

## รายการอ้างอิง

1. Brebbia,C.A., and Dominguez,J. *Boundary Elements An Introductory Course*. New York: McGraw-Hill , 1989.
2. Sokolnikoff,I.S. *Mathematical Theