าเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉาก $\bar{\mathbf{n}}^1$ ก่อนที่หาได้จากสมการดังนี้

$$\bar{\mathbf{n}}^1 = -\frac{\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1}{\left|\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1\right|} \tag{3.1}$$



รูปที่ 3.3 ระยะห่างในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัส

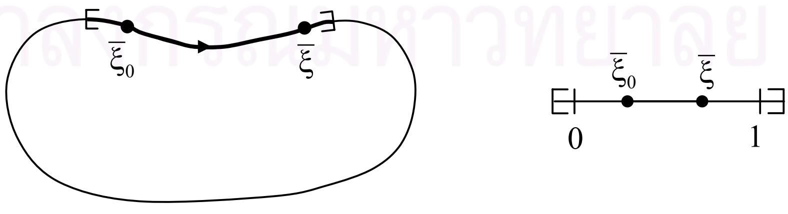
โดยที่ $|\bullet|$ แทนขนาดของเวคเตอร์
จากสมการ(3.1) ทำให้สามารถหาค่าระยะห่างในแนวตั้งฉากได้เป็น

$$g_N = (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 \tag{3.2}$$

3.1.2 การสัมผัสในแนวสัมผัส

การสัมผัสในแนวสัมผัสสามารถแบ่งออกเป็นสองสภาวะ คือ สภาวะการยึดติด (stick state) เป็นสภาวะของบริเวณผิวสัมผัสไม่มีการเคลื่อนที่ กับสภาวะเลื่อนไถล (sliding state) เป็นสภาวะของบริเวณผิวสัมผัสเกิดการเคลื่อนที่ ซึ่งการเคลื่อนที่แบบนี้ สามารถอธิบายได้จากการเคลื่อนที่สัมพัทธ์บนผิวสัมผัส

การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในทิศแนวเส้นสัมผัสระหว่างสองวัตถุ เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของภาพฉายของจุด $\mathbf{x}^2$ ซึ่งก็คือจุด $\bar{\mathbf{x}}^1$ บนวัตถุหลัก ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 เส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด $\mathbf{x}^2$ สัมพัทธ์กับขอบของวัตถุหลักบนพิกัดเชิงการพา

โดย $\bar{\xi}$ คือภาพฉายของจุด $\mathbf{x}^2$ ลงบนขอบของวัตถุหลัก (master segment) ในพิกัดเชิงการพา [14], [15] ซึ่งเกิดการเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\bar{\xi}_0$ ไปยังตำแหน่ง $\bar{\xi}$

สภาวะยึดติดเป็นสภาวะของจุดไม่มีการเคลื่อนที่ในทิศแนวสัมผัส ดังนั้นค่าที่ได้จากพิกัดเชิงการพา (ξ) จะไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงในขณะที่เกิดการสัมผัส $\Delta\xi = 0$ ซึ่งเขียนเป็นสมการเงื่อนไขได้ดังนี้

$$\mathbf{g}_T = g_T \bar{\mathbf{a}}^1 \quad \text{โดยที่} \quad g_T = (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1)\cdot\bar{\mathbf{a}}^1 = 0 \tag{3.3}$$

โดย g_T กำหนดให้เป็นการเคลื่อนตัวสัมพัทธ์ในทิศแนวสัมผัส (tangential direction) ที่จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์

ในสภาวะของการเลื่อนไถล สามารถหาเส้นทางจริงของจุด $\mathbf{x}^2$ ที่เลื่อนตามขอบของวัตถุหลักได้จากการอินทิเกรตของค่าที่เปลี่ยนแปลงไปของพารามิเตอร์ ξ ($d\xi$) ในแนวเส้นขอบของวัตถุหลัก

$$dg_T = |d\mathbf{g}_T| = |\mathbf{a}^1 d\xi| = |\bar{\mathbf{x}}^1{,}_\xi\, d\xi| = |\mathbf{a}^1| d\xi \tag{3.4}$$

$$g_T = \int_{\xi_0}^{\xi} |\bar{\mathbf{x}}^1{,}_\xi|\, d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\bar{\mathbf{x}}^1{,}_\xi \cdot \bar{\mathbf{x}}^1{,}_\xi}\, d\xi \tag{3.5}$$

โดย $\mathbf{a}^1$ เป็นเวคเตอร์ในแนวสัมผัสที่ไม่ใช่เวคเตอร์หนึ่งหน่วยแต่ได้มาจากการเปลี่ยนแปลงจุดเงา $\bar{\mathbf{x}}^1$ ตามพิกัดเชิงการพา

3.1.3 ค่าการแปรผันของระยะห่างในแนวตั้งฉากและระยะห่างในแนวสัมผัส

ค่าการแปรผันของระยะห่างในแนวตั้งฉาก สามารถหาได้จากการแปรผันของสมการ (3.2) ดังนี้

$$\delta g_N = \delta\left\{[\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1(\bar{\xi})]\cdot\bar{\mathbf{n}}^1(\bar{\xi})\right\} \tag{3.6}$$

ค่าการแปรผันของสมการ (3.6) ต้องพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ ξ ซึ่งเกิดจากเงาของจุด $\mathbf{x}^2$ บนวัตถุหลักที่ตำแหน่ง $\mathbf{x}^1$ ใดๆ ดังนั้น

$$\delta g_N = [\delta\mathbf{u}^2 - \delta\bar{\mathbf{u}}^1 - \bar{\mathbf{x}}^1{,}_\xi \cdot \delta\xi]\cdot\bar{\mathbf{n}}^1 + [\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1]\cdot\delta\bar{\mathbf{n}}^1 \tag{3.7}$$

โดย $\delta\mathbf{u}$ แทนค่าการแปรผันของ $\mathbf{x}$

ค่าการแปรผันของระยะห่างในแนวเส้นสัมผัส หาได้จากสมการ (3.4) คือ

$$\delta \mathbf{g}_T = \delta\bar{\xi}\, \mathbf{a}^1 \tag{3.8}$$

จากสมการ (3.8) แสดงให้เห็นว่า การหาค่าการแปรผัน $\mathbf{g}_T$ จำเป็นจะต้องรู้ค่าการแปรผันของ $\bar{\xi}$ โดยอาศัยความสัมพันธ์ที่ว่า

$$[\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1(\xi)] \cdot \mathbf{a}^1(\xi) = 0 \tag{3.9}$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นจริงที่จุดสัมผัส เพราะผลต่าง $\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1(\xi)$ เป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวสัมผัส จากนั้นทำการแปรผันสมการ (3.9) ได้ดังนี้

$$\delta\left\{[\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1(\bar{\xi})] \cdot \mathbf{a}^1(\bar{\xi})\right\} = 0 \tag{3.10}$$

$$[\delta\mathbf{u}^2 - \delta\bar{\mathbf{u}}^1 - \bar{\mathbf{x}}^1{}_{,\xi} \cdot \delta\xi] \cdot \mathbf{a}^1 + [\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1] \cdot \delta\mathbf{a}^1 = 0 \tag{3.11}$$

โดย $\delta\mathbf{a}^1 = \delta\bar{\mathbf{u}}^1{}_{,\xi} + \bar{\mathbf{x}}^1{}_{,\xi\xi} \cdot \delta\xi$ แล้วทำการจัดรูปสมการ (3.11)

$$[\delta\mathbf{u}^2 - \delta\bar{\mathbf{u}}^1] \cdot \mathbf{a}^1 + [\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1] \cdot \delta\bar{\mathbf{u}}^1{}_{,\xi} = \left\{\bar{\mathbf{x}}^1{}_{,\xi} \cdot \mathbf{a}^1 + [\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1] \cdot \bar{\mathbf{x}}^1{}_{,\xi\xi}\right\} \cdot \delta\xi \tag{3.12.1}$$

$$[\delta\mathbf{u}^2 - \delta\bar{\mathbf{u}}^1] \cdot \mathbf{a}^1 + g_N \bar{\mathbf{n}}^1 \cdot \delta\bar{\mathbf{u}}^1{}_{,\xi} = \left\{\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1 + g_N \bar{\mathbf{n}}^1 \cdot \bar{\mathbf{x}}^1{}_{,\xi\xi}\right\} \cdot \delta\xi \tag{3.12.2}$$

$$\delta\xi = \frac{1}{a_{11} + g_N \cdot b_{11}} \left\{[\delta\mathbf{u}^2 - \delta\bar{\mathbf{u}}^1] \cdot \mathbf{a}^1 + g_N \bar{\mathbf{n}}^1 \cdot \delta\bar{\mathbf{u}}^1{}_{,\xi}\right\} \tag{3.12.3}$$

กำหนดให้ $a_{11} = \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1$ และ $b_{11} = \bar{\mathbf{x}}^1{}_{,\xi\xi} \cdot \bar{\mathbf{n}}^1$ หมายถึงค่าความโค้ง (curvature) ของผิวสัมผัส

3.2 พลังงานเสมือนจากการสัมผัส

สมการการแปรผัน (2.52) เป็นสมการความสมดุลระหว่างพลังงานเสมือนภายนอกกับพลังงานเสมือนภายใน ในรูปแบบการเพิ่มเป็นลำดับขั้น ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการสัมผัสได้ โดยการเพิ่มพจน์ของพลังงานเสมือนจากภายนอกเนื่องจากการสัมผัส ดังนั้นสมการการแปรผันสำหรับปัญหาการสัมผัสเขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$\delta W_S - \delta W_R - \delta W_C = 0 \tag{3.13}$$

$\delta W_S, \delta W_R, \delta W_C$ คือ พลังงานเสมือนที่เกิดจากความเค้นภายใน, พลังงานเสมือนจากภายนอก และพลังงานเสมือนจากการสัมผัสตามลำดับ โดยที่

$$\delta W_S = \int_V \{\delta e\}^{T\,t} \{\sigma\}\, dV + \int_V \{\delta \eta\}^T \{\sigma\}\, dV \tag{3.14}$$

$$\delta W_R = \int_S t_i\, \delta u_i\, dS \tag{3.15}$$

$$\delta W_C = \int_{S_c} t_N \cdot \delta g_N\, dS + \int_{S_c} \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T\, dS \tag{3.16}$$

3.3 กฎความเสียดทานของคูลอมบ์และการปรับใช้สำหรับการคำนวณ

กฎความเสียดทานของคูลอมบ์ สามารถอธิบายได้จากค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน(μ) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่บอกว่าเมื่อใดการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสจะอยู่ในสภาวะยึดติด หรือสภาวะเลื่อนไถล ในที่นี้จะสมมติให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิต (μ_s) และความเสียดทานเคลื่อนที่ (μ_k) มีค่าเท่ากัน

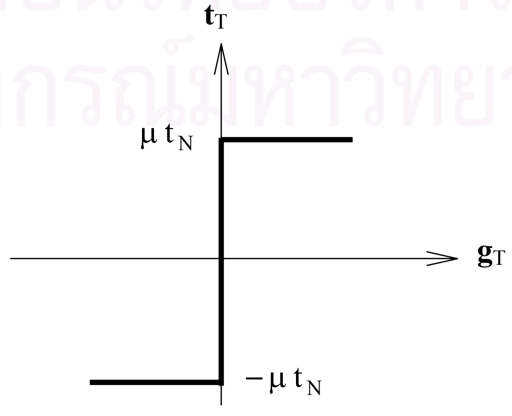
$$\Phi(\mathbf{t}_T, t_N) = |\mathbf{t}_T| - \mu\, t_N \tag{3.17}$$

โดย $\Phi(\mathbf{t}_T, t_N)$ แทนฟังก์ชันเงื่อนไขของการเลื่อนไถล

$\mathbf{t}_T$ แทนเวคเตอร์ความเค้นที่ผิวในแนวสัมผัสกับผิวสัมผัส

t_N แทนความเค้นที่ผิวในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัส

จากเงื่อนไขสมการ (3.17) ถ้า Φ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์วัตถุจะอยู่ในสภาวะยึดติด แต่ถ้า Φ มีค่ามากกว่าศูนย์วัตถุจะอยู่ในสภาวะเลื่อนไถล สามารถวาดกราฟแสดงได้ดังรูปที่ 3.5



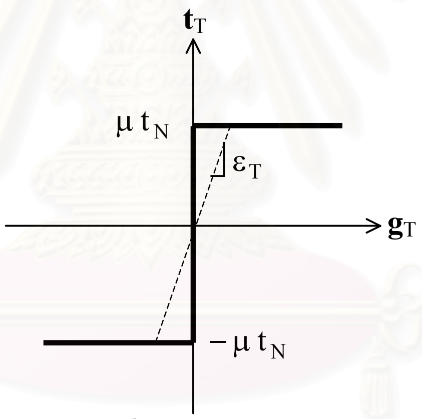
รูปที่3.5 กราฟแสดงเงื่อนไขกฎความเสียดทานของคูลอมบ์

กราฟในรูปที่ 3.5 อธิบายว่า เมื่อ $\mathbf{g}_T$ มีค่าเท่ากับศูนย์ หรือไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัส แรงในแนวสัมผัสที่เกิดขึ้นบนผิวสัมผัสนั้นสามารถเป็นค่าใดๆก็ได้ที่มีค่าไม่เกิน μt_N ดังนั้นไม่สามารถบอกได้เลยว่าค่าแรงในแนวสัมผัสมีค่าเป็นเท่าใดขณะที่วัตถุอยู่ในสภาวะยึดติด ในเชิงการคำนวณแล้วมีความจำเป็นจะต้องกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างค่า $\mathbf{g}_T$ กับ $\mathbf{t}_T$ ใหม่โดยเฉพาะในช่วงสภาวะยึดติด ด้วยการปรับกราฟให้มีค่าความชันเท่ากับ ε_T ดังแสดงไว้ดังรูปที่ 3.6 เพื่อให้ความสัมพันธ์ของ $\mathbf{g}_T$ กับ $\mathbf{t}_T$ เป็นความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งดังสมการ (3.18)

$$\mathbf{t}_T = \varepsilon_T \, \mathbf{g}_T \tag{3.18}$$

โดย ε_T คือ ค่าพีนอลทีพารามิเตอร์

ถ้าค่าความชัน ε_T ยิ่งมีค่ามากขึ้นเท่าใด ความสัมพันธ์ระหว่างค่า $\mathbf{g}_T$ กับ $\mathbf{t}_T$ ก็จะลักษณะใกล้เคียงกับเงื่อนไขของคูลอมบ์เดิมมากเท่านั้น [16] และ [17]



รูปที่ 3.6 การปรับเงื่อนไขความเสียดทานของคูลอมบ์

ดังนั้นการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสแบ่งออกได้เป็นสองส่วน คือ การเคลื่อนที่ในช่วงยืดหยุ่น และการเคลื่อนที่ในช่วงเลื่อนไถล ดังรูปที่ 3.7 เขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

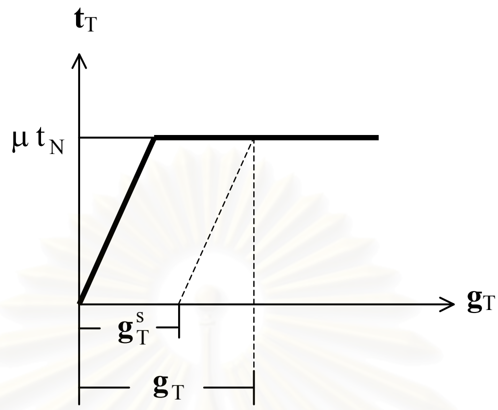
$$\mathbf{g}_T^e = \mathbf{g}_T - \mathbf{g}_T^s \tag{3.19}$$

โดยที่ $\mathbf{g}_T$ แทนการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสรวม

$\mathbf{g}_T^e$ แทนการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสช่วงยืดหยุ่น

$\mathbf{g}_T^s$ แทนการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสช่วงเลื่อนไถล

สาเหตุที่เรียก เป็นการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสช่วงยืดหยุ่นเนื่องจากว่า ถ้าวัตถุมีการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัส จะมีแรงต้านกลับไปเพื่อไม่ให้วัตถุเคลื่อนที่



รูปที่ 3.7 การเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสหลังการปรับเงื่อนไขความเสียดทานของคูลอมบ์

3.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสัมผัส

เมื่อพิจารณารูปร่างของวัตถุที่เป็นแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แล้ว การสัมผัสที่เกิดขึ้นจะเป็นการสัมผัสกันระหว่างขอบเอลิเมนต์ของวัตถุหลักกับขอบเอลิเมนต์ของวัตถุรอง

3.4.1 เอลิเมนต์สัมผัส

ในหัวข้อนี้ได้กำหนดให้การสัมผัสของวัตถุเป็นการสัมผัสของจุดบนวัตถุรอง (slave node) มาสัมผัสกับขอบเอลิเมนต์บนวัตถุหลัก (master segment) กำหนดให้จุดบนวัตถุรอง (slave node) แทนด้วยค่าพิกัด $\mathbf{x}_s^2$ มาสัมผัสกับขอบเส้นตรงของวัตถุหลัก (master segment) ที่กำหนดด้วยจุด $\mathbf{x}_1^1$ และ $\mathbf{x}_2^1$ ดังแสดงดังรูปที่ 3.8

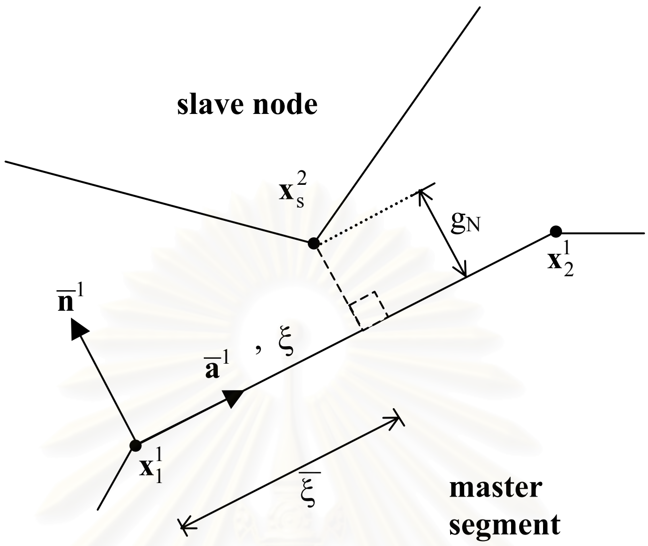
จากฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับขอบเอลิเมนต์ของวัตถุหลักเขียนได้เป็น

$$\hat{\mathbf{x}}^1(\xi) = \mathbf{x}_1^1 + (\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1)\xi \tag{3.20}$$

โดย $\hat{\mathbf{x}}^1(\xi)$ คือตำแหน่งของ ξ บนพิกัดฉาก x-y

และสามารถคำนวณหาเวคเตอร์ในแนวสัมผัสของขอบเอลิเมนต์ได้ว่า

$$\bar{\mathbf{a}}_1^1 = \hat{\mathbf{x}}^1(\xi)_{,\xi} = (\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1)\xi \tag{3.21}$$



รูปที่ 3.8 เอลิเมนต์สัมผัสแบบจุดถึงขอบ

จากนั้น นำไปหาเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสได้ ดังนี้

$$\bar{\mathbf{a}}^1 = \mathbf{a}_1^1 / l \tag{3.22}$$

โดย l เป็นความยาวขอบเอลิเมนต์ของวัตถุหลักหาได้จากขนาดของ $\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1$

$\mathbf{a}_1^1$ เป็นเวคเตอร์ $\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสนี้ ทำให้หาค่าเวคเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับขอบเอลิเมนต์ ได้จาก

$$\bar{\mathbf{n}}^1 = \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{a}}^1 \tag{3.23}$$

โดย $\mathbf{e}_3$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วย (unit base vector) ที่มีทิศพุ่งออกจากระนาบสองมิติ

ค่า $\bar{\xi}$ และ g_N ได้จากการหาระยะทางที่สั้นที่สุดด้วยการฉายเงาของจุดบนวัตถุรอง $\mathbf{x}_s^2$ ลงบนขอบเส้นตรงบนเอลิเมนต์ของวัตถุหลัก $\mathbf{x}_1^1$ และ $\mathbf{x}_2^1$ คือ

$$\bar{\xi} = \frac{1}{l}(\mathbf{x}_s^2 - \mathbf{x}_1^1) \cdot \bar{\mathbf{a}}^1 \tag{3.24}$$

$$g_N = [\mathbf{x}_s^2 - (1-\bar{\xi})\mathbf{x}_1^1 - \bar{\xi}\mathbf{x}_2^1] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 \tag{3.25}$$

ทำให้คำนวณค่าการแปรผันของระยะห่างในแนวตั้งฉากจากขอบเอลิเมนต์ของวัตถุหลักได้เป็น

$$\delta g_N = [\delta \mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\delta \mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\delta \mathbf{u}_2^1] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 \tag{3.26}$$

กรณีของการยึดติด การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในแนวเส้นสัมผัสหาได้จาก

$$g_T^{st} = \int_{\xi_0}^{\bar{\xi}} l \, d\xi = (\bar{\xi} - \xi_0)\, l \tag{3.27}$$

โดย ξ_0 แสดงถึงตำแหน่งเริ่มต้นของจุดสัมผัสที่อยู่บนขอบเอลิเมนต์ของวัตถุหลัก
$\bar{\xi}$ แสดงถึงตำแหน่งเงาของจุดสัมผัสที่รูปร่างปัจจุบัน

ค่าการแปรผันของสมการ (3.27) เป็นค่าการแปรผันของระยะห่างในแนวสัมผัสที่เกิดขึ้นกับทุกๆเอลิเมนต์สัมผัส สมารถเขียนได้เป็น

$$\delta g_T^{st} = l\delta\bar{\xi} + (\bar{\xi} - \xi_0)\delta l \tag{3.28}$$

เนื่องจากขอบของเอลิเมนต์เป็นสันตรงดังนั้น ค่าความโค้ง (curvature) ของผิวจึงมีค่าเท่ากับศูนย์ (b_{11}=0) และ a_{11} มีค่าเท่ากับ l^2 ทำให้ค่าการแปรผันของ $\bar{\xi}$ จากสมการ (3.12.3) เขียนได้เป็น

$$\delta\xi = \frac{1}{l^2}\left\{[\delta\mathbf{u}^2 - \delta\hat{\mathbf{u}}^1(\bar{\xi})] \cdot \mathbf{a}_1^1 + g_N \bar{\mathbf{n}}^1 \cdot \delta\hat{\mathbf{u}},_\xi(\bar{\xi})\right\} \tag{3.29}$$

พร้อมกับค่า

$$\delta l = [\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1] \cdot \bar{\mathbf{a}}^1 \quad \text{และ} \quad \delta\hat{\mathbf{u}}^1(\xi) = \delta\mathbf{u}_1^1 + \xi(\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1) \tag{3.30}$$

นำสมการ (3.29) และ (3.30) ไปแทนในสมการ (3.28) แล้วเขียนใหม่เป็น

$$\begin{aligned}\delta g_T^{st} &= [\delta \mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\delta \mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\delta \mathbf{u}_2^1] \cdot \bar{\mathbf{a}}^1 + \frac{g_N}{l}[\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 \\ &\quad + \frac{g_T}{l}[\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1] \cdot \bar{\mathbf{a}}^1\end{aligned} \tag{3.31}$$

ในกรณีของการเลื่อนไถล จะเกิดการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสเป็นระยะทางหนึ่งจริง ดังนั้น

$$\delta g_T^{sl} = l\delta\bar{\xi} = [\delta \mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\delta \mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\delta \mathbf{u}_2^1] \cdot \bar{\mathbf{a}}^1 + \frac{g_N}{l}[\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 \tag{3.32}$$

สังเกตได้ว่า สมการ (3.32) แตกต่างกับสมการ (3.31) ที่พจน์สุดท้ายของสมการ

3.4.2 พลังงานจากการสัมผัส

พลังงานที่เกิดขึ้นจากการสัมผัสของแต่ละเอลิเมนต์สัมผัสสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\int_S (t_N \cdot \delta g_N + t_T \cdot \delta g_T)\, dS \approx \sum_{s=1}^{n_C} (T_N \cdot \delta g_N + T_T \cdot \delta g_T) \tag{3.33}$$

โดยที่ t_N และ t_T เป็นความเค้นในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัสที่ผิวสัมผัส

T_N และ T_T เป็นแรงที่จุดของวัตถุรองในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัสที่ผิวสัมผัส

n_c แทนจำนวนเอลิเมนต์สัมผัส

ดังนั้น ค่าการแปรผันที่เกิดขึ้นในแต่ละเอลิเมนต์สัมผัส (contact element) สามารถเขียนได้เป็น

$$T_N \cdot \delta g_N + T_T \cdot \delta g_T \tag{3.34}$$

สมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้โดยตรง [18] คือเริ่มจากพจน์แรกที่เกี่ยวข้องกับการสัมผัสในแนวตั้งฉากที่อาศัยค่าการแปรผันของระยะห่างตั้งฉาก ดังสมการ (3.26) เขียนได้เป็น

$$\delta g_N = \delta \mathbf{u}_s{}^T \{N_s\} \tag{3.35}$$

เช่นเดียวกัน ค่าการแปรผันของระยะห่างในแนวสัมผัส ดังสมการ (3.31) และ (3.32) เขียนอยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ ได้ดังนี้

สำหรับกรณียึดติด

$$\delta g_T^{st} = \delta \mathbf{u}_s{}^T (\{T_s\} + \frac{g_N}{l}\{N_{os}\} + \frac{g_T}{l}\{T_{os}\}) = \delta \mathbf{u}_s{}^T \{T_s^{st}\} \tag{3.36}$$

สำหรับกรณีเลื่อนไถล

$$\delta g_T^{sl} = \delta \mathbf{u}_s{}^T (\{T_s\} + \frac{g_N}{l}\{N_{os}\}) = \delta \mathbf{u}_s{}^T \{T_s^{sl}\} \tag{3.37}$$

และจากสมการ (3.35), (3.36) และ (3.37) ถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ของเวคเตอร์ดังนี้

$$\delta \mathbf{u}_s = \lfloor \delta \mathbf{u}_s^2 \quad \delta \mathbf{u}_1^1 \quad \delta \mathbf{u}_2^1 \rfloor^T \tag{3.38}$$

$$\{N_s\} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{n}}^1 \\ -(1-\overline{\xi})\overline{\mathbf{n}}^1 \\ -\overline{\xi}\,\overline{\mathbf{n}}^1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{N_{os}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\overline{\mathbf{n}}^1 \\ \overline{\mathbf{n}}^1 \end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

$$\{T_s\} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{a}}^1 \\ -(1-\overline{\xi})\overline{\mathbf{a}}^1 \\ -\overline{\xi}\,\overline{\mathbf{a}}^1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{T_{os}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\overline{\mathbf{a}}^1 \\ \overline{\mathbf{a}}^1 \end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

ดังนั้น พลังงานเสมือนของเอลิเมนต์สัมผัสสามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ $\delta \mathbf{u}_s{}^T \{G_s^c\}$ โดย แสดงได้ดังสมการ

$$\{G_s^c\} = T_N\{N_s\} + T_T\{\widetilde{T}_s\} \tag{3.41}$$

ขณะที่ $\{\widetilde{T}_s\}$ สามารถเป็นได้ทั้งกรณียึดติดหรือกรณีเลื่อนไถล ดังสมการ (3.36) และ (3.37)

3.4.3 เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของแรงสัมผัสในแนวตั้งฉาก

ในกรณีของการสัมผัสแบบไร้ความเสียดทาน พจน์พลังงานสำหรับการสัมผัสเขียนได้ดังนี้

$$T_N \cdot \delta g_N = \varepsilon_N g_N \cdot \delta g_N \tag{3.42}$$

จากนั้นทำการแปลงเชิงเส้นของสมการ (3.42) ได้เป็น

$$\Delta(\varepsilon_N g_N \cdot \delta g_N) = \varepsilon_N \Delta g_N \cdot \delta g_N + \varepsilon_N g_N \cdot \Delta\delta g_N \tag{3.43}$$

เนื่องจาก Δg_N มีโครงสร้างเหมือนกับ δg_N ดังที่แสดงไว้ในสมการ (3.26) ก็คือ

$$\Delta g_N = [\Delta \mathbf{u}_s^2 - (1-\overline{\xi})\Delta \mathbf{u}_1^1 - \overline{\xi}\Delta \mathbf{u}_2^1] \cdot \overline{\mathbf{n}}^1 \tag{3.44}$$

เหลือเพียงแต่พจน์ $\Delta\delta g_N$ ที่จะต้องทำการหาค่า ซึ่งพจน์นี้จะขึ้นอยู่กับค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\overline{\xi}$ และ $\overline{\mathbf{n}}^1$ ในสมการ (3.26) และต้องหาการแปลงเชิงเส้นของปริมาณเหล่านี้ การแปลงเชิงเส้นของ $\overline{\xi}$ จะเหมือนกับค่า $\delta\overline{\xi}$ เพียงแต่เปลี่ยนจากค่าการแปรผัน $\delta \mathbf{u}$ ไปเป็นค่าเพิ่มขึ้นของการเคลื่อนตัว (displacement increments; $\Delta \mathbf{u}$) ซึ่งจะเหมือนกับการหาค่า Δg_N ดังกล่าว

$$\Delta\bar{\xi} = \frac{1}{l}[\Delta\mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\Delta\mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\Delta\mathbf{u}_2^1]\cdot\bar{\mathbf{a}}^1 + \frac{g_N}{l l^2}[\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1]\cdot\bar{\mathbf{n}}^1 \tag{3.45}$$

ต่อจากนั้น เพื่อทำการแปลงเชิงเส้นของ $\bar{\mathbf{n}}^1$ จะต้องอาศัยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\bar{\mathbf{n}}^1 = \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{a}}^1 \Rightarrow \Delta\bar{\mathbf{n}}^1 = \mathbf{e}_3 \times \Delta\bar{\mathbf{a}}^1 \tag{3.46}$$

การแปลงเชิงเส้นของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวเส้นสัมผัส คือ

$$\Delta\bar{\mathbf{a}}^1 = \Delta[\frac{1}{l}(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1)] = \frac{1}{l}(\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1) - \frac{1}{l^2}(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1)[\bar{\mathbf{a}}^1\cdot(\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1)]$$

$$= \frac{1}{l}[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{a}}^1 \otimes \bar{\mathbf{a}}^1]\cdot(\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1)] \tag{3.47}$$

ซึ่ง $\{u\}\otimes\{v\} = \{u\}\{v\}^T$ และจากนิยามของเมตริกซ์หนึ่งหน่วย ที่ว่า $\mathbf{I} = \bar{\mathbf{a}}^1 \otimes \bar{\mathbf{a}}^1 + \bar{\mathbf{n}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1$ นำไปเปลี่ยนพจน์ $[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{a}}^1 \otimes \bar{\mathbf{a}}^1]$ ใหม่ ดังนั้น เขียนสมการ (3.47) ได้เป็น

$$\Delta\bar{\mathbf{a}}^1 = \frac{1}{l}[\bar{\mathbf{n}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1](\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1) \tag{3.48}$$

แล้วนำเวคเตอร์ $\mathbf{e}_3$ คูณเชิงเวคเตอร์ (cross product) กับสมการ (3.48) ทั้งสองข้าง จะได้สมการใหม่คือ

$$\Delta\bar{\mathbf{n}}^1 = -\frac{1}{l}[\bar{\mathbf{a}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1](\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1) \tag{3.49}$$

และจากสมการ (3.45), (3.48) และ (3.49) นำมาเขียน $\Delta\delta g_N$ ได้เป็น

$$\Delta\delta g_N = \Delta\bar{\xi}[\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1]\cdot\bar{\mathbf{n}}^1 + [\delta\mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\delta\mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\delta\mathbf{u}_2^1]\cdot\Delta\bar{\mathbf{n}}^1 \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{l}[\Delta\mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\Delta\mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\Delta\mathbf{u}_2^1](\bar{\mathbf{a}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1)(\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1) \\ &\quad - \frac{g_N}{l^2}[\delta\mathbf{u}_2^1 - \delta\mathbf{u}_1^1](\bar{\mathbf{n}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1)(\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1) \\ &\quad - \frac{1}{l}[\delta\mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\delta\mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\delta\mathbf{u}_2^1](\bar{\mathbf{a}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1)(\Delta\mathbf{u}_2^1 - \Delta\mathbf{u}_1^1) \end{aligned}$$

แล้วสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\Delta\delta g_N = \delta\mathbf{u}_s{}^T[K_{\Delta\delta}]\Delta\mathbf{u}_s \tag{3.51}$$

โดยที่

$$[K_{\Delta\delta}] = -\frac{1}{l}[\{N_{os}\}\{T_s\}^T + \{T_s\}\{N_{os}\}^T + \frac{g_N}{l}\{N_{os}\}\{N_{os}\}^T] \tag{3.52}$$

และ

$$\Delta\mathbf{u}_s = \lfloor \Delta\mathbf{u}_s^2 \quad \Delta\mathbf{u}_1^1 \quad \Delta\mathbf{u}_2^1 \rfloor^T \tag{3.53}$$

จากสมการที่ (3.43) เขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\varepsilon_N \Delta g_N \cdot \delta g_N + \varepsilon_N g_N \cdot \Delta\delta g_N = \delta\mathbf{u}_s{}^T[K_{CN}]\Delta\mathbf{u}_s \tag{3.54}$$

โดยที่

$$[K_{CN}] = \varepsilon_N\left[\{N_s\}\{N_s\}^T - \frac{g_N}{l}(\{N_{os}\}\{T_s\}^T + \{T_s\}\{N_{os}\}^T + \frac{g_N}{l}\{N_{os}\}\{N_{os}\}^T)\right] \tag{3.55}$$

เวคเตอร์ต่างๆ ที่ปรากฎอยู่ในสมการ (3.55) กำหนดมาจากสมการ (3.39) และ (3.40)

3.4.4 เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของแรงสัมผัสในแนวสัมผัส

การแปลงเชิงเส้นของกรณียึดติดจะมีลักษณะเหมือนกับการแปลงเชิงเส้นของระยะห่างในแนวตั้งฉากมีเพียงแต่ค่าตัวแปรที่เปลี่ยนจาก g_N ไปเป็น g_T^{st} โดยเริ่มจาก

$$T_T \cdot \delta g_T^{st} \Rightarrow \varepsilon_T g_T^{st} \cdot \delta g_T^{st} \tag{3.56}$$

ทำการแปลงเชิงเส้นของสมการ (3.56) ได้เป็น

$$\varepsilon_T \Delta g_T^{st} \cdot \delta g_T^{st} + \varepsilon_T g_T^{st} \cdot \Delta\delta g_T^{st} \tag{3.57}$$

เนื่องจากพจน์ Δg_T^{st} และ δg_T^{st} มีลักษณะโครงสร้างคล้ายกัน นำสมการ (3.31) มาเขียนการแปลงเชิงเส้นของระยะห่างในแนวสัมผัสได้ ดังนี้

$$\Delta g_T^{st} = [\Delta \mathbf{u}_s^2 - (1-\bar{\xi})\Delta \mathbf{u}_1^1 - \bar{\xi}\Delta \mathbf{u}_2^1] \cdot \bar{\mathbf{a}}^1 + \frac{g_N}{l}[\Delta \mathbf{u}_2^1 - \Delta \mathbf{u}_1^1] \cdot \bar{\mathbf{n}}^1$$
$$+ \frac{g_T}{l}[\Delta \mathbf{u}_2^1 - \Delta \mathbf{u}_1^1] \cdot \bar{\mathbf{a}} \qquad (3.58)$$

การแปลงเชิงเส้นของค่าการแปรผัน δg_T^{st} ได้เป็น

$$\Delta\delta g_T^{st} = \frac{1}{l}[\delta \mathbf{u}_s^2 - (1-\xi_0)\delta \mathbf{u}_1^1 - \xi_0 \delta \mathbf{u}_2^1](\bar{\mathbf{n}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1)(\Delta \mathbf{u}_2^1 - \Delta \mathbf{u}_1^1)$$
$$+ \frac{1}{l}[\Delta \mathbf{u}_s^2 - (1-\xi_0)\Delta \mathbf{u}_1^1 - \xi_0 \Delta \mathbf{u}_2^1](\bar{\mathbf{n}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1)(\delta \mathbf{u}_2^1 - \delta \mathbf{u}_1^1)$$
$$- \frac{g_T^{st}}{l^2}[\delta \mathbf{u}_2^1 - \delta \mathbf{u}_1^1](\bar{\mathbf{n}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1)(\Delta \mathbf{u}_2^1 - \Delta \mathbf{u}_1^1)$$
$$- \frac{g_N}{l^2}[\delta \mathbf{u}_2^1 - \delta \mathbf{u}_1^1][\bar{\mathbf{n}}^1 \otimes \bar{\mathbf{a}}^1 + \bar{\mathbf{a}}^1 \otimes \bar{\mathbf{n}}^1](\Delta \mathbf{u}_2^1 - \Delta \mathbf{u}_1^1) \qquad (3.59)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ ดังนี้

$$\Delta\delta g_T^{st} = \delta \mathbf{u}_s{}^T \left[K_{\Delta\delta}^{st}\right] \Delta \mathbf{u}_s \qquad (3.60)$$

โดยที่

$$\left[K_{\Delta\delta}^{st}\right] = \frac{1}{l}\left(\{N_{\xi_0}\}\{N_{os}\}^T + \{N_{os}\}\{N_{\xi_0}\}^T\right) - \frac{g_T^{st}}{l^2}\{N_{os}\}\{N_{os}\}^T$$
$$- \frac{g_N}{l^2}\left(\{N_{os}\}\{T_{os}\}^T + \{T_{os}\}\{N_{os}\}^T\right) \qquad (3.61)$$

และ

$$\{N_{\xi_0}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{n}}^1 \\ -(1-\xi_0)\bar{\mathbf{n}}^1 \\ -\xi_0\, \bar{\mathbf{n}}^1 \end{Bmatrix} \qquad (3.62)$$

สมการ (3.57) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบสมการเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\varepsilon_T \Delta g_T^{st} \cdot \delta g_T^{st} + \varepsilon_T g_T^{st} \cdot \Delta\delta g_T^{st} = \delta \mathbf{u}_s{}^T \left[K_{CT}^{st}\right] \Delta \mathbf{u}_s \qquad (3.63)$$

โดยที่

$$\left[K_{CT}^{st}\right] = \varepsilon_T \left\{ \{T_s^{st}\}\{T_s^{st}\}^T + \frac{g_T^{st}}{l}\Big[\{N_{\xi_0}\}\{N_{os}\}^T + \{N_{os}\}\{N_{\xi_0}\}^T \right.$$
$$\left. - \frac{g_N}{l}(\{N_{os}\}\{T_{os}\}^T + \{T_{os}\}\{N_{os}\}^T) - \frac{g_T^{st}}{l}\{N_{os}\}\{N_{os}\}^T\Big] \right\} \tag{3.64}$$

สังเกตว่า เมตริกซ์แข็งเกร็ง $[K_{CN}]$ และ $[K_{CT}^{st}]$ เป็นเมตริกซ์ที่สมมาตร (symetric matrix)

ในกรณีของการเลื่อนไถล การแปลงเชิงเส้นจะเริ่มจากพจน์ $T_N \delta g_T^{sl}$ แล้วทำการแปลงเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\Delta T_T \cdot \delta g_T^{sl} + T_T \cdot \Delta\delta g_T^{sl} \tag{3.65}$$

จากกฎของคูลอมบ์ (Coulomb's law) แรงเสียดทานในแนวสัมผัสขณะที่วัตถุมีการเลื่อนไถล สามารถหาได้จาก

$$T_T = \mu T_N \cdot \frac{T_T{}^{trial}}{\left|T_T{}^{trial}\right|} \tag{3.66}$$

การแปลงเชิงเส้นของ T_T ภายใต้ค่าการเคลื่อนตัว คือ

$$\begin{aligned} \Delta T_T &= \mu \Delta T_N \cdot \frac{T_T{}^{trial}}{\left|T_T{}^{trial}\right|} + \mu T_N \cdot \Delta \frac{T_T{}^{trial}}{\left|T_T{}^{trial}\right|} \\ &= \mu \varepsilon_T \Delta g_N \cdot \frac{T_T{}^{trial}}{\left|T_T{}^{trial}\right|} \end{aligned} \tag{3.67}$$

จากสมการ (3.67) พจน์หลังจะถูกตัดทิ้งไปเนื่องจากเป็นค่าคงที่ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\Delta T_T = \mu \varepsilon_T \cdot \frac{T_T{}^{trial}}{\left|T_T{}^{trial}\right|} \cdot \{N_s\}^T \Delta \mathbf{u}_s \tag{3.68}$$

และการแปลงเชิงเส้นของ δg_T^{sl} จะมีลักษณะเหมือนกับสมการ (3.59) เพียงละพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ g_T^{st} ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\Delta\delta g_T^{sl} = \eta_s{}^T \left[K_{\Delta\delta}^{sl}\right] \Delta\mathbf{u}_s \tag{3.69}$$

โดย

$$\left[K_{\Delta\delta}^{sl}\right] = \frac{1}{l}(\{N_s\}\{N_{os}\}^T + \{N_s\}\{N_{os}\}^T) - \frac{g_N}{l^2}(\{N_{os}\}\{T_{os}\}^T + \{T_{os}\}\{N_{os}\}^T) \tag{3.70}$$

นำไปเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์แข็งเกร็งของการสัมผัสแบบมีความเสียดทานในกรณีเลื่อนไถล ได้เป็น

$$\left[K_{CT}^{sl}\right] = T_T\left[K_{\Delta\delta}^{sl}\right] + \mu\varepsilon_T \; \frac{T_T{}^{trial}}{\left|T_T{}^{trial}\right|} \{T_s^{sl}\}\{N_s\}^T \tag{3.71}$$

สังเกตได้ว่า เมตริกซ์นี้เป็นเมตริกซ์ที่ไม่สมมาตร (unsymetric matrix)

3.5 ขั้นตอนการคำนวณของปัญหาการสัมผัส

ในหัวข้อนี้ จะแสดงขั้นตอนการคำนวณของปัญหาแบบมีความเสียดทาน ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\{G^f(u)\} = \{G(u)\} + \{T_N(u)\}^T \; \{N_S(u)\} + \{T_T(u)\}^T \; \{\tilde{T}_S(u)\} = 0 \tag{3.72}$$

โดย $\{G(u)\}$ มีค่าเท่ากับ $\{R(u) - F(u)\}$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์แรงลัพธ์ระหว่างแรงภายนอกกับแรงภายในจากสมการพื้นฐานของของแข็งที่ยังไม่รวมผลจากการสัมผัส

$\{G^f(u)\}$ เป็นเวคเตอร์แรงลัพธ์รวมของแรงภายในและแรงภายนอกที่รวมแรงสัมผัสแล้ว

จากนั้นนำสมการ (3.72) ไปทำการประยุกต์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันหรือทำการแปลงเชิงเส้น เพื่อทำการคำนวณแบบการทำซ้ำโดยอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$\left[K_T(u_i) + K_{CN}(u_i) + K_{CT}(u_i)\right]\{\Delta u\}_{i+1} = -\{G^f(u_i)\} \tag{3.73}$$

โดย $[K_T]$ คือเมตริกซ์ความแข็งเกร็งที่เกิดจากการแปลงเชิงเส้นของแรงลัพธ์ระหว่างแรงภายนอกกับแรงภายในจากสมการพื้นฐานของของแข็ง

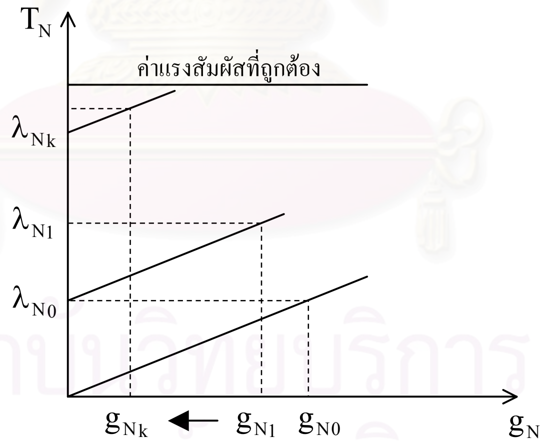
$\left[K_{CN}\right]$ และ $\left[K_{CT}\right]$ คือเมตริกซ์ความแข็งเกร็งที่เกิดจากการแปลงเชิงเส้นของแรงที่เกิดจากจุดสัมผัสในแนวตั้งฉากและในแนวสัมผัส ตามลำดับ

จากสมการ (3.72) ปัญหาที่เกิดขึ้นในเชิงการคำนวณก็คือค่า ε_N และ ε_T ที่กำหนดจะต้องมีค่ามาก ๆ ถึงจะทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากที่สุด แต่ถ้ามีค่ามากเกินไปก็อาจทำให้การคำนวณไม่ลู่เข้าสู่คำตอบได้ จึงได้มีการเพิ่มรอบการคำนวณเพื่อชดเชยค่าจำกัดของ ε_N และ ε_T สำหรับปัญหาการสัมผัส ค่า ε_N และ ε_T สัมพันธ์โดยตรงกับค่าแรงในแนวตั้งฉากกับแรงในแนวสัมผัส ตามลำดับ ดังนั้นการชดเชยนี้จะเกิดขึ้นกับแรงสัมผัส การเพิ่มรอบชดเชยนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left\{G^{fA}(u,\bar{\lambda}_N,\bar{\lambda}_T)\right\} = \{G(u)\} + \left[\left\{\bar{\lambda}_N\right\}^T + \{T_N(u)\}^T\right]\{N_S(u)\}$$

$$+\left[\left\{\bar{\lambda}_T\right\}^T + \{T_T(u)\}^T\right]\left\{\tilde{T}_S(u)\right\} = 0 \tag{3.74}$$

โดยที่ $\left\{\bar{\lambda}_N\right\}$ และ $\left\{\bar{\lambda}_T\right\}$ เป็นค่าแรงในแนวตั้งฉากและในแนวสัมผัส เป็นค่าคงที่ในแต่ละรอบชดเชย ซึ่งพฤติกรรมการเพิ่มรอบการชดเชยนี้สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 ขบวนการขั้นตอนการปรับค่าของแรงสัมผัสในแต่ละรอบชดเชย

ซึ่งสมการสำหรับการทำซ้ำสามารถเขียนเป็นสมการ ดังนี้

$$\left[K_T(u_i) + K_{CN}(u_i) + K_{CT}(u_i)\right]\{\Delta u\}_{i+1} = -\left\{G^{fA}(u_i,\bar{\lambda}_N,\bar{\lambda}_T)\right\} \tag{3.73}$$

ในการคำนวณค่าแรกที่สามารถหาได้คือการเลื่อนไถลรวมภายในช่วงเวลา Δt_{n+1}

$$\Delta \mathbf{g}_{T\,n+1} = (\bar{\xi}_{n+1} - \bar{\xi}_{n}) \cdot \mathbf{a}^{1} \tag{3.74}$$

โดย $\Delta \mathbf{g}_{T\,n+1}$ เป็นการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสจากเวลา t_n ไปยังเวลา t_{n+1}

ซึ่งนำไปหาค่าการเลื่อนไถลรวมใหม่ที่เวลา t_{n+1} มีจะค่าเท่ากับ

$$\mathbf{g}_{T\,n+1} = \mathbf{g}_{T\,n} + \Delta \mathbf{g}_{T\,n+1} \tag{3.75}$$

โดย $\mathbf{g}_{T\,n+1}$ เป็นการเคลื่อนที่รวมในแนวสัมผัสที่เวลา t_{n+1}

$\mathbf{g}_{T\,n}$ เป็นการเคลื่อนที่รวมในแนวสัมผัสที่เวลา t_n

และแบ่งออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่เป็นช่วงยืดหยุ่น และส่วนที่เป็นช่วงเลื่อนไถล จากเงื่อนไขดังนี้

$$\mathbf{T}^{\text{trial}}_{T\,n+1} = \varepsilon_T (\mathbf{g}_{T\,n+1} - \mathbf{g}^{\text{sl}}_{T\,n}) = \mathbf{T}_{T\,n} + \varepsilon_T \cdot \Delta \mathbf{g}_{T\,n+1} \tag{3.76}$$

$$f^{\text{trial}}_{S\,n+1} = \left| \mathbf{T}^{\text{trial}}_{T\,n+1} \right| - \mu T_{N\,n+1} \tag{3.77}$$

โดย $\mathbf{T}^{\text{trial}}_{T\,n+1}$ คือ แรงเสียดทานสุ่ม (trial tangent forces) ที่ได้จากค่าความชัน ε_T

$f^{\text{trial}}_{S\,n+1}$ คือ เกณฑ์การเลื่อนไถล คือ

$\mathbf{T}_{T\,n}$ คือ เวคเตอร์แรงในแนวสัมผัสที่เวลา t_n มีค่าเท่ากับ $\varepsilon_T (\mathbf{g}_{T\,n} - \mathbf{g}^{\text{sl}}_{T\,n})$

เมื่อค่าของฟังก์ชันเลื่อนไถลมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ $f^{\text{trial}}_{S\,n+1} \le 0$ แสดงว่าการสัมผัสนั้นจะอยู่ในสภาวะยึดติด และแรงเสียดทานที่ได้นั้นจะเกิดจากความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ในช่วงยืดหยุ่น คือ

$$\mathbf{T}_{T\,n+1} = \mathbf{T}^{\text{trial}}_{T\,n+1} = \varepsilon_T (\mathbf{g}_{T\,n+1} - \mathbf{g}^{\text{sl}}_{T\,n}) \tag{3.78}$$

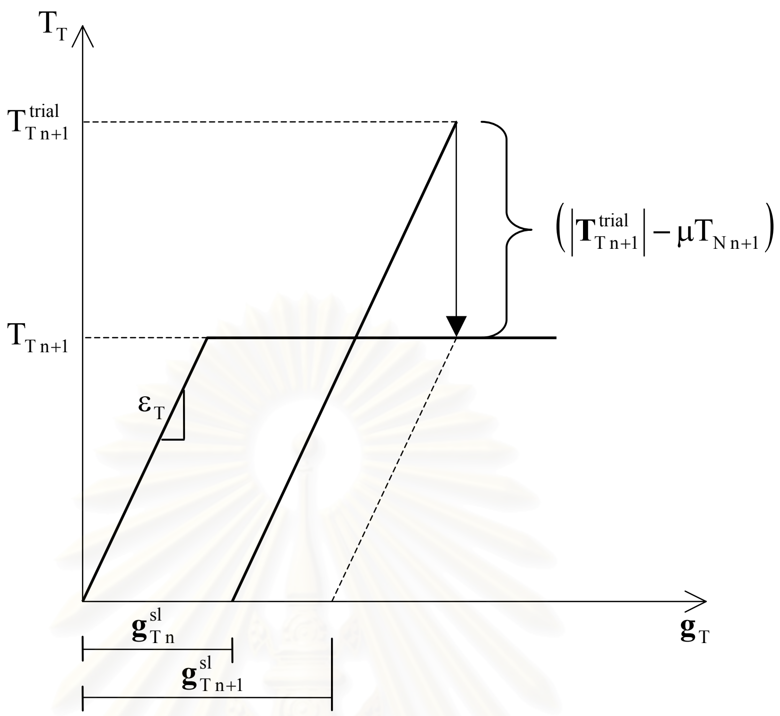
ถ้าค่าฟังก์ชันเลื่อนไถล $f^{\text{trial}}_{S\,n+1} > 0$ แสดงว่าการสัมผัสนั้นจะอยู่ในสภาวะเลื่อนไถลบนแนวสัมผัส และสามารถหาค่าแรงเสียดทานในสภาวะเลื่อนได้โดยใช้ขบวนการรีเทิร์นแมพพิง

ขบวนการรีเทิร์นแมพพิง [19] เป็นการนำสมการที่เกี่ยวข้องกับเวลามาประมาณค่าได้เป็น

$$\mathbf{T}_{T\,n+1} = \mathbf{T}_{T\,n} + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_T + \varepsilon_T (\Delta \mathbf{g}_{T\,n+1} - \Delta\gamma \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\text{trial}}_{T\,n+1}) \tag{3.79}$$

โดย $\bar{\mathbf{n}}^{\text{trial}}_{T\,n+1} = \dfrac{\mathbf{T}^{\text{trial}}_{T\,n+1}}{\left| \mathbf{T}^{\text{trial}}_{T\,n+1} \right|}$

$\Delta\gamma$ คือ ค่าเลื่อนไถลที่ได้จากขบวนการรีเทิร์นแมพพิง



รูปที่ 3.10 การปรับค่าแรงเสียดทานด้วยการฉายเงาลงบนผิวของการเลื่อนไถล

สำหรับกรณีแบบจำลองพฤติกรรมของคูลอมบ์ สามารถหาค่าเลื่อนไถล $\Delta\gamma$ ได้ดังนี้

$$\Delta\gamma = \frac{1}{\varepsilon_T}\left(\left|\mathbf{T}_{T\,n+1}^{trial}\right| - \mu T_{N\,n+1}\right) \tag{3.80}$$

สมการ (3.80) สามารถอธิบายได้ว่า ค่า $\mathbf{T}_{T\,n+1}^{trial}$ สำหรับการเกิดการเลื่อนไถลจะมีค่าเกินกว่าค่าจำกัดของคูลอมบ์ μT_N ดังแสดงในรูปที่ 3.6 จากนั้นนำส่วนที่เกินนี้มาปรับเป็นค่าการเลื่อนไถลที่เพิ่มขึ้น $\Delta\gamma$ พร้อมกับหาค่าแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นได้จากสมการ (3.79) ซึ่งขั้นตอนการคำนวณสำหรับปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทานที่อธิบายมาทั้งหมดสามารถแสดงเป็นขั้นตอนได้ดังรูปที่ 3.11

Initialize algorithm: set $\mathbf{u}_0 = 0$, $\bar{\lambda}_N{}^0 = 0$, $\bar{\lambda}_T{}^0 = 0$

Loop over augmentation: k = 1, … ,convergence
Loop over iteration: i = 1, … , convergence
Check for contact: if $g_{Ns} = (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_1) \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 \le 0 \rightarrow$ active node, segment
IF i = 1 ,set all active node to state of stick
ELSE update frictional forces by:
Starting values: $\Delta \mathbf{g}_{T\,n+1} = (\bar{\xi}_{n+1} - \bar{\xi}_n) \cdot \mathbf{a}^1$, $\mathbf{T}_{T\,n}$, $\mathbf{T}_{N\,n}$
Compute trial state: $\mathbf{T}^{trial}_{T\,n+1} = \mathbf{T}_{T\,n} + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_T + \varepsilon_T \Delta \mathbf{g}_T$
Check for state: $f^{trial}_{S\,n+1} = \left|\mathbf{T}^{trial}_{T\,n+1}\right| - \mu T_{N\,n+1}$
IF $f^{trial}_{S\,n+1} \le 0$: set $\mathbf{T}_{T\,n+1} = \mathbf{T}^{trial}_{T\,n+1}$ and $[K_{CN}],[K^{st}_{CT}]$
ELSE $f^{trial}_{S\,n+1} > 0$: perform return mapping
Solve for $\Delta\gamma : \Rightarrow \Delta\gamma = \dfrac{1}{\varepsilon_T}\left(\left|\mathbf{T}^{trial}_{T\,n+1}\right| - \mu T_{N\,n+1}\right)$
Then compute new frictional forces
$T_{Tn+1} + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_T + \varepsilon_T (\Delta \mathbf{g}_{T\,n+1} - \Delta\gamma \cdot \bar{\mathbf{n}}^{trial}_{T\,n+1})$
and set $[K_{CN}],[K^{sl}_{CT}]$
Solve: $\{G^{fA}(u, \bar{\lambda}_N, \bar{\lambda}_T)\} = 0$
Check for convergence: if $\left|G^{fA}(u, \bar{\lambda}_N, \bar{\lambda}_T)\right| \le$ tol. $\rightarrow$ End loop
End loop

Loop over contact nodes
Update: $\bar{\lambda}_{N\,k+1} = \left\langle \bar{\lambda}_{N\,k} + \varepsilon_N g_N \right\rangle$
$\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1}_T = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^k_T + \varepsilon_T (\Delta \mathbf{g}_{T\,n+1} - \Delta\gamma \cdot \bar{\mathbf{n}}^{trial}_{T\,n+1})$
Check for convergence: if $|g_{NS}| \le$ tol. $\rightarrow$ Stop
$k \leftarrow k + 1$
End loop

End loop

รูปที่ 3.11 ขั้นตอนการคำนวณแบบอูซาวาสำหรับปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน

โดยที่ เครื่องหมาย $\langle \bullet \rangle$ มีความหมายว่า $\langle b \rangle = \begin{cases} 0 & ;\text{if } b > 0 \\ b & ;\text{if } b < 0 \end{cases}$

บทที่ 4

เทคนิคเพิ่มเติมสำหรับการคำนวณ

ในบทนี้กล่าวถึงเทคนิคที่ช่วยสำหรับการคำนวณของตัวโปรแกรม หัวข้อ 4.1 เป็นวิธีการค้นหาจุดสัมผัส เป็นการหาขอบของวัตถุที่จะมาสัมผัสกัน และนำไปสร้างเป็นเอลิเมนต์สัมผัสที่เหมาะสม หัวข้อ 4.2 แสดงให้เห็นแนวคิดของการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำมาใช้ร่วมกับโปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการสัมผัส และหัวข้อ 4.3 แสดงวิธีการที่ช่วยให้การคำนวณมีการลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็วขึ้น เรียกวิธีนี้ว่าวิธีค้นหาเชิงแนวเส้น

4.1 เทคนิคการค้นหาจุดสัมผัส

ขั้นตอนการค้นหาจุดสัมผัส (contact searching algorithm) เริ่มจากการกำหนดขอบเขตของวัตถุสัมผัส (contact body) และขอบเขตของวัตถุหลัก จากนั้นทำการตรวจสอบ จุดสัมผัส (contact node) ที่อยู่บนขอบของวัตถุรอง ว่าจุดใดบ้างที่มีโอกาสสัมผัสหรือเหลื่อมล้ำเข้าไปในขอบเขตของวัตถุหลัก [20] วิธีการค้นหาจุดสัมผัสที่กล่าวต่อไป เป็นวิธีการแบบวัตถุหลักและวัตถุรอง ซึ่งนำมาใช้ร่วมกับเทคนิคการหาแบบ HITA (hierarchy territory algorithm) [21] เป็นหลักการที่ช่วยในการกำหนดคู่สัมผัสได้เร็วขึ้น ซึ่งนำไปใช้ได้ทั้งกรณีสองมิติ และสามมิติ

4.1.1 เทคนิคการค้นหาแบบ HITA (hierarchy territory algorithm)

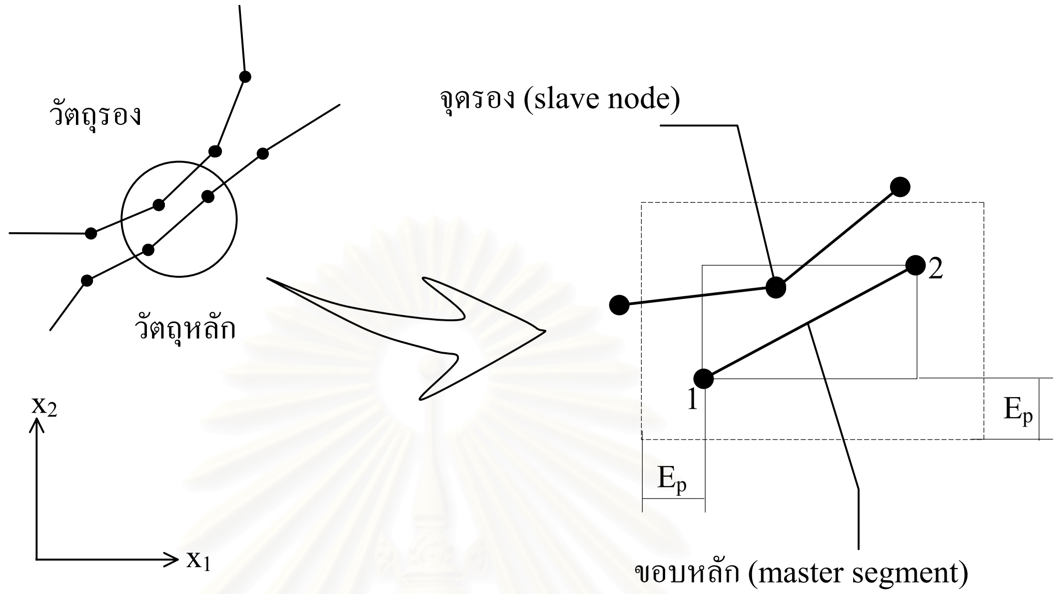
ในปัญหาแบบสองมิติ ทำการพิจารณาวัตถุหลักและวัตถุรองได้ดังรูปที่ 4.1 แนวเขตของขอบวัตถุหลัก คือรูปสี่เหลี่ยมที่เล็กที่สุดซึ่งขนานกับแกนหลัก x_1 และ x_2 ครอบคลุมขอบวัตถุหลักนั้นๆ ทั้งหมด และในทางคณิตศาสตร์สามารถกำหนดแนวเขต ได้ดังนี้

$$T = \left\{ (x_1, x_2) \quad / x_i^a < x_i < x_i^b \quad i = 1,2 \right\} \tag{4.1}$$

สมการ (4.1) หมายความว่า T คือค่าใดๆบนพิกัด x_1 และ x_2 โดยมีเงื่อนไขว่า x_i ต้องอยู่ในช่วงระหว่าง x_i^a ถึง x_i^b

$$x_i^a = \min(x_i^1, x_i^2) \qquad ,i = 1\ ,2 \tag{4.2.1}$$

$$x_i^b = \max(x_i^1, x_i^2) \qquad ,i = 1\ ,2 \tag{4.2.2}$$



รูปที่ 4.1 แนวเขตของแต่ละขอบวัตถุหลัก และส่วนของแนวเขตขยาย E_p

โดย x_i^1 และ x_i^2 กำหนดเป็นค่าพิกัดของจุด 1 และจุด 2 ของขอบตามลำดับ ดังรูป 4.1 ส่วนที่ถูกขยายออกมาจากแนวเขตของขอบ เรียกว่า แนวเขตขยาย (expanded territory) กำหนดให้เป็น T_e คือ

$$T_e = \left\{ (x_1, x_2) \quad / x_i^a - E_p < x_i < x_i^b + E_p \quad i = 1,2 \right\} \tag{4.3}$$

โดยที่ E_p เป็นขนาดขยายของแนวเขต

ขอบบนวัตถุหลักจะถูกกำหนดให้มีทั้งด้านบวกและด้านลบ ด้านบวก หมายถึงด้านที่อาจมีการสัมผัสเกิดขึ้นหรือด้านที่ไม่ใช่เนื้อวัตถุ ส่วนด้านลบหมายถึงด้านที่อยู่ในเนื้อวัตถุ ดังนั้นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกับขอบของวัตถุจะถูกกำหนดให้อยู่ในด้านบวกเสมอ ดังรูปที่ 4.2(a) เวคเตอร์ในแนวสัมผัสของขอบหลัก คือเวคเตอร์ที่เริ่มจากจุด 1 ไปยังจุด 2 ซึ่งแทนด้วย $\mathbf{a}^1$ จากนั้นสามารถนำไปหาเวคเตอร์ตั้งฉากได้จาก

$$\mathbf{n}^1 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}^1 \tag{4.4}$$

โดยที่ $\mathbf{e}_3 = \lfloor 0 \quad 0 \quad 1 \rfloor$ แต่ในกรณีสองมิติ เวคเตอร์ $\mathbf{n}^1$ และ $\mathbf{a}^1$ ขนาดในทิศทางตั้งฉากกับระนาบจะมีค่าเท่ากับ 0 เสมอ จุดรองจะสัมผัสกับขอบหลักได้ ถ้า

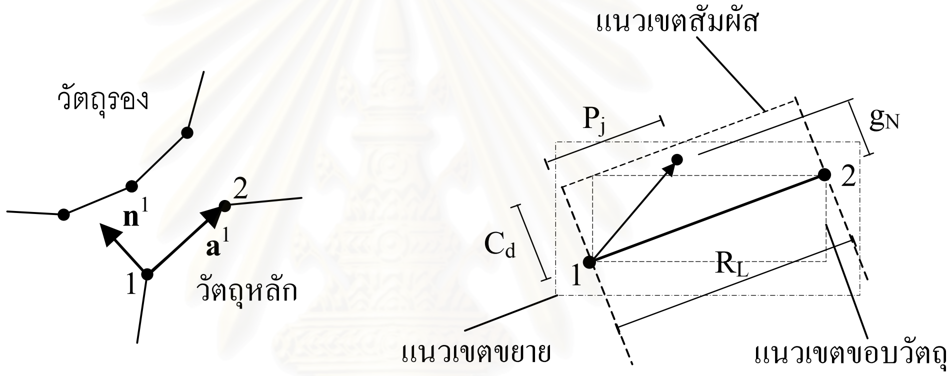
$$0 \le P_j \le R_L \quad \text{และ} \quad g_N \le C_d \tag{4.5}$$

R_L คือ ขนาดความยาวของขอบ

P_j คือ ขนาดเงาของเวคเตอร์ที่เกิดจากจุด 1 ไปยังจุดสัมผัส

g_N คือ ระยะห่างที่ใกล้ที่สุดที่วัดจาก จุดรองไปยังขอบหลัก

C_d คือ ค่าที่กำหนดขึ้นเพื่อเป็นแนวเขตของการสัมผัส



(a) (b)

รูปที่ 4.2 (a) เวคเตอร์ตั้งฉากและเวคเตอร์ในแนวสัมผัส
(b) ตัวกำหนดเงื่อนไขของการสัมผัสบนขอบหลัก

เงื่อนไขในสมการ (4.5) แสดงให้เห็นถึงแนวเขตของการสัมผัส (contact territory)

จากที่กล่าวในข้างต้น สิ่งแรกที่ต้องทำสำหรับการค้นหาจุดสัมผัส คือการตรวจสอบว่า แนวเขตขยายของขอบวัตถุรองใดบ้างที่มีการเหลื่อมล้ำกับแนวเขตขยายของขอบวัตถุหลัก ด้วยสมการเงื่อนไขต่อไปนี้

$$T_{e1} = \left\{ (x_1, x_2) \quad / x_{i1}^{\min} < x_i < x_{i1}^{\max} \right\} \tag{4.6}$$

$$T_{e2} = \left\{ (x_1, x_2) \quad / x_{i2}^{\min} < x_i < x_{i2}^{\max} \right\} \tag{4.7}$$

โดย T_{e1} และ T_{e2} เป็นแนวเขตขยายของขอบวัตถุหลักและวัตถุรองตามลำดับ

x_{i1}^{min} และ x_{i1}^{max} คือ ค่าพิกัดแนวเขตขยายของขอบวัตถุหลัก

x_{i2}^{min} และ x_{i2}^{max} คือค่าพิกัดแนวเขตขยายของขอบวัตถุรอง

กำหนดให้ T_I แทนส่วนที่เหลื่อมล้ำกันระหว่าง T_{e1} กับ T_{e2}

$$T_I = \left\{(x_1, x_2) \qquad / \overline{x}_{i1}^{min} < x_i < \overline{x}_{i1}^{max} \right\} \tag{4.8}$$

โดย

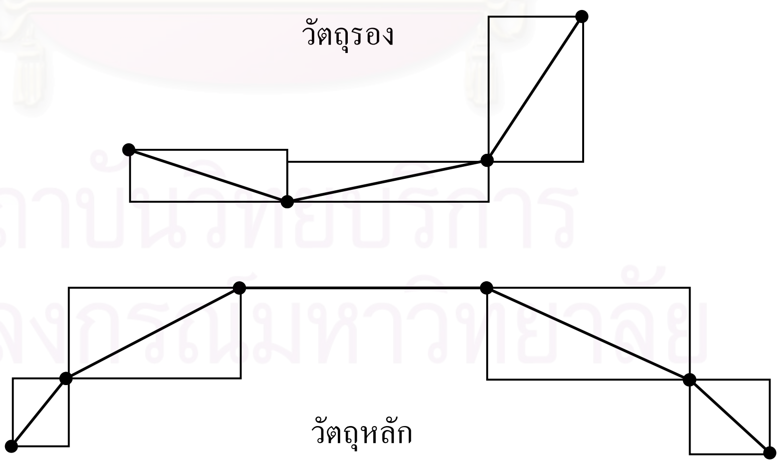
$$\overline{x}_i^{min} = \max(x_{i1}^{min}, x_{i2}^{min}) \tag{4.9}$$

$$\overline{x}_i^{max} = \min(x_{i1}^{max}, x_{i2}^{max}) \tag{4.10}$$

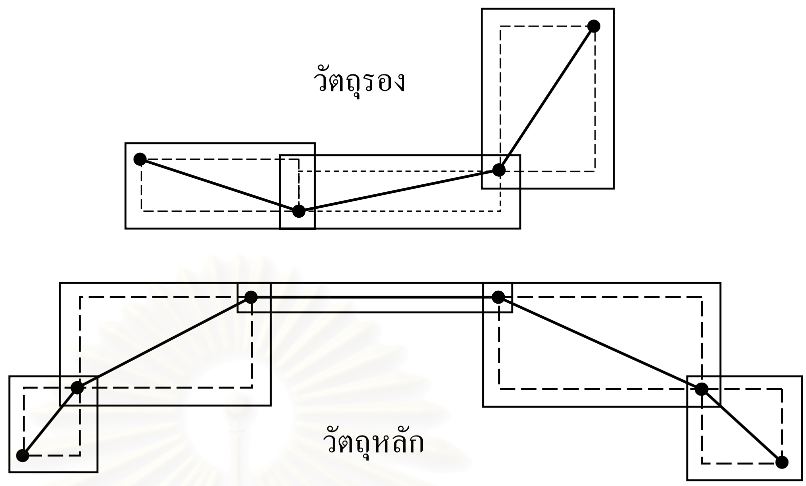
เพื่อตรวจสอบความเหลื่อมล้ำต้องอาศัยตรรกะดังต่อไปนี้

$$L_i = \overline{x}_i^{min} \le \overline{x}_i^{max} \qquad , i = 1, 2 \tag{4.11}$$

จากสมการ (4.11) ถ้า L_1 เป็นจริง และ L_2 เป็นจริงขอบของวัตถุรองกับขอบวัตถุหลักคู่นั้นจะเกิดการเหลื่อมล้ำ แต่ถ้า L_1 หรือ L_2 ไม่เป็นจริงขอบของวัตถุรองกับขอบวัตถุหลักคู่นั้น จะไม่เหลื่อมล้ำกัน

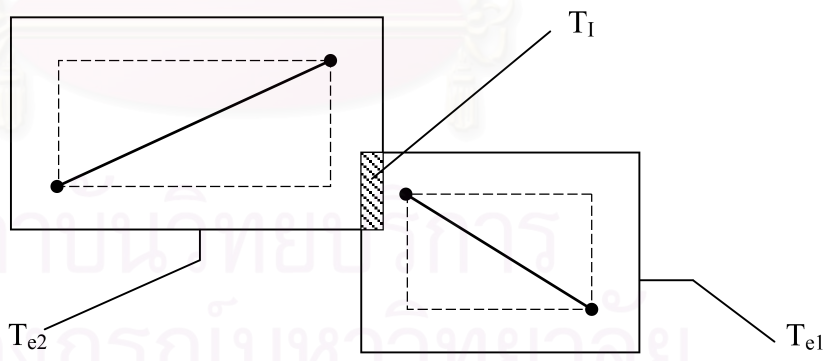


รูปที่ 4.3 แสดงถึงแนวเขตของขอบวัตถุ



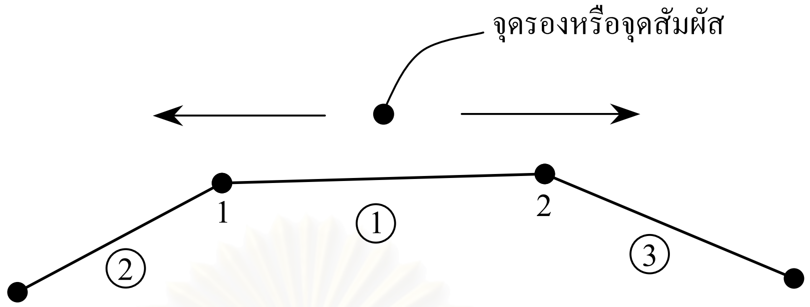
รูปที่ 4.4 แสดงถึงแนวเขตของขอบวัตถุที่ทำการขยายแล้วหรือเรียกว่าแนวเขตขยาย

จากรูปที่ 4.3 และรูปที่ 4.4 แสดงให้เห็นถึงการกำหนดแนวเขตของขอบวัตถุและแนวเขตขยายของขอบวัตถุอย่างชัดเจน และจากสมการ (4.8) สามารถแสดงให้เห็นถึงการเหลื่อมล้ำได้ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 การเหลื่อมล้ำกันของแนวเขตขยาย

ในขั้นต่อไปหลังจากที่ตรวจสอบว่าแนวเขตขยายของขอบหลักกับขอบรองเกิดการเหลื่อมล้ำกัน ให้ทำการตรวจสอบขั้นต่อไปคือจุดของวัตถุรองอยู่ในแนวเขตสัมผัสของขอบหลักหรือขอบค้างเคียงกับขอบหลักหรือไม่ ดังแสดงในรูปที่ 4.6

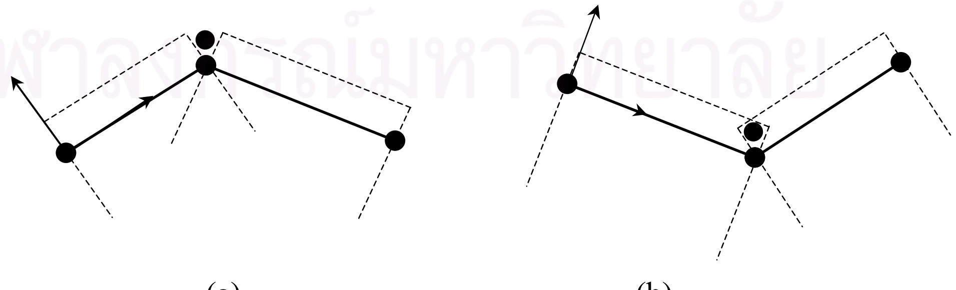


รูปที่ 4.6 การตรวจสอบของจุดสัมผัสกับขอบหลักและขอบข้างเคียงกับขอบหลัก

แล้วเมื่อทำการตรวจสอบขอบข้างเคียงกับขอบหลักด้วยอาจเกิดเหตุการณ์พิเศษ 2 กรณี คือ กรณีแรก วัตถุอาจไม่อยู่ในแนวเขตสัมผัสของขอบใดเลย แต่ทั้งๆที่ระยะห่างจากขอบนั้นมีค่าน้อยกว่าระยะควบคุม C_d และกรณีที่สอง จุดสัมผัสนั้นอาจอยู่ในบริเวณแนวเขตสัมผัสของขอบหลักและขอบข้างเคียงด้วย ดังแสดงในรูปที่ 4.7

กรณีที่หนึ่ง เรียกว่าจุดสัมผัสตกอยู่บนผิวมุมแหลม ดังรูปที่ 4.7(a) และในกรณีนี้การกำหนดคู่สัมผัสนั้นจะถูกกำหนดให้เป็นแบบจุดถึงจุด (node to node) และทิศทางการชนกันนั้นจะมีทิศทางในแนวที่จุดสัมผัสตรงไปยังจุดของขอบหลักที่ใกล้ที่สุด

กรณีที่สอง เรียกว่าจุดสัมผัสตกอยู่ในร่องมุม ดังรูปที่ 4.7(b) เช่นเดียวกับกรณีแรกคือการกำหนดคู่สัมผัสนั้นจะถูกกำหนดให้เป็นแบบจุดถึงจุด (node to node) และทิศทางการชนกันนั้นจะมีทิศทางในแนวที่จุดสัมผัสตรงไปยังจุดของขอบหลักที่ใกล้ที่สุด



(a) (b)

รูปที่ 4.7 (a) จุดสัมผัสตกอยู่บนขอบมุมแหลม
(b) จุดสัมผัสตกอยู่ในร่องมุม

4.1.2 ขั้นตอนการค้นหาจุดสัมผัส

ในกระบวนการค้นหาสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1) ทำการตรวจสอบแนวเขตขยายของขอบรองกับแนวเขตขยายของขอบหลัก ว่ามีคู่ใดบ้างที่เกิดการเหลื่อมล้ำกัน
2) เมื่อเกิดการเหลื่อมล้ำกันในข้อ 1 ให้ตรวจสอบต่อไปว่าจุดสัมผัสของขอบรองจะอยู่ในแนวเขตสัมผัสของขอบหลักหรือไม่

2.1) ถ้าอยู่ในแนวเขตสัมผัสของขอบหลัก แล้วดูว่าจุดสัมผัสยังอยู่ในขอบข้างเคียงหรือไม่

2.1.1) ถ้ามีให้กำหนดเอลิเมนต์สัมผัสเป็นแบบจุดถึงจุด

2.1.2) ถ้าไม่มีให้กำหนดเอลิเมนต์สัมผัสเป็นแบบจุดถึงขอบหลัก

2.2) ถ้าไม่อยู่ในแนวเขตสัมผัสของขอบหลักจากข้อ 2 แล้วดูว่าจุดสัมผัสยังอยู่ในขอบข้างเคียงหรือไม่

2.2.1) ถ้ามีให้ทำการตรวจสอบในข้อหนึ่งใหม่โดยการเปลี่ยนคู่ของขอบหลักด้วยขอบรองอื่นต่อไป

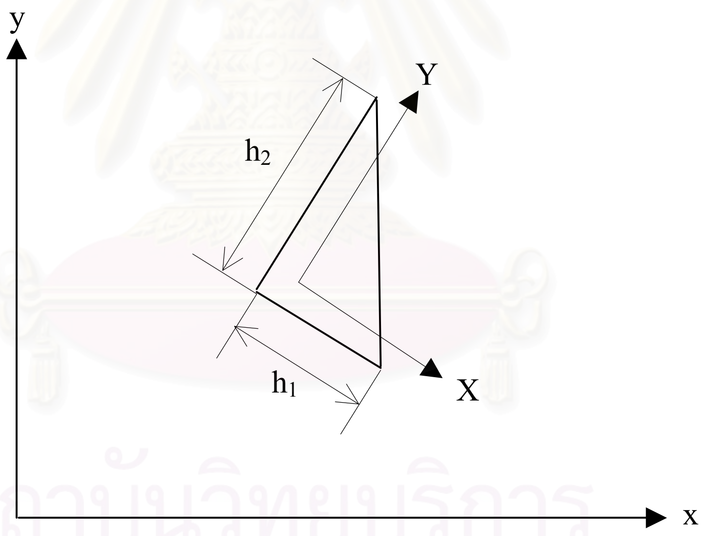
2.2.2) ถ้าไม่มีให้ทำการตรวจสอบต่อไปอีกว่า ระยะห่างจากจุดสัมผัสไปยังจุดของขอบหลักที่ใกล้ที่สุด ว่ามีระยะห่างน้อยกว่าระยะควบคุม C_d หรือไม่ ถ้าน้อยกว่าให้กำหนดเอลิเมนต์สัมผัสเป็นแบบจุดถึงจุด ถ้ามากกว่าให้ทำการการเปลี่ยนคู่ของขอบหลักด้วยขอบรองอื่นต่อไป

ในกรณีของการสัมผัสแบบทางเดียว (one pass treatment) จุดของวัตถุหลักอาจเหลื่อมล้ำเข้าไปในวัตถุรองได้ เพื่อให้เหตุการณ์เช่นนี้เกิดขึ้นน้อยที่สุด ควรทำการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น หรือใช้วิธีการสัมผัสแบบสองทาง (two pass treatment) ซึ่งวิธีนี้เป็นการสลับกันระหว่างวัตถุ โดยให้วัตถุหลักกลายเป็นวัตถุรองและวัตถุรองกลายเป็นวัตถุหลักสำหรับลำดับขั้นภาระครั้งต่อไป

4.2 ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมีหลักการโดยทั่วไปคือ การใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของเกรเดียนท์ของคำตอบสูง และใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของเกรเดียนท์ของคำตอบต่ำ

รูปที่ 4.8 แสดงแนวคิดสำหรับการเอลิเมนต์ที่มีขนาดเหมาะสม สมมติว่าภายในเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในแนวแกน X มากกว่าในแนวแกน Y ดังนั้นเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณาจึงควรมีขนาดของเอลิเมนต์ h_1 ในแนวแกน X สั้นกว่าขนาดของเอลิเมนต์ h_2 ในแนวแกน Y เพื่อให้ผลลัพธ์ในแนวแกน X ที่คำนวณได้มีความถูกต้องสูงดังนั้นจึงจำเป็นต้องคำนวณหาทิศทางแกน X และ Y รวมทั้งขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในแนวแกนทั้งสอง



รูปที่ 4.8 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นในแนวแกน X และ Y

จากหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stresses) และทิศทางของแนวแกนหลัก (principal directions) ในปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) สามารถนำมาประยุกต์เพื่อใช้หาทิศทางของแกน X และแกน Y รวมทั้งขนาดของค่า h_1 และ h_2 ซึ่งหลักการดังกล่าวมีดังต่อไปนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของความเค้นที่ตำแหน่งใดๆบนระนาบ x-y นั้นประกอบไปด้วย $\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}$ และ $\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}$ ซึ่งจะนำค่าทั้งสามนี้มาคำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y รวมทั้งทิศทางของแกนหลัก โดยใช้แนวคิดดังที่อธิบายในสมการ (4.12) ซึ่งมีรายละเอียดในเอกสารอ้างอิง [16] นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2\sigma}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ต่อไปจะคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ h_1 และ h_2 จากค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของเกร-เดียนท์ของความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y ที่คำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}\right| h_1^2 = \left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial Y^2}\right| h_2^2 = \text{ค่าคงที่} = \lambda_{max} h_{min}^2 \tag{4.13}$$

โดย $\lambda_{max} = \max\left[\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial Y^2}\right|\right]$ ของทุกจุดต่อในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นและ h_{min} เป็นขนาดความกว้างของเอลิเมนต์ที่สั้นที่สุดที่จะใช้ในการสร้างรูปแบบจำลองเอลิเมนต์ใหม่ต่อไป ซึ่งขั้นตอนการคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองต่างๆ ในสมการ (4.12) และ (4.13) ได้อธิบายโดยละเอียดในเอกสารอ้างอิง [22]

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เลือกใช้ความเค้นวอนมิส (Von-Misses stress) เป็นตัวบ่งบอกถึงความเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ เพื่อนำไปทำการปรับเอลิเมนต์ และใช้โปรแกรม FEMESH [23] ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

4.3 วิธีการค้นหาแนวเส้น (Line Search Method)

โดยทั่วไปแล้ววิธีการของนิวตัน-ราฟสันเป็นวิธีการทำซ้ำเพื่อลู่เข้าสู่คำตอบที่มีประสิทธิภาพมากวิธีหนึ่ง แต่ในบางกรณีของปัญหาที่เกิดการเสียรูปแบบซับซ้อนมากขึ้น อาจทำให้การลู่เข้าหาคำตอบเป็นไปได้ยาก ดังนั้นการใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันอาจไม่เพียงพอสำหรับการทำซ้ำ จึงได้มีการนำเทคนิคมาทำการปรับปรุงขั้นตอนของการทำซ้ำที่เรียกว่า วิธีการค้นหาแนวเส้น [24]

เทคนิคนี้เกิดจากการนำค่าเวคเตอร์ $\{\Delta u\}$ ในสมการ (2.49) มาปรับหาเวคเตอร์ที่เหมาะสมที่สุด สำหรับการเดาค่าในครั้งต่อไป โดยมีการควบคุมขนาดของแต่ละครั้งของการทำซ้ำด้วยพารามิเตอร์ s คือ

$$\{u_{k+1}\} = \{u_k\} + s\,\{\Delta u\} \tag{4.14}$$

ดังนั้นค่าของ s จะต้องเลือกให้มีค่าเหมาะสมที่สุด เพื่อทำให้พลังงานศักย์รวมของระบบมีค่าต่ำที่สุด สำหรับทิศทางของเวคเตอร์ $\{\Delta u\}$ หรือกล่าวได้ว่าเวคเตอร์เศษตกค้างของแรงรวมของระบบในครั้งสุดท้ายของการทำซ้ำ $\{G(u_k + s\,\Delta u)\}$ จะมีทิศทางที่ตั้งฉากกับเวคเตอร์ที่เพิ่มขึ้น $\{\Delta u\}$ หรือเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$R(s) = \{\Delta u\}^T \cdot \{G(x_k + s\,\Delta u)\} = 0 \tag{4.15}$$

แต่เนื่องจากความไม่เป็นเชิงเส้นของฟังก์ชัน $R(s)$ และเงื่อนไขในสมการ (4.15) เป็นค่าที่จำกัดเกินไปในการทำซ้ำแต่ละครั้ง ดังนั้นในการคำนวณจริง การหาค่า s ที่เหมาะสมจะให้เป็นไปตามสมการดังนี้

$$|R(s)| < \rho |R(0)| \tag{4.16}$$

โดยทั่วไปแล้ว ค่า ρ จะให้มีค่าเท่ากับ 0.5 ถ้าภายใต้ภาวะปกติที่ s = 1 ซึ่งมีค่าเท่ากับการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน แล้วทำให้สมการ (4.16) เป็นจริง ก็จะไม่มีความจำเป็นสำหรับการค้นหาแนวเส้น แต่ถ้าในภาวะปกติทำให้สมการ (4.16) ไม่เป็นจริง จึงจำเป็นต้องมีการหาค่า s ที่เหมาะสม จากการประมาณค่า $R(s)$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) ของตัวแปร s โดยการประมาณจากค่าที่รู้ คือ $R(0)$ จากการหาค่าอนุพันธ์ของสมการ (4.13) คือ $\left.\frac{dR}{ds}\right|_{s=0}$ โดยที่

$$\frac{dR}{ds} = \{\Delta u\}^T \cdot \left.\frac{\partial\{G\}}{\partial\{u\}}\right|_{u=u_k} = \{\Delta u\}^T \cdot [K(x_k)]\{\Delta u\} = -\{\Delta u\}^T \cdot \{G(u_k)\} = -R(0) \tag{4.17}$$

และอีกค่าหนึ่งคือ เวคเตอร์เศษตกค้างของแรงรวม ที่ s = 1

$$R(1) = \{\Delta u\}^T \cdot \{\mathbf{G}(u_k + \Delta u)\} \tag{4.18}$$

จากนั้นการประมาณค่าแบบควอดราติกของ $R(s)$ คือ

$$R(s) \approx R(0)(1-s) + R(1)(s^2) = 0 \tag{4.19}$$

ทำให้หาค่า s ได้จากสมการต่อไปนี้

$$s = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha} \quad ; \quad \alpha = \frac{R(0)}{R(1)} \tag{4.20}$$

ถ้า $\alpha < 0$ ดังรูปที่ 4.9(a) ดังนั้นค่าที่อยู่ในเครื่องหมายรากที่สองมีค่าเป็นบวกทำให้

$$s_1 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha} \tag{4.21}$$

และถ้า $\alpha > 0$ ดังรูปที่ 4.9(b) ดังนั้นให้

$$s_1 = \frac{\alpha}{2} \tag{4.22}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นขั้นตอนการคำนวณได้ดังนี้

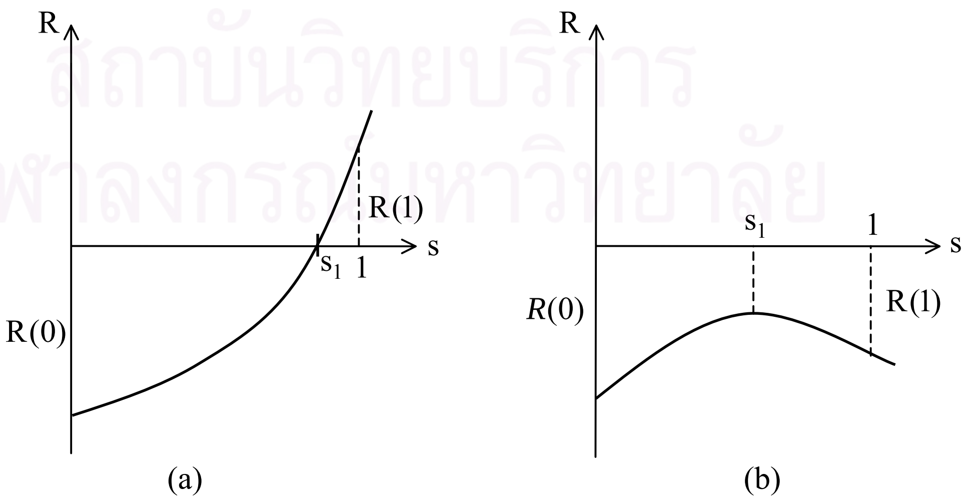
IF($|R(s)| \geq \rho |R(0)|$ หรือ $R(1) \cdot R(0) < 0$) THEN

ทำการหาค่า $s \in (0,1]$ ที่ทำให้ $|R(s)| < \rho |R(0)|$

ELSE

$s = 1$

ENDIF



รูปที่ 4.9 การค้นหาแนวเส้นแบบกำลังสอง

บทที่ 5

โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสัมผัสของวัสดุยืดหยุ่น

จากการศึกษาในส่วนของทฤษฎีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสัมผัสสองมิติของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นแบบความเครียดในระนาบ รวมไปถึงลักษณะต่างๆของสมการ สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โดยให้โปรแกรมมีชื่อว่า LEContact และในบทนี้จะอธิบายถึงลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่นำไปใช้กับตัวโปรแกรม และรายละเอียดต่างๆของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น

5.1 ขั้นตอนการคำนวณ

ตัวโปรแกรมจะประกอบด้วย 1 โปรแกรมหลัก (main program) และ โปรแกรมย่อย (subroutine) ที่สำคัญโดยมีขั้นตอนลำดับโปรแกรมดังรูปที่ 5.1

5.2 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าของโปรแกรม LEContact ประกอบด้วยส่วนต่างๆ ดังนี้

ส่วนที่ 1 ข้อความที่อธิบายถึงรายละเอียดของปัญหา

ตัวอย่าง

```
1
ELASTIC BLOCK ON RIGID GROUND
```

บรรทัดแรก ระบุจำนวนบรรทัดของตัวรายละเอียด

บรรทัดถัดมาอธิบายรายละเอียดของปัญหาที่จะทำการคำนวณ

ส่วนที่ 2 ข้อมูลที่แสดงจำนวนขนาดของปัญหาและค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น

ตัวอย่าง

NPOIN	NELEM	NIBC	NFORCE	NSUB	PENORM	PETANG
235	402	6	30	2	1.E8	1.E4

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูลและค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้

NPOIN จำนวนจุดต่อทั้งหมดของปัญหา

NELEM จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดของปัญหา

NIBC จำนวนจุดต่อที่มีการกำหนดเงื่อนไขของการเคลื่อนที่

NFORCE จำนวนแรงที่กระทำบนจุดต่อ

NSUB จำนวนขั้นของภาระ

PENORM ค่าพีนอลทีในแนวตั้งฉาก

PETANG ค่าพีนอลทีในแนวสัมผัส

บรรทัดสอง ระบุค่าของพารามิเตอร์ต่างๆตามคำอธิบายในบรรทัดแรก

ส่วนที่ 3 ข้อมูลคุณสมบัติของวัสดุ

ตัวอย่าง

```
2
NO.   ELAS   PR   MU
1     1.E3   .3   .5
2     1.E13  .3   .5
```

บรรทัดแรก จำนวนของวัสดุที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์

บรรทัดสอง อธิบายลักษณะข้อมูล

MAT หมายเลขของวัสดุ

ELAS ค่ายังโมดูลัส

PR ค่าอัตราส่วนปัวซอง

MU ค่าสัมประสิทธ์ความเสียดทานระหว่างวัตถุสัมผัสกับวัตถุเป้าหมาย

บรรทัดต่อมาระบุค่าตัวเลขตามบรรทัดที่สอง

หมายเหตุ สำหรับโปรแกรม LEContact จะกำหนดให้วัสดุหมายเลข 1 เป็นวัสดุของวัตถุสัมผัสเสมอส่วนหมายเลขอื่น จะเป็นของวัตถุเป้าหมาย

ส่วนที่ 4 ข้อมูลของจุดต่อ

ตัวอย่าง

NODE	X	Y
1	-2.0000	-.00000
2	2.0000	-.00000
3	-1.8000	-.00000
4	-1.6000	-.00000
.	.	.
.	.	.
.	.	.
233	-2.5000	-.30000
234	2.5000	-.30000
235	2.5000	.00000

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูลของจุดต่อ

NODE หมายเลขจุดต่อ

X ตำแหน่งของจุดต่อบนแกน X

Y ตำแหน่งของจุดต่อบนแกน Y

บรรทัดต่อมาค่าตัวเลขระบุตามบรรทัดแรก

ส่วนที่ 5 ข้อมูลของเอลิเมนต์

ตัวอย่าง

ELEM	I	J	K	TYPE
1	60	3	231	1
2	60	1	3	1
3	231	4	222	1
4	231	3	4	1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
400	33	61	31	1
401	232	233	235	2

402	233	234	235	2

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูลของจุดต่อ

ELEMENT หมายเลขเอลิเมนต์

I จุดต่อที่ 1

J จุดต่อที่ 2

K จุดต่อที่ 3

TYPE หมายเลขวัสดุที่เป็นของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อมาค่าตัวเลขระบุตามบรรทัดแรก

ส่วนที่ 6 ข้อมูลจุดต่อที่มีการกำหนดค่าการเคลื่อนตัว

ตัวอย่าง

NODE	IBCX	IBCY	DX	DY
1	0	1	0.0	0.0
2	0	1	0.0	0.0
232	1	1	0.0	0.0

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูลของจุดต่อ

NODEBC หมายเลขต่อที่มีการกำหนดเงื่อนไขการเคลื่อนตัว

IBCX มีค่าเป็น 0 เมื่อไม่มีการบังคับในแนวแกน X

มีค่าเป็น 1 เมื่อมีการบังคับในแนวแกน X

IBCY มีค่าเป็น 0 เมื่อไม่มีการบังคับในแนวแกน Y

มีค่าเป็น 1 เมื่อมีการบังคับในแนวแกน Y

DX การเคลื่อนตัวในแนวแกน X

DY การเคลื่อนตัวในแนวแกน Y

บรรทัดต่อมาค่าตัวเลขระบุตามบรรทัดแรก

ส่วนที่ 7 ข้อมูลจุดต่อที่มีการกำหนดแรง

ตัวอย่าง

NODE	FX	FY
2	6.0000000	0.0
22	6.0000000	0.0
23	12.000000	0.0
49	0.0	-40.0
50	0.0	-40.0
51	0.0	-20.0

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูลของจุดต่อ

FORCE   จุดต่อที่มีการกำหนดค่าแรง

FX   ค่าแรงในแนวแกน X

FY   ค่าแรงในแนวแกน Y

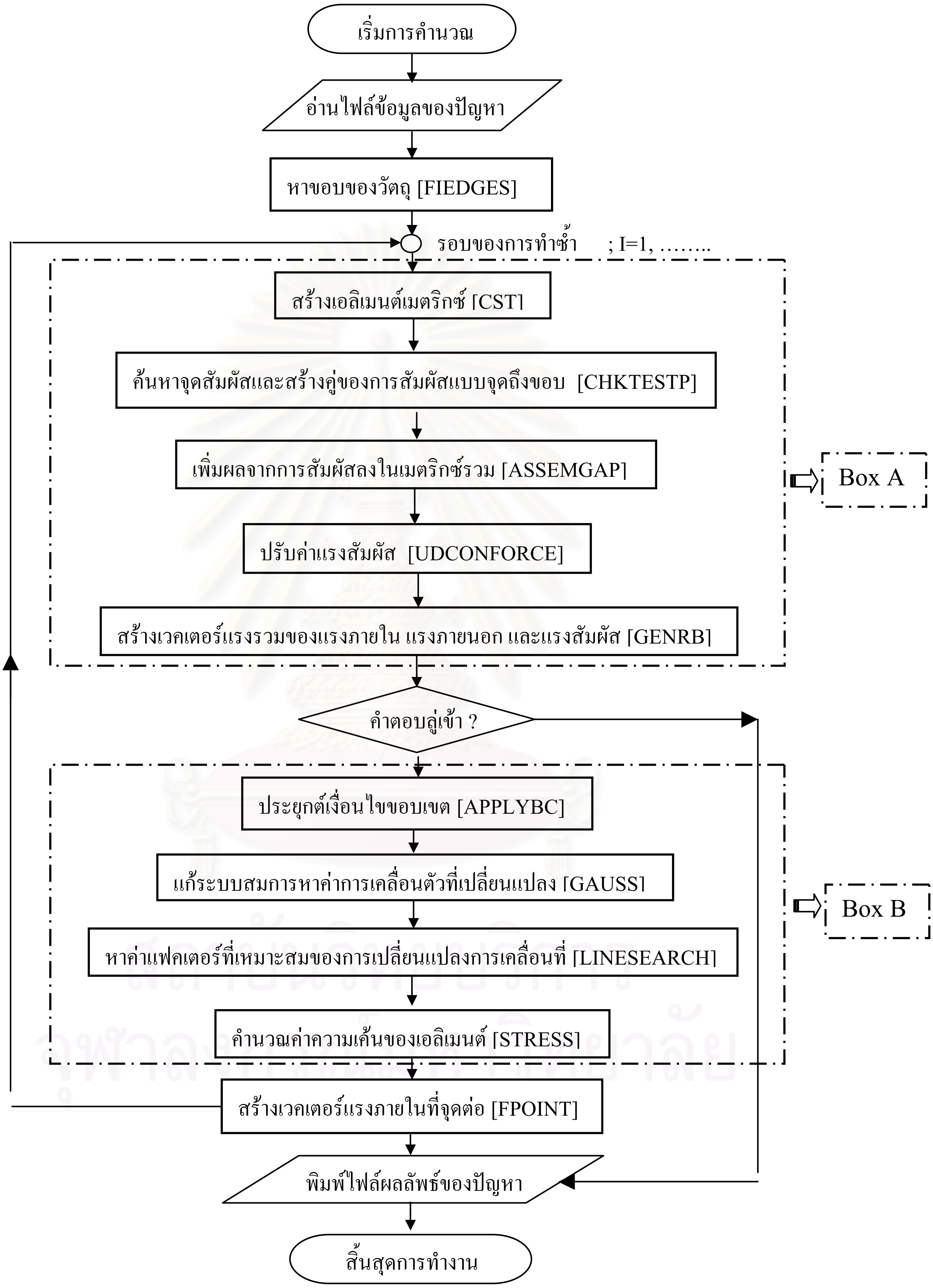
บรรทัดต่อมาค่าตัวเลขระบุตามบรรทัดแรก

5.3 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

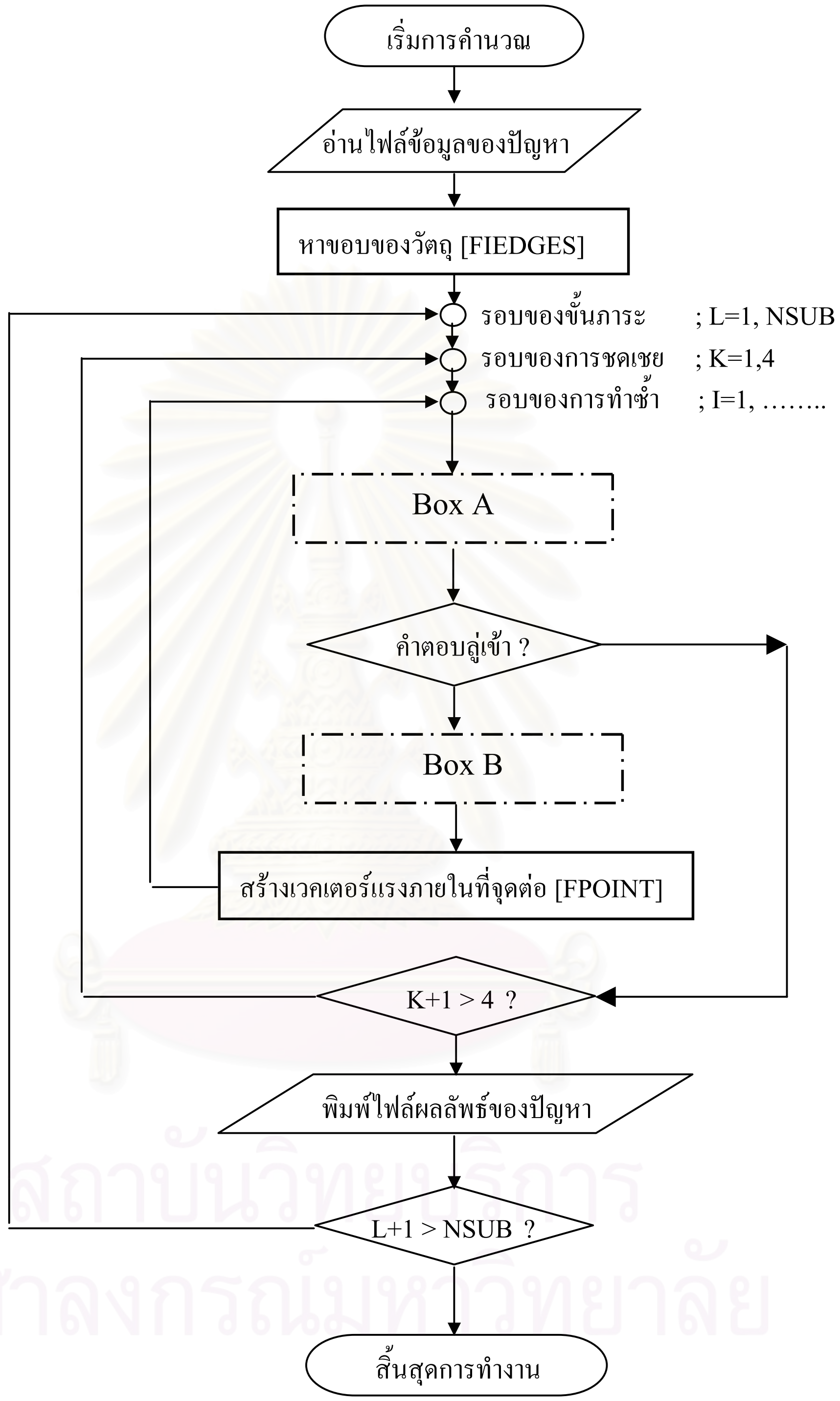
ลักษณะข้อมูลผลลัพธ์ของโปรแกรม LEContact จะมีชื่อว่า Grap.plt โดยมีลักษณะดังนี้

```
TITLE="MODEL OF CONTACT  LOAD STEP=   1 "
VARIABLES= "X","Y","SXX","SYY","SXY","SEQV","CFORCEO","TFORCEO"
ZONE N=  800,E= 1452,F=FEPOINT,ET=TRIANGLE
.0000E+00  -.1538E-01  -.2514E+03  -.3702E+03  -.3221E+02  .3321E+03  .00  .00
.1158E+00  -.1551E-01  -.2372E+03  -.3037E+03  -.4625E+02  .2879E+03  .00  .00
    .          .            .           .           .          .       .    .
    .          .            .           .           .          .       .    .
    .          .            .           .           .          .       .    .
    .          .            .           .           .          .       .    .
.2318E+00  -.1526E-01  -.1473E+03  -.1619E+03  -.6583E+02  .1925E+03  .00  .00
```

ถ้ากำหนดให้จำนวนขั้นภาระมากกว่า 1 ขั้น โปแกรมก็จะพิมพ์ผลดังตัวอย่างข้างบนออกมาในแต่ละขั้นภาระ



รูปที่ 5.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม LEContact ภายในหนึ่งขั้นภาระ



รูปที่ 5.2 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม LEContact เพิ่มรอบชดเชยและหลายขั้นภาระ

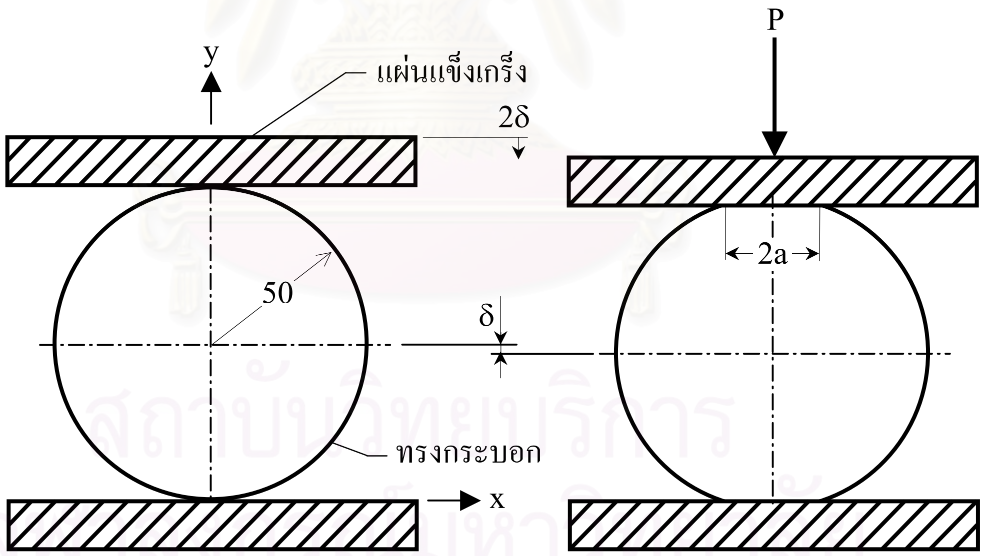
บทที่ 6

ตัวอย่างการทดสอบโปรแกรม

ในบทนี้เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ แบ่งการตรวจสอบออกเป็นสองกรณีใหญ่ๆ คือ กรณีการสัมผัสแบบไม่คิดความเสียดทานกับการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน

6.1 ปัญหาทรงกระบอกยืดหยุ่นระหว่างแผ่นแข็งเกร็งคู่ขนาน

ลักษณะของปัญหา คือ ทรงกระบอกยาวรัศมี 50 มิลลิเมตร วางอยู่บนพื้นแข็งแล้วใช้แผ่นเหล็กกดทรงกระบอกลงด้วยแรง P นิวตัน ต่อหน่วยความยาวของทรงกระบอก หลังจากที่ออกแรงกดแล้ว ทรงกระบอกจะยุบตัวลงเป็นระยะ 2δ ทำให้เกิดหน้าสัมผัสระหว่างทรงกระบอกกับพื้นมีความกว้างเท่ากับ 2a ดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 ปัญหาของทรงกระบอกยาวที่ถูกกดโดยแผ่นเหล็กแข็งบนพื้นแข็งเกร็ง

โดย ค่ายังโมดูลัส (Young's Modulus ; E) เท่ากับ 200 กิกะปาสคาล(GPa)

อัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson's ratio; ν) เท่ากับ 0.3

สำหรับภาระที่ให้เป็นการกำหนดระยะเคลื่อนที่ของแผ่นเหล็ก (2δ) กดลงมาเป็นระยะ 2.7 มิลลิเมตร

จากทฤษฎีของเฮิร์ตซ ตัวอย่างนี้เป็นการสัมผัสแบบเส้น (line contact) กล่าวคือการสัมผัสจะเริ่มสัมผัสที่จุดสัมผัสระหว่างขอบของทรงกระบอกกับพื้นแข็งเกร็งซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรงตามแนวยาวของทรงกระบอก และเมื่อทรงกระบอกได้รับภาระ ทำให้เกิดการเสียรูป ความกว้างหน้าสัมผัสจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งภาระที่ให้มีค่าเท่ากับ P สามารถหาค่าความดันและค่าความกว้างที่เกิดขึ้น [25] ได้ดังนี้

$$a = \sqrt{\frac{4P \cdot r \cdot (1-\nu^2)}{\pi E}} \tag{6.1}$$

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} = \sqrt{\frac{P \cdot E}{\pi \cdot r \cdot (1-\nu^2)}} \tag{6.2}$$

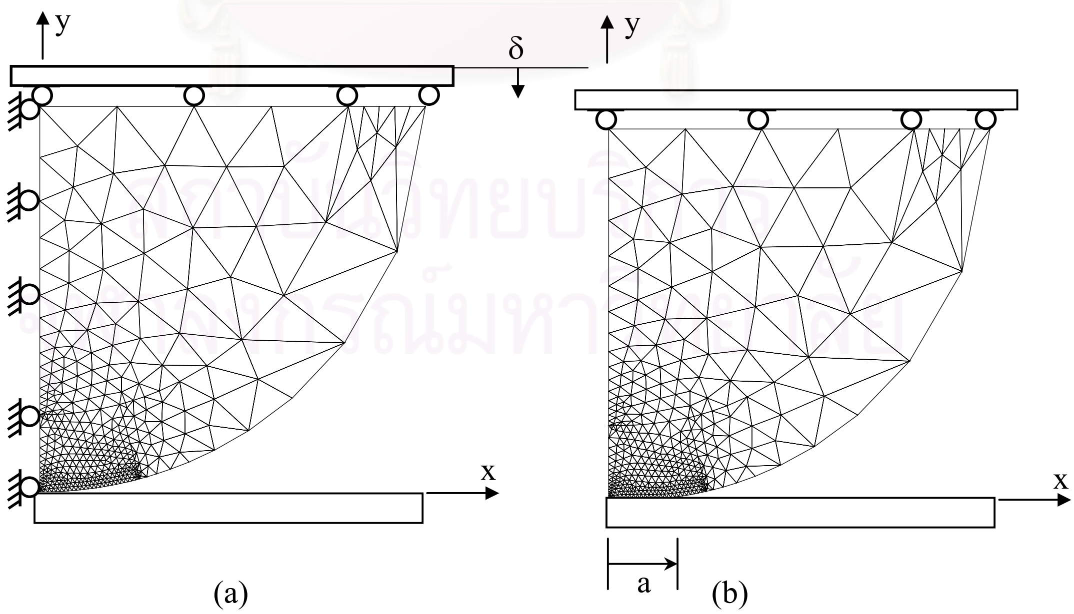
$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \tag{6.3}$$

โดย a แทนครึ่งของความกว้างของการสัมผัส (semi-contact-width)

p_0 แทนความดันสูงสุดของการสัมผัส (maximum contact pressure)

$p(x)$ แทนค่าความดันที่ตำแหน่ง x ใด ๆ บนผิวสัมผัส

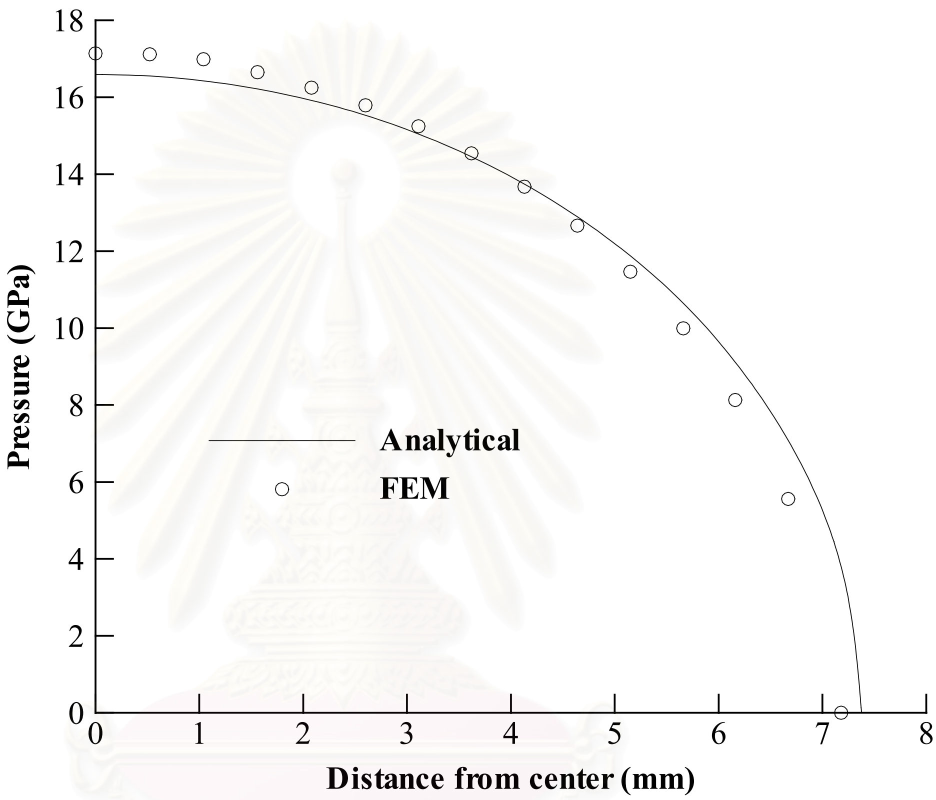
r แทนรัศมีของทรงกระบอก



รูปที่ 6.2 (a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ 386 จุดต่อ 690 เอลิเมนต์

(b) รูปร่างที่เสียรูปหลังจากให้ภาระ

ต่อจากนั้นทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น เนื่องจากปัญหามีความสมมาตรจึงได้พิจารณาเพียง 1 ใน 4 หน้าตัดวงกลมดังรูปที่ 6.2(a) โดยกำหนดให้ทรงกระบอกเป็นวัตถุรองและแผ่นแข็งเกร็งเป็นวัตถุหลัก พร้อมกับแบ่งการให้ภาระเป็น 10 ลำดับขั้น



รูปที่ 6.3 แสดงค่าความดันที่เกิดขึ้นบริเวณผิวสัมผัสของปัญหาทรงกระบอกบนพื้นแข็ง

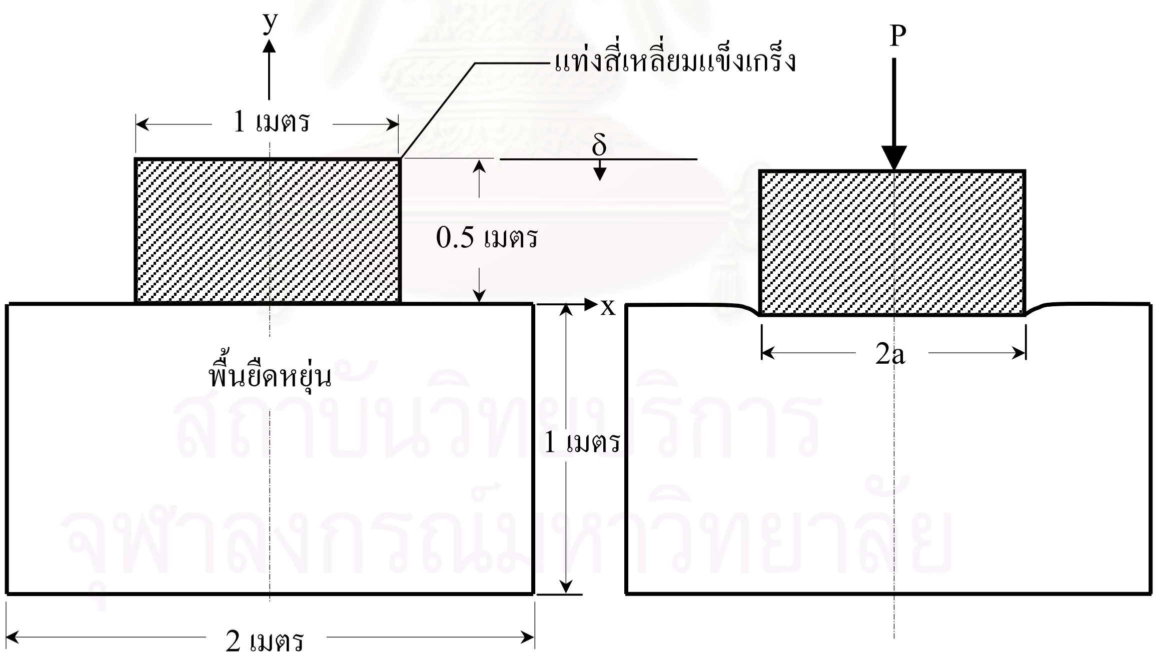
จากปัญหานี้ ค่า a และ p_0 จะคำนวณได้จากค่าภาระที่ให้ P แต่เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตที่ให้เป็นการกำหนดการเคลื่อนที่ของจุดต่อ ดังนั้นค่าภาระ P สามารถหาได้จากแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นบนจุดต่อที่มีการสัมผัสกับพื้นแข็ง ดังรูปที่ 6.2(b) จากนั้นทำการตรวจสอบโดยการนำค่าแรง P ที่ได้จากการคำนวณซึ่งมีค่าประมาณ 187 เมกะนิวตัน ไปคำนวณค่าครึ่งความกว้างของการสัมผัส a และค่าความดันสูงสุด p_0 ที่เกิดขึ้นกับทรงกระบอกดังรูปที่ 6.3 จากการเปรียบเทียบมีค่าความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นประมาณ 3 % ดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรม

	ค่าครึ่งความกว้าง a (มิลลิเมตร)	ความดันสูงสุด p_0 (กิกะปาสคาล)	อัตราส่วน	
			a	p_0
ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	7.376	16.594	1.000	1.000
ไฟไนต์เอลิเมนต์	7.180	17.140	0.973	1.033

6.2 ปัญหาแท่งสี่เหลี่ยมแข็งเกร็งบนพื้นยืดหยุ่นเชิงเส้น

ลักษณะของปัญหาเป็นการนำแท่งแข็งยาวพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม ขนาด 0.5x1 เมตรวางอยู่บนพื้นที่มีคุณสมบัติเป็นวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น ค่ายังโมดูลัสเท่ากับ 200 กิกะปาสคาล อัตราส่วนปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 จากนั้นทำการกดแท่งเหล็กด้วยแรง P นิวตันต่อความยาวแท่งแข็ง ลงมาเป็นระยะ δ ดังรูปที่ 6.4



รูปที่ 6.4 แสดงรูปแบบของปัญหากล่องสี่เหลี่ยมแข็งกดบนพื้นยืดหยุ่น

ความกว้างหน้าสัมผัสที่เกิดขึ้นกับปัญหานี้มีค่าคงที่ เท่ากับ 2a หรือ 1 เมตร จากค่าความกว้างหน้าสัมผัสที่คงที่ ประกอบกับแรง P ที่กำหนดให้เป็นภาระของปัญหา ทำให้หาค่าความดันที่ผิวสัมผัสระหว่างแท่งแข็งเกร็ง กำหนดค่า δ เท่ากับ 2 มิลลิเมตร หลังจากนั้นทำการคำนวณผลจากโปรแกรม

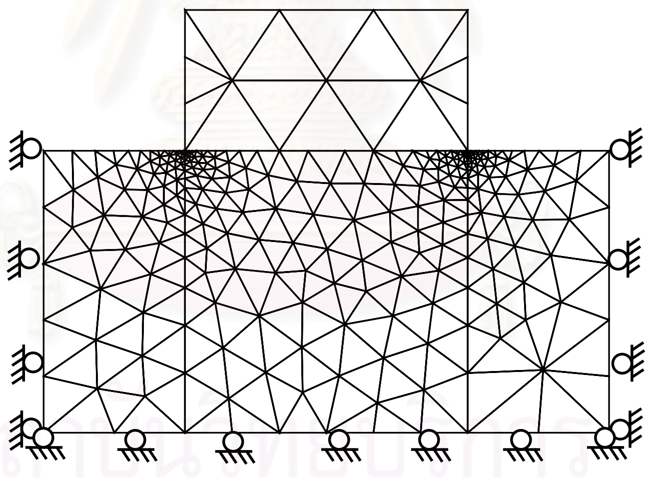
ที่ประดิษฐ์ขึ้น หาค่าแรงปฏิกิริยารวมที่ผิวสัมผัส เพื่อหาแรง P ซึ่งนำไปหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ดังสมการ [25]

$$p(x) = \frac{P}{\sqrt{\pi \cdot \left(a^2 - x^2\right)}} \tag{6.4}$$

โดย a แทนค่าครึ่งความกว้างของการสัมผัสมีค่าเท่ากับ 0.5 เมตร

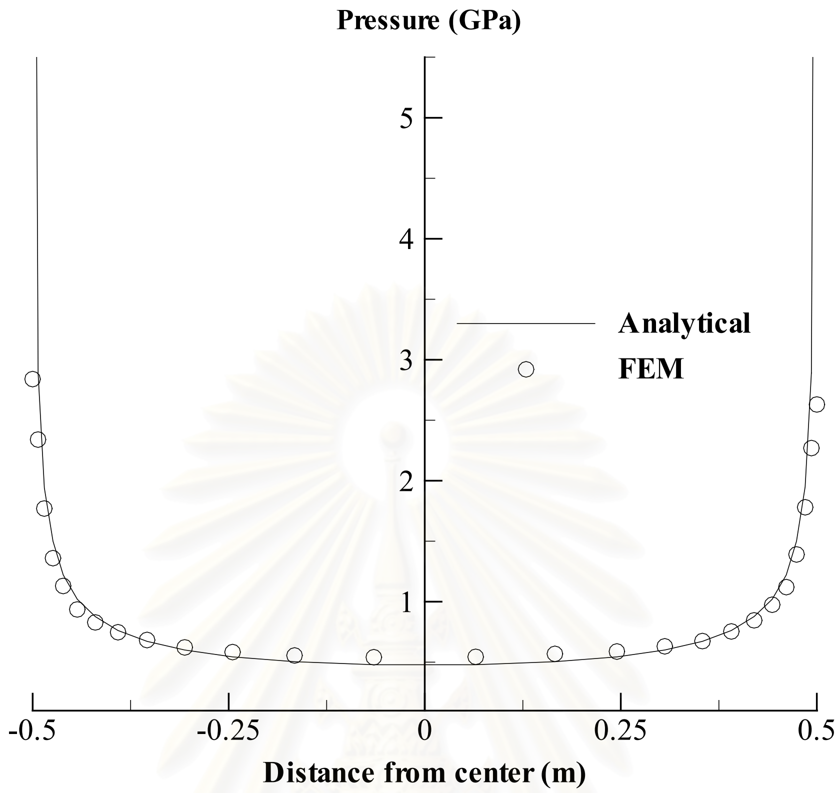
p(x) แทนค่าความดันที่ตำแหน่ง x ใด ๆ บนผิวสัมผัส

จากสมการ (6.4) บอกได้ว่าบริเวณมุมของแท่งสี่เหลี่ยมจะเกิดอัตราการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์สูง จึงทำการสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการคำนวณ ได้ดังรูปที่ 6.5 โดยแบ่งการให้ภาระเป็น 10 ลำดับขั้นภาระ กำหนดให้พื้นยืดหยุ่นเป็นวัตถุรอง และแท่งสี่เหลี่ยมแข็งเกร็งเป็นวัตถุหลัก



รูปที่ 6.5 แสดงแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

เมื่อทำการคำนวณแล้วค่าแรงปฏิกิริยารวมที่เกิดขึ้นบนจุดต่อของพื้น เท่ากับ 671 เมกะนิวตัน นำค่าแรงปฏิกิริยารวมนี้ไปทำการคำนวณหาค่าความดันที่ผิวสัมผัสในสมการ (6.4) และจากการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากโปรแกรมมีความสอดคล้องกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี ดังแสดงในรูปที่ 6.6

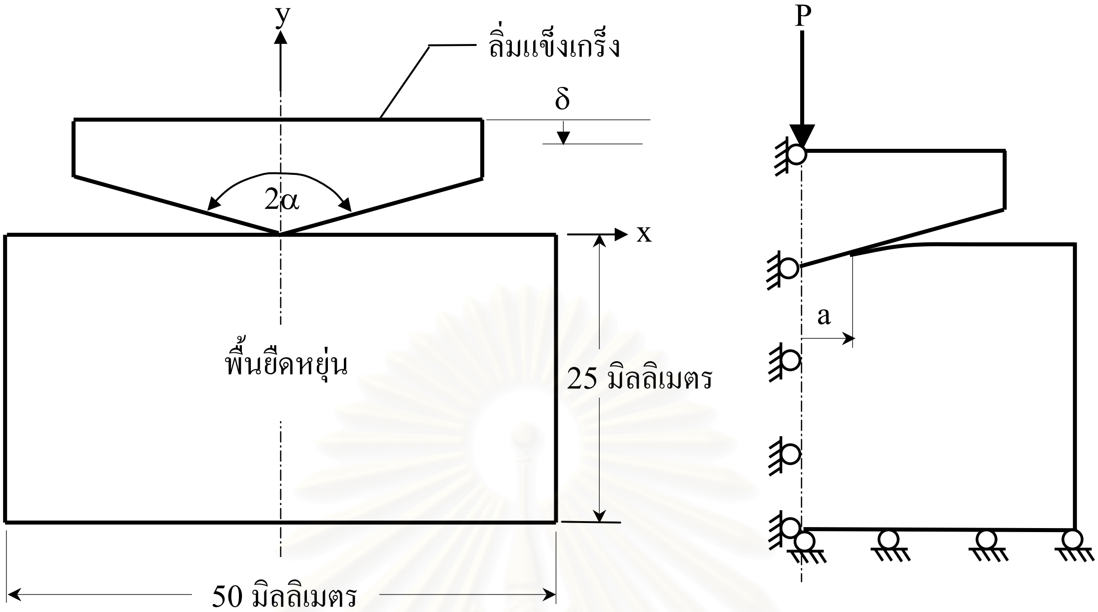


รูปที่ 6.6 แสดงผลความดันบริเวณผิวสัมผัสที่ได้จากการคำนวณจากโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

6.3 ปัญหาลิ่มแข็งเกร็งบนพื้นยืดหยุ่น

ลักษณะของปัญหา คือ ลิ่มแข็งที่มีขนาดมุมลิ่ม (2α) เท่ากับ 170 องศาถูกกดลงมาเป็นระยะทาง 0.02 มิลลิเมตรด้วยแรง P บนพื้นยืดหยุ่น ที่มีค่ายังโมดูลัสเท่ากับ 200 กิกะปาสคาล และอัตราส่วนปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 หลังจากนั้นพื้นเกิดการยุบตัวลงและมีความกว้างหน้าสัมผัสเท่ากับ 2a ดังรูปที่ 6.7

ข้อกำหนดสำหรับการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ คือความกว้างหน้าสัมผัสที่เกิดขึ้นระหว่างตัวลิ่มกับพื้นยืดหยุ่นควรจะมีขนาดเล็กๆ เมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของของแข็งทั้งสอง และขนาดกำหนดของครึ่งมุมของลิ่ม (α) จะต้องมีองศาใกล้เคียงกับ 90 องศา ซึ่งในปัญหานี้มีค่าเท่ากับ 85 องศา เพื่อให้ปัญหายังอยู่ในช่วงของความเป็นยืดหยุ่นเชิงเส้น และสามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของแรงรวม และความเค้นตั้งฉากกับผิวได้ดังนี้ [25]



รูปที่ 6.7 แสดงรูปแบบของปัญหาลิ่มแข็งเกร็งกดบนพื้นยืดหยุ่น

$$P = a \cdot E^{*} \cot\alpha \tag{6.5}$$

$$p(x) = \frac{E^{*} \cot\alpha}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) \tag{6.6}$$

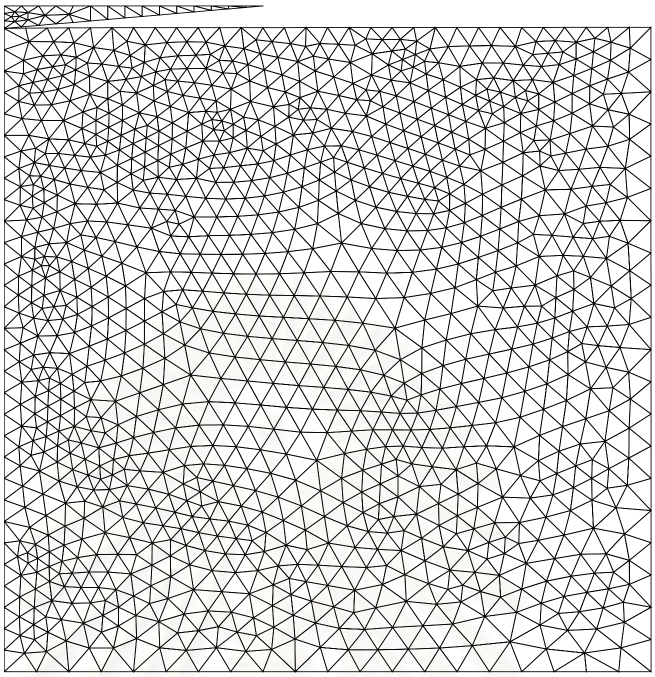
$$\frac{1}{E^{*}} = \frac{1-\nu_1^{2}}{E_1} + \frac{1-\nu_2^{2}}{E_2} \tag{6.7}$$

โดย E^{*} เป็นค่าความแข็งเฉลี่ยที่ได้จากสมการ (6.7)

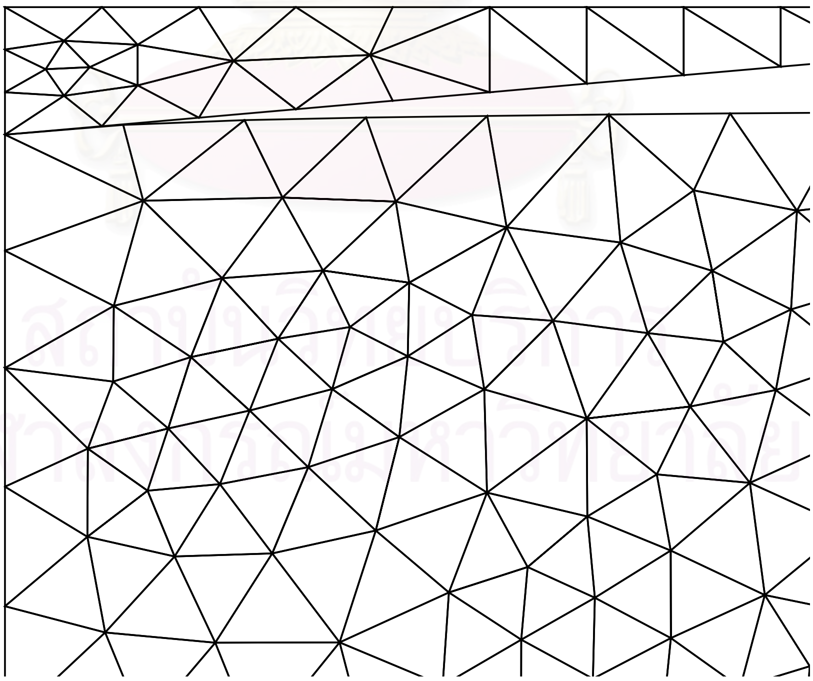
E_1 และ ν_1 เป็นค่ายังโมดูลัสและอัตราส่วนปัวส์ซงของลิ่มแข็งเกร็ง ซึ่งจะสมมติให้ลิ่มมีค่ายังโมดูลัสและอัตราส่วนปัวส์ซง เท่ากับ $200 \mathrm{x} 10^{10}$ กิกะปาสคาล และ 0.2 ตามลำดับ

E_2 และ ν_2 เป็นค่ายังโมดูลัสและอัตราส่วนปัวส์ซงของพื้นยืดหยุ่น

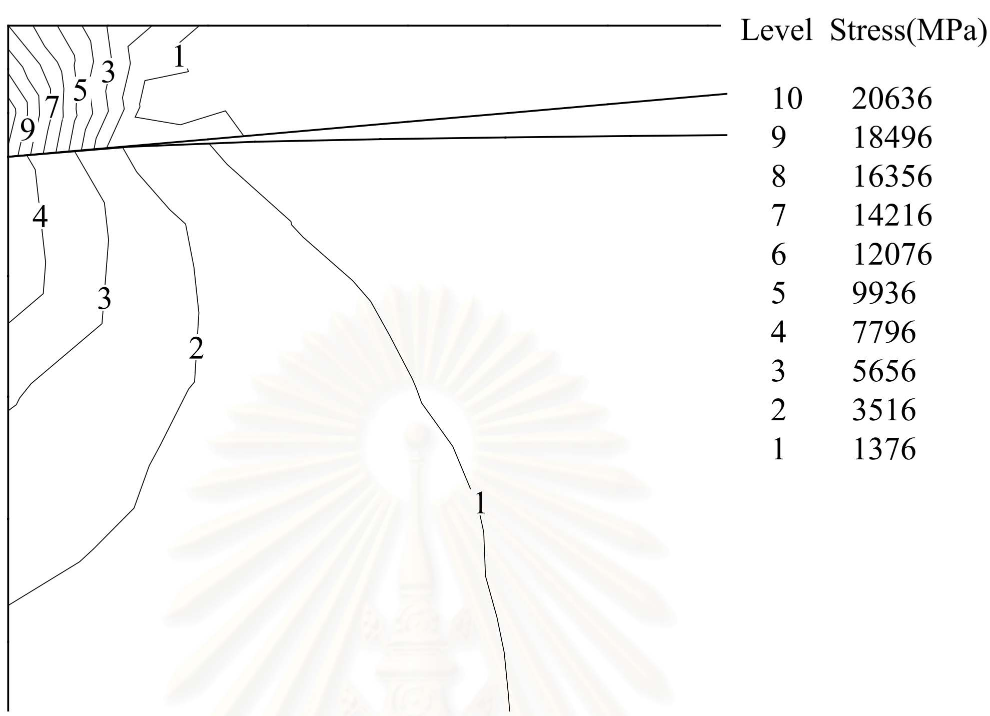
เนื่องจากปัญหามีความสมมาตร จึงนำไปสร้างเป็นแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้ดังรูปที่ 6.8 และกำหนดให้ตัวลิ่มแข็งเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะ δ เท่ากับ 0.02 มิลลลิเมตร โดยแบ่งออกเป็น 5 ลำดับขั้นภาระ กำหนดให้ลิ่มเป็นวัตถุหลักและพื้นยืดหยุ่นเป็นวัตถุรอง



รูปที่ 6.8 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่น 1238 จุดต่อ 2339 เอลิเมนต์

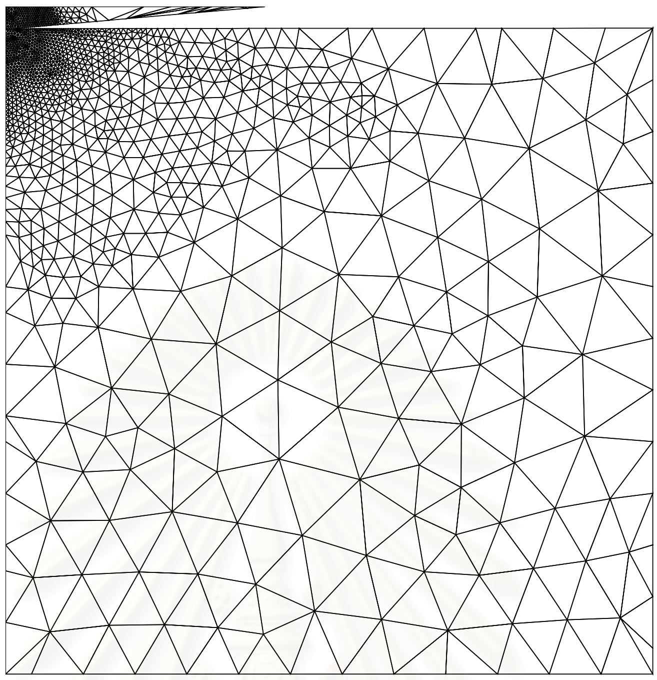


รูปที่ 6.9 รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริมต้นของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ

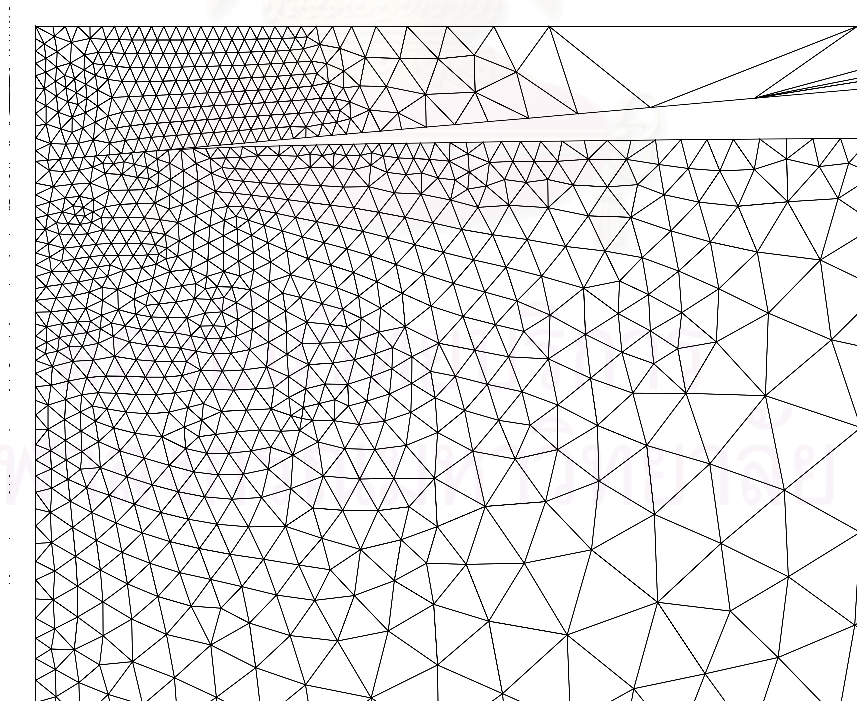


รูปที่ 6.10 รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นที่แสดงผลการกระจายค่าความเค้นวอนมิส

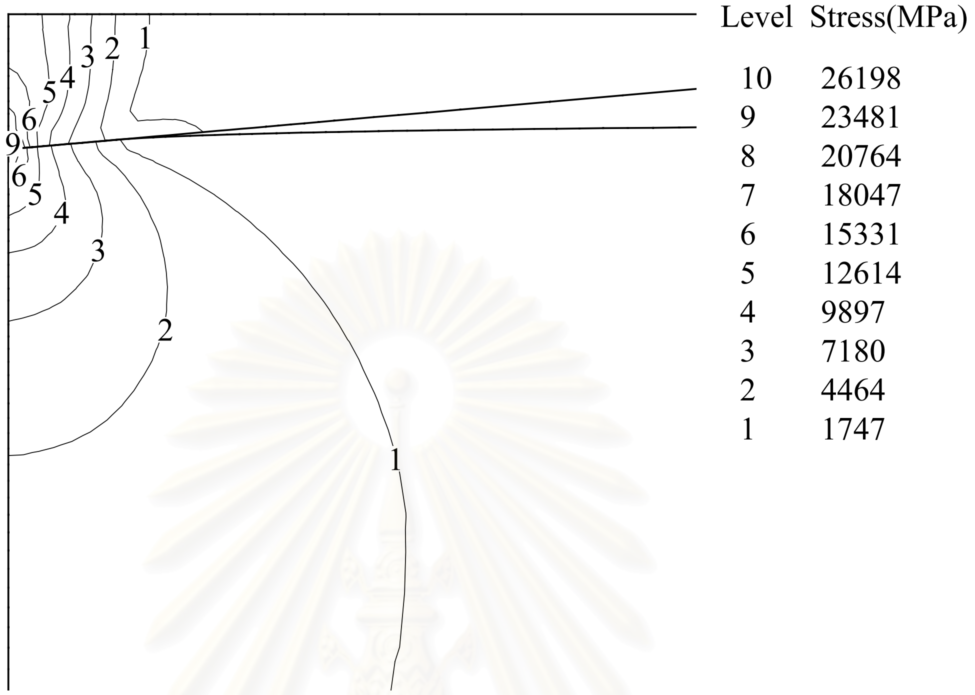
รูปที่ 6.9 และ 6.10 แสดงรูปร่างของแบบจำลองที่เกิดการเสียรูปและค่าความเค้นวอนมิส ตามลำดับ สังเกตว่าจุดของลิ่มที่สัมผัสบนพื้นยืดหยุ่นจะมีเพียงแค่หนึ่งจุด ซึ่งเป็นผลมาจากการแบ่งเอลิเมนต์ของปัญหาหยาบเกินไป ดังนั้นจึงได้นำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ [23] มาประยุกต์ใช้ ในการสร้างแบบจำลองใหม่ ทำให้บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนท์ของความเค้นสูง เอลิเมนต์ควรมีขนาดเล็ก ส่วนบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนท์ของความเค้นต่ำ เอลิเมนต์สามารถมีขนาดใหญ่ได้ เพื่อเป็นการประหยัดเวลาในการคำนวณแต่ให้คำตอบมีความถูกต้องมากขึ้น ดังรูปที่ 6.11 จากนั้นทำการคำนวณใหม่ ผลของการคำนวณแสดงในรูปที่ 6.12 และรูปที่ 6.13



รูปที่ 6.11 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งเกร็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 จำนวน 1396 จุดต่อ 2541 เอลิเมนต์

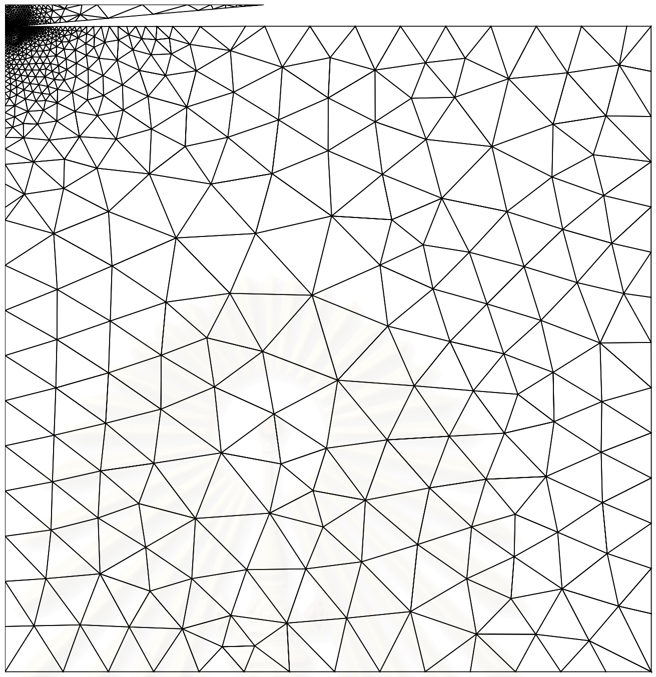


รูปที่ 6.12 รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ

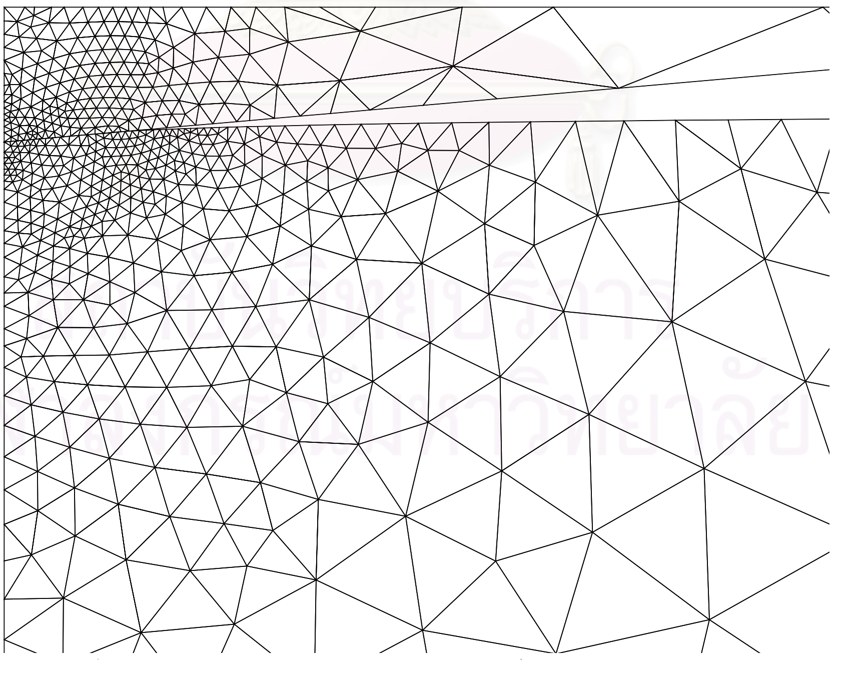


รูปที่ 6.13 รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ที่แสดงผลการกระจายค่าความเค้นวอนมิส

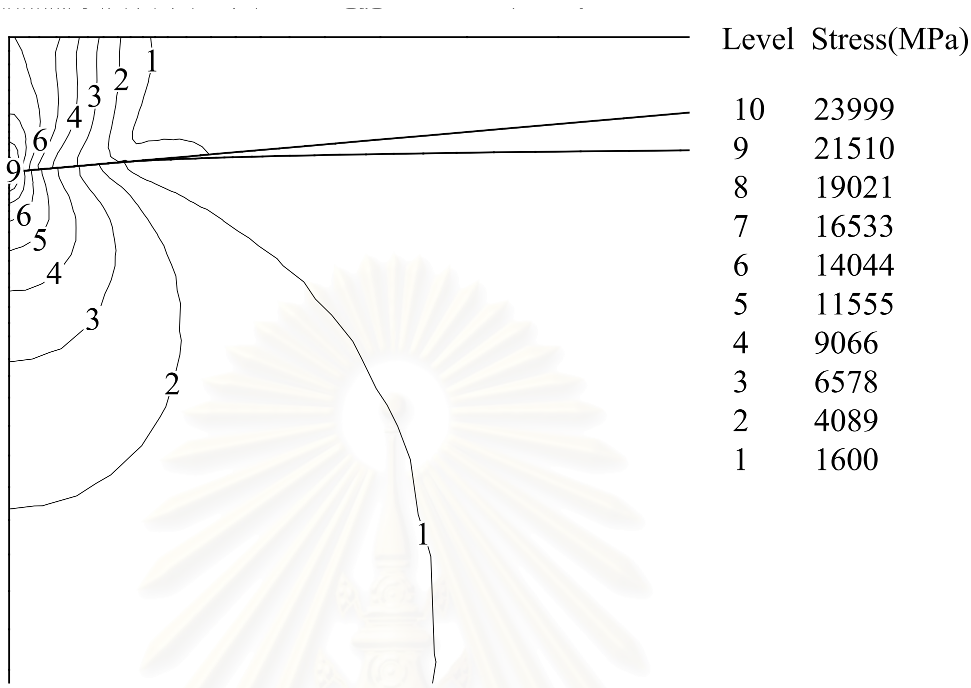
เนื่องจากปัญหานี้มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ความเค้นมากที่บริเวณมุมลิ่ม การปรับขนาดเอลิเมนต์เพียง 1 ครั้งอาจทำให้จับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นไม่ดีพอ เพื่อให้เกิดความมั่นใจของคำตอบมากขึ้น จึงได้ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองดังรูปที่ 6.14 ซึ่งผลจากการคำนวณแสดงรูปร่างจากการเสียรูปและค่าความเค้นวอนมิสได้ดังรูปที่ 6.15 และรูปที่ 6.16 ตามลำดับ



รูปที่ 6.14 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 จำนวน 2112 จุดต่อ 3893 เอลิเมนต์



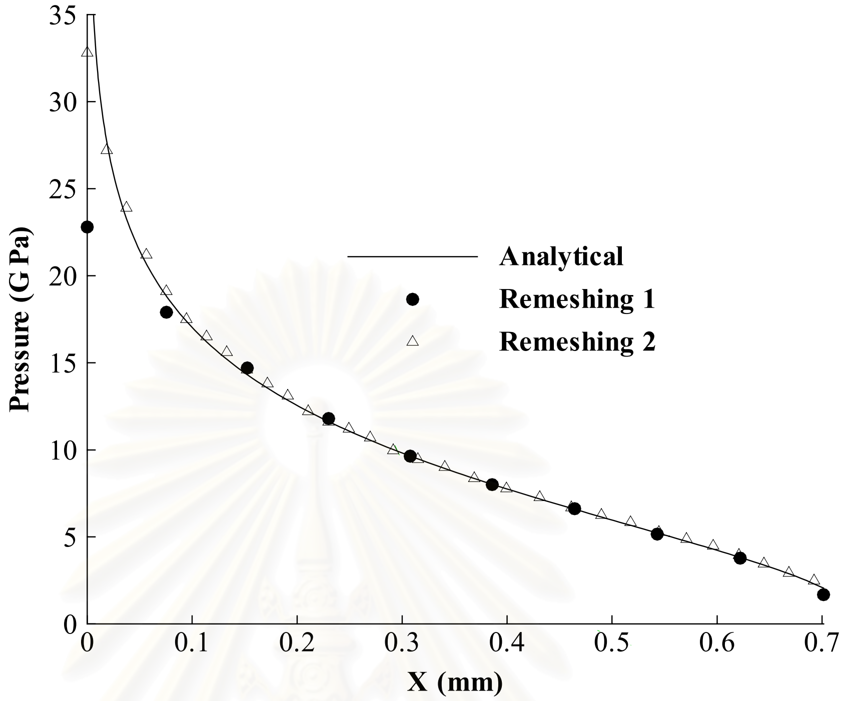
รูปที่ 6.15 รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ



รูปที่ 6.16 รูปร่างของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาลิ่มแข็งบนพื้นยืดหยุ่นหลังปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ที่แสดงผลการกระจายค่าความเค้นวอนมิส

จากนั้นนำค่าความเค้นตั้งฉากที่ผิวสัมผัสมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่คำนวณมาจากแรงปฏิกิริยา (P) ที่เกิดขึ้นกับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นที่มีจุดสัมผัสเพียงจุดเดียว มาทำการหาค่าความกว้าง a ของการสัมผัสในสมการ (6.5) จากนั้นคำนวณหาค่าความเค้นตั้งฉากที่ผิวสัมผัสในสมการ (6.6)

เนื่องจากว่าผลที่ได้จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นมีเพียง 1 จุดต่อที่เกิดการสัมผัส ดังนั้นในกราฟนี้จึงไม่ได้นำผลจากแบบจำลองเริ่มต้นมาด้วย และจากการเปรียบเทียบ ผลคำตอบที่ได้จะมีค่าถูกต้องมากขึ้นเมื่อจำนวนเอลิเมนต์มีมากขึ้นที่บริเวณผิวสัมผัส โดยเฉพาะบริเวณมุมลิ่ม



รูปที่ 6.17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันที่ผิวสัมผัสกับระยะห่างจากจุดกึ่งกลางลิ่ม

6.4 ปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่งที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางไม่เท่ากัน

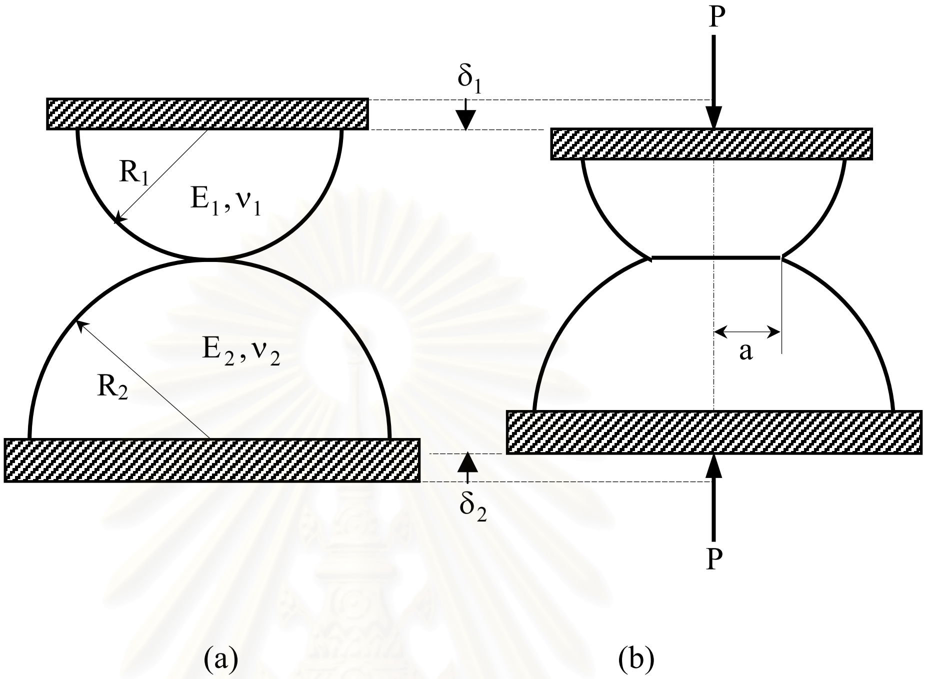
ลักษณะของปัญหาคือทรงกระบอกสองแท่งที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางไม่เท่ากัน มาสัมผัสกันตามแนวแกนของทรงกระบอก ด้วยแรง P นิวตันต่อหน่วยความยาวที่กระทำอยู่บนจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกทั้งสอง ดังแสดงในรูปที่ 6.18

กำหนดให้ R_1 และ R_2 เป็นรัศมี E_1 และ E_2 คือค่ายังโมดูลัส ν_1 และ ν_2 เป็นอัตราส่วนปัวส์ซง ของทรงกระบอกบนและทรงกระบอกล่างตามลำดับ และ l เป็นความยาวของทรงกระบอก และ a แทนค่าครึ่งความกว้างของหน้าสัมผัส สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ [26] จากสมการดังนี้

$$a = 1.13\left(\frac{F}{l}(\eta_1 + \eta_2)\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \tag{6.8}$$

โดยที่

$$\eta_1 = \frac{1-\nu_1^{\,2}}{E_1} \quad \text{และ} \quad \eta_2 = \frac{1-\nu_2^{\,2}}{E_2} \tag{6.9}$$



รูปที่ 6.18 ปัญหาการสัมผัสระหว่างทรงกระบอกสองแท่ง
(a) ก่อนให้ภาระ (b) หลังให้ภาระ

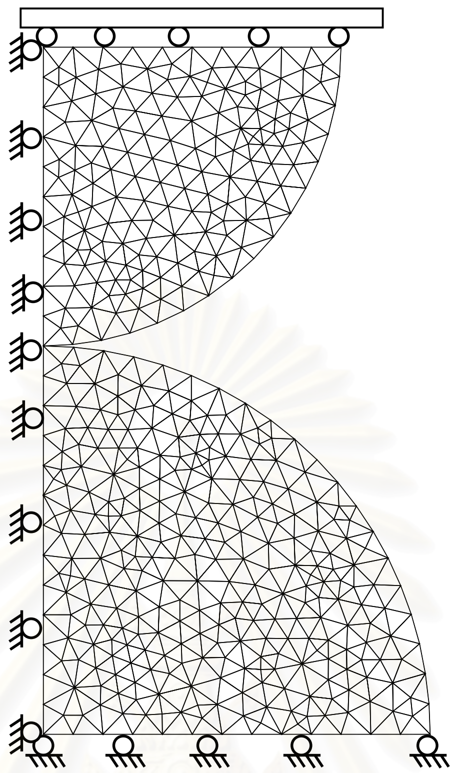
ถ้ากำหนดให้ δ เป็นระยะการเคลื่อนตัวรวมของ δ_1 และ δ_2 สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\delta = 0.638\frac{F}{l}\eta\left(\frac{2}{3} + \ln\frac{2R_1}{a} + \ln\frac{2R_2}{a}\right) \tag{6.10}$$

โดย $\eta = \eta_1 = \eta_2$ ดังนั้นในการทดสอบโปรแกรมโดยใช้ปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่งนี้ จะนำมาประยุกต์ใช้เป็นปัญหาแบบการกำหนดค่าเคลื่อนตัว ซึ่งแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงได้ดังรูปที่ 6.19

จากการกำหนดเงื่อนไขดังกล่าวทำให้สามารถหาคำตอบได้โดยตรงจากสมการ (6.8) ถึงสมการ (6.10) ด้วยการกำจัดค่าแรงให้หายไปแล้วเหลือแค่ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเคลื่อนตัวรวมกับค่าครึ่งความกว้าง ดังนี้

$$\delta = \frac{0.638 \cdot a^2}{2 \cdot (1.13)^2}\left(\frac{2}{3} + \ln\frac{2R_1}{a} + \ln\frac{2R_2}{a}\right)\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) \tag{6.11}$$



รูปที่ 6.19 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่ง

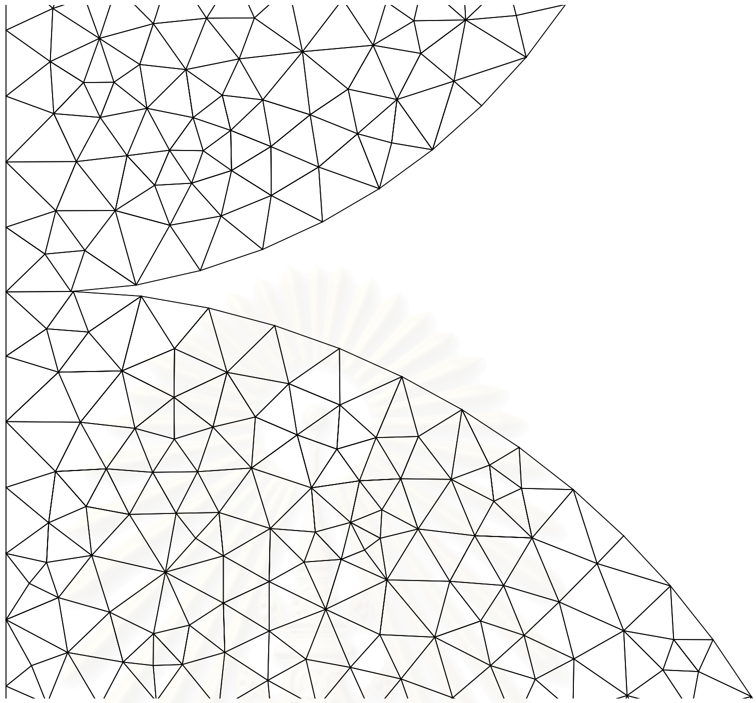
ซึ่งในปัญหาที่ทำการคำนวณได้กำหนดค่าต่างๆดังนี้

ทรงกระบอกบน $E_1 = 29120$ นิวตัน/ตารางมิลลิเมตร , $\nu_1 = 0.3$, $R_1 = 10$ มิลลิเมตร

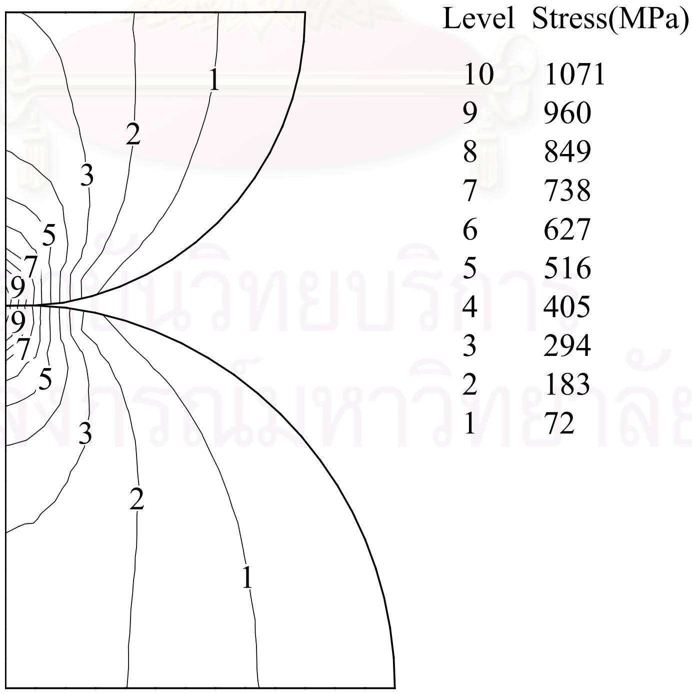
ทรงกระบอกล่าง $E_2 = 30000$ นิวตัน/ตารางมิลลิเมตร , $\nu_2 = 0.25$, $R_2 = 13$ มิลลิเมตร

จากเงื่อนไขการเคลื่อนตัวบังคับ $\delta = 0.35$ มิลลิเมตร นำไปแทนค่าในสมการ (6.11) เพื่อหาค่าครึ่งความกว้าง a ได้เท่ากับ 1.082093568 มิลลิเมตร แต่สำหรับการคำนวณจากโปรแกรม ในที่นี้กำหนดขั้นภาระออกเป็น 5 ลำดับขั้น ค่าครึ่งความกว้างของหน้าสัมผัสในแบบจำลองเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 0.965256 มิลลิเมตร รูปร่างจากการเสียรูปและการกระจายความเค้นวอนมิสของทรงกระบอกแสดงไว้ดังรูปที่ 6.20 และรูปที่ 6.21 ตามลำดับ

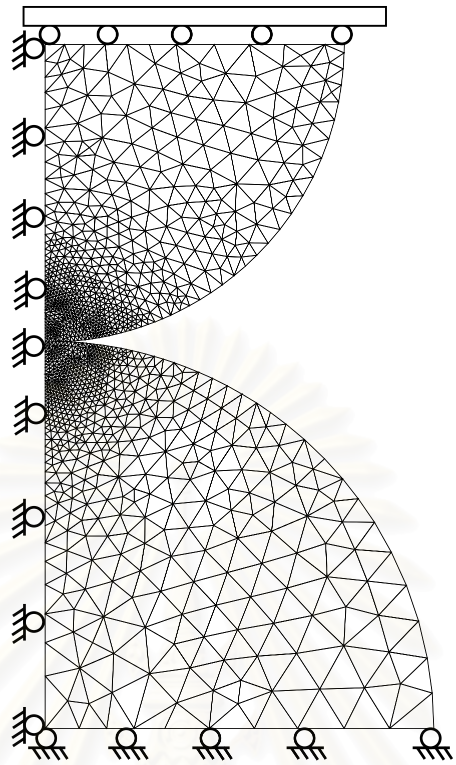
เพื่อเพิ่มความถูกต้องของปัญหา จึงนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาทำการสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ ดังรูปที่ 6.22 ซึ่งผลการคำนวณได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.23 และรูปที่ 6.24



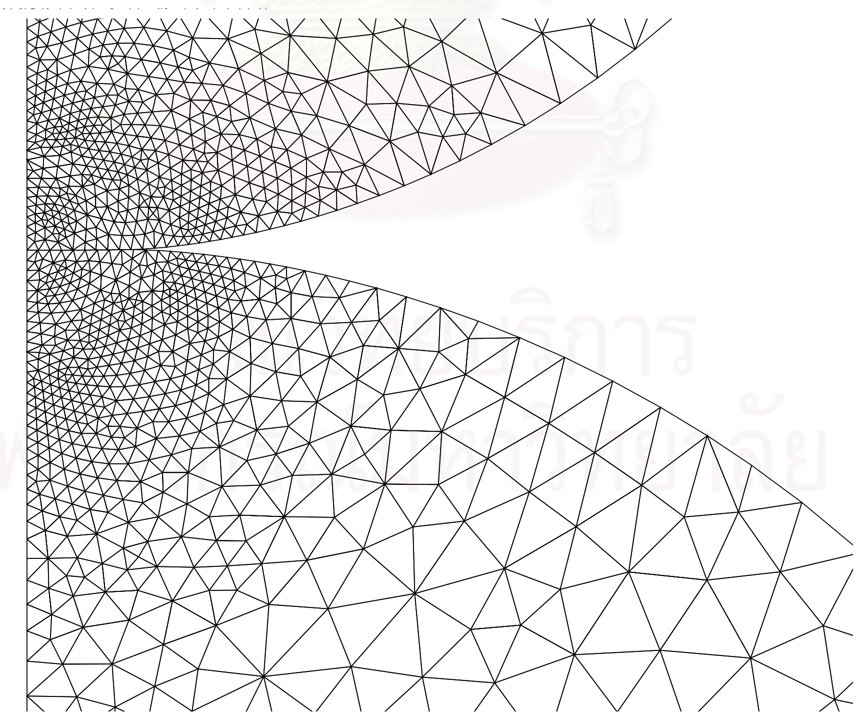
รูปที่ 6.20 ครึ่งความกว้างหน้าสัมผัสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ



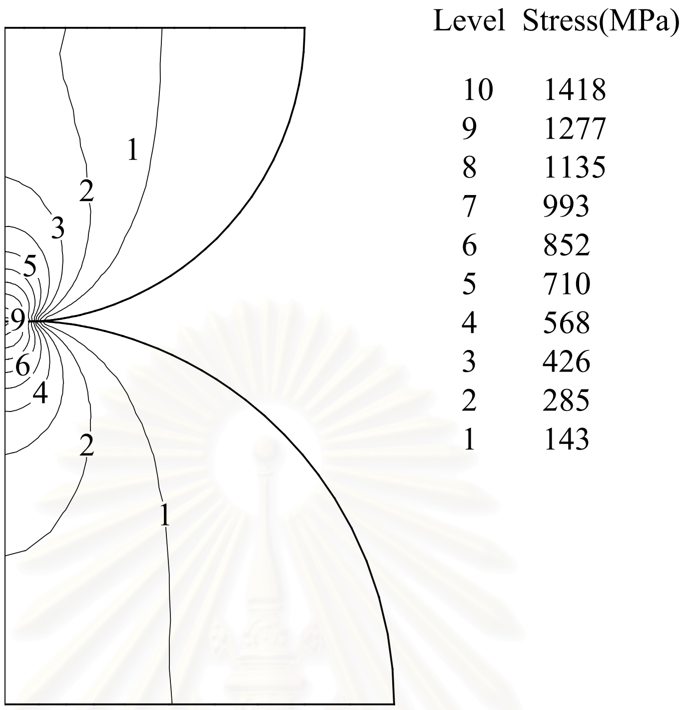
รูปที่ 6.21 การกระจายความเค้นวอนมิสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ



รูปที่ 6.22 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์ของปัญหาการสัมผัส ของทรงกระบอกสองแท่ง



รูปที่ 6.23 ครึ่งความกว้างหน้าสัมผัสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์ของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ



รูปที่ 6.24 การกระจายความเค้นวอนมิสของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์ของทรงกระบอกสองแท่งที่เกิดการเสียรูปหลังจากการคำนวณ

จากผลการคำนวณ แบบจำลองที่ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติให้ค่าครึ่งความกว้างของหน้าสัมผัสมีค่าเท่ากับ 1.0816928 มิลลิเมตร ซึ่งให้ค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มาก และสามารถสรุปผลได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 6.2 แสดงผลการเปรียบเทียบขนาดครึ่งความกว้างของหน้าสัมผัสของปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่ง

	ครึ่งความกว้างหน้าสัมผัส (a,mm)	อัตราส่วน
ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	1.0820936	1.000
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น	0.965256	0.892
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์	1.0816928	0.999

6.5 ปัญหาทรงกระบอกยึดหยุ่นระหว่างแผ่นแข็งเกร็งคู่ขนานแบบคิดความเสียดทาน

ปัญหาคือทรงกระบอกยาวรัศมี 50 มิลิเมตรที่วางอยู่บนพื้นแข็งเกร็งและกดลงด้วยแผ่นแข็งเกร็งลงมาเป็นระยะ 2.7 มิลลิเมตรซึ่งมีลักษณะของปัญหาเหมือนกับในหัวข้อที่ 6.1 เพียงแต่เพิ่มการพิจารณาความเสียดทานเข้าไปในการคำนวณ โดยแบ่งออกเป็นสองกรณี คือ กรณีที่ไม่มีการเลื่อนไถล และมีการเลื่อนไถลบางส่วน กรณีที่หนึ่งเป็นการคำนวณโดยใช้ค่าสัมประสิทธ์ความเสียดทานที่มีค่าเท่ากับ 0.5 ซึ่งจะทำให้ผิวสัมผัสของทรงกระบอกที่สัมผัสกับพื้นจะอยู่ในกรณีของการยึดติดตลอดผิวสัมผัส สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของความกว้างหน้าสัมผัส และความดันตั้งฉาก ได้ดังสมการ(6.1) ถึง (6.3) ความเค้นในแนวสัมผัสสามารถหาได้ดังสมการ (6.12) [25]

$$q(x) = \frac{\beta p_0}{\pi a}\left\{(a^2 - x^2)^{1/2} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + x \ln\left[\frac{a + (a^2 - x^2)^{1/2}}{a - (a^2 - x^2)^{1/2}}\right]\right\} \tag{6.12}$$

โดยที่

$$\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-2\nu_1)/G_1 - (1-2\nu_2)/G_2}{(1-\nu_1)/G_1 + (1-\nu_2)/G_2}\right] \tag{6.13}$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \quad , \quad G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} \tag{6.14}$$

โดย a เป็นค่าครึ่งความกว้างของหน้าสัมผัส

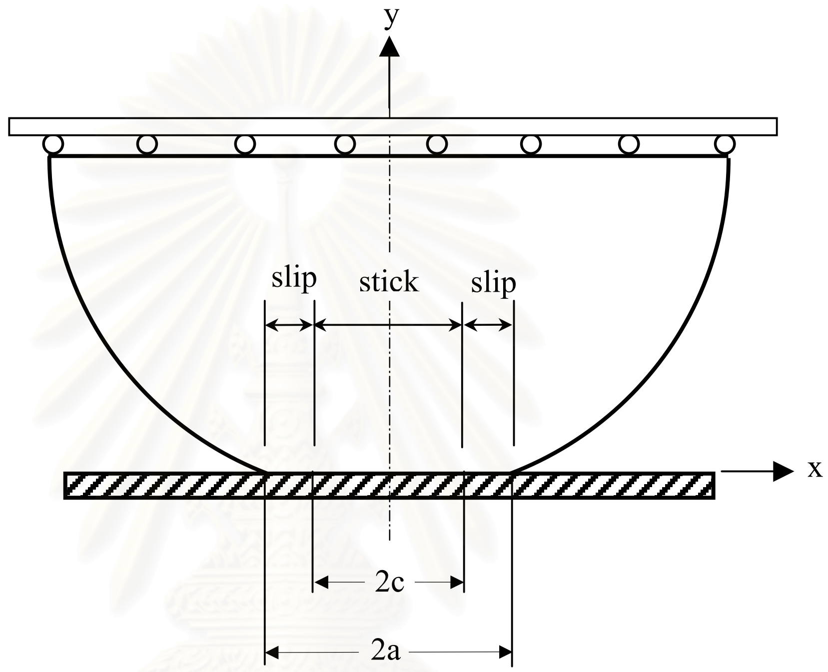
p_0 เป็นค่าความดันตั้งฉากสูงสุดที่ผิวสัมผัส

$q(x)$ เป็นค่าความเค้นในแนวสัมผัสที่ตำแหน่ง x

ส่วนกรณีที่สองเป็นกรณีที่ผิวสัมผัสของทรงกระบอกบางส่วนจะเกิดการเลื่อนไถล ซึ่งทำการศึกษาโดย Spence(1973) ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าภาระที่กระทำจะต้องตั้งฉากกับผิวสัมผัส และสมมติว่าเมื่อวัตถุมีการยุบตัวที่บริเวณผิวสัมผัสมีความกว้างหน้าสัมผัส เท่ากับ 2a และมีบางส่วนของหน้าสัมผัสจะไม่เกิดการเลื่อนไถลมีความกว้างเท่ากับ 2c ดังรูปที่ 6.25 ซึ่งค่าความกว้าง c นี้จะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนปัวซงส์ ν และค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน μ Spence ได้ทำการประมาณช่วงความกว้าง c ที่อยู่ในรูปกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง c/a และ μ/β [25] สำหรับปัญหานี้ได้กำหนดให้ μ/β มีค่าเท่ากับ 0.99 จากกราฟความสัมพันธ์ของ Spence ทำให้ได้ค่า c/a เท่ากับ 0.7 ดังนั้นค่าสัมประสิทธ์ความเสียดทาน μ มีค่าเท่ากับ 0.2875

ค่า $E_1 = 200$ กิกะปาสคาล $\nu_1 = 0.3$ เป็นค่ายังโมดูลัส และอัตราส่วนปัวส์ซงของทรงกระบอก

ค่า $E_2 = 200x10^{10}$ กิกะปาสคาล $\nu_2 = 0.25$ เป็นค่ายังโมดูลัส และอัตราส่วนปัวส์ซงของแผ่นแข็งเกร็ง ซึ่งแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงได้ดังรูปที่ 6.2(a)

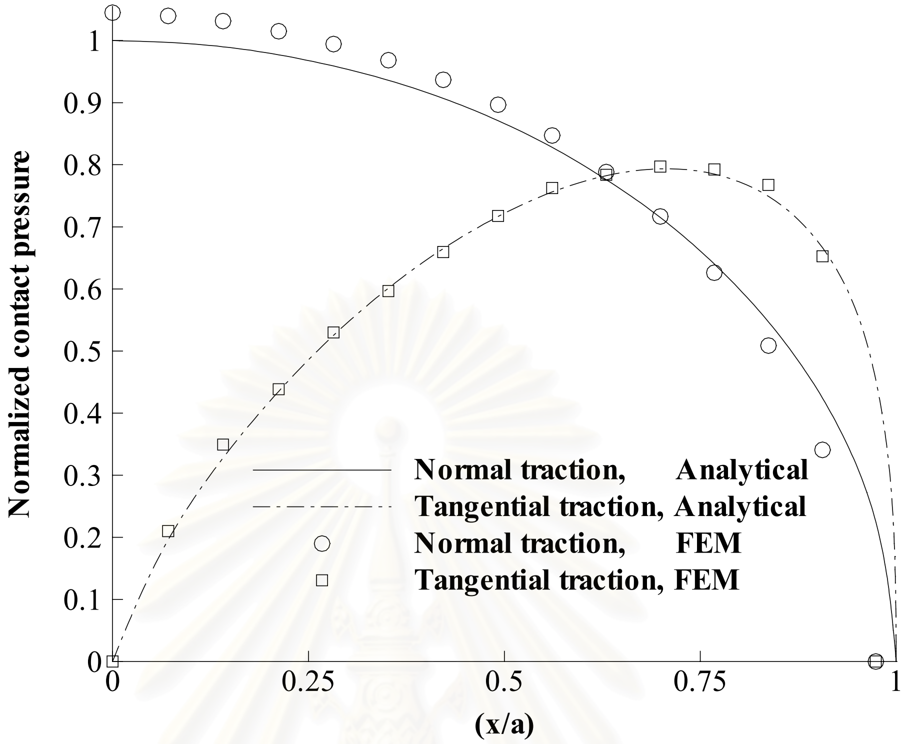


รูปที่ 6.25 บริเวณที่เกิดการยึดติดกับการเลื่อนไถลของปัญหาทรงกระบอกระหว่างแผ่นคู่ขนาน

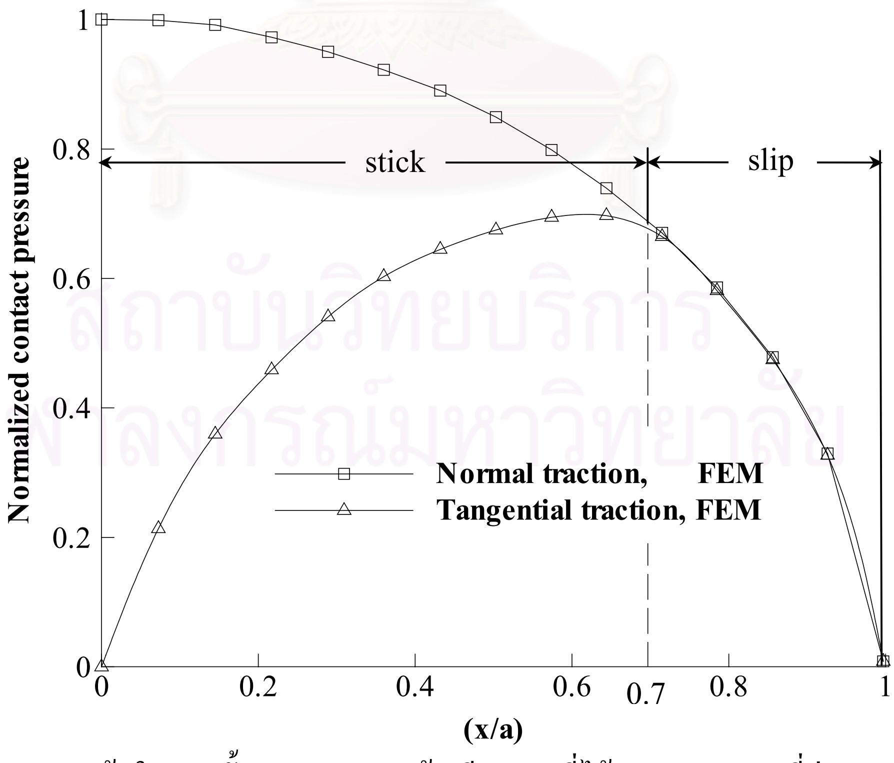
c เป็นค่าครึ่งความกว้างของผิวที่เป็นการยึดติด

a เป็นค่าครึ่งความกว้างของผิวที่มีการสัมผัส

จากนั้น นำค่าความเค้นตั้งฉากที่ผิวและความเค้นเสียดทานที่ผิวมาวาดกราฟเปรียบเทียบให้อยู่ในรูปแบบของค่าไร้มิติ (dimensionless) โดยที่แกนนอนเป็นค่าไร้มิติของความยาว (x/a) แกนตั้งเป็นค่าไร้มิติของความเค้น ซึ่งค่าไร้มิติของความเค้นตั้งฉากเป็นการนำค่าความเค้นที่เกิดขึ้นมาหารด้วยค่าความเค้นตั้งฉากสูงสุด (p/p_0) ส่วนค่าไร้มิติของความเค้นเสียดทานคือค่าความเค้นเสียดทานหารด้วยค่าความเค้นตั้งฉากสูงสุดคูณกับค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน ($q/(\mu p_0)$) สำหรับในกรณีแรกที่ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานมีค่าเทากับ 0.5 ได้ทำการเปรียบเทียบซึ่งมีความสอดคล้องกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี ดังแสดงในรูปที่ 6.26



รูปที่ 6.26 ความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเสียดทานที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

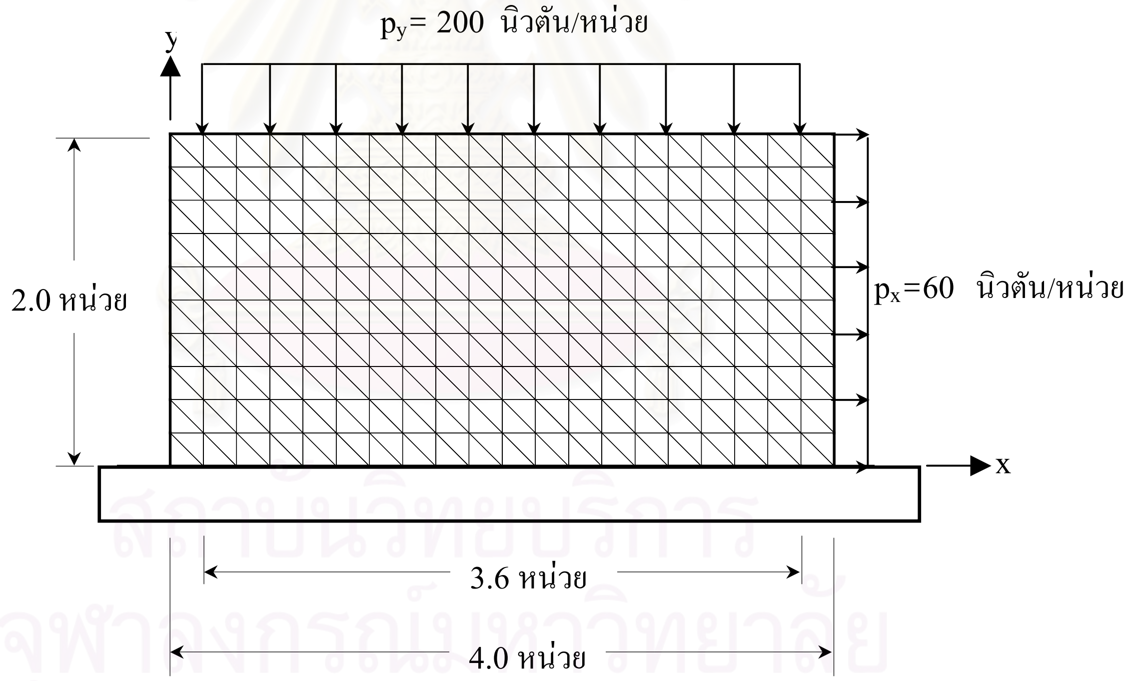


รูปที่ 6.27 ความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเสียดทานที่ได้จากการคำนวณที่ค่า $\mu = 0.2875$

ส่วนกรณีที่สองค่าสัมประสิทธ์ความเสียดทานมีค่าเท่ากับ 0.2875 ได้ทำการเปรียบเทียบกับค่าความเค้นตั้งฉากกับค่าความเค้นที่ผิวในแนวสัมผัสที่ได้จากการคำนวณของโปรแกรม เนื่องจากไม่สามารถหาค่าความเค้นที่ผิวในแนวสัมผัสในรูปแบบของสมการได้ รู้แต่เพียงว่าถ้ากำหนดค่า μ/β เท่ากับ 0.99 ที่ตำแหน่ง x/a เท่ากับ 0.7 ผิวของทรงกระบอกจะเริ่มมีการเลื่อนไถล รูปที่ 6.27 แสดงผลจากการคำนวณที่จุดเริ่มเลื่อนไถลของเริ่มที่ x/a เท่ากับ 0.715 ซึ่งใกล้เคียงกับผลของ Spence

6.6 ปัญหาความเสียดทานของก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง

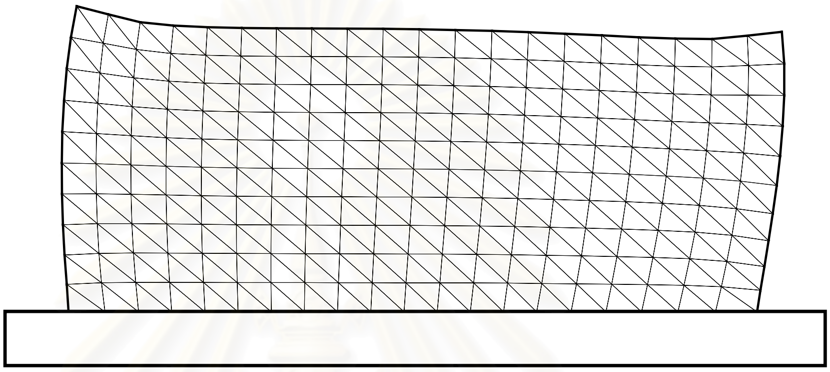
ปัญหาความเสียดทานของก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็งจะเป็นปัญหาที่แสดงถึงประสิทธิภาพของตัวโปรแกรมที่ใช้คำนวณสำหรับปัญหาสัมผัสแบบคิดความเสียดทานได้อย่างชัดเจนและเป็นที่นิยมสำหรับการตรวจสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นของผู้ศึกษาปัญหาความเสียดทานก่อนหน้า [8] [9] และ [17]



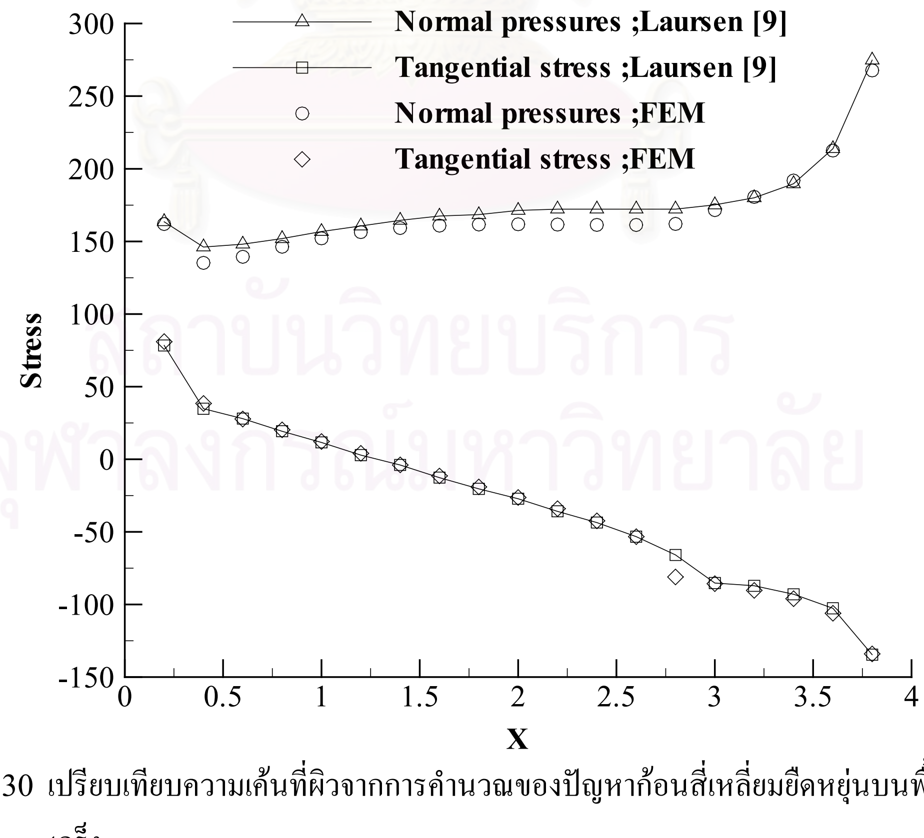
รูปที่ 6.28 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง

ลักษณะของปัญหาคือการกดก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นลงบนพื้นแข็งเกร็งพร้อมกับทำการดึงในแนวราบซึ่งเป็นผลทำให้เกิดความเสียดทานที่บริเวณผิวสัมผัส แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่นำมาใช้คำนวณแสดงไว้ดังรูปที่ 6.28 กำหนดให้ก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นมีค่ายังโมดูลัสเท่ากับ 1000 นิวตัน/หน่วย อัตราส่วนปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 ถูกกระทำด้วยความดัน 200 นิวตัน/หน่วย กดลงมาอยู่

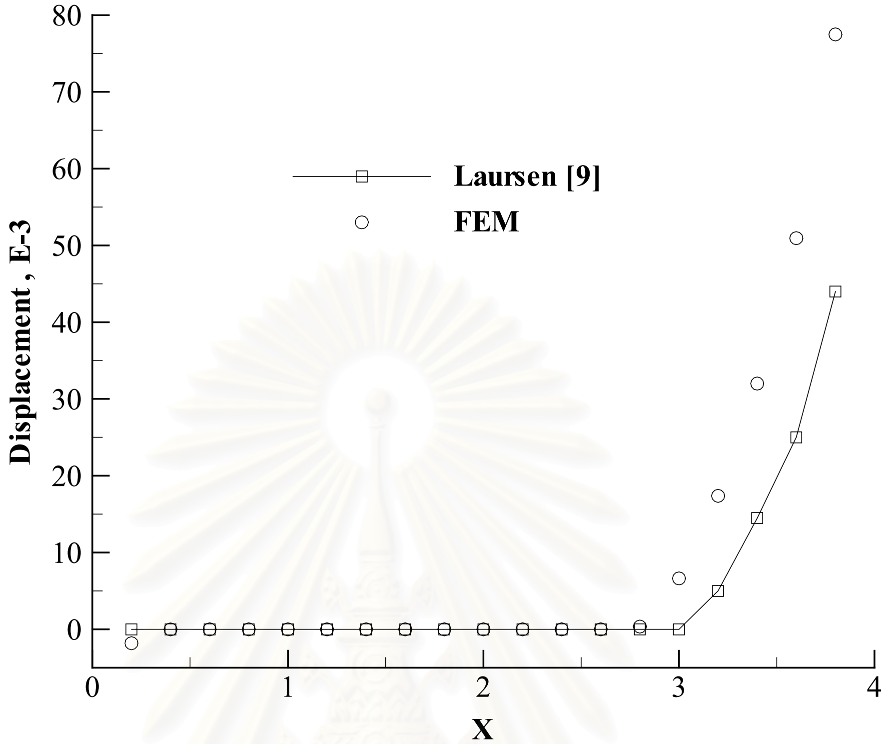
ในช่วงระยะ 3.6 หน่วย และความดันในแนวนอนทางด้านขวา 60 นิวตัน/หน่วย ดึงไปทางด้านขวาตลอดความยาวข้าง 2 หน่วย และสมมติให้จุดต่อปลายทั้งสองข้างที่ผิวสัมผัสไม่มีความเค้นเสียดทาน จากกฎความเสียดทานของคูลอมบ์กำหนดให้ผิวสัมผัสระหว่างพื้นแข็งเกร็งกับก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นมีค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ 0.5 ค่าพีนอลทีของแนวตั้งฉาก (ε_N) มีค่าเท่ากับ 10^8 และค่าพีนอลทีของแนวสัมผัส (ε_T) มีค่าเท่ากับ 10^4



รูปที่ 6.29 การเสียรูปของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง

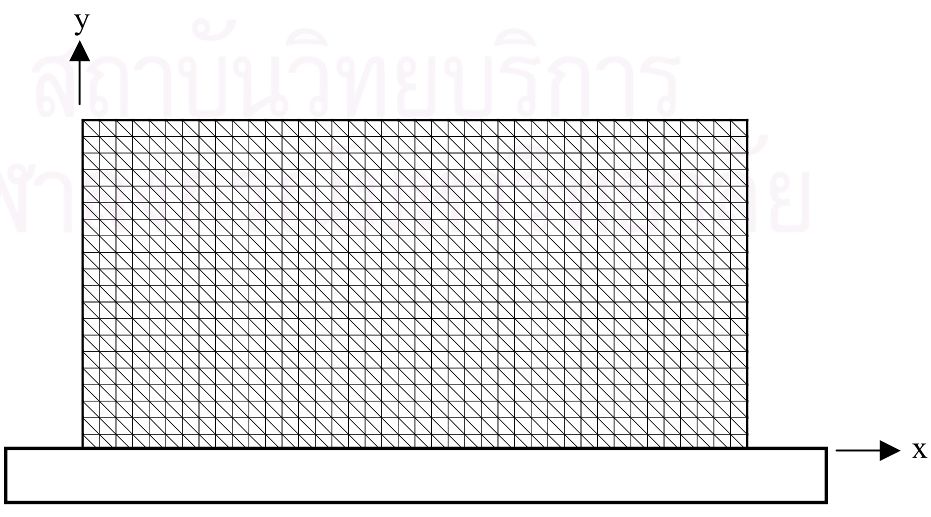


รูปที่ 6.30 เปรียบเทียบความเค้นที่ผิวจากการคำนวณของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง

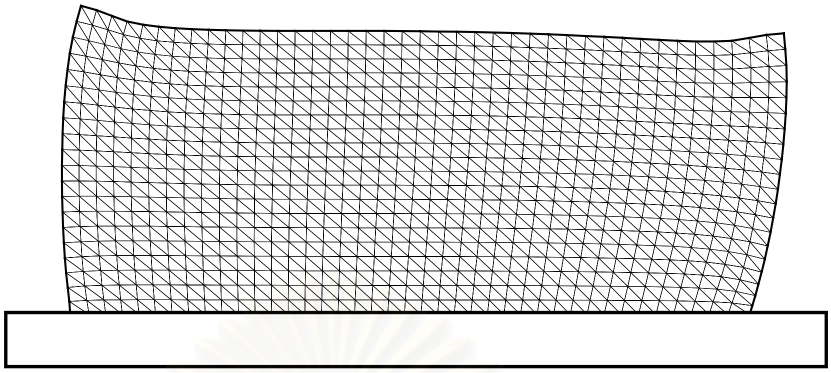


รูปที่ 6.31 แสดงการเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสที่ได้จากการคำนวณ

รูปที่ 6.30 แสดงค่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นในแนวสัมผัสที่เกิดขึ้นซึ่งมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกัน แต่เมื่อนำค่าของการเลื่อนไถลมาเปรียบเทียบดังรูปที่ 6.31 สิ่งที่แตกต่างกันคือจุดเริ่มต้นของการเลื่อนไถล ซึ่งเกิดจากจำนวนเอลิเมนต์น้อยเกินไป จากนั้นลองทำการสร้างแบบจำลองใหม่ให้มีจำนวนของเอลิเมนต์มากขึ้นเป็นสองเท่าของแบบจำลองแรก ดังแสดงในรูปที่ 6.32

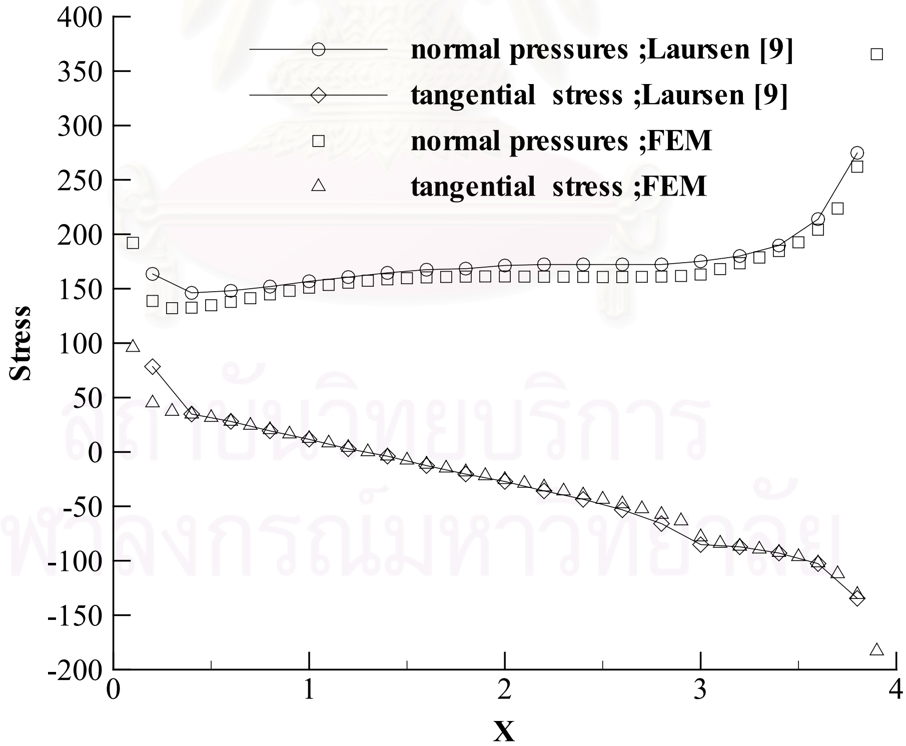


รูปที่ 6.32 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบที่สองของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง

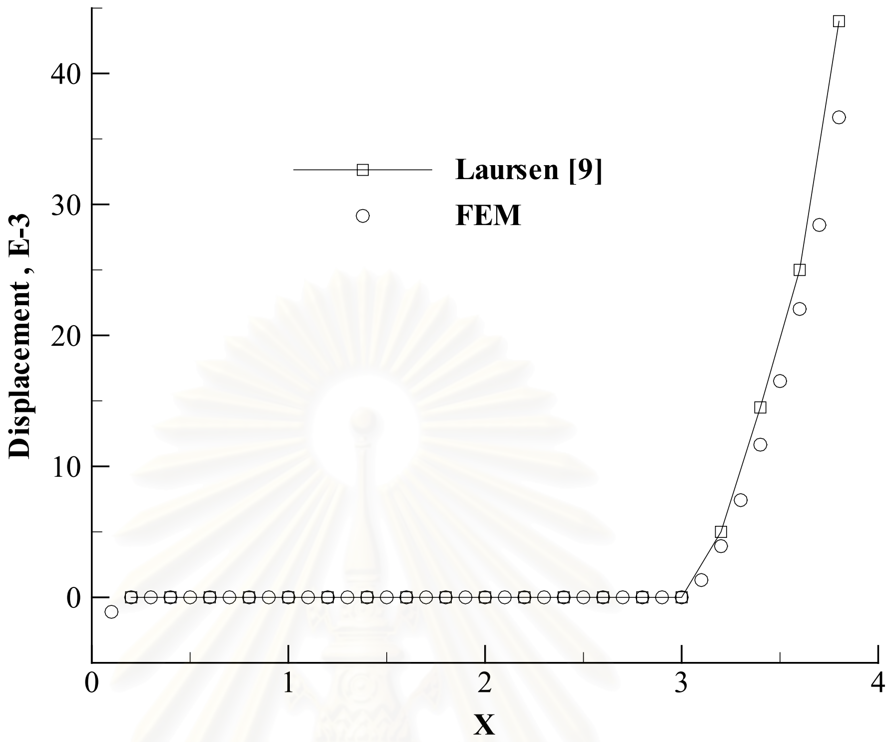


รูปที่ 6.33 การเสียรูปของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบที่สองของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็ง

จากนั้นทำการเปรียบเทียบค่าความเค้นตั้งฉากกับความเค้นในแนวสัมผัสแสดงในรูปที่ 6.34 และค่าการเลื่อนไถลแสดงในรูปที่ 6.35



รูปที่ 6.34 เปรียบเทียบความเค้นที่ผิวจากการคำนวณของปัญหาก้อนสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นบนพื้นแข็งเกร็งของแบบจำลองที่สอง



รูปที่ 6.35 แสดงการเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสที่ได้จากการคำนวณของแบบจำลองที่สอง

จากการเปรียบเทียบ กราฟของความเค้นตั้งฉากและความเค้นเสียดทานที่ผิว แสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ของความเค้นต่าง ๆ และตำแหน่งที่เริ่มมีการเลื่อนไถลสอดคล้องกับผลการคำนวณของ Laursen [9] เป็นอย่างดี ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของจำนวนจุดต่อของบริเวณผิวสัมผัสที่มีผลต่อคำตอบของการคำนวณ

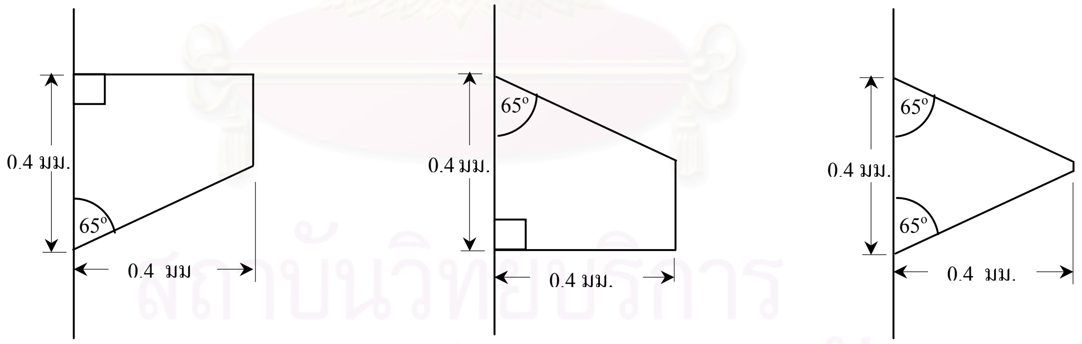
บทที่ 7

การวิเคราะห์รากฟันเทียม

7.1 แบบจำลองของรากฟันเทียมและผลการคำนวณ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้ทำการวิเคราะห์ลักษณะเกลียวของรากฟันเทียมที่มีผลต่อกระดูกรอบรากฟันเทียม โดยกำหนดให้เป็นปัญหา 2 มิติ รากฟันเทียมที่นำมาวิเคราะห์จะเป็นรากฟันเทียมทรงกระบอกขนาดมาตรฐาน มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 5 มิลลิเมตร โดยวัดจากปลายเกลียว และมีความยาวเท่ากับ 14 มิลลิเมตร ทำการฝังลงในกระดูกขากรรไกรที่มีส่วนของกระดูกทึบ (cortical bone) หนา 2 มิลิเมตร โดยที่รูปร่างของเกลียวที่ใช้ทำการวิเคราะห์มี 3 ลักษณะ ได้แก่ เกลียวรูปตัววี เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส (reverse buttress) และเกลียวแบบบัทเทรส (buttress) ดังรูปที่ 7.1

กำหนดให้ขนาดฐานฟันเกลียวของฟันเกลียวทั้ง 3 แบบ มีความกว้างเท่ากับ 0.4 มิลลิเมตร และฟันเกลียวมีความสูงเท่ากับ 0.4 มิลลิเมตร โดยมีระยะห่างยอดฟันเกลียวของแต่ละฟันมีค่าเท่ากับ 0.8 มิลลิเมตร



(a) (b) (c)

รูปที่ 7.1 (a) เกลียวแบบบัทเทรส
(b) เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส
(c) เกลียวรูปตัววี

ในการวิเคราะห์ได้สมมติว่า วัสดุที่ทำรากฟันเทียม และกระดูก มีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) และมีคุณสมบัติทางเชิงกลเท่ากันทุกทิศ (isotropic) โดยมีความยืดหยุ่นเป็น

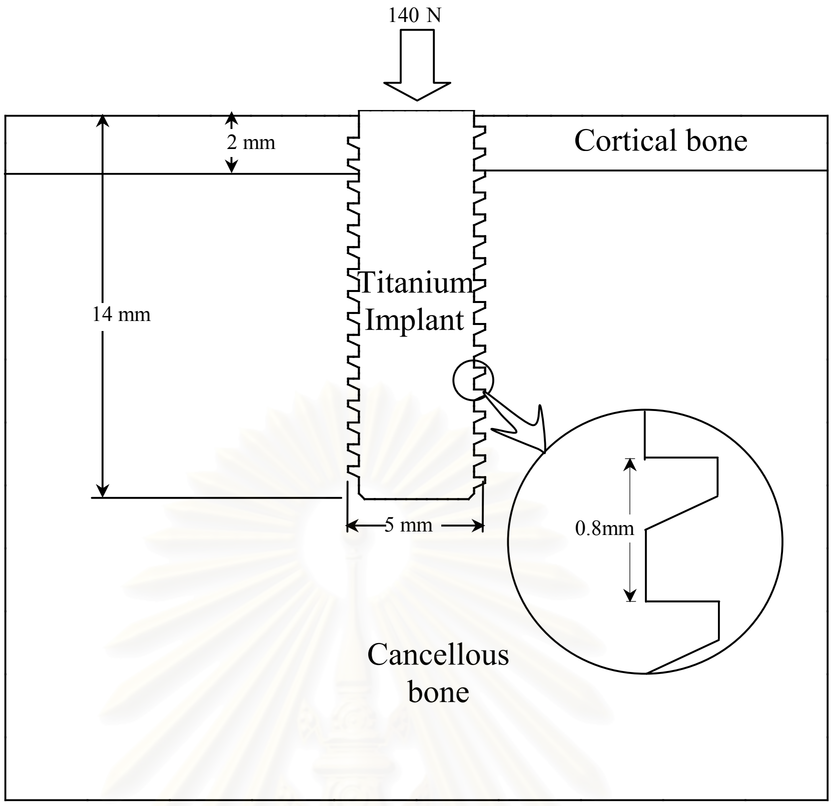
แบบเชิงเส้น (linear elastic) ซึ่งค่ายังโมดูลัสและอัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson's ratio) ของวัสดุแสดงไว้ในตารางที่ 7.1

ตารางที่ 7.1 แสดงค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหารากฟันเทียม [26]

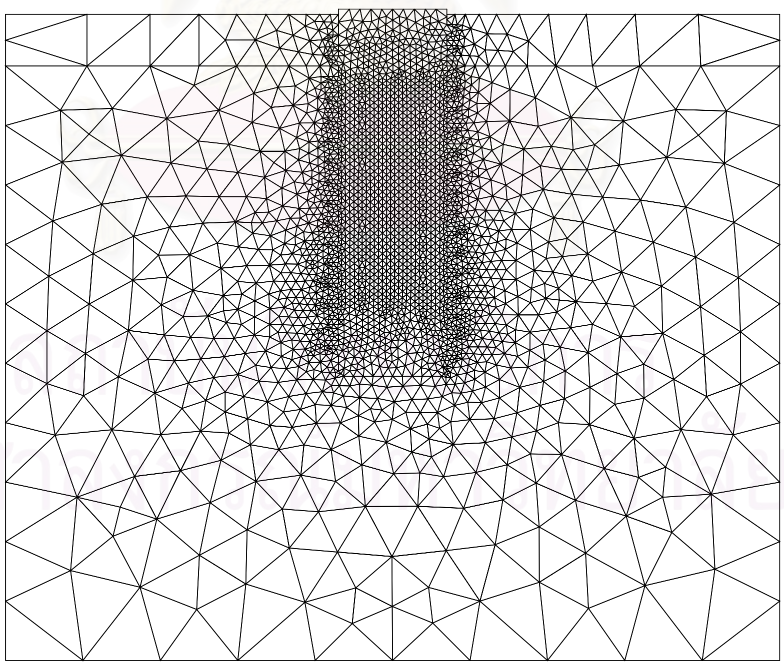
ชนิดวัสดุ	ยังโมดูลัส (E ,MPa)	อัตราส่วนปัวส์ซง (ν)
กระดูกทึบ (cortical bone)	13,700	0.30
กระดูกพรุน (cancellous bone)	1,370	0.30
รากฟันเทียมไททาเนียม	103,400	0.37

สำหรับการให้ภาระของการวิเคราะห์ในแต่ละแบบจำลอง กำหนดให้เป็นภาระกดในแนวแกน y เปรียบเสมอนภาระจากการบดเคี้ยวของฟันหน้าซึ่งมีขนาดเท่ากับ 140 นิวตัน และเนื่องจากว่าการจับยึดระหว่างกระดูกกับรากฟันเทียมยังขึ้นอยู่กับอีกหลายปัจจัย เช่น วัสดุที่ใช้ ระยะเวลาในการฝังรากฟันเทียม ดังนั้นในเชิงการคำนวณนิยมกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานให้อยู่ในช่วง 0.2-0.4 ซึ่งในที่นี้สมมติให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานตลอดผิวสัมผัสมีค่าเท่ากับ 0.3

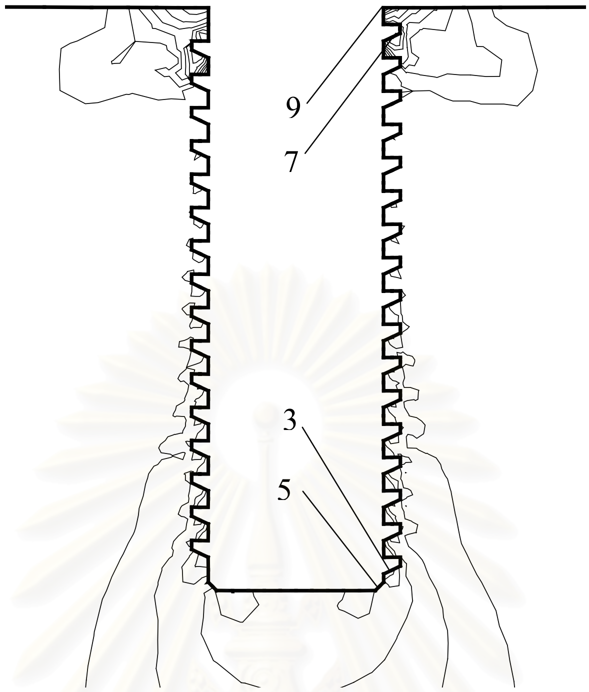
เริ่มต้นจากเกลียวแบบบัทเทรสรูปร่างของแบบจำลองแสดงดังรูปที่ 7.2 แล้วนำไปสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มี 2914 จุดต่อ 5196 เอลิเมนต์ ได้ดังรูปที่ 7.3 ซึ่งให้ผลการกระจายความเค้นดังรูปที่ 7.4



รูปที่ 7.2 รูปร่างแบบจำลองของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส



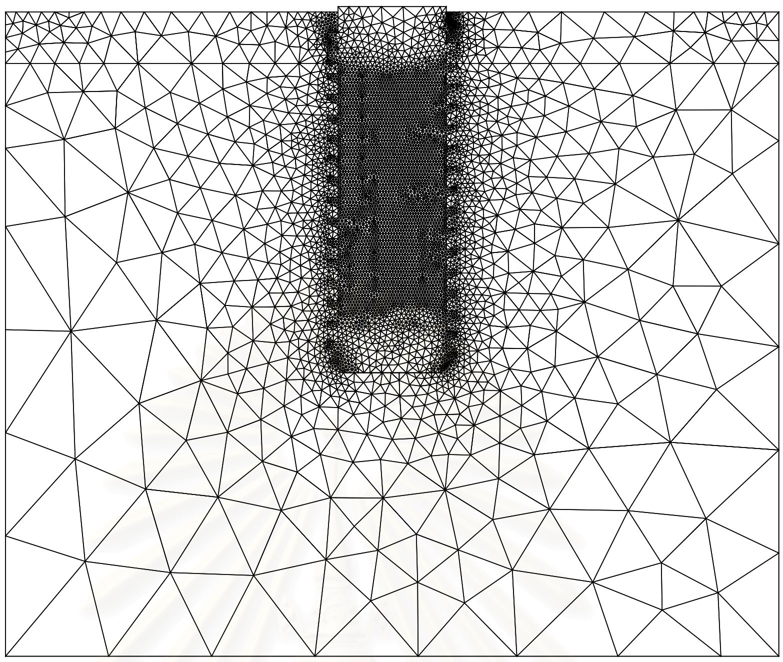
รูปที่ 7.3 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส



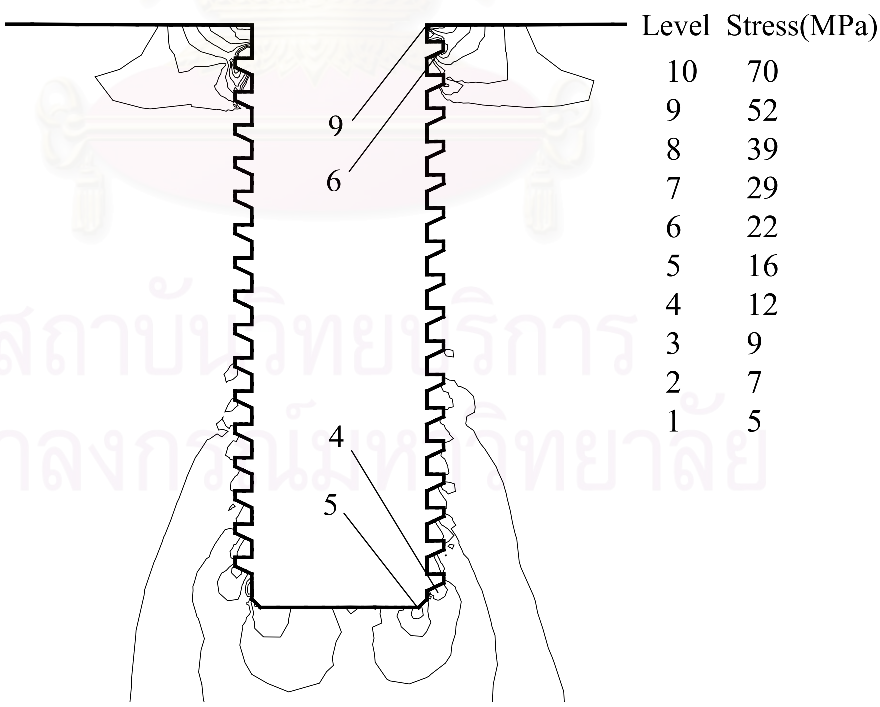
Level	Stress(MPa)
10	70
9	52
8	39
7	29
6	22
5	16
4	12
3	9
2	7
1	5

รูปที่ 7.4 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรสของแบบจำลองเริ่มต้น

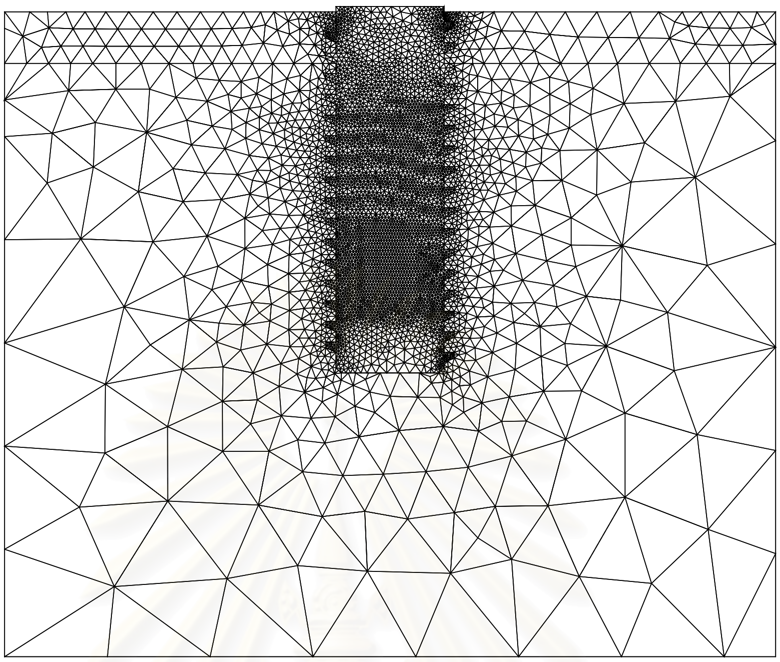
เพื่อทำให้เกิดความถูกต้องของปัญหามากขึ้น จึงนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ามาทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ของแบบจำลอง เป็นจำนวนสองครั้งเพื่อให้ผลมีการลู่เข้าสู่คำตอบ จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ทำให้แบบจำลองมีจำนวน 6500 จุดต่อและ 12196 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 7.5 ซึ่งมีผลการกระจายความเค้นดังรูปที่ 7.6 และการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ทำให้แบบจำลองมีจำนวน 5334 จุดต่อและ 9796 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 7.7 ซึ่งมีผลการกระจายความเค้นดังรูปที่ 7.8 เมื่อดูผลของการกระจายความเค้นจากแบบจำลองสุดท้ายแล้ว ค่าความเค้นวอนมิสสูงสุดมีค่าประมาณ 52 เมกะปาสคาล จะเกิดขึ้นที่บริเวณสันกระดูกด้านบน



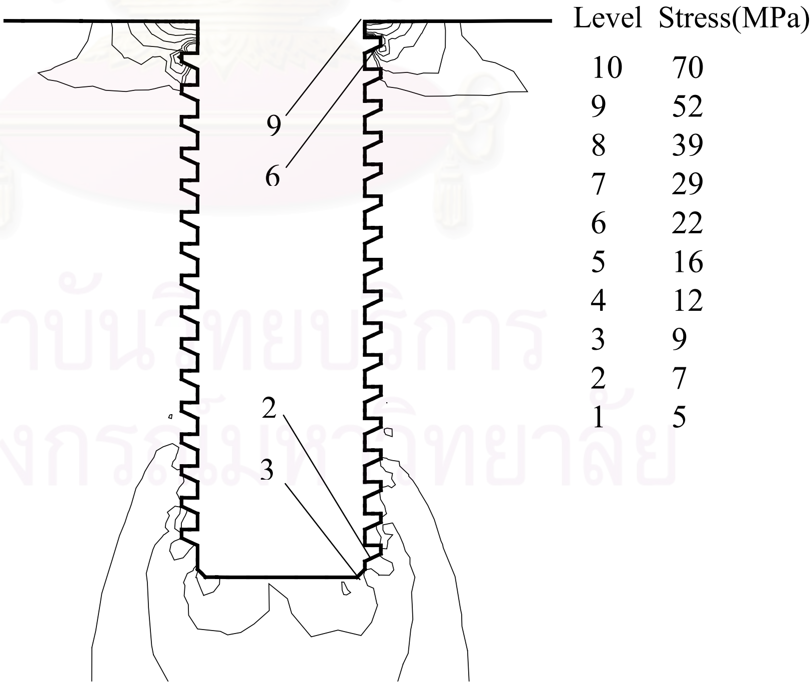
รูปที่ 7.5 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง
ของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส



รูปที่ 7.6 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรสของแบบจำลองของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง

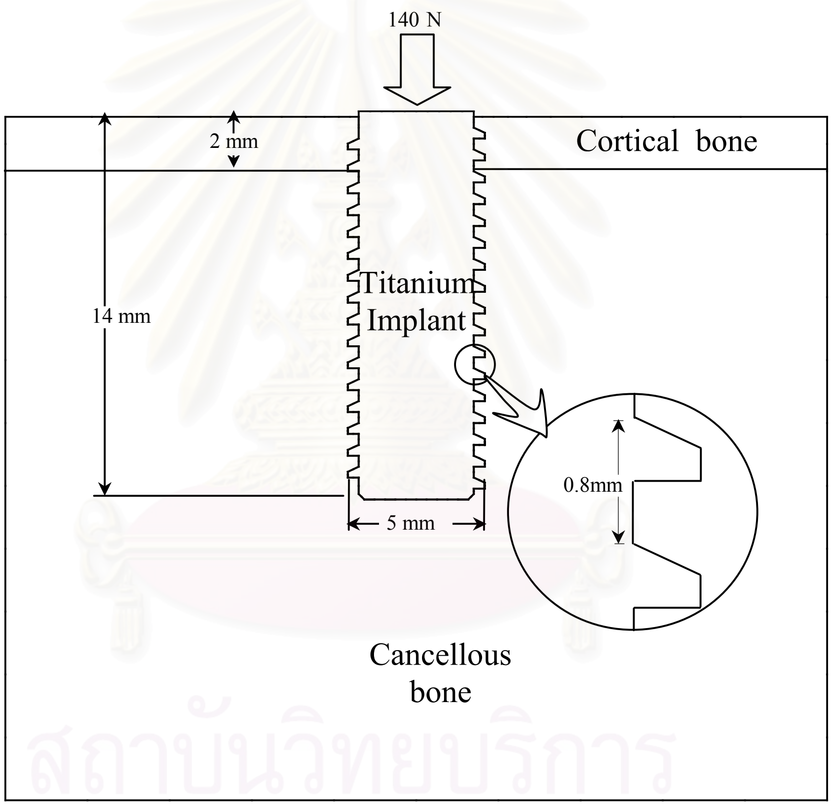


รูปที่ 7.7 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองของรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรส

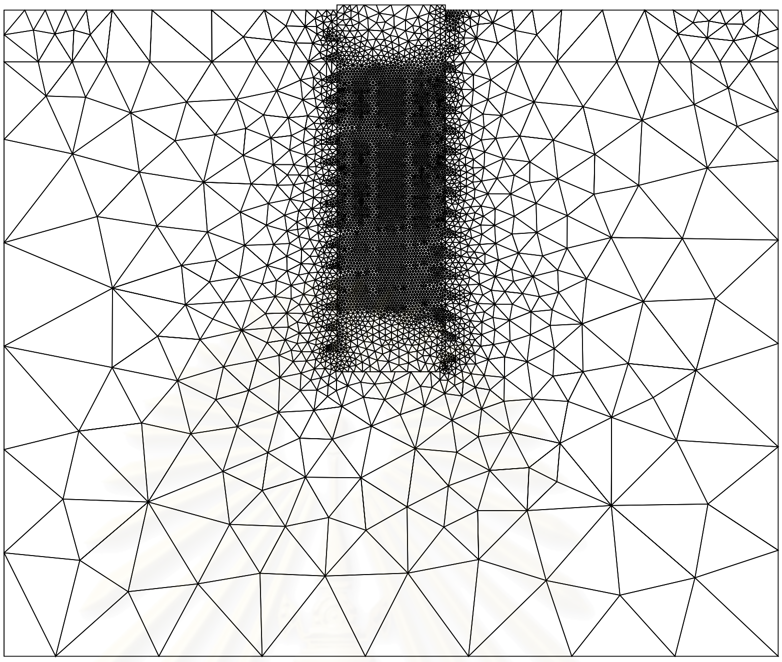


รูปที่ 7.8 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบบัทเทรสของแบบจำลองของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง

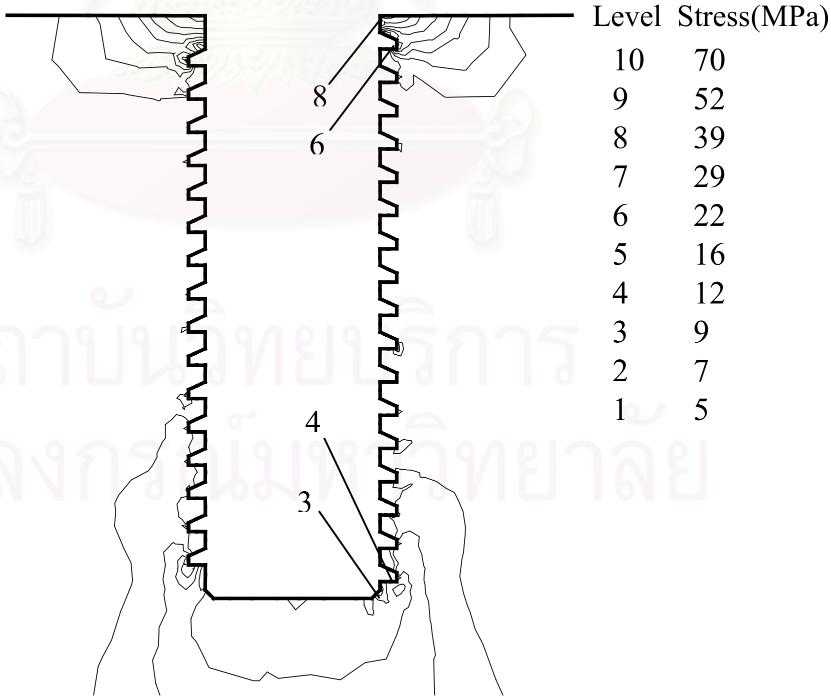
ต่อมาทำการวิเคราะห์เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส ที่แสดงรูปร่างดังรูปที่ 7.9 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยแบบจำลองเริ่มต้นที่มี 2942 จุดต่อ 5252 เอลิเมนต์ แบบจำลองที่ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1มี 6379 จุดต่อ 11923 เอลิเมนต์และแบบจำลองจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ดังรูปที่ 7.10 มี 5919 จุดต่อ 10963 เอลิเมนต์และผลการกระจายความเค้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.11 ซึ่งค่าความเค้นวอนมิสสูงสุดเกิดขึ้นที่บริเวณสันกระดูกด้านบนเช่นเดียวกัน มีค่าประมาณ 45 เมกะปาสคาล



รูปที่ 7.9 รูปร่างแบบจำลองของรากฟันเทียมเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส

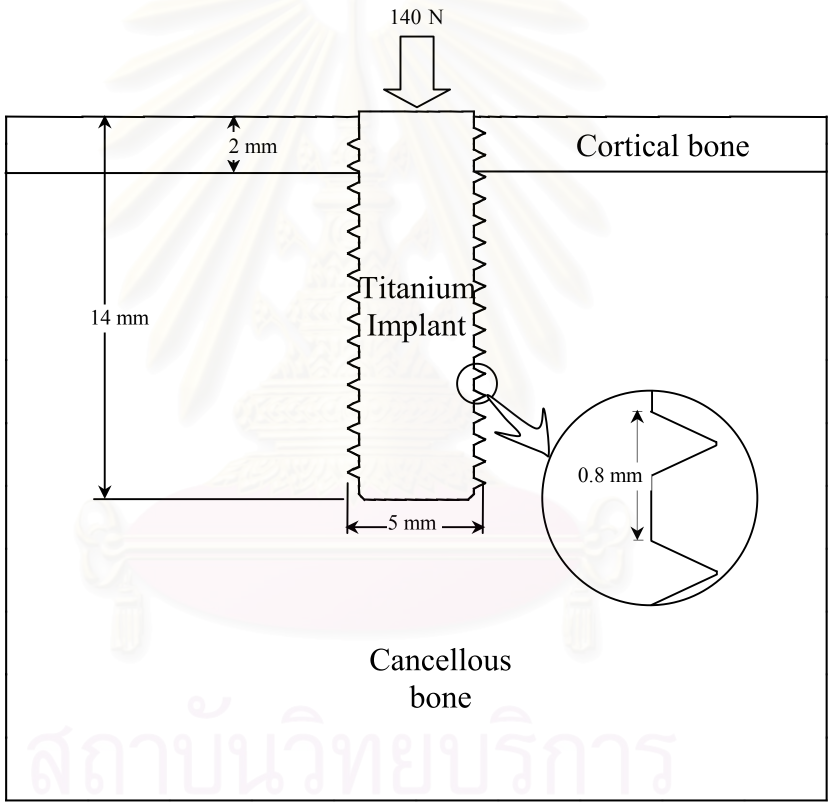


รูปที่ 7.10 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองของรากฟันเทียมเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส

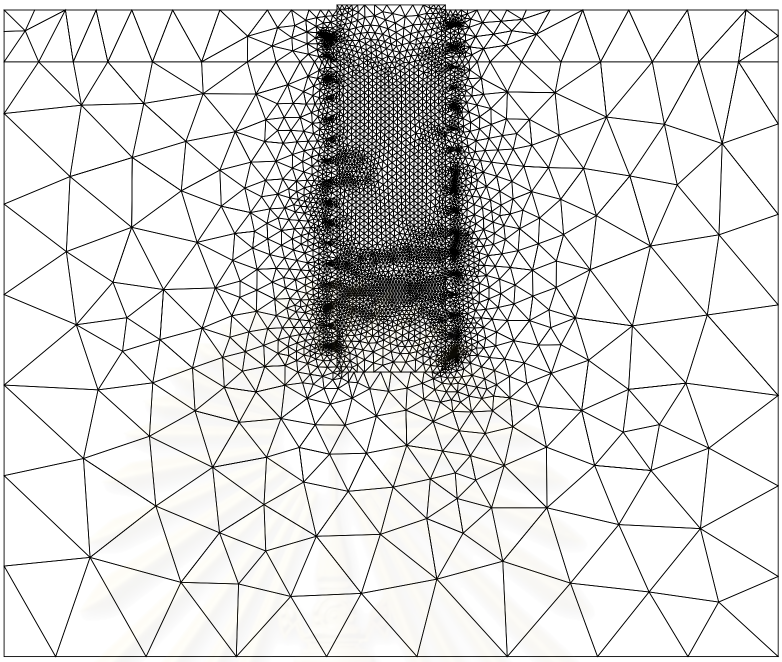


รูปที่ 7.11 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบรากฟันเทียมเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรสของแบบจำลองของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง

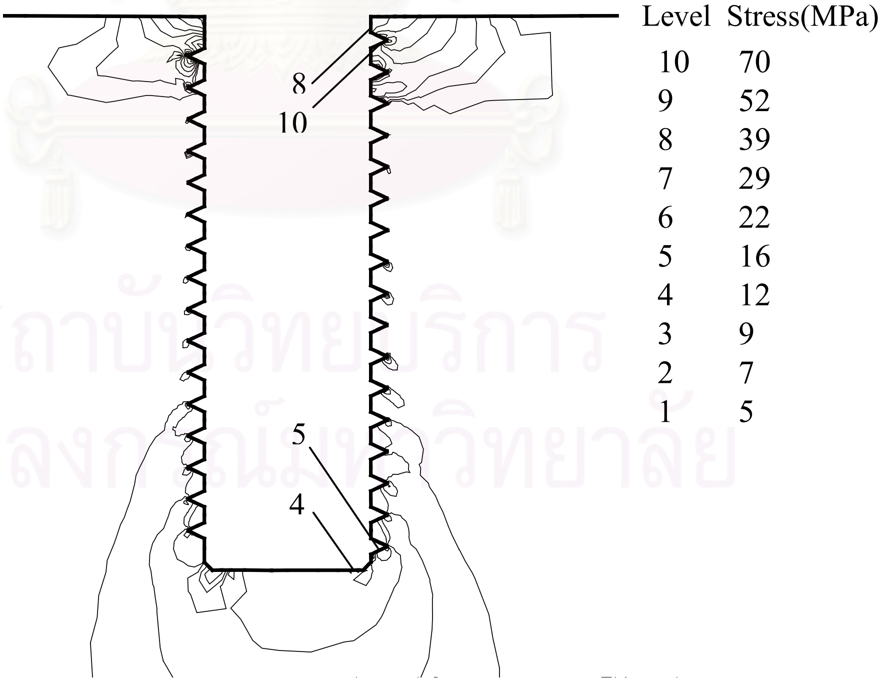
จากนั้นทำการวิเคราะห์เกลียวรูปตัววี ที่แสดงรูปร่างดังรูปที่ 7.12 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยแบบจำลองเริ่มต้นที่มี 3238 จุดต่อ 5844 เอลิเมนต์ แบบจำลองที่ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 มี 4919 จุดต่อ 8856 เอลิเมนต์และแบบจำลองจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ดังรูปที่ 7.13 มี 5344 จุดต่อ 9617 เอลิเมนต์และผลการกระจายความเค้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.14 ซึ่งค่าความเค้นวอนมิสสูงสุดเกิดขึ้นที่ปลายเกลียวอันที่ 1 นับจากด้านบนมีค่าประมาณ 69 เมกะปาสคาล



รูปที่ 7.12 รูปร่างแบบจำลองของรากฟันเทียมเกลียวรูปตัววี



รูปที่ 7.13 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง
ของรากฟันเทียมเกลียวรูปตัววี

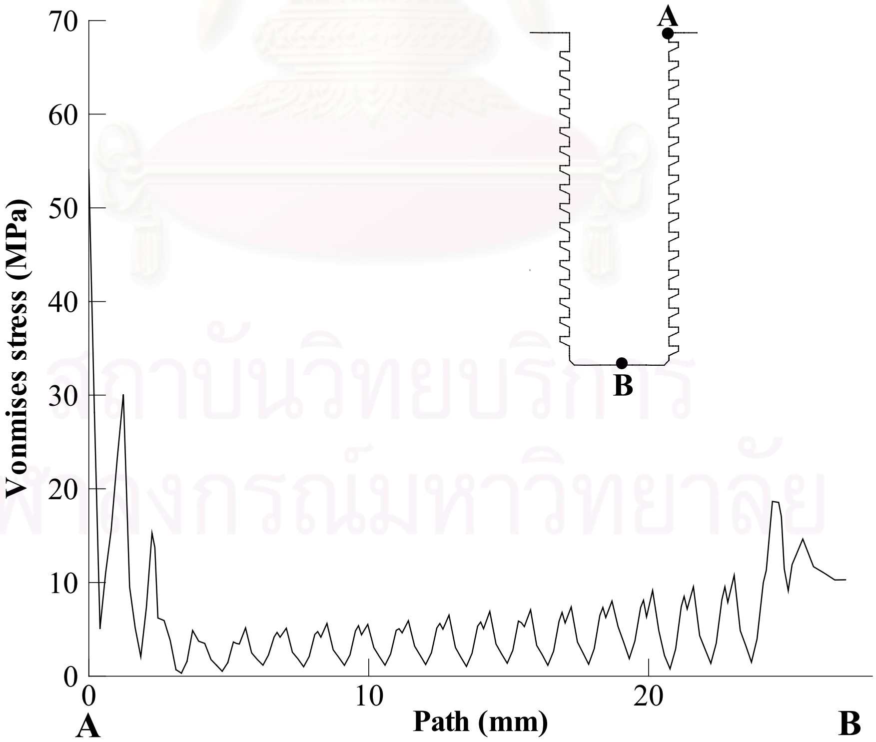


รูปที่ 7.14 ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นวอนมิสภายในกระดูกรอบราก
ฟันเทียมเกลียวรูปตัววีของแบบจำลองของการปรับขนาดครั้งที่สอง

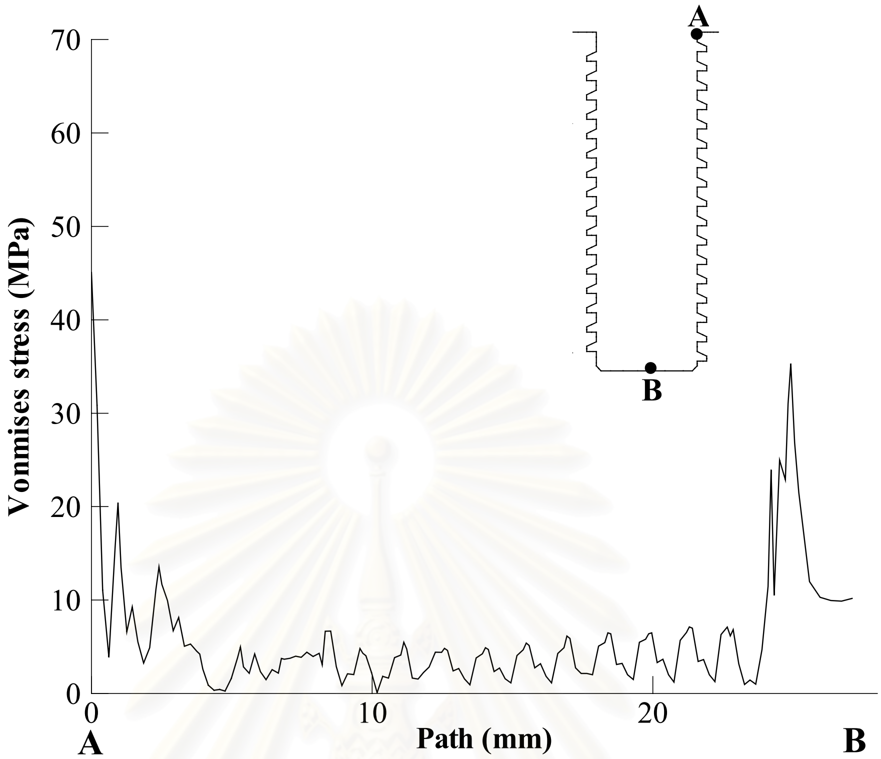
7.2 สรุปผลการวิเคราะห์

จากการวิเคราะห์การกระจายความเค้นในกระดูกรอบรากฟันเทียมที่มีเกลียวแตกต่างกันสามชนิด คือ เกลียวรูปตัววี เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส และเกลียวแบบบัทเทรสจะมีลักษณะที่คล้ายกันตรงที่ ค่าความเค้นที่มากจะเด่นชัดอยู่ด้านบนในส่วนของกระดูกทึบ ซึ่งสอดคล้องกับผลทางคลีนิกที่การละลายตัวเกิดขึ้นจริงในบริเวณด้านบนของกระดูกทึบ เนื่องจากว่าค่าความเค้นจะแปรผันกับค่ายังโมดูลัสของวัสดุ ดังนั้นกระดูกทึบที่มีความแข็งมากกว่าจึงมีความเค้นมากกว่าบริเวณกระดูกพรุนอย่างเห็นได้ชัด นอกจากนั้นยังพบว่าความเค้นมีค่ามากที่บริเวณปลายด้านล่างของกระดูกพรุนเนื่องจากเป็นส่วนที่รับแรงกระทำจากรากฟันเทียมโดยตรง ซึ่งผลการวิเคราะห์ดังกล่าวนี้สอดคล้องกับผลที่ได้จากการศึกษาของ [28] [29] [30] [31]และ[32]

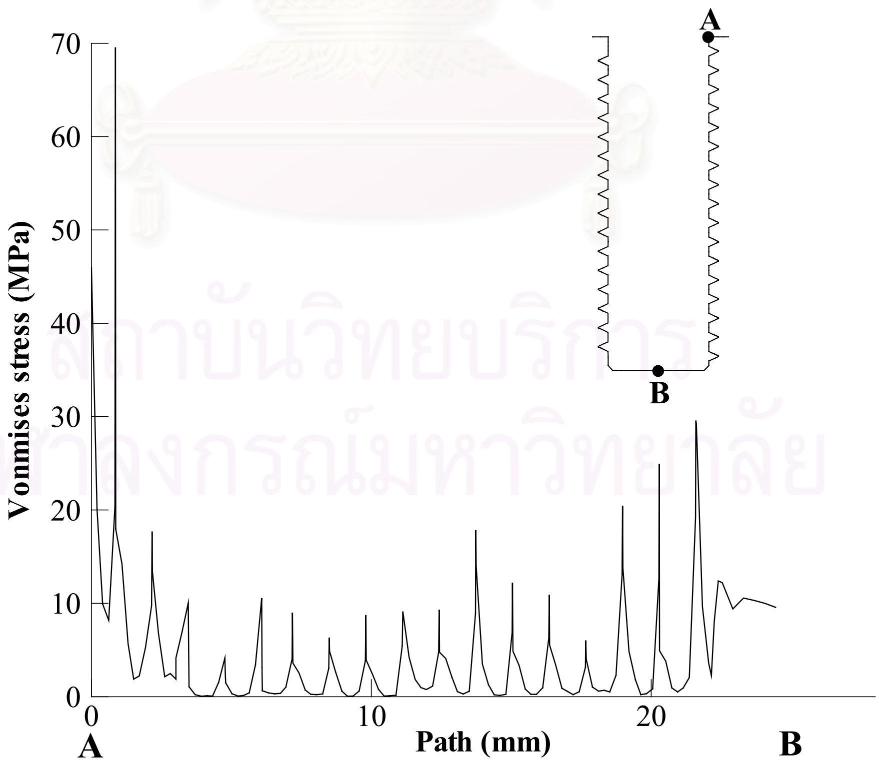
นำค่าความเค้นวอนมิสของจุดต่อที่บริเวณรอบรากฟันเทียมตามเส้นขอบรอบเกลียวตั้งแต่จุด A ถึงจุด B ของเกลียวแต่ละแบบมาวาดกราฟดังรูปที่ 7.15 7.16 และ 7.17 เพื่อดูการกระจายของความเค้น



รูปที่ 7.15 การกระจายความเค้นวอนมิสของกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียมของเกลียวแบบบัทเทรส



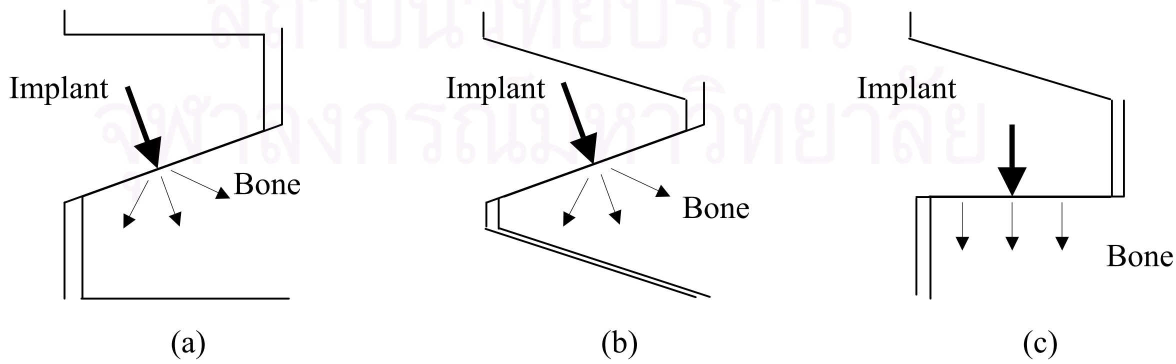
รูปที่ 7.16 การกระจายความเค้นวอนมิสของกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียมของเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส



รูปที่ 7.17 การกระจายความเค้นวอนมิสของกระดูกบริเวณรอบรากฟันเทียมของเกลียวรูปตัววี

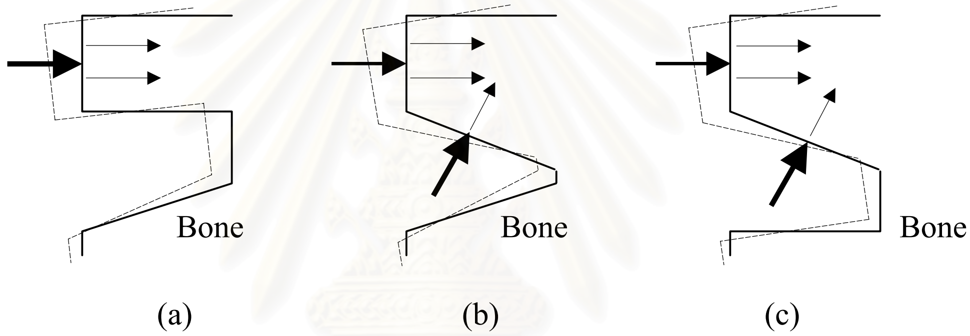
รากฟันเทียมที่เป็นเกลียวแบบบัทเทรส และแบบรีเวิร์สบัทเทรสค่าความเค้นสูงสุดจะเกิดขึ้นที่บริเวณสันกระดูกด้านบน ส่วนเกลียวรูปตัววีนั้นค่าความเค้นสูงสุดจะเกิดที่บริเวณปลายเกลียวที่หนึ่งนับจากด้านบน จากค่าความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นในแต่ละเกลียวแสดงได้ว่าเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรสมีการกระจายความเค้นดีที่สุด การกระจายความเค้นมีลักษณะคล้ายกับมุมแหลมหลาย ๆ อันมาต่อกัน ซึ่งจุดสูงสุดของแต่ละมุมแหลมเป็นค่าความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นบนแต่ละฟันเกลียว ที่บ่งบอกถึงประสิทธิภาพการกระจายความเค้นของเกลียวแต่ละรูปร่างได้ จากรูปที่ 7.15 ถึงรูปที่ 7.17

เมื่อพิจารณาในส่วนของกระดูกพรุนแสดงให้เห็นว่า เกลียวแบบบัทเทรส และเกลียวรูปตัววีมีการกระจายความเค้นได้ดี เนื่องจากค่าของจุดมุมแหลมมีการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป แต่สำหรับเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส ค่าของจุดมุมแหลมจะมีค่าใกล้ ๆ กันในช่วงกลางของรากเทียมจนถึงช่วงด้านล่างของรากฟัน ค่าที่จุดมุมแหลมจะมีค่าสูงขึ้นทันที ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากว่า ภาระที่กระทำเป็นภาระในแนวดิ่ง ทำให้รากฟันเทียมมีการเคลื่อนตัวลง ดังนั้นบริเวณผิวบนของเกลียวรากฟันเกิดการแยกตัวขึ้น แต่บริเวณผิวด้านล่างของฟันเกลียวจะเป็นหน้าสัมผัสที่ส่งผ่านแรงจากภาระโดยตรง ซึ่งเกลียวแบบบัทเทรส และเกลียวรูปตัววีเปรียบเสมือนว่าแรงได้กระทำบนพื้นเอียงดังแสดงในรูปที่ 17.18(a) และ17.18(b) ทำให้แรงที่กระทำนี้กระจายไปสู่กระดูกด้านข้างได้มากกว่าเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรสที่เสมือนว่าแรงกระทำอยู่บนพื้นระนาบ ดังรูปที่ 17.18(c) ซึ่งแรงไม่ได้กระจายไปสู่กระดูกด้านข้าง เป็นเหตุให้ที่บริเวณกระดูกทางปลายล่างของรากฟันเทียมเกิดความหนาแน่นของความเค้นมาก ด้วยเหตุผลดังกล่าว ทำให้อธิบายผลการทดลองของ Misch [33] ที่ได้ทำการเปรียบเทียบระหว่างเกลียวรูปตัววีกับเกลียวรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งสรุปได้ว่าเกลียวรูปตัววีกระจายความเค้นได้ดีกว่า



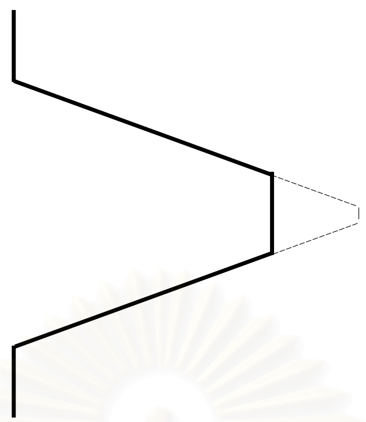
รูปที่ 7.18 การกระจายแรงที่เกิดขึ้นบนผิวสัมผัสของแต่ละเกลียว

ในส่วนของกระดูกทึบด้านบน เมื่อได้รับภาระในแนวดิ่งแล้วการเคลื่อนที่ของกระดูกด้านบนมีแนวโน้มที่จะเคลื่อนที่เข้ามาบีบรัดกับตัวรากฟันเทียมดังรูปที่ 17.19 เป็นผลให้แรงที่กระทำกับกระดูกส่วนบนเป็นแรงในแนวนอน ทำให้บริเวณสันกระดูกด้านบนของกระดูกทึบจะมีความเค้นมากในเกลียวแต่ละแบบ แต่เกลียวแบบบัทเทรสมีค่าความเค้นมากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับเกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรสและเกลียวรูปตัววี เนื่องจากพื้นที่รับแรง และประสิทธิภาพการกระจายความเค้นน้อยกว่า ทำให้การเคลื่อนตัวของสันกระดูกด้านบนมีค่ามากกว่าจึงเกิดความเค้นกดมากกว่าเกลียวแบบอื่นที่มุมสันด้านบน และเหตุผลเดียวกันนี้ที่ทำให้เกลียวรูปตัววีมีค่าความเค้นค่อนข้างสูงที่บริเวณปลายเกลียว เนื่องจากมีพื้นที่ด้านข้างน้อยมาก



รูปที่ 7.19 การกระจายแรงและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นบนสันด้านบนของกระดูกทึบ

จากผลการเปรียบเทียบของเกลียวทั้งสามแบบ เกลียวที่มีประสิทธิภาพการกระจายความเค้นดีก็คือ เกลียวแบบบัทเทรส และเกลียวรูปตัววี ส่วนแบบเกลียวที่ทำให้บริเวณสันด้านบนของกระดูกทึบมีความเค้นน้อยก็คือ เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส และเกลียวรูปตัววี ดังนั้นสรุปได้ว่าเกลียวรูปตัววี มีการกระจายความเค้นที่ดี เนื่องจากว่าผิวด้านบนและผิวด้านล่างมีลักษณะคล้ายกับพื้นเอียง แต่มีข้อเสียอยู่ที่บริเวณปลายเกลียวที่มีลักษณะเหมือนกับมุม ซึ่งทำให้เกิดความเค้นมากที่บริเวณนี้ จึงเป็นเหตุผลที่ว่า ในทางปฏิบัติเกลียวที่นิยมใช้ในทางทันตกรรมคือเกลียวรูปตัววีปลายตัด ดังรูปที่ 7.20 ที่เป็นการเพิ่มพื้นที่รับแรงด้านข้างให้มากขึ้น ดังนั้นเกลียวรูปตัววีปลายตัดจึงมีประสิทธิภาพของการกระจายแรงทั้งด้านข้างและด้านล่างของเกลียวรูปตัววีเพิ่มมากขึ้น



รูปที่ 7.20 เกลียวรูปตัววีปลายตัด

บทที่ 8

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุป

วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ คือเพื่อศึกษาลักษณะการกระจายความเค้นของรากฟันเทียมที่เกิดขึ้นกับกระดูกขากรรไกร โดยพิจารณาเป็นปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน สองมิติความเครียดในระนาบ โดยเริ่มจากการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อนำไปเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการสัมผัส จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยการเปรียบเทียบกับปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ เมื่อโปรแกรมผ่านการตรวจสอบและมีความน่าเชื่อถือของผลคำตอบแล้ว จึงนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปทำการวิเคราะห์ปัญหาของรากฟันเทียม ซึ่งได้ทำการเปรียบเทียบรูปร่างของฟันเกลียว 3 แบบคือ เกลียวแบบรีเวิร์สบัทเทรส แบบบัทเทรส และเกลียวรูปตัววี จากการวิเคราะห์ผลการคำนวณของปัญหารากฟันเทียม สามารถสรุปได้ว่ารากฟันเทียมที่ใช้เกลียวแบบรูปตัววีมีประสิทธิภาพในการกระจายความเค้นได้ดี แต่จะมีค่าความเค้นสูงมากตรงบริเวณปลายเกลียวของแต่ละฟันเกลียว เนื่องจากว่าปลายเกลียวรูปตัววีมีพื้นที่ในการกระจายแรงด้านข้างได้น้อย ทำให้ในทางปฏิบัตินิยมใช้เกลียวรูปตัววีปลายตัดเพื่อเพิ่มพื้นที่ในการกระจายความเค้นทางด้านข้าง

8.2 ปัญหาที่พบและวิธีการแก้ปัญหา

สิ่งแรกของปัญหาที่พบสำหรับการเขียนวิทยานิพนธ์คือ การศึกษาเพื่อเลือกหาวิธีที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน เนื่องจากในขั้นแรกผู้เขียนวิทยานิพนธ์ได้เลือกใช้วิธีลากรางจ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier) ที่เป็นวิธีเบื้องต้นสำหรับปัญหาของการสัมผัส และให้ความถูกต้องมากที่สุด เนื่องจากเป็นวิธีการที่นำเงื่อนไขของการเหลื่อมล้ำของขอบวัตถุทั้งสองต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ประยุกต์เข้ากับสมการพื้นฐานด้วยการเพิ่มตัวไม่รู้ค่าเข้าไปในระบบสมการซึ่งก็คือแรงปฏิกิริยาที่ผิวสัมผัส แต่วิธีนี้มีข้อจำกัดหลายอย่างเช่นลักษณะของเมตริกซ์รวมก่อนการคำนวณจะมีค่าศูนย์เกิดขึ้นในแนวทแยงของเมตริกซ์เป็นส่วนที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขของการเหลื่อมล้ำ ทำให้ปัญหาที่มีการกำหนดแบบขอบเขตความเค้นที่ผิวเกิดการลู่เข้าสู่คำตอบได้ยากหรือไม่ได้เลย ส่วนการกำหนดเป็นระยะการเคลื่อนตัวบังคับนั้นปัญหาจะลู่

เข้าสู่คำตอบได้ง่าย ถ้าหากว่ารูปร่างของปัญหามีลักษณะไม่ซับซ้อน แต่เมื่อปัญหามีรูปร่างซับซ้อน การลู่เข้าสู่คำตอบก็จะเป็นไปได้ยากเช่นเดียวกัน ต่อมาผู้เขียนวิทยานิพนธ์ได้ทำการแก้ปัญหานี้ด้วยวิธีการที่เรียกว่า เพอร์เทิร์บลากรางจ์ (perturbed Lagrange) ซึ่งรูปแบบของเมตริกซ์จะคล้ายกับวิธีลากรางจ์มัลติไพลเออร์ เพียงแต่ว่าวิธีนี้จะช่วยทำให้เงื่อนไขของการสัมผัสมีความยืดหยุ่นมากขึ้น โดยยอมให้ขอบของวัตถุที่สัมผัสกันเกิดการเหลื่อมล้ำกันได้ แต่ต้องอยู่ในช่วงของค่าการเหลื่อมล้ำที่ยอมรับได้ ทำให้ค่าในแนวทแยงจากเงื่อนไขการสัมผัสในเมตริกซ์รวมมีค่าไม่เป็นศูนย์ วิธีการนี้สามารถช่วยลดปัญหาของการกำหนดเงื่อนไขด้วยแรงได้ แต่สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนก็ยังไม่ช่วยให้ผลลัพธ์ลู่เข้าสู่คำตอบได้ง่าย

หลังจากนั้นผู้เขียนวิทยานิพนธ์ได้ทำการตรวจสอบแล้วว่าโปรแกรมสำเร็จรูปที่มีใช้สำหรับการแก้ปัญหาการสัมผัสมีพื้นฐานอยู่บนวิธีที่เรียกว่า วิธีพีนอลที (penalty method) วิธีนี้เป็นวิธีพื้นฐานเช่นเดียวกับวิธีลากรางจ์มัลติไพลเออร์ วิธีพีนอลทีเป็นวิธีที่ง่ายสำหรับการเขียนโปรแกรมซึ่งผู้เขียนวิทยานิพนธ์เคยมองข้ามไปเนื่องจากเหตุผลที่ว่า วิธีนี้จะต้องมีการกำหนดค่าพีนอลทีให้กับปัญหาหรือเสมือนว่าเป็นการกำหนดค่าความแข็งของสปริงระหว่างผิวสัมผัส ซึ่งค่าพีนอลทีจะต้องมีค่ามากๆ เพื่อให้คำตอบมีค่าถูกต้องมากที่สุด ถ้าค่าพีนอลทีมีค่ามากเกินไปอาจทำให้ ผลการคำนวณไม่ลู่เข้าสู่ผลคำตอบ หรือไม่สามารถทำการคำนวณต่อไปได้ แต่ถ้าค่าพีนอลทีมีค่าน้อยเกินไป ค่าความผิดพลาดของปัญหาอาจไม่อยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ ดังนั้นวิธีการเลือกค่าพีนอลทีจะต้องทำการสุ่มค่าเพียงอย่างเดียว ซึ่งสำหรับปัญหาที่มีขนาดเมตริกซ์ ไม่ใหญ่มากนั้นสามารถทำได้ หากปัญหาที่เมตริกซ์มีขนาดใหญ่จะทำให้ใช้เวลามาก กว่าจะรู้ว่าค่านี้ใช้ได้หรือไม่

จากปัญหาดังกล่าวผู้วิจัยได้พยายามหาวิธีการเพื่อแก้ปัญหาการลู่เข้าสู่คำตอบและค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้น พบว่าปัจจุบันนี้ในโปรแกรมสำเร็จรูปใหม่ๆ ได้นำวิธีออกเมนเตดลากรางเจียนมาช่วยสำหรับการแก้ปัญหาการสัมผัส โดยเฉพาะกับปัญหาแบบคิดความเสียดทาน ด้วยตัวพื้นฐานของวิธีนี้จะเป็นวิธีการของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (optimization) เช่นเดียวกับวิธีลากรางจ์มัลติไพลเออร์ และวิธีพีนอลทีดังนั้นวิธีการจะตั้งอยู่บนพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ภายหลังต่อมาได้มีผู้นำเอาวิธีออกเมนเตดลากรางเจียนมาประยุกต์ใช้กับขั้นตอนวิธีแบบอูซาวา (Usawa algorithm) ซึ่งเป็นการนำแนวคิดแบบออกเมนเตดลากรางเจียนมาประยุกต์ใช้กับวิธีพีนอลทีเพื่อให้ง่ายต่อการประดิษฐ์โปรแกรมและมีความถูกต้องมากขึ้น ดังนั้นผู้เขียนวิทยานิพนธ์จึงได้เลือกใช้วิธีออกเมนเตดลากรางเจียนสำหรับการแก้ปัญหาการสัมผัสแบบคิดความเสียดทาน

ปัญหาต่อมาก็คือบางปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน อย่างเช่นปัญหาของรากฟันเทียมนี้ การลู่เข้าสู่คำตอบจะเกิดขึ้นช้ามาก ทำให้การคำนวณต้องใช้เวลาเป็นอย่างมาก ผู้เขียนวิทยานิพนธ์จึงได้นำวิธีการค้นหาเชิงแนวเส้น (line search method) ซึ่งเป็นวิธีการที่ใช้โดยทั่วไปอยู่แล้วสำหรับการทำการคำนวณปัญหาของของแข็งแบบไม่เชิงเส้น โดยการหาค่าตัวแปรที่เพิ่มขึ้นให้เหมาะสมในแต่ละรอบการทำซ้ำ เพื่อทำให้ผลลัพธ์ลู่เข้าสู่คำตอบเร็วขึ้น

8.3 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาที่พบมานั้นสิ่งสำคัญที่สังเกตได้อย่างหนึ่งคือ รูปร่างและจำนวนของเอลิเมนต์ ในปัญหาการสัมผัสนั้น จำนวนของเอลิเมนต์จะมีความสำคัญมากโดยเฉพาะตรงบริเวณขอบที่เกิดการสัมผัส มีความจำเป็นอย่างมากที่จะต้องให้เอลิเมนต์มีความละเอียดที่บริเวณขอบสัมผัสของวัตถุทั้งสองชิ้นและควรจะมีขนาดที่ใกล้เคียงกัน

ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ ปัญหาที่ทำการวิเคราะห์เป็นปัญหาแบบเชิงเส้นคือ ตัววัสดุจะมีการเสียรูปน้อย และการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเป็นแบบค่อยเป็นค่อยไป ทำให้ผลของแรงอันเนื่องมาจากตัววัตถุเองสามารถละได้ ลักษณะของปัญหาจึงเป็นแบบสถิตวิธีการแก้ระบบสมการเป็นแบบไม่ชัดแจ้ง (implicit) ด้วยวิธีดังกล่าวแล้วสามารถทำได้ดีกับปัญหาที่มีขนาดเมตริกซ์ไม่ใหญ่มาก แต่สำหรับปัญหาของวัสดุที่มีการเสียรูปมากซึ่งจะเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นการแก้ระบบสมการรวมอาจไม่เหมาะสม การลู่เข้าหาคำตอบก็อาจจะเกิดขึ้นได้ยาก ดังนั้นในโปรแกรมสำเร็จรูปทั่วไป การแก้ปัญหาแบบชัดแจ้ง (explicit) จะเป็นที่นิยมมากกว่า ที่สามารถแก้ปัญหาได้ทั้งแบบที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องกับเวลา จำนวนระบบสมการจะมากหรือน้อยจะมีความสัมพันธ์กับเวลาในการคำนวณเป็นแบบเชิงเส้น เนื่องจากไม่ต้องคิดระบบสมการรวม ดังนั้นเพื่อเป็นการพัฒนาตัวโปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์กับปัญหาได้หลากหลายมากขึ้นต่อไป ไม่ว่าจะเป็นปัญหาแบบสถิตหรือพลศาสตร์ วัสดุจะมีการเสียรูปมากหรือน้อย วิธีการแบบชัดแจ้งจึงเป็นวิธีที่น่าจะพิจารณาสำหรับการทำปัญหาของการสัมผัสต่อไป

รายการอ้างอิง

1. Chan, S. K. and Tuba, I. S. A. Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies. International Journal of Mechanical Science.13 (1971) : 615-625.

2. Heegaard, J.H. and Curnier, A. An Augmented Lagrangian Method for Discrete Large-Slip Contact Problems. International Journal for Numerical Method in Engineering. 36 (1993) : 569-593.

3. Alart, P. and Curnier, A. A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems Prone to Newton Like Methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 92 (1991) : 353-375.

4. Refaat, M. H. and Meguid, S. A. A New Strategy for the Solution of Frictional Contact Problems. International Journal for Numerical Method in Engineering. 43 (1999) : 1053-1068.

5. Bathe, K. J. and Chaudhary, A . A Solution Methode for Planar and Axisymmetry Contact Problem. International Journal for Numerical Method in engineering. 21 (1985) : 65-88.

6. Giannokopoulos, A. E. The Return Mapping Method for the Integration of Friction Constitutive Relation. Computers and Structures. 32 (1989) : 157-168.

7. Simo, J. C. , Wrigger, P. and Taylor, R. L. A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of contact Problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 50 (1985) : 163-180.

8. Wriggers, P., Van, T. V. and Stein, E. Finite Element Formulation of Large Deformztion Impact-Contact Problems with Friction. Computers and Structures. 37 (1990) : 319-333.

9. Simo, J. C. and Laursen, T. A. An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction. Computers and Structures. 42 (1992) : 97-116.

10. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2542.

11. Bathe, K. J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.

12. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2541.

13. Crisfield, M. A. Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 1, John Wiley & Sons, Inc. , Chichester, 1997.

14. Wriggers, P. Computational Contact Mechanics. John Wiley & Sons, 2002.

15. Laursen, T. A. The Convected Description in Large Deformation Frictional Contact Problems. International Journal of Solids and Structures. 31 (1994) : 669-681.

16. Laursen, T. A. Computational Contact and Impact Mechanics, Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis. Springer, 1985.

17. Oden, J. T. and Pires, E. B. Algorithm and Numerical Results for Finite Element Approximations of Contact Problems with Non-Classical Friction Laws. Computers and Structures. 19 (1984) : 137-147.

18. Wriggers, P. On Consistent Tangent Matrices for Frictional Contact Problems. In G. Pande and J. Middleton, editors, Proceedings of NUMETA 87. M. Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.

19. Simo, J. C. and Taylor, R. L. Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 48 (1985) : 101-118.

20. Hallquist, J. O., Goudreau, G. L. and Benson, D. J. “Sliding Interfaces with Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 51 (1985) : 107-137.

21. Zhong, Z. H. Finite Element Procedures for Contact – Impact Problems. Oxford University Press, 1993

22. Huebner, K. H., Thornton, E. A. and Byrom, T. G. The Finite Element Method for Engineering. Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. , NewYork, 1995.

23. สุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพานิช. การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544

24. Bonet, J. and Wood, R.D. Nonlinear continuum mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge University Press, 1997.

25. Johnson, K. L. Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1985.

26. Chandrasekaran, N., Haisler, W. E. and Goforth, R. E. Finite Element Analysis of Hertz Contact Problem with Friction. Finite Element in Analysis and Design. 3 (1987) : 39-56.

27. Thanapalin, T. The Effect of Different Shape and Thread Designs of Implant Fixture on Stress Distribution in Alveolar Bone: Finite Element Method. A Master Thesis, Department of Prosthodontics, Graduate School, Chulalongkorn University, 2001.

28. Abani, P.K., DePaolo, J.M., DeTolla, D. and Meenaghan, M.A. Guidelines for Analysis and Redesign of Dental Implants. Implant Dent. 7(4)(1998) : 355-366.

29. Rieger, M.R., Mayberry, M. and Brose, M.O. Finite Element Analysis of Six Endosseous Implants. J Prosthet Dent. 63 (1990) : 671-676.

30. Meijer, H.J.A., Starmans, F.J.M., Steen, W.H.J. and Bosman, F. A Three-Dimensional Finite Element Analysis of Bone Around Dental Implants in an Edentulous Human Mandible. Archs Oral Biol. 38 (1993) : 491-496.

31. Meijer, H.J.A., Starmans, F.J.M., Steen, W.H.J. and Bosman, F. A Three-Dimensional Finite Element Study on Two Versus Four Implants in an Edentulous Manible. Int J Prosthodont. 7 (1994) : 271-279.

32. Meijer, H.J.A., Kuiper, J.H.L., Starmans, F.J.M. and Bosman, F. Stress Distribution Around Dental Implants: Influence of Superstructure, Length of Implants and Hirght of Mandible. J Prosthet Dent. 68 (1992) : 96-102.

33. Misch, C.A. A Sciencetific Rationale for Dental Implant Design. Contemporary Implant Dentistry. pp. 336-339. Missouri: Mosby, 1999.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของโปรแกรม LEContact

```
C      PROGRAM  Linear Elastic Contact: LEContact
C
C      A FINITE ELEMENT MECHANICAL STRESS ANALYSIS PROGRAM
C      FOR TWO-DIMENSIONAL PLANE STRAIN CONTACT PROBLEMS.
C
C      BE ASSIGNED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS
C
C         MXPOI   = MAXIMUM NUMBER OF NODES IN THE MODEL
C         MXELE   = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C        MXGELE = MAXIMUM NUMBER OF CONTACT ELEMENTS IN THE MODEL
C
       USE MSIMSL
C
       PARAMETER (MXPOI=6500, MXELE=12193, MXGELE=1500, IPATH=1)
C
       IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
       DIMENSION  COORD(MXPOI,2), TEXT(20), ET(5,2), DISP(MXPOI,2)
       DIMENSION  FPT(MXPOI*2), SNORM(MXPOI), GAPSLO(MXPOI)
       DIMENSION  DSYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), QTRAC(MXPOI,2)
       DIMENSION  SYSF(MXPOI*2), CSYSF(MXPOI*2), CREAC(MXGELE,2)
       DIMENSION  SXX(MXPOI), SYY(MXPOI), SXY(MXPOI), ONE(MXPOI)
       DIMENSION  SEQV(MXPOI),UNGAP(MXGELE,2), UNGAPL(MXGELE,2)
       DIMENSION  UTDISP(MXPOI*2), ULSP(MXPOI*2), DSYSF(MXPOI*2)
       DIMENSION  BETP(MXGELE), BET(MXGELE), FT(MXPOI*2), GAPSL(MXPOI)
       DIMENSION  CFORCEN(MXPOI), TFORCEO(MXPOI), TRACN(MXGELE)
       DIMENSION  SXXE(MXELE), SYYE(MXELE), SXYE(MXELE), CFORCEO(MXPOI)
       DIMENSION  SXXEO(MXELE), SYYEO(MXELE), SXYEO(MXELE), PENE(MXGELE)
       DIMENSION  OPENE(MXGELE), EULO(MXELE,3), EUL(MXELE,3)
       DIMENSION  TRACT(MXGELE), GAPT(MXPOI), AUGTF(MXPOI),AUGTFO(MXPOI)
       CHARACTER*20  NAME1, NAME2, NAME3, NAME4
C
       INTEGER  INTMAT(MXELE,3), IGMAT(MXGELE,3), IBC(MXPOI,2)
       INTEGER  KCNODE(MXGELE,3), NG(MXGELE), NGP(MXGELE), INTYPE(MXELE)
       INTEGER  ICEDG(MXGELE,2), ITEDG(MXGELE,2)
       INTEGER  NCHF(MXGELE) , IEBUF(MXGELE,2), MTCHK(MXPOI)
       INTEGER  NODEBC(MXPOI)
C
       OPEN(UNIT=10, FILE='REPORT.OUT', STATUS='UNKNOWN', ERR=800)
c
    10 WRITE(6,15)
    15 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:')
       WRITE(10,15)
       READ(5, '(A)', ERR=10) NAME1
       OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C      READ TITLE OF COMPUTATION:
       READ(7,*) NLINES
       DO 100  ILINE=1,NLINES
       READ(7,1) TEXT
```

```
    1  FORMAT(20A4)
  100  CONTINUE
C
C      READ INPUT DATA:
C
       READ(7,1) TEXT
       READ(7,*) NPOIN, NELEM, NIBC, NFORCE, NSUB, PPD, PPT, DUMCHECK
       IF(NPOIN.GT.MXPOI) THEN
          WRITE(6,110) NPOIN
          WRITE(10,110) NPOIN
        ENDIF
  110  FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOI TO ', I5)
       IF(NPOIN.GT.MXPOI) STOP
       IF(NELEM.GT.MXELE) THEN
          WRITE(6,120) NELEM
          WRITE(10,120) NELEM
        ENDIF
  120  FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO ', I5)
       IF(NELEM.GT.MXELE) STOP

       READ(7,1) TEXT
       READ(7,*) NEMAT
       READ(7,1) TEXT
        DO 125  IM=1,NEMAT
       READ(7,*) I, (ET(I,J), J=1,2),      THICK, FMUS, FMUD
       IF(I.NE.IM) WRITE(6,127) IM
  127  FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
       IF(I.NE.IM) STOP
  125  CONTINUE

       READ(7,1) TEXT
       DO 130  IP=1,NPOIN
       READ(7,*) I, (COORD(I,K), K=1,2)
       IF(I.NE.IP) WRITE(6,135)  IP
  135  FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
       IF(I.NE.IP) STOP
  130  CONTINUE

       READ(7,1) TEXT
       DO 140  IE=1,NELEM
       READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,3), INTYPE(I)
       IF(I.NE.IE) WRITE(6,150) IE
  150  FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FE IS MISSING')
       IF(I.NE.IE) STOP
  140  CONTINUE
C
       NDF   = 2
       NDOF  = 6
       NEQ   = NPOIN*NDF
       DO 300  I=1,NEQ
       CSYSF(I) = 0.
       IBC(I,1)=0
       IBC(I,2)=0
  300  CONTINUE
        DO 302  J=1,NELEM
```

```
        DO 302  JI=1,3
        EUL(J,JI)=0.
        EULO(J,JI)=0.
        SXXE(J)=0.
        SYYE(J)=0.
        SXYE(J)=0.
        SXXEO(J)=0.
        SYYEO(J)=0.
        SXYEO(J)=0.
  302 CONTINUE
        DO 305  J=1,NPOIN
       TFORCEO(J)=0.
        CFORCEO(J)=0.
        ONE(J)=0.
        GAPT(J)=0.
        GAPSL(J)=0.
       GAPSLO(J)=0.
   305 CONTINUE
C
      READ(7,1) TEXT
      DO  IP=1,NIBC
      READ(7,*) I, (IBC(I,J), J=1,2), (DISP(I,N), N=1,2)
        NODEBC(IP)=I
      ENDDO
C
       READ(7,1) TEXT
       DO 310  II=1,NFORCE
       READ(7,*) N, (CSYSF((N-1)*2+J), J=1,NDF)
  310 CONTINUE
C
        DO 320  IJ=1,NEQ
        CSYSF(IJ)=CSYSF(IJ)/NSUB
  320 CONTINUE
        DO 330  KD=1,NEQ
        UTDISP(KD)=0.
        ULSP(KD)=0.
  330 CONTINUE

        DO 340  I=1,MXGELE
        UNGAP(I,1)=0.
        UNGAP(I,2)=0.
        NCHF(I)  =1
  340 CONTINUE

C
       WRITE(6,431) NPOIN, NELEM
  431 FORMAT(/,' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5,
     *    ' NODES AND', I5,' ELEMENTS ***')

       CALL FIEDGES( INTMAT, COORD, INTYPE, ICEDG, ITEDG, NODEBC,
     *       NCE, NTE, MXPOI, NELEM, MXELE, MXGELE, NIBC )
C
        DO 341  J=1,NELEM
        II=INTMAT(J,1)
        JJ=INTMAT(J,2)
```

```
        KK=INTMAT(J,3)
        ONE(II)=ONE(II)+1.
        ONE(JJ)=ONE(JJ)+1.
        ONE(KK)=ONE(KK)+1.
    341 CONTINUE
C
C******************
C                  *
C  LOAD STEP LOOP *
C                  *
C******************
        DO 435  ILS=1,NSUB

        WRITE(6,470) ILS ,PP
        WRITE(10,470) ILS ,PP
    470 FORMAT(/,' ***NUMBER OF SUBSTEP IS',I5,'***',
   *    '   ,PENALTY PARAMETER=',E12.5)
C
        DO  I=1,NPOIN
        JDUM=0
        DO  J=1,IFC
          IF(KCNODE(J,1).EQ.I) JDUM=JDUM+1
          IF(KCNODE(J,2).EQ.I) JDUM=JDUM+1
          IF(KCNODE(J,3).EQ.I) JDUM=JDUM+1
        ENDDO
      IF(JDUM.EQ.0) THEN
           CFORCEO(I)=0.
           TFORCEO(I)=0.
           GAPT(I)=0.
           GAPSLO(I)=0.
         ENDIF
        ENDDO
C
        DO  I=1,NPOIN
        AUGTFO(I)=0.
        GAPSL(I)=0.
      ENDDO
C
        OERR=1.0
C

        PP=PPD          !PENALTY PARAMETER
        PT=PPT
C
        GAPCHECK=DUMCHECK      !INITIAL CHECK FOR UPDATE PENALTY PARAMETER

C
      DO 437  IJ=1,NEQ
      SYSF(IJ) = CSYSF(IJ)*ILS
  437 CONTINUE

C     *                            *
C     *  AUGMENTATION  LOOP        *
C     *                            *
```

```
        DO 440  IAUG=1,3

C
      DO  I=1,NPOIN
      CFORCEN(I)=0.
        AUGTF(I)=0.
      ENDDO
C
        DO  JE=1,NELEM
        SXXE(JE)= 0.
        SYYE(JE)= 0.
        SXYE(JE)= 0.
        ENDDO
C
        DO  K=1,NEQ
         ULSP(K)=0.
        ENDDO
C
        JCON=0
C ****************************************************
C         ITERATION LOOP TO CHECK ERROR CONTACT NODES  *
C****************************************************

        DO 448 ITER=1,30
C
C       CHECK CONTACT VALUES FROM ITERATION (ITER-1)
C
       LIFC=IFC

       DO 455  K=1,MXGELE
        BETP(K)=0
        BETP(K)=BET(K)
         NGP(K)=0
         NGP(K)=NG(K)
   455 CONTINUE
C       ENDIF
C
        DO 452  I=1,NEQ
        DO 452  J=1,NEQ
        DSYSK(I,J)= 0.
        DSYSF(I) = SYSF(I)
   452 CONTINUE
C
        CALL CST(NELEM, INTMAT, COORD, ET, INTYPE,
     *       THICK, DSYSK,  DSYSF, MXPOI,
     *           MXELE, MXGELE ,ULSP, SXXEO, SYYEO, SXYEO  )
C
        CALL CHKTESTP( MXPOI, COORD, NCE, NTE, LIFC, IFC,
     *         NGP, UNGAP, KCNODE, MXGELE, ITEDG, ICEDG,
     *       NODEBC, NIBC, IBC   )
C
        IF(IFC.NE.0) THEN

C----------------------------------------- -----------------------------------C
```

```
C       UPDATE CONTACT FORCES       C
C---------------------------------------------------------------C

        CALL UDCONFORCE( IFC, KCNODE, BET, UTDISP, UNGAP, CFORCEN,
     *       CFORCEO, PENE, PP, MXGELE, MXPOI, COORD,
     *       ITEDG, NTE, IBC )
C
        CALL ASSEMGAP( COORD, NPOIN, DSYSK, DSYSF, KCNODE, UNGAP,
     *                MXPOI, MXGELE, LIFC, IFC, JIM, NG, NGP, BET,
     *                BETP, NCHF, FMUD ,PP , PT, PENE, ITER,
     *                CFORCEN, GAPT, GAPSL, TFORCEO, CFORCEO,
     *                AUGTFO, AUGTF, JCON, GAPSLO )
C
        ENDIF

C-----------------------------------------------------------------------------------------C
C     GENERATE MATRIX {R} DUE TO NODAL CONTACT FORCE           C
C-----------------------------------------------------------------------------------------C

        IF((ILS.NE.1).OR.(ITER.NE.1).OR.(IAUG.NE.1)) THEN
C
      CALL GENRB( DSYSF,  UNGAP, KCNODE, IFC, NEQ,
     *     MXPOI, MXGELE, MXELE, BET, NELEM, ET,
     *     INTYPE, COORD ,INTMAT, NG, CFORCEO, CFORCEN,
     *     TFORCEO, AUGTF, FT, AUGTFO)
C
        ERFOR=1.E-18 !TOLERANCE  FOR  ERROR(%)
C--------------------------------------------------------------------------------C
C                       CHECK ERROR                       C
C--------------------------------------------------------------------------------C
        ERRORX=0.
        ERRORY=0.
        ERRORG=0.

        DO 466  N=1,NPOIN
        JFX=(N-1)*2+1
        JFY=(N-1)*2+2
        ERRORX=ERRORX+(DSYSF(JFX)*UTDISP(JFX))**2
        ERRORY=ERRORY+(DSYSF(JFY)*UTDISP(JFY))**2
        ERRORG=ERRORG+(GAPT(N)+GAPSL(N)+GAPSLO(N))**2
  466 CONTINUE
C
       ERR = SQRT(ERRORX+ERRORY)
        DGAPT= SQRT(ERRORG)
C---------------------------------------------------------------------------------C
C          PRINT OUTPUT TO SCREEN AND REPORT.OUT        C
C----------------------------------------------------------------------------------C
      WRITE(6,467) ITER , ABS(ERR), DPENE, DGAPT
  467 FORMAT(/,' *** ITER=',I5,'***','   ,ERROR=',E12.5,'%',
     *'    ,PENE =',E12.5, ' ,GAPT =',E8.2 )
       WRITE(10,467) ITER , ABS(ERR), DPENE, DGAPT
C------------------------------------------C
            JCON=0
            IF((ABS(ERR).LE.1.E-17).AND.(ITER.GT.2)) JCON=JCON+1
            IF(JCON.EQ.1) GOTO 468
```

```
      OERR=ERR
C------------------------------------------------------C
       ENDIF
C
       CALL APPLYBC(NPOIN, IBC, DSYSK, DSYSF, MXPOI, MXGELE,
     *      DISP, IAUG, ITER, NSUB)
C
       DO 458  KD=1,NEQ
        UTDISP(KD)=0.
  458  CONTINUE
C
       LDA=MXPOI*2
C
       CALL DLSLRG(NEQ, DSYSK, LDA, DSYSF, IPATH, UTDISP)
C
       S=1.
      IF((ITER.NE.1).OR.(IAUG.NE.1)) THEN

      CALL LINESEARCH( S, UTDISP, COORD, ULSP, ITEDG, ICEDG, NCE,
     *       NTE, EULO, SXXEO, SYYEO, SXYEO, CFORCEO,
     *       TFORCEO, AUGTFO, AUGTF, NPOIN, NELEM, FMUD,
     *       INTMAT, ET, INTYPE, MXPOI, MXGELE, MXELE,
     *       PP, PT, NEQ, IBC, NIBC, SYSF, NGP, BETP,
     *       NODEBC, GAPT, GAPSLO, ERR  )
C
       ENDIF

C------------------------------------------------------------------------------C
C                                                                              C
C      UPDATE DISPLACEMENT IN EACH ITERATION TO CHECK PENETRATION              C
C                                                                              C
C------------------------------------------------------------------------------C
       DO 464  I=1,NEQ
           UTDISP(I)=S*UTDISP(I)
           ULSP(I)=ULSP(I)+UTDISP(I)
  464  CONTINUE
C
       DO 820  LC=1,NPOIN
       COORD(LC,1)=COORD(LC,1)+UTDISP((LC-1)*2+1)
       COORD(LC,2)=COORD(LC,2)+UTDISP((LC-1)*2+2)
  820  CONTINUE
C
       CALL STRESS( NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, ULSP, ET, INTYPE,
     *      EULO, EUL, SXXE, SYYE, SXYE, MXPOI, MXELE, MXGELE )

C------------------------------------------------------------------C
C     COMPUTE NODAL STRESSES FROM ELEMENT STRESSES:                C
C------------------------------------------------------------------C
       DO  LE=1,NELEM
       SXXE(LE)= SXXEO(LE)+SXXE(LE)
       SYYE(LE)= SYYEO(LE)+SYYE(LE)
       SXYE(LE)= SXYEO(LE)+SXYE(LE)
       ENDDO

C
```

```
      CALL FPOINT( FT, COORD ,INTMAT, NEQ, SXXE, SYYE, SXYE,
     *     MXPOI, MXELE, MXGELE, NELEM, ET, INTYPE )


C--------------------------------------------------------------------------------------C
C         FINE AVERAGE PENETRATION            C
C--------------------------------------------------------------------------------------C
      DPENE=0.
      DO  IG=1,IFC
      IF(DPENE.LT.ABS(PENE(IG))) DPENE=ABS(PENE(IG))
      ENDDO
C
  448 CONTINUE    ! END OF ITERATION LOOPS
C
C-------------ITITITITITITITITITITITITITITITI----------------C
C
  468 CONTINUE
C
      DO  LE=1,NELEM
      SXXEO(LE)= SXXE(LE)
      SYYEO(LE)= SYYE(LE)
      SXYEO(LE)= SXYE(LE)
C
C       UPDATE THE ELEMENT STRAIN FROM NEW TO OLD ONE :


C
      EULO(LE,1) = EULO(LE,1)+EUL(LE,1)
      EULO(LE,2) = EULO(LE,2)+EUL(LE,2)
       EULO(LE,3) = EULO(LE,3)+EUL(LE,3)
      ENDDO
C
      DO  KF=1,NPOIN
      IF(CFORCEN(KF).GT.0) CFORCEN(KF)=0.
      FAM=CFORCEO(KF)+CFORCEN(KF)
      CFORCEO(KF)=(FAM-ABS(FAM))/2.
      IF(CFORCEO(KF).EQ.0.) THEN
      AUGTFO(KF)=0.
      TFORCEO(KF)=0.
      GAPT(KF)=0.
      GAPSLO(KF)=0.
      ENDIF
      AUGTFO(KF)=AUGTFO(KF)+AUGTF(KF)
     ENDDO
C
     IPLUS=0
      DO  JF=1,IFC
      IF(ABS(PENE(JF)).LE.ABS(DUMCHECK)) IPLUS=IPLUS+1
      ENDDO
C
  441 CONTINUE

  440 CONTINUE                ! AUGMEANTATION LOOP

  442 CONTINUE
```

```
C-------------------------------------------------------------------------------C
C      COMPUTE NODAL STRESSES FROM ELEMENT STRESSES:                           C
C-------------------------------------------------------------------------------C
        DO    IS=1,NPOIN
        SXX(IS)=0.
        SYY(IS)=0.
        SXY(IS)=0.
        TFORCEO(IS)=TFORCEO(IS)+AUGTFO(IS)
        GAPSLO(IS)=GAPSLO(IS)+GAPSL(IS)
        ENDDO
C
        DO 930   IST=1,NELEM

        II=INTMAT(IST,1)
        JJ=INTMAT(IST,2)
        KK=INTMAT(IST,3)
      SXX(II) = SXX(II) + SXXEO(IST)
      SXX(JJ) = SXX(JJ) + SXXEO(IST)
      SXX(KK) = SXX(KK) + SXXEO(IST)
      SYY(II) = SYY(II) + SYYEO(IST)
      SYY(JJ) = SYY(JJ) + SYYEO(IST)
      SYY(KK) = SYY(KK) + SYYEO(IST)
      SXY(II) = SXY(II) + SXYEO(IST)
      SXY(JJ) = SXY(JJ) + SXYEO(IST)
      SXY(KK) = SXY(KK) + SXYEO(IST)
      MTCHK(II)=INTYPE(IST)
      MTCHK(JJ)=INTYPE(IST)
      MTCHK(KK)=INTYPE(IST)
  930 CONTINUE
C
        CONMAX=0.
        TARMAX=0.
C
      DO 940   I=1,NPOIN
      SXX(I) = SXX(I)/ONE(I)
      SYY(I) = SYY(I)/ONE(I)
      SXY(I) = SXY(I)/ONE(I)
      SEQV(I)= SQRT(((SXX(I)-SYY(I))**2+SXX(I)**2+SYY(I)**2
     *       +6.*SXY(I)**2)/2.)

             IF(MTCHK(I).EQ.1) THEN
                       IF(SEQV(I).GT.CONMAX) CONMAX=SEQV(I)
        ELSEIF(MTCHK(I).NE.1) THEN
                  IF(SEQV(I).GT.TARMAX) TARMAX=SEQV(I)
        ENDIF

   940 CONTINUE


C-------------------------------------------------------------------------C
C        NORMALIZE SEQV FOR ADAPTIVE REMESHING                            C
C-------------------------------------------------------------------------C
        DO   J=1,NPOIN
```

```
              IF(MTCHK(J).EQ.1) THEN
                    SNORM(J)=SEQV(J)/CONMAX
          ELSEIF(MTCHK(J).NE.1) THEN
                    IF(TARMAX.EQ.0.) THEN
                  SNORM(J)=0.
                ELSE
                  SNORM(J)=SEQV(J)/TARMAX
                ENDIF
          ENDIF

      ENDDO
C------------------------------------------------------------------C
C                    CALL FOR TRACTION                           C
C------------------------------------------------------------------C

       CALL TRACTION( SXX, SYY, SXY, KCNODE, UNGAP,TRACN,
     *      TRACT, IFC, MXPOI, MXGELE, CFORCEO,
     *      TFORCEO, ICEDG, COORD, NCE )


C------------------------------------------------------------------C
C                                                                  C
C    PRINT OUT NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS:                        C
C                                                                  C
C------------------------------------------------------------------C
       NPRT=1
       IP=ILS-(ILS/NPRT)*NPRT
       IF(IP.EQ.0) THEN                              ! PRINT
C
      OPEN(UNIT=8, FILE='GRAP.PLT', STATUS='UNKNOWN', ERR=800)

C
C     CREATE FILE FOR 2-D CONTOUR PLOTTING PROGRAM:
C
      IT =8
       WRITE(IT,610) ILS, ITER, ABS(ERR), NPOIN, NELEM
  610 FORMAT('TITLE="MODEL OF CONTACT','LOAD STEP=',I4,' ,
     &ITERATION=',I4,',ERROR=',E12.6,'"',/,
     &        'VARIABLES="X","Y","SXX","SYY","SXY","SEQV","CFORCEO"
     &,"TFORCEO","SNORM" ',/,
     &        'ZONE N=',I5,',E=',I5,',F=FEPOINT,ET=TRIANGLE')
C
      DO 630  I=1,NPOIN

      WRITE(IT,640) (COORD(I,J), J=1,2), SXX(I), SYY(I), SXY(I),
     &                    SEQV(I), CFORCEO(I), TFORCEO(I), SNORM(I)
  640 FORMAT(9E16.8)
  630 CONTINUE
C
      DO 660  IE=1,NELEM
      WRITE(IT,670) (INTMAT(IE,J), J=1,3)
  670 FORMAT(3I8)
  660 CONTINUE
C----------------------------------------C
C       PRINT NORMAL TRACTION       C
```

```
C--------------------------------------------------------------------C
        OPEN(UNIT=9, FILE='TRACTION.RST', STATUS='UNKNOWN', ERR=800)
        WRITE(9,1111) ILS
  1111   FORMAT( ' LOAD STEP = ', I5 )
        DO 999  I=1,IFC
        NJ =KCNODE(I,1)
         WRITE(9,1112) NJ, (COORD(NJ,J) , J=1,2), TRACN(I), TRACT(I),
  1                          GAPSLO(NJ)
  1112 FORMAT(I10, 2F15.6, 3E18.8)
   999 CONTINUE

C
        ENDIF                              ! PRINT
C
C       CHANGING OF CONTACT EDGES AND TARGET EDGES
C
C      NBUFF=NTE
C       NTE=NCE
C       NCE=NBUFF
C       DO 1000  IBH=1,NBUFF
C       IEBUF(IBH,1)=ITEDG(IBH,1)
C       IEBUF(IBH,2)=ITEDG(IBH,2)
C 1000 CONTINUE
C       DO 1500  ITH=1,NTE
C      ITEDG(ITH,1)=ICEDG(ITH,1)
C       ITEDG(ITH,2)=ICEDG(ITH,2)
C 1500 CONTINUE
C      DO 2000  ICH=1,NCE
C      ICEDG(ICH,1)=IEBUF(ICH,1)
C      ICEDG(ICH,2)=IEBUF(ICH,2)
C 2000 CONTINUE
C
   435 CONTINUE                            !END OF LOAD STEPS LOOP
C
   800 CONTINUE
      STOP
      END
C
C-------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE APPLYBC(NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXGELE,
     *          DISP, IAUG, ITER, NSUB)
C
C     APPLY DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODES OF:
C           0 = FREE TO MOVE
C           1 = PRESCRIBED DISPLACEMENT
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
        DIMENSION  SYSF(MXPOI*2), DISP(MXPOI,2)
C
      INTEGER  IBC(MXPOI,2)
C
      NDF  = 2
      DO 100  IN=1,NPOIN
```

```
      DO 200   ID=1,NDF
      IF(IBC(IN,ID).EQ.1) THEN     ! 1
C
      IEQ  = (IN-1)*NDF  + ID

        IF((IAUG.EQ.1).AND.(ITER.EQ.1)) THEN
          SYSF(IEQ)  = DISP(IN,ID)/NSUB
        ELSE
         SYSF(IEQ)  = 0.
        ENDIF
C
      NT=(NPOIN)*2

      DO 300   I=1,NT
      SYSK(IEQ,I) = 0.
  300 CONTINUE

        SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
C
        ENDIF   ! 1

  200 CONTINUE
  100 CONTINUE
C
      RETURN
      END

C
C---------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ASSMBLE( IE, INTMAT,  SGBL, SYSK, SYSF,
     *        MXPOI,  MXELE, MXGELE                        )
C
C     ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SGBL(6,6)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
        DIMENSION  SYSF(MXPOI*2)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,3)
C
      NNODE  = 3
      NDF    = 2
C
      DO 100   NR=1,NNODE
      NODR  = INTMAT(IE,NR)
      DO 100   MR=1,NDF
C
C     DENOTE: NSR  = ROW POSITION IN THE SYSTEM  EQS.
C              NER  = ROW POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
      NSR  = (NODR-1)*NDF  + MR
      NER  = (NR   -1)*NDF  + MR
C
```

```
      DO 200  NC=1,NNODE
      NODC  = INTMAT(IE,NC)
      DO 200  MC=1,NDF
C
C     DENOTE: NSC  = COLUMN POSITION IN THE SYSTEM  EQS.
C              NEC  = COLUMN POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
      NSC  = (NODC-1)*NDF  + MC
      NEC  = (NC   -1)*NDF  + MC
      SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + SGBL(NER,NEC)
  200 CONTINUE
C
  100 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C---------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE CST(NELEM, INTMAT, COORD, ET, INTYPE,
     *             THICK, SYSK,  SYSF, MXPOI,
     *                    MXELE, MXGELE ,ULSP, SXXE, SYYE, SXYE  )
C
C     COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQUATIONS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  COORD(MXPOI,2), SYSF(MXPOI*2)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
      DIMENSION  SCST(6,6), C(3,3), B(3,6), BT(6,3)
      DIMENSION  DUMA(3,6), ET(5,2), BN(4,6), EN(4,4)
      DIMENSION  CKN(6,6), ULSP(MXPOI*2)
        DIMENSION  SXXE(MXELE),SYYE(MXELE),SXYE(MXELE)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,3), INTYPE(MXELE)
C
C     LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
      DO 5000  IE=1,NELEM
C
C     FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
      II  = INTMAT(IE,1)
      JJ  = INTMAT(IE,2)
      KK  = INTMAT(IE,3)
C
      XG1 = COORD(II,1)
      XG2 = COORD(JJ,1)
      XG3 = COORD(KK,1)
      YG1 = COORD(II,2)
      YG2 = COORD(JJ,2)
      YG3 = COORD(KK,2)
      AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
      IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
    5 FORMAT(/,'  !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
     *    ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
```

```
     *     '  --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
     *     ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'           )
       IF(AREA.LE.0.) STOP
C
       B1 = YG2 - YG3
       B2 = YG3 - YG1
       B3 = YG1 - YG2
       C1 = XG3 - XG2
       C2 = XG1 - XG3
       C3 = XG2 - XG1
C
       DO  10   I=1,3
       DO  10   J=1,6
       B(I,J) = 0.
   10  CONTINUE
C
       B(1,1) = B1
       B(1,3) = B2
       B(1,5) = B3
       B(2,2) = C1
       B(2,4) = C2
       B(2,6) = C3
       B(3,1) = C1
       B(3,2) = B1
       B(3,3) = C2
       B(3,4) = B2
       B(3,5) = C3
       B(3,6) = B3
C
       DO  20   I=1,3
       DO  30   J=1,6
       B(I,J)  = B(I,J)/(2.*AREA)
       BT(J,I) = B(I,J)
   30  CONTINUE
   20  CONTINUE
C
C        SELECT ELEMENT TYPE
C
         IK=INTYPE(IE)
         ELAS=ET(IK,1)
          PR =ET(IK,2)

C
C      ELASTICITY MATRIX:FOR PLANE STRAIN (t=1)
C
       FAC  = ELAS/((1.+PR)*(1.-2.*PR))
       C(1,1) = FAC*(1.-PR)
       C(1,2) = FAC*PR
       C(1,3) = 0.
       C(2,1) = C(1,2)
       C(2,2) = C(1,1)
       C(2,3) = 0.
       C(3,1) = 0.
       C(3,2) = 0.
       C(3,3) = FAC*(1.-2.*PR)/2.
```

```
C
C       NONLINEAR TERMS OF STRAIN
C
        DO 110  I=1,4
        DO 110  J=1,6
        BN(I,J) = 0.
  110  CONTINUE
C
       BN(1,1) = B1
       BN(1,3) = B2
       BN(1,5) = B3
       BN(2,1) = C1
       BN(2,3) = C2
       BN(2,5) = C3
       BN(3,2) = B1
       BN(3,4) = B2
       BN(3,6) = B3
       BN(4,2) = C1
       BN(4,4) = C2
       BN(4,6) = C3
C
        DO 115  I=1,4
        DO 117  J=1,6
        BN(I,J)  = BN(I,J)/(2.*AREA)
  117  CONTINUE
  115  CONTINUE
C
        DO 150  I3=1,4
        DO 150  J3=1,4
        EN(I3,J3)=0.
  150  CONTINUE
C
        EN(1,1)=SXXE(IE)
        EN(1,2)=SXYE(IE)
        EN(2,1)=SXYE(IE)
        EN(1,2)=SYYE(IE)
        EN(3,3)=SXXE(IE)
        EN(3,4)=SXYE(IE)
        EN(4,3)=SXYE(IE)
        EN(4,4)=SYYE(IE)
C
        DO 160  I=1,6
        DO 165  J=1,6
        CKN(I,J)=0.
        DO 170  M=1,4
        DO 175  N=1,4
        CKN(I,J)=CKN(I,J)+BN(M,I)*EN(M,N)*BN(N,J)
  175  CONTINUE
  170  CONTINUE
        CKN(I,J)=CKN(I,J)*THICK*AREA
  165  CONTINUE
  160  CONTINUE
C
C       ELEMENT STIFFNESS MATRIX:
```

```
C
      DO 100  I=1,3
      DO 100  J=1,6
      DUMA(I,J) = 0.
      DO 200  K=1,3
      DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + C(I,K)*B(K,J)
  200 CONTINUE
  100 CONTINUE
C
      DO 300  I=1,6
      DO 300  J=1,6
      SCST(I,J) = 0.
      DO 400  K=1,3
      SCST(I,J) = SCST(I,J) + BT(I,K)*DUMA(K,J)
  400 CONTINUE
  300 CONTINUE

      DO 500  I=1,6
      DO 500  J=1,6
      SCST(I,J) = SCST(I,J)*THICK*AREA  +CKN(I,J)
  500 CONTINUE
C
C     ASSEMBLE THESE ELEMENT EQUATIONS INTO THE SYSTEM EQUATIONS:
C
      CALL ASSMBLE( IE, INTMAT,  SCST, SYSK, SYSF,
     *       MXPOI,  MXELE, MXGELE            )
C
 5000 CONTINUE
C
      RETURN
      END

C
C-------------------------------------------------------------------
C
        SUBROUTINE ASSEMGAP( COORD, NPOIN, DSYSK, DSYSF, KCNODE, UNGAP,
     *                    MXPOI, MXGELE, LIFC, IFC, JIM, NG, NGP, BET,
     *         BETP, NCHF, FMUD ,PP , PT, PENE, ITER,
     *         CFORCEN, GAPT, GAPSL, TFORCEO, CFORCEO,
     *         AUGTFO, AUGTF, JCON, GAPSLO  )
C
C
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
        DIMENSION  COORD(MXPOI,2) ,QN(6),  CFORCEN(MXPOI)
        DIMENSION  DSYSK(MXPOI*2,MXPOI*2),  CFORCEO(MXPOI)
        DIMENSION  PENE(MXGELE),UNGAP(MXGELE,2),GAPT(MXPOI)
        DIMENSION  DSYSF(MXPOI*2),  BET(MXGELE),  BETP(MXGELE)
        DIMENSION  AUGTFO(MXPOI),  AUGTF(MXPOI),TFORCEO(MXPOI)
        DIMENSION  GAPSL(MXPOI),  GAPSLO(MXPOI)
C
         INTEGER    KCNODE(MXGELE,3),  NCHF(MXGELE)
        INTEGER    NG(MXGELE),  NGP(MXGELE)
C
        FMU=FMUD
```

```
DO 50  JI=1,IFC

         II=KCNODE(JI,1)
          JJ=KCNODE(JI,2)
          KK=KCNODE(JI,3)

         NG(JI)=II

X1=COORD(II,1)
X2=COORD(JJ,1)
X3=COORD(KK,1)
Y1=COORD(II,2)
Y2=COORD(JJ,2)
Y3=COORD(KK,2)

!CALCULATE A PENETRATION VALUE

 PENE(JI)=UNGAP(JI,1)*(X1-X2)+UNGAP(JI,2)*(Y1-Y2)

C
C       FORM MATRIX K(PENALTY) TO TOTAL STIFFNESS MATRIX:
C
C       [                          ] [    ]     [    ]
C       [[K] + PP* [Q]T [N1] [N]T [Q]] [{U}] ===  [{R}]
C       [                          ] [    ]     [    ]
C
C

          IF(JJ.EQ.KK) THEN                       !NODE TO NODE
            QN(1) =  UNGAP(JI,1)
            QN(2) =  UNGAP(JI,2)
            QN(3) = -UNGAP(JI,1)
            QN(4) = -UNGAP(JI,2)
            QN(5) =  0.
            QN(6) =  0.
          BET(JI) =  0.
         ELSE                                     !NODE TO EDGE

            DL   = ABS(SQRT((X3-X2)**2+(Y3-Y2)**2))

            SJK  = ((X3-X2)*(X1-X2)/DL)+((Y3-Y2)*(Y1-Y2)/DL)
            BET(JI) =  SJK/DL
            IF(BET(JI).LT.0.) BET(JI)=0.
            IF(BET(JI).GT.1.) BET(JI)=1.

            QN(1) =  UNGAP(JI,1)
            QN(2) =  UNGAP(JI,2)
            QN(3) = -(1.-BET(JI))*UNGAP(JI,1)
            QN(4) = -(1.-BET(JI))*UNGAP(JI,2)
            QN(5) = -BET(JI)*UNGAP(JI,1)
            QN(6) = -BET(JI)*UNGAP(JI,2)

             ENDIF

DO 100  J=1,3
```

```
         ICT=KCNODE(JI,J)
        IA   = (ICT-1)*2+1
         IIA  = (ICT-1)*2+2
         IQ   = (J-1)*2+1
         IIQ  = (J-1)*2+2

         DSYSK(IA,(II-1)*2+1)  = PP*QN(IQ)*QN(1) +DSYSK(IA,(II-1)*2+1)
         DSYSK(IA,(II-1)*2+2)  = PP*QN(IQ)*QN(2) +DSYSK(IA,(II-1)*2+2)
         DSYSK(IA,(JJ-1)*2+1)  = PP*QN(IQ)*QN(3) +DSYSK(IA,(JJ-1)*2+1)
         DSYSK(IA,(JJ-1)*2+2)  = PP*QN(IQ)*QN(4) +DSYSK(IA,(JJ-1)*2+2)
         DSYSK(IA,(KK-1)*2+1)  = PP*QN(IQ)*QN(5) +DSYSK(IA,(KK-1)*2+1)
         DSYSK(IA,(KK-1)*2+2)  = PP*QN(IQ)*QN(6) +DSYSK(IA,(KK-1)*2+2)

         DSYSK(IIA,(II-1)*2+1)  = PP*QN(IIQ)*QN(1) +DSYSK(IIA,(II-1)*2+1)
         DSYSK(IIA,(II-1)*2+2)  = PP*QN(IIQ)*QN(2) +DSYSK(IIA,(II-1)*2+2)
         DSYSK(IIA,(JJ-1)*2+1)  = PP*QN(IIQ)*QN(3) +DSYSK(IIA,(JJ-1)*2+1)
         DSYSK(IIA,(JJ-1)*2+2)  = PP*QN(IIQ)*QN(4) +DSYSK(IIA,(JJ-1)*2+2)
         DSYSK(IIA,(KK-1)*2+1)  = PP*QN(IIQ)*QN(5) +DSYSK(IIA,(KK-1)*2+1)
         DSYSK(IIA,(KK-1)*2+2)  = PP*QN(IIQ)*QN(6) +DSYSK(IIA,(KK-1)*2+2)

   100 CONTINUE


    50 CONTINUE
C
       CALL LINEARTANG( IFC, LIFC, PT, FMUD, DSYSK, UNGAP, TFORCEO,
     *        BET, BETP, PENE, NGP, COORD, CFORCEN,CFORCEO,
     *        KCNODE, MXPOI, MXGELE, ITER, GAPT, GAPSL ,
     *                  NCHF, AUGTFO, AUGTF, JCON, GAPSLO  )
C
         IF(ITER.NE.1) THEN

         CALL LINEARNORM( COORD, DSYSK, KCNODE, UNGAP, CFORCEN,
      *                    MXPOI, MXGELE, BET ,PP ,PENE, IFC  )
         ENDIF
C


C
       RETURN
         END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
         SUBROUTINE LINEARTANG( IFC, LIFC, PT, FMU, DSYSK, UNGAP,TFORCEO,
      *        BET, BETP, PENE, NGP, COORD, CFORCEN,CFORCEO,
      *       KCNODE, MXPOI, MXGELE, ITER, GAPT, GAPSL, NCHF,
      *       AUGTFO, AUGTF, JCON, GAPSLO  )
C
         IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
         DIMENSION  DSYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
         DIMENSION  UNGAP(MXGELE,2), BET(MXGELE), BETP(MXGELE)
         DIMENSION  PENE(MXGELE), GAPT(MXPOI), NGP(MXGELE)
         DIMENSION  SKNOT(6,6), SKNO(6,6), SKNNO(6,6), SKNPNO(6,6)
         DIMENSION  SKTOT(6,6), SKTONO(6,6), SKTST(6,6), SKTSLN(6,6)
```

```
      DIMENSION  VNOS(6), VNS(6), VTST(6), VTSL(6),CFORCEO(MXPOI)
      DIMENSION  VTOS(6), VTS(6), VNSP(6), TFORCEO(MXPOI)
      DIMENSION  COORD(MXPOI,2), CFORCEN(MXPOI), GAPSLO(MXPOI)
      DIMENSION  AUGTFO(MXPOI), AUGTF(MXPOI), GAPSL(MXPOI)

      INTEGER    KCNODE(MXGELE,3), NCHF(MXGELE)
C
      DO 1000  IC=1,IFC

      LI=KCNODE(IC,1)
      LJ=KCNODE(IC,2)
      LK=KCNODE(IC,3)
C
      X1=COORD(LI,1)
      X2=COORD(LJ,1)
      X3=COORD(LK,1)
      Y1=COORD(LI,2)
      Y2=COORD(LJ,2)
      Y3=COORD(LK,2)

      ICHK=0
      DO  J=1,LIFC
         IF(LI.EQ.NGP(J)) THEN
           BP=BETP(J)
           ICHK=ICHK+1
           GOTO 110
         ENDIF
      ENDDO

 110  CONTINUE

      IF(ICHK.EQ.0) BP=BET(IC)

      VNOS(1) =  0.
      VNOS(2) =  0.
      VNOS(3) = -UNGAP(IC,1)
      VNOS(4) = -UNGAP(IC,2)
      VNOS(5) =  UNGAP(IC,1)
      VNOS(6) =  UNGAP(IC,2)

      VNS(1)   = UNGAP(IC,1)
      VNS(2)   = UNGAP(IC,2)
      VNS(3)   = -(1-BET(IC))*UNGAP(IC,1)
      VNS(4)   = -(1-BET(IC))*UNGAP(IC,2)
      VNS(5)   = -BET(IC)*UNGAP(IC,1)
      VNS(6)   = -BET(IC)*UNGAP(IC,2)

      VNSP(1)  = UNGAP(IC,1)
      VNSP(2)  = UNGAP(IC,2)
      VNSP(3)  = -(1-BP)*UNGAP(IC,1)
      VNSP(4)  = -(1-BP)*UNGAP(IC,2)
      VNSP(5)  = -BP*UNGAP(IC,1)
      VNSP(6)  = -BP*UNGAP(IC,2)
C
      UTX = UNGAP(IC,2)
```

```
      UTY  =-UNGAP(IC,1)

      VTS(1)     = UTX
      VTS(2)     = UTY
      VTS(3)     = -(1-BET(IC))*UTX
      VTS(4)     = -(1-BET(IC))*UTY
      VTS(5)     = -BET(IC)*UTX
      VTS(6)     = -BET(IC)*UTY

      VTOS(1) =  0.
      VTOS(2) =  0.
      VTOS(3) = -UTX
      VTOS(4) = -UTY
      VTOS(5) =  UTX
      VTOS(6) =  UTY
C
      IF(LJ.EQ.LK) THEN     !!!

      GAPT(LI)= GAPT(LI)-UTX*(X1-X2)-UTY*(Y1-Y2)
      DGAPT     = GAPT(LI)+GAPSLO(LI)
      VTST(1) =  VTS(1)
      VTST(2) =  VTS(2)
      VTST(3) =  VTS(3)
      VTST(4) =  VTS(4)
      VTST(5) =  VTS(5)
      VTST(6) =  VTS(6)

      VTSL(1) =  VTS(1)
      VTSL(2) =  VTS(2)
      VTSL(3) =  VTS(3)
      VTSL(4) =  VTS(4)
      VTSL(5) =  VTS(5)
      VTSL(6) =  VTS(6)

      ELSE
      DL          = ABS(SQRT((X2-X3)**2+(Y2-Y3)**2))
      GAPT(LI)= GAPT(LI)-(BET(IC)-BP)*DL
      DGAPT     = GAPT(LI)+GAPSLO(LI)
C
      VTST(1) =  VTS(1)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(1)+(DGAPT/DL)*VTOS(1)
      VTST(2) =  VTS(2)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(2)+(DGAPT/DL)*VTOS(2)
      VTST(3) =  VTS(3)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(3)+(DGAPT/DL)*VTOS(3)
      VTST(4) =  VTS(4)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(4)+(DGAPT/DL)*VTOS(4)
      VTST(5) =  VTS(5)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(5)+(DGAPT/DL)*VTOS(5)
      VTST(6) =  VTS(6)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(6)+(DGAPT/DL)*VTOS(6)

      VTSL(1) =  VTS(1)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(1)
      VTSL(2) =  VTS(2)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(2)
      VTSL(3) =  VTS(3)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(3)
      VTSL(4) =  VTS(4)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(4)
      VTSL(5) =  VTS(5)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(5)
      VTSL(6) =  VTS(6)+(PENE(IC)/DL)*VNOS(6)

      ENDIF    !!!
C
```

```
      DO 10  M=1,6
      DO 10  N=1,6
      SKNOT(M,N) = VNOS(M)*VTS(N)
      SKNO(M,N)  = VNOS(M)*VNOS(N)
      SKTST(M,N) = VTST(M)*VTST(N)
      SKNNO(M,N) = VNS(M)*VNOS(N)
      SKTOT(M,N) = VTOS(M)*VTS(N)
      SKTONO(M,N)= VTOS(M)*VNOS(N)
      SKNPNO(M,N)= VNSP(M)*VNOS(N)
      SKTSLN(M,N)= VTSL(M)*VNS(N)
 10   CONTINUE

C-----------------------------------------------------------------C
C      CHECK STATE OF CONTACT ELEMENT       C
C-----------------------------------------------------------------C
      DGAPN  = PENE(IC)
      FAM    = CFORCEO(LI)+CFORCEN(LI)
      TNORM  = (FAM-ABS(FAM))/2.
C
      TRIAL  = TFORCEO(LI)+AUGTFO(LI)+PT*DGAPT
      FTR  = ABS(TRIAL)-FMU*ABS(TNORM)
      IF((ITER.LE.3).OR.(ICHK.EQ.0)) THEN
            NCHF(IC)=1
               AUGTF(LI)=PT*DGAPT

            CALL STICKSTATE( IC, PT, DGAPT, DGAPN, DL, SKTST, SKNPNO,
     *               SKTONO, SKNO, KCNODE, DSYSK, MXPOI, MXGELE )
      ELSE
            IF(FTR.LE.0.) THEN
              NCHF(IC)=1
                 AUGTF(LI)=PT*DGAPT

            CALL STICKSTATE( IC, PT, DGAPT, DGAPN, DL, SKTST, SKNPNO,
     *                 SKTONO, SKNO, KCNODE, DSYSK, MXPOI, MXGELE )
               ELSE
              NCHF(IC)=2
                 DELSI=ABS(FTR)/PT
              SIGNT  = TRIAL/(ABS(TRIAL))
            GAPSL(LI)=-DELSI*SIGNT
            AUGTF(LI)= PT*(DGAPT+GAPSL(LI))
          TNEW      = AUGTF(LI)+TFORCEO(LI)+AUGTFO(LI)

            CALL SLIPSTATE( IC, PT, PP, FMU, DGAPT, DGAPN, DL, SKNNO,
     *                SKTOT, SKTONO, SKTSLN, SIGNT, TNEW, KCNODE,
     *                DSYSK, MXPOI, MXGELE, TRIAL               )
               ENDIF

      ENDIF

 1000 CONTINUE

      RETURN
      END

C
```

```
C-------------------------------------------------------------------
C

      SUBROUTINE STICKSTATE( IC, PT, DGAPT, DGAPN, DL, SKTST, SKNPNO,
     *                     SKTONO, SKNO, KCNODE, DSYSK, MXPOI, MXGELE)
C
       IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
       DIMENSION  SKTST(6,6), SKNPNO(6,6), SKTONO(6,6), SKNO(6,6)
       DIMENSION  DSYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)

       INTEGER    KCNODE(MXGELE,3)
C
       LJ=KCNODE(IC,2)
       LK=KCNODE(IC,3)

       IF(LJ.EQ.LK) THEN

       DO 10  IP=1,3
       DO 20  IA=1,3

       MP=KCNODE(IC,IP)
       M1=(MP-1)*2+1
       M2=(MP-1)*2+2

       NP=KCNODE(IC,IA)
       N1=(NP-1)*2+1
       N2=(NP-1)*2+2

       J1=(IP-1)*2+1
       J2=(IP-1)*2+2

       K1=(IA-1)*2+1
       K2=(IA-1)*2+2

       DSYSK(M1,N1)= DSYSK(M1,N1)+PT*SKTST(J1,K1)
       DSYSK(M1,N2)= DSYSK(M1,N2)+PT*SKTST(J1,K2)
       DSYSK(M2,N1)= DSYSK(M2,N1)+PT*SKTST(J2,K1)
       DSYSK(M2,N2)= DSYSK(M2,N2)+PT*SKTST(J2,K2)

   20  CONTINUE
   10  CONTINUE

       ELSE
       DO 100  IP=1,3
       DO 200  IA=1,3

       MP=KCNODE(IC,IP)
       M1=(MP-1)*2+1
       M2=(MP-1)*2+2

       NP=KCNODE(IC,IA)
       N1=(NP-1)*2+1
       N2=(NP-1)*2+2
```

```
      J1=(IP-1)*2+1
      J2=(IP-1)*2+2

      K1=(IA-1)*2+1
      K2=(IA-1)*2+2

      DSYSK(M1,N1)= DSYSK(M1,N1)+PT*(SKTST(J1,K1)+DGAPT/DL
     1     *(SKNPNO(J1,K1)+SKNPNO(K1,J1)-DGAPN/DL
     2     *(SKTONO(J1,K1)+SKTONO(K1,J1))-DGAPT/DL
     3     *SKNO(J1,K1)))
      DSYSK(M1,N2)= DSYSK(M1,N2)+PT*(SKTST(J1,K2)+DGAPT/DL
     1                   *(SKNPNO(J1,K2)+SKNPNO(K2,J1)-DGAPN/DL
     2                   *(SKTONO(J1,K2)+SKTONO(K2,J1))-DGAPT/DL
     3                   *SKNO(J1,K2)))
      DSYSK(M2,N1)= DSYSK(M2,N1)+PT*(SKTST(J2,K1)+DGAPT/DL
     1                   *(SKNPNO(J2,K1)+SKNPNO(K1,J2)-DGAPN/DL
     2                   *(SKTONO(J2,K1)+SKTONO(K1,J2))-DGAPT/DL
     3                   *SKNO(J2,K1)))
      DSYSK(M2,N2)= DSYSK(M2,N2)+PT*(SKTST(J2,K2)+DGAPT/DL
     1                   *(SKNPNO(J2,K2)+SKNPNO(K2,J2)-DGAPN/DL
     2                   *(SKTONO(J2,K2)+SKTONO(K2,J2))-DGAPT/DL
     3                   *SKNO(J2,K2)))

  200 CONTINUE
  100 CONTINUE

      ENDIF

      RETURN
      END

C
C---------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE SLIPSTATE( IC, PT, PP, FMU, DGAPT, DGAPN, DL, SKNNO,
     *                  SKTOT, SKTONO, SKTSLN, SIGNT, TNEW, KCNODE,
     *                  DSYSK, MXPOI, MXGELE, TRIAL                )
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION  SKNNO(6,6), SKTOT(6,6), SKTONO(6,6), SKTSLN(6,6)
      DIMENSION  DSYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)

      INTEGER    KCNODE(MXGELE,3)
C
      LJ=KCNODE(IC,2)
      LK=KCNODE(IC,3)

      IF(LJ.EQ.LK) THEN

      DO 10  IP=1,3
      DO 20  IA=1,3

      MP=KCNODE(IC,IP)
      M1=(MP-1)*2+1
```

```
      M2=(MP-1)*2+2

      NP=KCNODE(IC,IA)
      N1=(NP-1)*2+1
      N2=(NP-1)*2+2

      J1=(IP-1)*2+1
      J2=(IP-1)*2+2

      K1=(IA-1)*2+1
      K2=(IA-1)*2+2

      DSYSK(M1,N1)= DSYSK(M1,N1)+FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J1,K1)
      DSYSK(M1,N2)= DSYSK(M1,N2)+FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J1,K2)
      DSYSK(M2,N1)= DSYSK(M2,N1)+FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J2,K1)
      DSYSK(M2,N2)= DSYSK(M2,N2)+FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J2,K2)

   20 CONTINUE
   10 CONTINUE
      ELSE
      DO 100  IP=1,3
      DO 200  IA=1,3

      MP=KCNODE(IC,IP)
      M1=(MP-1)*2+1
      M2=(MP-1)*2+2

      NP=KCNODE(IC,IA)
      N1=(NP-1)*2+1
      N2=(NP-1)*2+2

      J1=(IP-1)*2+1
      J2=(IP-1)*2+2

      K1=(IA-1)*2+1
      K2=(IA-1)*2+2

      DSYSK(M1,N1)= DSYSK(M1,N1)+TNEW/DL*(SKNNO(J1,K1)+SKNNO(K1,J1)
     1        -SKTOT(J1,K1)-SKTOT(K1,J1)
     2        -DGAPN/DL*(SKTONO(K1,J1)+SKTONO(J1,K1)))
     3        +FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J1,K1)
      DSYSK(M1,N2)= DSYSK(M1,N2)+TNEW/DL*(SKNNO(J1,K2)+SKNNO(K2,J1)
     1        -SKTOT(J1,K2)-SKTOT(K2,J1)
     2        -DGAPN/DL*(SKTONO(K2,J1)+SKTONO(J1,K2)))
     3        +FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J1,K2)
      DSYSK(M2,N1)= DSYSK(M2,N1)+TNEW/DL*(SKNNO(J2,K1)+SKNNO(K1,J2)
     1        -SKTOT(J2,K1)-SKTOT(K1,J2)
     2        -DGAPN/DL*(SKTONO(K1,J2)+SKTONO(J2,K1)))
     3        +FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J2,K1)
      DSYSK(M2,N2)= DSYSK(M2,N2)+TNEW/DL*(SKNNO(J2,K2)+SKNNO(K2,J2)
     1        -SKTOT(J2,K2)-SKTOT(K2,J2)
     2        -DGAPN/DL*(SKTONO(K2,J2)+SKTONO(J2,K2)))
     3        +FMU*PP*SIGNT*TRIAL*SKTSLN(J2,K2)

  200 CONTINUE
```

```
  100 CONTINUE

      ENDIF

      RETURN
      END
C
C------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE SOLVEGAUSS(NEQT, SYSK, SYSF,UTDISP,MXPOI, MXGELE)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
      DIMENSION  SYSF(MXPOI*2),UTDISP(MXPOI*2)
C

      CALL SCALEM(NEQT, SYSK, SYSF, MXPOI, MXGELE)
C
      DO 100  IP=1,NEQT-1
C
      CALL PIVOT(NEQT, SYSK, SYSF, IP, MXPOI, MXGELE)

      DO 200  IE=IP+1,NEQT
      IF(SYSK(IP,IP).EQ.0.) THEN
      WRITE(6,433) IP
  433 FORMAT(/,' ***REAL*8LY****',I5 )
         READ(5,*)
        ENDIF
      RATIO = SYSK(IE,IP)/SYSK(IP,IP)
      DO 300  IC=IP+1,NEQT
      SYSK(IE,IC) = SYSK(IE,IC)-RATIO*SYSK(IP,IC)
  300 CONTINUE
       SYSF(IE) = SYSF(IE)-RATIO*SYSF(IP)
  200 CONTINUE

C
      DO 400  IE=IP+1,NEQT
      SYSK(IE,IP) = 0.
  400 CONTINUE
  100 CONTINUE

C
C    BACK SUBSTITUTION
C
      UTDISP(NEQT)=SYSF(NEQT)/SYSK(NEQT,NEQT)
      DO 500  IE=NEQT-1,1,-1
      SUM = 0.
      DO 600  IC=IE+1,NEQT
      SUM = SUM + SYSK(IE,IC)*UTDISP(IC)
 600 CONTINUE
      UTDISP(IE)=(SYSF(IE)-SUM)/SYSK(IE,IE)
 500 CONTINUE

      RETURN
```

```
      END

C
C--------------------------------------
C
      SUBROUTINE SCALEM(NEQT, SYSK, SYSF, MXPOI, MXGELE)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
      DIMENSION  SYSF(MXPOI*2)

C
      DO 10  IE=1,NEQT
      BIG = ABS(SYSK(IE,1))
      DO 20  IC=2,NEQT
     AMAX = ABS(SYSK(IE,IC))
      IF(AMAX.GT.BIG) BIG=AMAX
  20 CONTINUE
     DO 30  IC=1,NEQT
      SYSK(IE,IC)=SYSK(IE,IC)/BIG
  30 CONTINUE
     SYSF(IE)=SYSF(IE)/BIG
  10 CONTINUE
     RETURN
      END

C
C--------------------------------------
C
      SUBROUTINE PIVOT(NEQT, SYSK, SYSF, IP,MXPOI, MXGELE)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
      DIMENSION  SYSF(MXPOI*2)

C
      JP=IP
      BIG=ABS(SYSK(IP,IP))
      DO 10  I=IP+1,NEQT
      AMAX=ABS(SYSK(I,IP))
      IF(AMAX.GT.BIG)  THEN
         BIG = AMAX
         JP = I
      ENDIF
   10 CONTINUE
         IF(JP.NE.IP) THEN
      DO 20  J=IP,NEQT
      DUMY     =SYSK(JP,J)
      SYSK(JP,J) =SYSK(IP,J)
      SYSK(IP,J) =DUMY
   20 CONTINUE
      DUMY = SYSF(JP)
      SYSF(JP)= SYSF(IP)
      SYSF(IP)= DUMY
        ENDIF
      IF(BIG.EQ.0.) THEN
       WRITE(6,433) IP
```

```
  433 FORMAT(/,' ***REAL*8LY****',I5 )
          READ(5,*)
        ENDIF
      RETURN
      END
C
C------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE STRESS(NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, DISP, ET, INTYPE,
     *       EULO, EUL, SXXE, SYYE, SXYE, MXPOI, MXELE, MXGELE)

C
C     COMPUTE NODAL STRESS COMPONENTS FOR CST ELEMENTS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  COORD(MXPOI,2), ET(5,2), EUL(MXELE,3)
      DIMENSION  DISP(MXPOI*2), EULO(MXELE,3)
      DIMENSION  SXXE(MXELE), SYYE(MXELE), SXYE(MXELE)
      DIMENSION  C(3,3), B(3,6), UG(3), VG(3)
      DIMENSION  A(3,4), THETA(4), ETA(3)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,3), INTYPE(MXELE)

C
C     LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
      DO 1000  IE=1,NELEM
C
C     FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
C
      XG1 = COORD(II,1)
      XG2 = COORD(JJ,1)
      XG3 = COORD(KK,1)
      YG1 = COORD(II,2)
      YG2 = COORD(JJ,2)
      YG3 = COORD(KK,2)
      AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
C
        IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,100) IE
 100 FORMAT(/,'  !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
    *    ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
    *    '  --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
    *    ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'           )
      IF(AREA.LE.0.) STOP
C
      B1 = YG2 - YG3
      B2 = YG3 - YG1
      B3 = YG1 - YG2
      C1 = XG3 - XG2
      C2 = XG1 - XG3
```

```
      C3 = XG2 - XG1
C
      DO 110  I=1,3
      DO 110  J=1,6
      B(I,J) = 0.
  110 CONTINUE
C
      B(1,1) = B1
      B(1,3) = B2
      B(1,5) = B3
      B(2,2) = C1
      B(2,4) = C2
      B(2,6) = C3
      B(3,1) = C1
      B(3,2) = B1
    B(3,3) = C2
      B(3,4) = B2
      B(3,5) = C3
      B(3,6) = B3
C
      DO 120  I=1,3
      DO 130  J=1,6
      B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
  130 CONTINUE
  120 CONTINUE

        IK=INTYPE(IE)
        ELAS=ET(IK,1)
        PR  =ET(IK,2)

C
C     ELASTICITY MATRIX:
C
      FAC  = ELAS/((1.+PR)*(1.-2.*PR))
      C(1,1) = FAC*(1.-PR)
      C(1,2) = FAC*PR
      C(1,3) = 0.
      C(2,1) = C(1,2)
      C(2,2) = C(1,1)
      C(2,3) = 0.
      C(3,1) = 0.
      C(3,2) = 0.
      C(3,3) = FAC*(1.-2.*PR)/2.
C
C     GATHER ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS:
C
      DO 200  J1=1,3
      I1 = INTMAT(IE,J1)
      IEQ  = (I1-1)*2 + 1
      UG(J1) = DISP(IEQ   )
      VG(J1) = DISP(IEQ+1)
 200  CONTINUE
C
C       CALCULATE NONLINEAR TERMS :
C
```

```
         UXX  = (B1*UG(1)+B2*UG(2)+B3*UG(3))/(2.*AREA)
         UYY  = (C1*VG(1)+C2*VG(2)+C3*VG(3))/(2.*AREA)
         UXY  = (C1*UG(1)+C2*UG(2)+C3*UG(3))/(2.*AREA)
         UYX  = (B1*VG(1)+B2*VG(2)+B3*VG(3))/(2.*AREA)

         DO   I=1,3
         DO   J=1,4
         A(I,J)  =0.
         THETA(J)=0.
         ENDDO
         ETA(I)=0.
         ENDDO
C
         A(1,1) = UXX
         A(1,3) = UYX
         A(2,2) = UXY
         A(2,4) = UYY
         A(3,1) = UXY
         A(3,2) = UXX
         A(3,3) = UYY
         A(3,4) = UYX
C
         THETA(1) = UXX
         THETA(2) = UXY
         THETA(3) = UYX
         THETA(4) = UYY

         DO M=1,3
         DO N=1,4
          ETA(M) = ETA(M) + A(M,N)*THETA(N)/2.
         ENDDO
         ENDDO
C
C      COMPUTE THE TOTAL STRAINS:
C
       DO 220   I=1,3
       EUL(IE,I) = ETA(I)
       DO 230   J=1,3
       J1 = (J-1)*2 + 1
       J2 = J1 + 1
       EUL(IE,I) = EUL(IE,I) + B(I,J1)*UG(J) + B(I,J2)*VG(J)
  230 CONTINUE
  220 CONTINUE
C
C      COMPUTE THE DIFFERENT BETWEEN OLD AND NEW ALMANSI STRAIN:
C
         DELXX  = EUL(IE,1)
         DELYY  = EUL(IE,2)
         DELXY  = EUL(IE,3)
C
C      COMPUTE THE DELTA ELEMENT STRESSES:
C
       SXXE(IE) = C(1,1)*DELXX  + C(1,2)*DELYY  + C(1,3)*DELXY
       SYYE(IE) = C(2,1)*DELXX  + C(2,2)*DELYY  + C(2,3)*DELXY
       SXYE(IE) = C(3,1)*DELXX  + C(3,2)*DELYY  + C(3,3)*DELXY
```

```
  1000 CONTINUE

        RETURN
        END

C
C-----------------------------------------------------------------
C
        SUBROUTINE GENRB( DSYSF, UNGAP, KCNODE, IFC, NEQ,
      *        MXPOI, MXGELE, MXELE, BET, NELEM, ET,
      *        INTYPE, COORD ,INTMAT, NG,CFORCEO, CFORCEN,
      *        TFORCEO, AUGTF, FT, AUGTFO)
C
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
        DIMENSION  DSYSF(MXPOI*2)
        DIMENSION  UNGAP(MXGELE,2), BET(MXGELE)
        DIMENSION  FT(MXPOI*2), ET(5,2)
        DIMENSION  COORD(MXPOI,2), CFORCEO(MXPOI), CFORCEN(MXPOI)
        DIMENSION  TFORCEO(MXPOI), AUGTF(MXPOI), AUGTFO(MXPOI)
C
        INTEGER    KCNODE(MXGELE,3), INTMAT(MXELE,3)
        INTEGER    NG(MXGELE), INTYPE(MXELE)
C
        IF(IFC.NE.0) THEN
       DO 100  IC=1,IFC
        KI=KCNODE(IC,1)
        KJ=KCNODE(IC,2)
        KK=KCNODE(IC,3)

        UTX = UNGAP(IC,2)
        UTY = -UNGAP(IC,1)

        PAR1=(1.-BET(IC))
        PAR2=BET(IC)

        DSYSF((KI-1)*2+1)=DSYSF((KI-1)*2+1)-(CFORCEN(KI)+CFORCEO(KI))
      1        *UNGAP(IC,1)+(TFORCEO(KI)+AUGTF(KI)+AUGTFO(KI))
      2        *UTX

        DSYSF((KI-1)*2+2)=DSYSF((KI-1)*2+2)-(CFORCEN(KI)+CFORCEO(KI))
      1        *UNGAP(IC,2)+(TFORCEO(KI)+AUGTF(KI)+AUGTFO(KI))
      2        *UTY

        DSYSF((KJ-1)*2+1)=DSYSF((KJ-1)*2+1)+((CFORCEN(KI)+CFORCEO(KI))
      1       *UNGAP(IC,1)-(TFORCEO(KI)+AUGTF(KI)+AUGTFO(KI))
      2       *UTX)*PAR1

       DSYSF((KJ-1)*2+2)=DSYSF((KJ-1)*2+2)+((CFORCEN(KI)+CFORCEO(KI))
      1       *UNGAP(IC,2)-(TFORCEO(KI)+AUGTF(KI)+AUGTFO(KI))
      2       *UTY)*PAR1

        DSYSF((KK-1)*2+1)=DSYSF((KK-1)*2+1)+((CFORCEN(KI)+CFORCEO(KI))
      1       *UNGAP(IC,1)-(TFORCEO(KI)+AUGTF(KI)+AUGTFO(KI))
      2        *UTX)*PAR2
```

```
      DSYSF((KK-1)*2+2)=DSYSF((KK-1)*2+2)+((CFORCEN(KI)+CFORCEO(KI))
     1      *UNGAP(IC,2)-(TFORCEO(KI)+AUGTF(KI)+AUGTFO(KI))
     2      *UTY)*PAR2


 100 CONTINUE
      ENDIF

C
      DO 200  MI=1,NEQ
      DSYSF(MI)=DSYSF(MI)-FT(MI)
 200 CONTINUE

      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE FPOINT( FT, COORD, INTMAT, NEQ, SXXE, SYYE, SXYE,
     *     MXPOI, MXELE, MXGELE, NELEM, ET, INTYPE )
C
C      TO CALCULATE FORCES DUE TO ELEMENT STRESSES
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION  COORD(MXPOI,2), ET(5,2)
      DIMENSION  FT(MXPOI*2), B(3,6)
      DIMENSION  SXXE(MXELE), SYYE(MXELE), SXYE(MXELE)
C
      INTEGER    INTMAT(MXELE,3), INTYPE(MXELE)
C
C     LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
      DO 50  NE=1,NEQ
      FT(NE)=0.
 50  CONTINUE

      DO 100  IE=1,NELEM
C
C     FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
     II  = INTMAT(IE,1)
     JJ  = INTMAT(IE,2)
     KK  = INTMAT(IE,3)
C
     XG1 = COORD(II,1)
     XG2 = COORD(JJ,1)
     XG3 = COORD(KK,1)
     YG1 = COORD(II,2)
     YG2 = COORD(JJ,2)
     YG3 = COORD(KK,2)
     AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
     IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,110) IE
 110 FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
```

```
     *    ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
     *    '  --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
     *    ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'           )
      IF(AREA.LE.0.) STOP
C
      B1 = YG2 - YG3
      B2 = YG3 - YG1
      B3 = YG1 - YG2
      C1 = XG3 - XG2
      C2 = XG1 - XG3
      C3 = XG2 - XG1
C
      DO  120   I=1,3
      DO  120   J=1,6
      B(I,J) = 0.
 120  CONTINUE
C
      B(1,1) = B1
      B(1,3) = B2
      B(1,5) = B3
      B(2,2) = C1
      B(2,4) = C2
      B(2,6) = C3
      B(3,1) = C1
      B(3,2) = B1
      B(3,3) = C2
      B(3,4) = B2
      B(3,5) = C3
      B(3,6) = B3
C
        DO  130   I=1,3
      DO  130   J=1,6
      B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
 130  CONTINUE

C
C     COMPUTE NODAL FORCES FROM ELEMENT STRESSES:
C
        DO 250  I=1,3
        NE   = INTMAT(IE,I)
        IEQ1 = (NE-1)*2+1
        IEQ2 = (NE-1)*2+2
        J  = (I-1)*2+1
        K  = J+1

        FT(IEQ1)=FT(IEQ1) + AREA*(B(1,J)*SXXE(IE)+B(2,J)*SYYE(IE)
     *  +B(3,J)*SXYE(IE))
        FT(IEQ2)=FT(IEQ2) + AREA*(B(1,K)*SXXE(IE)+B(2,K)*SYYE(IE)
     *  +B(3,K)*SXYE(IE))

 250  CONTINUE
C
 100  CONTINUE

        RETURN
```

```
         END

C----------------------------------------------------------------------

      SUBROUTINE  FIEDGES( INTMAT, COORD, INTYPE, ICEDG, ITEDG, NODEBC,
     *          NCE, NTE, MXPOI, NELEM, MXELE, MXGELE, NIBC)
C
C
C        FINE CONTACT EDGES AND TARGET EDGES
C
C
        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
        DIMENSION COORD(MXPOI,2)
C
      INTEGER INTMAT(MXELE,3),ICEDG(MXGELE,2),ITEDG(MXGELE,2)
        INTEGER INTYPE(MXELE), NODEBC(MXPOI)

      NCE=0
      NTE=0
C
      DO 100  IE=1,NELEM

           IP=INTMAT(IE,1)
           JP=INTMAT(IE,2)
           KP=INTMAT(IE,3)
      IEA=0
    IEB=0
      IEC=0
C
        DO 200  IL=1,NELEM
             IF(IE.EQ.IL)  GOTO  550

       IAA=0
       IBB=0
       ICC=0

      DO 300  NP1=1,3
            IF(INTMAT(IL,NP1).EQ.IP)  IAA=IAA+1
             IF(INTMAT(IL,NP1).EQ.JP)  IAA=IAA+1
 300  CONTINUE

             IF(IAA.EQ.2) IEA=IEA+1

      DO 400  NP2=1,3
                  IF(INTMAT(IL,NP2).EQ.JP)  IBB=IBB+1
             IF(INTMAT(IL,NP2).EQ.KP)  IBB=IBB+1
 400  CONTINUE

             IF(IBB.EQ.2) IEB=IEB+1

      DO 500  NP3=1,3
                  IF(INTMAT(IL,NP3).EQ.KP)  ICC=ICC+1
             IF(INTMAT(IL,NP3).EQ.IP)  ICC=ICC+1
 500  CONTINUE
```

```
          IF(ICC.EQ.2) IEC=IEC+1

550  CONTINUE
200  CONTINUE

         IF((IEA.NE.0).AND.(IEB.NE.0).AND.(IEC.NE.0)) GOTO  650

         IF(INTYPE(IE).EQ.1)  THEN

          IF(IEA.EQ.0) THEN
              NCE=NCE+1
              ICEDG(NCE,2)=IP
              ICEDG(NCE,1)=JP
            ENDIF
          IF(IEB.EQ.0) THEN
              NCE=NCE+1
              ICEDG(NCE,2)=JP
              ICEDG(NCE,1)=KP
            ENDIF
          IF(IEC.EQ.0) THEN
              NCE=NCE+1
              ICEDG(NCE,2)=KP
              ICEDG(NCE,1)=IP
          ENDIF

         ELSE

          IF(IEA.EQ.0) THEN
              NTE=NTE+1
              ITEDG(NTE,2)=IP
              ITEDG(NTE,1)=JP
          ENDIF
          IF(IEB.EQ.0) THEN
              NTE=NTE+1
              ITEDG(NTE,2)=JP
              ITEDG(NTE,1)=KP
          ENDIF
          IF(IEC.EQ.0) THEN
              NTE=NTE+1
              ITEDG(NTE,2)=KP
              ITEDG(NTE,1)=IP
          ENDIF

          ENDIF

650  CONTINUE

100  CONTINUE

       RETURN

       END

C--------------------------------------------------------------
```

```
      SUBROUTINE CHKTESTP( MXPOI, COORD, NCE, NTE, LIFC,IFC,
     *           NGP, UNGAP, KCNODE, MXGELE, ITEDG, ICEDG,
     *                       NODEBC, NIBC, IBC                            )
C
        IMPLICIT  REAL*8 (A-H,O-Z)
        DIMENSION  COORD(MXPOI,2), X(8), XMAX(2), XMIN(2)
        DIMENSION  YMAX(2), YMIN(2)
        DIMENSION  UNGAP(MXGELE,2), UNORMX(3), UNORMY(3)
C
        INTEGER    NC(2), ICEDG(MXGELE,2), ITEDG(MXGELE,2), NODEBC(MXPOI)
        INTEGER    NETED(3), KCNODE(MXGELE,3), IBC(MXPOI,2)
        INTEGER    IEBUF(MXGELE,2), NGP(MXGELE)
C
C
        NKC=0

        DO 100   IC=1,NCE

          NC(1)=ICEDG(IC,1)
          NC(2)=ICEDG(IC,2)

        DO 200   IT=1,NTE

          NT1=ITEDG(IT,1)
          NT2=ITEDG(IT,2)
C
        JB=0
        NOE=2
        DO K=1,NIBC
           IF(NT1.EQ.NODEBC(K)) JB=JB+1
           IF(NT2.EQ.NODEBC(K)) JB=JB+1
        ENDDO
C
        IF(JB.EQ.NOE) GOTO 200
C
          X(1)=COORD(NC(1),1)
          X(2)=COORD(NC(2),1)
          X(3)=COORD(NC(1),2)
          X(4)=COORD(NC(2),2)
          X(5)=COORD(NT1,1)
          X(6)=COORD(NT2,1)
          X(7)=COORD(NT1,2)
          X(8)=COORD(NT2,2)

C     AFTER THE EXPANDED TERITORIES HAD INTERSECTED,
C
C     CONTINUING TO CHECK WETHER THE CONTACTING NODES BE
C
C       IN THE CONTACT TERITORY OR NOT
C

        COVECX= -X(4)+X(3)
        COVECY=  X(2)-X(1)
```

```
        UCOVEX= COVECX/(SQRT(COVECX**2+COVECY**2))
        UCOVEY= COVECY/(SQRT(COVECX**2+COVECY**2))
        TAVECX=(-X(8)+X(7))
        TAVECY=( X(6)-X(5))
        UVECX  = TAVECX/(SQRT(TAVECX**2+TAVECY**2))
        UVECY  = TAVECY/(SQRT(TAVECX**2+TAVECY**2))

        CHKOP   =UCOVEX*UVECX+UCOVEY*UVECY
C
C       CHECK WHETHER THEIR NORMAL-VECTORS BE IN OPPOSITE SIDES
C
      IF(CHKOP.LT.-0.5)           THEN            ! IF 1451

      DO 300    KT=1,2
        IM=(KT*4)-3
        IN=(KT*4)-2
        DL=(X(IM)-X(IN))
        DLN=(X(IM+2)-X(IN+2))

        EP=1./4.*SQRT(DL**2+DLN**2)
C
C        KT = 1 ; BE OF CONTACT SEGMENT
C        KT = 2 ; BE OF TARGET  SEGMENT
C

        IF(DL.GT.0.) THEN
           XMAX(KT)=X(IM)+EP
          XMIN(KT)=X(IN)-EP
        ELSEIF(DL.LT.0.) THEN
           XMAX(KT)=X(IN)+EP
           XMIN(KT)=X(IM)-EP
        ELSEIF(DL.EQ.0.) THEN
           XMAX(KT)=X(IM)+EP
           XMIN(KT)=X(IN)-EP
        ENDIF
C
        IF(DLN.GT.0.) THEN
           YMAX(KT)=X(IM+2)+EP
           YMIN(KT)=X(IN+2)-EP
        ELSEIF(DLN.LT.0.) THEN
           YMAX(KT)=X(IN+2)+EP
           YMIN(KT)=X(IM+2)-EP
        ELSEIF(DLN.EQ.0.) THEN
           YMAX(KT)=X(IM+2)+EP
           YMIN(KT)=X(IN+2)-EP
        ENDIF

 300 CONTINUE
C
C        CHECK EXPANSION OF TERRITORY
C
      JCHK=0
C
C        IN X-DIRECTION
C
```

```
          IF(XMAX(1).GT.XMAX(2)) THEN
            XMINX=XMAX(2)
         ELSE
            XMINX=XMAX(1)
         ENDIF

          IF(XMIN(1).GT.XMIN(2)) THEN
            XMAXI=XMIN(1)
         ELSE
            XMAXI=XMIN(2)
         ENDIF

          IF(XMINX.GE.XMAXI) JCHK=JCHK+1
C
C         IN Y-DIRECTION
C
          IF(YMAX(1).GT.YMAX(2)) THEN
            YMINX=YMAX(2)
         ELSE
            YMINX=YMAX(1)
         ENDIF

          IF(YMIN(1).GT.YMIN(2)) THEN
            YMAXI=YMIN(1)
         ELSE
            YMAXI=YMIN(2)
         ENDIF

          IF(YMINX.GE.YMAXI) JCHK=JCHK+1

C
C
        IF(JCHK.EQ.2) THEN

         DO 500    JT=1,NTE
            IF(JT.NE.IT) THEN
               IF(ITEDG(JT,2).EQ.NT1) NTPL=JT
               IF(ITEDG(JT,1).EQ.NT2) NTPR=JT
          ENDIF
 500  CONTINUE

C
C       CHECK A CONTACT-EDGE AND TAGET-EDGES TO FINE
C
C       CONTACT PAIRS ,WHICH BELONG TO CONTACT-EDGE
C
          NETED(1)=IT
         NETED(2)=NTPL
         NETED(3)=NTPR
C
C
        DO 600    MC=1,2

         ICNOD=NC(MC)
C
```

```
        MINK=NKC
        MUI=0
C
      DO 650    MT=1,3

        ICHB=0
        NODEJ=ITEDG(NETED(MT),1)
        NODEK=ITEDG(NETED(MT),2)

          X1=X(MC)
         X2=COORD(NODEJ,1)
         X3=COORD(NODEK,1)
         Y1=X(MC+2)
         Y2=COORD(NODEJ,2)
         Y3=COORD(NODEK,2)

         VJIX  = X1-X2
        VJIY  = Y1-Y2
        VJKX  = X3-X2
        VJKY  = Y3-Y2

C
C       [ UNORMX(MT) UNORMY(MT) ] = UNIT NORMAL VECTOR OF SEGMENT J-K
C
C      [ VNX/VNL      VNY/VNL     ]
C

        VNX   = -Y3+Y2
        VNY   =  X3-X2
        VNL   = ABS(SQRT(VNX**2+VNY**2))

C**********************************C

        IF(MT.EQ.1) THEN
        VNX1  = -Y3+Y2
        VNY1  =  X3-X2
        VNL1  = ABS(SQRT(VNX1**2+VNY1**2))
        ENDIF

C****************************************C
C               CHECK FOR SYMETRY          C
C****************************************C
        JB=0
        NOE=2

      DO K=1,NIBC
           IF(NODEJ.EQ.NODEBC(K)) JB=JB+1
           IF(NODEK.EQ.NODEBC(K)) JB=JB+1
      ENDDO

            IF(JB.EQ.NOE)  THEN
               IF(IBC(K,1).EQ.1) THEN
                UNORMX(MT)=-VNX1/(ABS(VNL1))
                UNORMY(MT)=VNY1/(ABS(VNL1))
               ELSEIF(IBC(K,2).EQ.1) THEN
```

```
               UNORMX(MT)=VNX1/(ABS(VNL1))
               UNORMY(MT)=-VNY1/(ABS(VNL1))
                 ENDIF
          ELSE
             UNORMX(MT)=VNX/VNL
               UNORMY(MT)=VNY/VNL
           ENDIF
C
C       DTAN  = MAGNITUDE OF VECTOR JK
C

        DTAN   = ABS(SQRT(VJKX**2+VJKY**2))
C-----------------------------------------------------------------------------C
C      CALCULATE  AND CHECK WETHER NODE_I BEING IN BOUND OF CONTACT:  C
C-----------------------------------------------------------------------------C

C
C       SJK  = MAGNITUDE OF VECTOR J-I PROJECT TO VECTOR J-K
C
          SJK  = (VJKX*VJIX/DTAN)+(VJKY*VJIY/DTAN)

C
C      DIJ  = MAGNITUDE OF VECTOR J-I PROJECT TO EDGE-NORMAL VECTOR:
C
        DIJ  = (VJIX*VNX/VNL)+(VJIY*VNY/VNL)

        EPB=1/10.*EP
        EPA=1/10000.*EP
        IF((SJK.GE.-EPA).AND.(SJK.LE.DTAN+EPA))  ICHB=ICHB+1
        IF((DIJ.LE.EPB).OR.(MUI.EQ.2))        ICHB=ICHB+1
                IF((MT.EQ.1).AND.(ICHB.EQ.2)) THEN
                IMID  =1
            ELSEIF((MT.EQ.1).AND.(ICHB.NE.2)) THEN
                IMID  =0
            ELSEIF((MT.EQ.2).AND.(ICHB.EQ.2)) THEN
                ILEFT=1
            ELSEIF((MT.EQ.2).AND.(ICHB.NE.2)) THEN
                ILEFT=0
            ELSEIF((MT.EQ.3).AND.(ICHB.EQ.2)) THEN
                IRIGH=1
             ELSEIF((MT.EQ.3).AND.(ICHB.NE.2)) THEN
                IRIGH=0
            ENDIF

 650  CONTINUE

C***********************************************C
C      RECOGNIZE ON LEFT-EDGE AND MID-EDGE       C
C***********************************************C
      CRVEL=UNORMX(1)*UNORMY(2)-UNORMX(2)*UNORMY(1)
                IF(CRVEL.GT.0.) THEN
                      LCASE=3
            ELSEIF(CRVEL.EQ.0.) THEN
                      LCASE=1
```

```
            ELSEIF(CRVEL.LT.0.) THEN
                     LCASE=2
            ENDIF

C
C     RECOGNIZE ON RIGHT-EDGE AND MID-EDGE
C
        CRVER=UNORMX(1)*UNORMY(3)-UNORMX(3)*UNORMY(1)
                 IF(CRVER.GT.0.) THEN
                         ICASE=2
            ELSEIF(CRVER.EQ.0.) THEN
                         ICASE=1
            ELSEIF(CRVER.LT.0.) THEN
                         ICASE=3
            ENDIF
C
C       CASE1 : HITTING NODE IN A FLAT
C
C
C     CASE2 : HITTING NODE IN A VALLEY
C
C
C       CASE3 : HITTING NODE IN A SHARP CORNER
C

C
C     MID-EDGE AND LEFT-EDGE
C
      IF(LCASE.EQ.1) THEN
                 IF((IMID.EQ.0).AND.(ILEFT.EQ.0))  THEN
             !
           ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(ILEFT.EQ.0))  THEN
                    NKC=NKC+1
                KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                    KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
                    KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
                    UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
                    UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
            ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(ILEFT.EQ.1))  THEN
                    NKC=NKC+1
                KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                    KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
                    KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,1)
                    UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
                    UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
            ELSEIF((IMID.EQ.0).AND.(ILEFT.EQ.1))  THEN
            ENDIF

        ELSEIF(LCASE.EQ.2) THEN
                    VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,1),1)
                    VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,1),2)
                     IF((VECONX.EQ.0.).OR.(VECONY.EQ.0.))  THEN
                     IMID =1
                               ILEFT=1
                     ENDIF
```

```
IF((IMID.EQ.0).AND.(ILEFT.EQ.0)) THEN
   NORMX1=-UNORMX(1)
  NORMY1=-UNORMY(1)
   NORMX2=-UNORMX(2)
   NORMY2=-UNORMY(2)

   VMID  =VECONX*NORMY1-VECONY*NORMX1
   VLEF  =VECONX*NORMY2-VECONY*NORMX2

   IF((VMID.GT.0.).AND.(VLEF.LT.0)) THEN
          UVENX=-VECONX/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))
   UVENY=-VECONY/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))

            NKC=NKC+1
        KCNODE(NKC,1)=ICNOD
            KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
            KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,1)
            UNGAP(NKC,1) =UVENX
            UNGAP(NKC,2) =UVENY
   ENDIF
ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(ILEFT.EQ.0)) THEN
   NKC=NKC+1
 KCNODE(NKC,1)=ICNOD
   KCNODE(NKC,2)=ITEDG(NETED(1),1)
   KCNODE(NKC,3)=ITEDG(NETED(1),2)
   UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
   UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
 ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(ILEFT.EQ.1)) THEN
   VMLX=UNORMX(1)+UNORMX(2)
   VMLY=UNORMY(1)+UNORMY(2)
   UVMLX=VMLX/(ABS(SQRT(VMLX**2+VMLY**2)))
   UVMLY=VMLY/(ABS(SQRT(VMLX**2+VMLY**2)))
   VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,1),1)
   VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,1),2)
   IF((VECONX.EQ.0.).AND.(VECONY.EQ.0.)) THEN
                 XD=X1+UVMLX
                   YD=Y1+UVMLY
                   VECONX=XD-COORD(ITEDG(IT,1),1)
        VECONY=YD-COORD(ITEDG(IT,1),2)
                ENDIF
   CCML =VECONX*UVMLY-VECONY*UVMLX
    IF(CCML.EQ.0.) THEN
       NKC=NKC+1
     KCNODE(NKC,1)=ICNOD
        KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
        KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,1)
        UNGAP(NKC,1) =UVMLX
     UNGAP(NKC,2) =UVMLY
    ELSEIF(CCML.LT.0.) THEN
!
    ELSEIF(CCML.GT.0.) THEN
        NKC=NKC+1
     KCNODE(NKC,1)=ICNOD
        KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
```

```
                        KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
                        UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
                        UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
                   ENDIF
          ELSEIF((IMID.EQ.0).AND.(ILEFT.EQ.1)) THEN
         ENDIF

    ELSEIF(LCASE.EQ.3) THEN
                 VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,1),1)
                 VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,1),2)
                  IF((VECONX.EQ.0.).OR.(VECONY.EQ.0.)) THEN
                  IMID =1
                            ILEFT=1
                  ENDIF

              IF((IMID.EQ.0).AND.(ILEFT.EQ.0)) THEN
                ACHCK =ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2))
                                 IF(ACHCK.LE.ACONT) THEN
                                      UVENX=VECONX/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))
                        UVENY=VECONY/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))

                        NKC=NKC+1
                    KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                        KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
                        KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,1)
                        UNGAP(NKC,1) =UVENX
                        UNGAP(NKC,2) =UVENY
                     ENDIF
         ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(ILEFT.EQ.0)) THEN
               NKC=NKC+1
             KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                 KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
                 KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
                UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
                 UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
          ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(ILEFT.EQ.1)) THEN
                    VMLX=-UNORMX(1)-UNORMX(2)
                 VMLY=-UNORMY(1)-UNORMY(2)
                 UVMLX=VMLX/(ABS(SQRT(VMLX**2+VMLY**2)))
                 UVMLY=VMLY/(ABS(SQRT(VMLX**2+VMLY**2)))
                 VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,1),1)
                 VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,1),2)
                      IF((VECONX.EQ.0.).AND.(VECONY.EQ.0.)) THEN
                                     XD=X1+UVMLX
                                        YD=Y1+UVMLY
                                        VECONX=XD-COORD(ITEDG(IT,1),1)
                        VECONY=YD-COORD(ITEDG(IT,1),2)
                                   ENDIF

                 CCML =VECONX*UVMLY-VECONY*UVMLX
                      IF(CCML.EQ.0.) THEN
                      NKC=NKC+1
                   KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                        KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
                        KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,1)
```

```
                  UNGAP(NKC,1) =-UVMLX
                  UNGAP(NKC,2) =-UVMLY
            ELSEIF(CCML.GT.0.) THEN

            ELSEIF(CCML.LT.0.) THEN
                  NKC=NKC+1
             KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                  KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
                   KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
                  UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
                  UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
              ENDIF
        ENDIF
     ENDIF
C
C     MID-EDGE AND RIGHT-EDGE
C
     IF(MINK.EQ.NKC)   THEN   !**** IW

    IF(ICASE.EQ.1) THEN
              IF((IMID.EQ.0).AND.(IRIGH.EQ.0)) THEN

         ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(IRIGH.EQ.0)) THEN
                NKC=NKC+1
             KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                 KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
                 KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
                 UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
                 UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
          ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(IRIGH.EQ.1)) THEN
                 NKC=NKC+1
             KCNODE(NKC,1)=ICNOD
                 KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,2)
                 KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
              UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
                 UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
         ENDIF

     ELSEIF(ICASE.EQ.2) THEN

                 VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,2),1)
                 VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,2),2)
                  IF((VECONX.EQ.0.).OR.(VECONY.EQ.0.)) THEN
                  IMID =1
                            IRIGH=1
                  ENDIF
              IF((IMID.EQ.0).AND.(IRIGH.EQ.0)) THEN
               NORMX1=-UNORMX(1)
               NORMY1=-UNORMY(1)
                 NORMX3=-UNORMX(3)
             NORMY3=-UNORMY(3)

                 VMID   =VECONX*NORMY1-VECONY*NORMX1
                 VRIG   =VECONX*NORMY3-VECONY*NORMX3
                       IF((VMID.LT.0.).AND.(VRIG.GT.0)) THEN
```

```
UVENX=-VECONX/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))
UVENY=-VECONY/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))

NKC=NKC+1
KCNODE(NKC,1)=ICNOD
KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,2)
KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
UNGAP(NKC,1) =UVENX
UNGAP(NKC,2) =UVENY
ENDIF
ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(IRIGH.EQ.0)) THEN
NKC=NKC+1
KCNODE(NKC,1)=ICNOD
KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(IRIGH.EQ.1)) THEN
VMRX=UNORMX(1)+UNORMX(3)
VMRY=UNORMY(1)+UNORMY(3)
UVMRX=VMRX/(ABS(SQRT(VMRX**2+VMRY**2)))
UVMRY=VMRY/(ABS(SQRT(VMRX**2+VMRY**2)))
VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,2),1)
VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,2),2)
IF((VECONX.EQ.0.).AND.(VECONY.EQ.0.)) THEN
XD=X1+UVMRX
YD=Y1+UVMRY
VECONX=XD-COORD(ITEDG(IT,2),1)
VECONY=YD-COORD(ITEDG(IT,2),2)
ENDIF

CCMR =VECONX*UVMRY-VECONY*UVMRX
IF(CCMR.EQ.0.) THEN
NKC=NKC+1
KCNODE(NKC,1)=ICNOD
KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,2)
KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
UNGAP(NKC,1) =UVMRX
UNGAP(NKC,2) =UVMRY
ELSEIF(CCML.GT.0.) THEN

ELSEIF(CCML.LT.0.) THEN
NKC=NKC+1
KCNODE(NKC,1)=ICNOD
KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
ENDIF
ENDIF

ELSEIF(ICASE.EQ.3) THEN
VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,2),1)
VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,2),2)
IF((VECONX.EQ.0.).OR.(VECONY.EQ.0.)) THEN
```

```
        IMID =1
               IRIGH=1
        ENDIF

      IF((IMID.EQ.0).AND.(IRIGH.EQ.0)) THEN
          ACHCK =ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2))
                    IF(ACHCK.LE.ACONT) THEN
                         UVENX=VECONX/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))
             UVENY=VECONY/(ABS(SQRT(VECONX**2+VECONY**2)))

             NKC=NKC+1
         KCNODE(NKC,1)=ICNOD
             KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,2)
             KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
             UNGAP(NKC,1) =UVENX
             UNGAP(NKC,2) =UVENY
  ENDIF
 ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(IRIGH.EQ.0)) THEN
        NKC=NKC+1
    KCNODE(NKC,1)=ICNOD
        KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
        KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
        UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
    UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
  ELSEIF((IMID.EQ.1).AND.(IRIGH.EQ.1)) THEN
        VMRX=-UNORMX(1)-UNORMX(3)
        VMRY=-UNORMY(1)-UNORMY(3)
        UVMRX=VMRX/(ABS(SQRT(VMRX**2+VMRY**2)))
        UVMRY=VMRY/(ABS(SQRT(VMRX**2+VMRY**2)))
        VECONX=X1-COORD(ITEDG(IT,2),1)
        VECONY=Y1-COORD(ITEDG(IT,2),2)
            IF((VECONX.EQ.0.).AND.(VECONY.EQ.0.)) THEN
                         XD=X1+UVMRX
                            YD=Y1+UVMRY
                            VECONX=XD-COORD(ITEDG(IT,2),1)
             VECONY=YD-COORD(ITEDG(IT,2),2)
                      ENDIF

        CCML =VECONX*UVMRY-VECONY*UVMRX
            IF(CCML.EQ.0.) THEN
            NKC=NKC+1
         KCNODE(NKC,1)=ICNOD
             KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,2)
             KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
             UNGAP(NKC,1) =-UVMRX
             UNGAP(NKC,2) =-UVMRY
        ELSEIF(CCML.LT.0.) THEN

        ELSEIF(CCML.GT.0.) THEN
             NKC=NKC+1
         KCNODE(NKC,1)=ICNOD
             KCNODE(NKC,2)=ITEDG(IT,1)
             KCNODE(NKC,3)=ITEDG(IT,2)
             UNGAP(NKC,1) =UNORMX(1)
             UNGAP(NKC,2) =UNORMY(1)
```

```
                    ENDIF
               ENDIF
          ENDIF

          ELSE    ! **** IW
C
          ENDIF    ! **** IW

C
C     CHECK FOR DUPLICATED KCNODE     AND FORCE
C

      KD=NKC
      DO 700   IR=1,NKC-1
        IF(NKC.GT.1) THEN
            ICK=0
               ICJ=0
               ICL=0
               ICM=0
               ICN=0

            IF(KCNODE(KD,1).EQ.KCNODE(IR,1)) ICJ=ICJ+1
       IF(KCNODE(KD,1).EQ.KCNODE(IR,2)) ICK=ICK+1
       IF(KCNODE(KD,1).EQ.KCNODE(IR,3)) ICK=ICK+1

           IF((ICJ.EQ.1).OR.(ICK.EQ.2))  THEN
             AX=COORD(KCNODE(KD,1),1)
             AY=COORD(KCNODE(KD,1),2)
            BOX=COORD(KCNODE(IR,2),1)
            BOY=COORD(KCNODE(IR,2),2)
            BNX=COORD(KCNODE(KD,2),1)
            BNY=COORD(KCNODE(KD,2),2)
            COX=COORD(KCNODE(IR,3),1)
            COY=COORD(KCNODE(IR,3),2)
            CNX=COORD(KCNODE(KD,3),1)
            CNY=COORD(KCNODE(KD,3),2)
       ABO=ABS((AX-BOX)*UNGAP(IR,1)+(AY-BOY)*UNGAP(IR,2))
       ABN=ABS((AX-BNX)*UNGAP(KD,1)+(AY-BNY)*UNGAP(KD,2))
               IF(ABO.GT.ABN) THEN
                 KCNODE(IR,1)=KCNODE(KD,1)
                 KCNODE(IR,2)=KCNODE(KD,2)
                 KCNODE(IR,3)=KCNODE(KD,3)
                 UNGAP(IR,1)=UNGAP(KD,1)
                 UNGAP(IR,2)=UNGAP(KD,2)
                 NKC=NKC-1
                 GOTO  800
               ELSE
                 NKC=NKC-1
                 GOTO  800
               ENDIF
            ENDIF
       ENDIF
 700  CONTINUE
 800  CONTINUE
```

```
 600 CONTINUE

      ENDIF    ! FROM JCHK NOT EQUAL 2

        ENDIF  ! CHECK OPPOSITE SIDES (IF 1451)

 200 CONTINUE

 100 CONTINUE

        IFC=NKC
C
        RETURN
        END
C
C     ---------------------------------------------------------------
C

        SUBROUTINE CHECKFRICTION( MXPOI, MXGELE, KCNODE, IFC, LIFC, NGP,
        *           CFORCEN, CFORCET, NCHF, FMUS, FMUD )
C
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
        DIMENSION CFORCEN(MXPOI), CFORCET(MXPOI)

        INTEGER   KCNODE(MXGELE,2)
        INTEGER    NCHF(MXGELE), NGP(MXGELE)
C

        DO 1000  I=1,IFC

        NCON=KCNODE(I,1)

        DO 50  J=1,LIFC
        IF(NGP(J).EQ.NCON) THEN
           NCHFS=NCHF(J)
           GOTO 51
        ELSE
           NCHFS=1
        ENDIF
  50  CONTINUE
  51  CONTINUE

        IF(NCHFS.EQ.2) THEN
        FORCH=FMUD*CFORCEN(NCON)
        ELSE
        FORCH=FMUS*CFORCEN(NCON)
        ENDIF
             IF(ABS(FORCH).GE.ABS(CFORCET(NCON))) THEN
                 NCHF(I)=1
        ELSEIF(ABS(FORCH).LT.ABS(CFORCET(NCON))) THEN
                 NCHF(I)=2
                      IF(CFORCET(NCON).GT.0.) THEN
                 CFORCET(NCON)=ABS(FORCH)
                 ELSEIF(CFORCET(NCON).LT.0.) THEN
```

```
             CFORCET(NCON)=-ABS(FORCH)
              ELSEIF(CFORCET(NCON).EQ.0.) THEN
              CFORCET(NCON)=0.
              ENDIF
         ENDIF

1000  CONTINUE


C

        RETURN
        END

C-----------------------------------------------------------------------------

         SUBROUTINE UDCONFORCE( IFC, KCNODE, BET, DISP, UNGAP, CFORCEN,
  *           CFORCEO, PENE, PP, MXGELE, MXPOI, COORD,
  *             ITEDG, NTE, IBC )

         IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
         DIMENSION    KCNODE(MXGELE,3), DISP(MXPOI*2), BET(MXGELE)
         DIMENSION    UNGAP(MXGELE,2), CFORCEN(MXPOI), PENE(MXGELE)
         DIMENSION    QN(6), COORD(MXPOI,2), CFORCEO(MXPOI)
         DIMENSION    UNX(2), UNY(2)

         INTEGER          IU(6),ITEDG(MXGELE,2), IBC(MXPOI,2)
C
         DO 10  I=1,IFC

         INI=KCNODE(I,1)
         INJ=KCNODE(I,2)
         INK=KCNODE(I,3)
C
         X1=COORD(INI,1)
         Y1=COORD(INI,2)
         X2=COORD(INJ,1)
         Y2=COORD(INJ,2)
         X3=COORD(INK,1)
         Y3=COORD(INK,2)


        IF(INJ.EQ.INK) THEN  !!!

         UNORMX=UNGAP(I,1)
         UNORMY=UNGAP(I,2)

         GAP=(X1-X2)*UNORMX+(Y1-Y2)*UNORMY

         ELSE              !!!

             ALEN=SQRT((X3-X2)**2+(Y3-Y2)**2)
             TANUX=(X3-X2)/ALEN
             TANUY=(Y3-Y2)/ALEN
```

```
            UNORMX=-TANUY
            UNORMY= TANUX

        ETA=1./ALEN*((X1-X2)*TANUX+(Y1-Y2)*TANUY)

      GAP=(X1-(1.-ETA)*X2-ETA*X3)*UNORMX+(Y1-(1.-ETA)*Y2-ETA*Y3)*UNORMY


        ENDIF           !!!

        FAM1=GAP*PP
      CFORCEN(INI)=FAM1
C
 10 CONTINUE
C
        RETURN

        END

C---------------------------------------------------------------C
C
      SUBROUTINE LINEARNORM( COORD, DSYSK, KCNODE, UNGAP, CFORCEN,
  *                      MXPOI, MXGELE, BET ,PP ,PENE, IFC )
C
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
        DIMENSION  DSYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
        DIMENSION  UNGAP(MXGELE,2), BET(MXGELE), PENE(MXGELE)
        DIMENSION  SKNT(6,6), SKNTT(6,6), SKNN(6,6)
        DIMENSION  VNOS(6), VTS(6), COORD(MXPOI,2), CFORCEN(MXPOI)

        INTEGER    KCNODE(MXGELE,3)
C
        DO 1000  IC=1,IFC

        LI=KCNODE(IC,1)
        LJ=KCNODE(IC,2)
        LK=KCNODE(IC,3)
C
        IF(LJ.NE.LK) THEN !1

        X1=COORD(LI,1)
        X2=COORD(LJ,1)
        X3=COORD(LK,1)
        Y1=COORD(LI,2)
        Y2=COORD(LJ,2)
        Y3=COORD(LK,2)

       VNOS(1) =  0.
        VNOS(2) =  0.
        VNOS(3) = -UNGAP(IC,1)
        VNOS(4) = -UNGAP(IC,2)
        VNOS(5) =  UNGAP(IC,1)
        VNOS(6) =  UNGAP(IC,2)
C
```

```
      UTX  = UNGAP(IC,2)
      UTY  =-UNGAP(IC,1)
      VTS(1)   = UTX
      VTS(2)   = UTY
      VTS(3)   = -(1-BET(IC))*UTX
      VTS(4)   = -(1-BET(IC))*UTY
      VTS(5)   = -BET(IC)*UTX
      VTS(6)   = -BET(IC)*UTY
C
      DL       = ABS(SQRT((X2-X3)**2+(Y2-Y3)**2))
C
      DO 10  I=1,6
      DO 10  J=1,6
      SKNT(I,J) = VNOS(I)*VTS(J)
 10   CONTINUE

      DO 20  II=1,6
      DO 20  JJ=1,6
      SKNTT(II,JJ)= SKNT(JJ,II)
 20   CONTINUE

      DO 30  M=1,6
      DO 30  N=1,6
      SKNN(M,N) = (PENE(IC)/DL)*VNOS(M)*VNOS(N)
 30   CONTINUE
C
      DO 100  IP=1,3
      DO 200  IA=1,3

      MP=KCNODE(IC,IP)
      M1=(MP-1)*2+1
      M2=(MP-1)*2+2

      NP=KCNODE(IC,IA)
      N1=(NP-1)*2+1
      N2=(NP-1)*2+2

      J1=(IP-1)*2+1
      J2=(IP-1)*2+2

      K1=(IA-1)*2+1
      K2=(IA-1)*2+2

      DSYSK(M1,N1)= DSYSK(M1,N1)-(PP*PENE(IC)/DL)*(SKNN(J1,K1)
     *        +SKNT(J1,K1)+SKNTT(J1,K1))
      DSYSK(M1,N2)= DSYSK(M1,N2)-(PP*PENE(IC)/DL)*(SKNN(J1,K2)
     *        +SKNT(J1,K2)+SKNTT(J1,K2))
      DSYSK(M2,N1)= DSYSK(M2,N1)-(PP*PENE(IC)/DL)*(SKNN(J2,K1)
     *        +SKNT(J2,K1)+SKNTT(J2,K1))
      DSYSK(M2,N2)= DSYSK(M2,N2)-(PP*PENE(IC)/DL)*(SKNN(J2,K2)
     *        +SKNT(J2,K2)+SKNTT(J2,K2))

 200  CONTINUE
 100  CONTINUE
```

```
        ENDIF    !1

1000    CONTINUE

        RETURN
        END
C
                                              C
C-------------------------------------------------C
C                                             C
        SUBROUTINE TRACTION( SXX, SYY, SXY, KCNODE, UNGAP,TRACN,
     *           TRACT, IFC, MXPOI, MXGELE, CFORCEO,
     *           TFORCEO, ICEDG, COORD, NCE )
C
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
        DIMENSION  SIG(2,2), XNOR(2), XTAN(2), TRACT(MXGELE)
        DIMENSION  SXX(MXPOI), SYY(MXPOI), SXY(MXPOI)
        DIMENSION  UNGAP(MXGELE,2), TRACN(MXGELE), COORD(MXPOI,2)
        DIMENSION  CFORCEO(MXPOI), TFORCEO(MXPOI)
C
        INTEGER    KCNODE(MXGELE,3), ICEDG(MXGELE,2)
C
        DO  I=1,IFC
        NP=KCNODE(I,1)
        TRACN(I)=0.
        TRACT(I)=0.
        SIG(1,1)= SXX(NP)
        SIG(1,2)= SXY(NP)
        SIG(2,1)= SXY(NP)
        SIG(2,2)= SYY(NP)
        XNOR(1) = UNGAP(I,1)
        XNOR(2) = UNGAP(I,2)
        XTAN(1) = -(UNGAP(I,2))
        XTAN(2) = -(-UNGAP(I,1))
C
        DO  J=1,2
        DO  K=1,2
        TRACN(I)=TRACN(I)+XNOR(J)*SIG(J,K)*XNOR(K)
        TRACT(I)=TRACT(I)+XTAN(J)*SIG(J,K)*XNOR(K)
        ENDDO
        ENDDO
C
        ENDDO

        RETURN
        END
C
C-------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE LINESEARCH( S, UTDISP, COORD, ULSP, ITEDG, ICEDG, NCE,
     *          NTE, EULO, SXXEO, SYYEO, SXYEO, CFORCEO,
     *          TFORCEO, AUGTFO, AUGTF, NPOIN, NELEM, FMU,
     *          INTMAT, ET, INTYPE, MXPOI, MXGELE, MXELE,
     *          PP, PT, NEQ, IBC, NIBC, SYSF, NGP, BETP,
     *          NODEBC, GAPT, GAPSLO, ERR0 )
```

```
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION  UTDISP(MXPOI*2), COORD(MXPOI,2), ULSP(MXPOI*2)
      DIMENSION  XUT(MXPOI*2), XCOORD(MXPOI,2), UTOTAL(MXPOI*2)
      DIMENSION  ET(5,2), EULO(MXELE,3), EUL(MXELE,3), FT(MXPOI*2)
      DIMENSION  SXXEO(MXELE), SYYEO(MXELE), SXYEO(MXELE), GAPT(MXPOI)
      DIMENSION  SXXE(MXELE), SYYE(MXELE), SXYE(MXELE), XGAPT(MXPOI)
      DIMENSION  CFORCEO(MXPOI), TFORCEO(MXPOI), AUGTFO(MXPOI)
      DIMENSION  CFORCEN(MXPOI), AUGTF(MXPOI), XAUGTF(MXPOI)
      DIMENSION  SYSF(MXPOI*2), XSYSF(MXPOI*2), BET(MXGELE)
      DIMENSION  UNGAP(MXGELE,2), PENE(MXGELE), BETP(MXGELE)
      DIMENSION  GAPSLO(MXPOI)
C
      INTEGER  NG(MXGELE), NGP(MXGELE), KCNODE(MXGELE,3)
      INTEGER  ICEDG(MXGELE,2), ITEDG(MXGELE,2), NODEBC(MXPOI)
      INTEGER  INTYPE(MXELE), INTMAT(MXELE,3), IBC(MXPOI,2)
C
C        OUTPUT  \  S
C        INPUT   \  UTDISP

      DO LS=1,1000

      LIFC=IFC
C
      DO I=1,NEQ
       XSYSF(I) = SYSF(I)
      ENDDO
C
      DO J=1,NPOIN
      IEQ1 = (J-1)*2+1
      IEQ2 = (J-1)*2+2
      XGAPT(J) = GAPT(J)
      XAUGTF(J) = AUGTF(J)
      XUT(IEQ1) = S*UTDISP(IEQ1)
      XUT(IEQ2) = S*UTDISP(IEQ2)
      XCOORD(J,1) = COORD(J,1) + XUT(IEQ1)
      XCOORD(J,2) = COORD(J,2) + XUT(IEQ2)
      UTOTAL(IEQ1)= ULSP(IEQ1) + XUT(IEQ1)
      UTOTAL(IEQ2)= ULSP(IEQ2) + XUT(IEQ2)
      ENDDO
C
      CALL CHKTESTP( MXPOI, XCOORD, NCE, NTE, LIFC, IFC,
     *          NGP, UNGAP, KCNODE, MXGELE, ITEDG, ICEDG,
     *     NODEBC, NIBC, IBC   )
C
      DO  JI=1,IFC

              II=KCNODE(JI,1)
                     JJ=KCNODE(JI,2)
                     KK=KCNODE(JI,3)

              NG(JI)=II

      X1=XCOORD(II,1)
```

```
      X2=XCOORD(JJ,1)
      X3=XCOORD(KK,1)
      Y1=XCOORD(II,2)
      Y2=XCOORD(JJ,2)
      Y3=XCOORD(KK,2)

      !CALCULATE A PENETRATION VALUE

      PENE(JI)=UNGAP(JI,1)*(X1-X2)+UNGAP(JI,2)*(Y1-Y2)
C

            IF(JJ.EQ.KK) THEN                      !NODE TO NODE
              BET(JI) = 0.
            ELSE                                       !NODE TO EDGE
              DL   = ABS(SQRT((X3-X2)**2+(Y3-Y2)**2))
              SJK  = ((X3-X2)*(X1-X2)/DL)+((Y3-Y2)*(Y1-Y2)/DL)
              BET(JI) = SJK/DL
            ENDIF

      ENDDO
C
      CALL STRESS( NPOIN, NELEM, INTMAT, XCOORD, UTOTAL, ET, INTYPE,
     *     EULO, EUL, SXXE, SYYE, SXYE, MXPOI, MXELE, MXGELE )
C
      DO  LE=1,NELEM
      SXXE(LE)= SXXEO(LE)+SXXE(LE)
      SYYE(LE)= SYYEO(LE)+SYYE(LE)
      SXYE(LE)= SXYEO(LE)+SXYE(LE)
      ENDDO
C
      CALL FPOINT( FT, XCOORD ,INTMAT, NEQ, SXXE, SYYE, SXYE,
     *     MXPOI, MXELE, MXGELE, NELEM, ET, INTYPE )
C
      CALL UDCONFORCE( IFC, KCNODE, BET, XUT, UNGAP, CFORCEN,
     *       CFORCEO, PENE, PP, MXGELE, MXPOI, XCOORD,
     *       ITEDG, NTE, IBC )
C-----------------------------------------------------------------C
C     CHECK STATE OF CONTACT ELEMENT         C
C-----------------------------------------------------------------C
      DO  IC=1,IFC

      LI=KCNODE(IC,1)
      LJ=KCNODE(IC,2)
      LK=KCNODE(IC,3)

      X1=XCOORD(LI,1)
      X2=XCOORD(LJ,1)
      X3=XCOORD(LK,1)
      Y1=XCOORD(LI,2)
      Y2=XCOORD(LJ,2)
      Y3=XCOORD(LK,2)

      ICHK=0

      DO  J=1,LIFC
```

```
     IF(LI.EQ.NGP(J)) THEN
       BP=BETP(J)
       ICHK=ICHK+1
       GOTO  110
     ENDIF
   ENDDO

   UTX  = UNGAP(IC,2)
   UTY  = -UNGAP(IC,1)

110    CONTINUE

   IF(ICHK.EQ.0) BP=BET(IC)

   IF(LJ.EQ.LK) THEN      !!!
   XGAPT(LI)= -UTX*(X1-X2)-UTY*(Y1-Y2)
   DGAPT     = XGAPT(LI)
   ELSE
   DL          = ABS(SQRT((X2-X3)**2+(Y2-Y3)**2))
   XGAPT(LI)= GAPT(LI)-(BET(IC)-BP)*DL
   DGAPT     = XGAPT(LI)+GAPSLO(LI)
   ENDIF
C
   DGAPN  = PENE(IC)
   FAM     = CFORCEO(LI)+CFORCEN(LI)
   TNORM  = (FAM-ABS(FAM))/2.
C
   TRIAL  = TFORCEO(LI)+AUGTFO(LI)+PT*DGAPT
   FTR  = ABS(TRIAL)-FMU*ABS(TNORM)
C
              IF(FTR.LE.0.) THEN
          XAUGTF(LI)=PT*DGAPT

          ELSE
             DELSI=ABS(FTR)/PT
          SIGNT  = TRIAL/(ABS(TRIAL))
       XAUGTF(LI)= PT*DGAPT-PT*DELSI*SIGNT
       ENDIF

   ENDDO
C
   CALL GENRB( XSYSF,  UNGAP, KCNODE, IFC, NEQ, MXPOI, MXGELE,
  *     MXELE, BET, NELEM, ET, INTYPE, XCOORD ,INTMAT,
  *     NG, CFORCEO, CFORCEN, TFORCEO, XAUGTF, FT, AUGTFO)
C
   ERRORX=0.
   ERRORY=0.

   DO   N=1,NPOIN
   JFX=(N-1)*2+1
   JFY=(N-1)*2+2
   ERRORX=ERRORX+(XSYSF(JFX)*XUT(JFX))**2
   ERRORY=ERRORY+(XSYSF(JFY)*XUT(JFY))**2
    ENDDO
C
```

```
      ERR1 = SQRT(ERRORX+ERRORY)
C
      IF((ABS(ERR1).LT.0.5*ABS(ERR0)).AND.(ERR0.NE.0.)) GOTO  1000
C
      ALFA=ABS(ERR0/ERR1)
      IF(ALFA.GT.1.)  ALFA=1.
      S=ALFA
      IF(ALFA.LT.0.)THEN
        S=ALFA/2.+SQRT((ALFA/2.)**2-ALFA)
      ELSE
        S=ALFA/2.
      ENDIF
C
      ENDDO

 1000  CONTINUE

      RETURN
      END
C
C-----------------------------------------------------------------C
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสุธี โอฬารฤทธินันท์ เกิดเมื่อวันที่ 2 เดือนสิงหาคม พุทธศักราช 2520 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เมื่อปีการศึกษา 2542 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2543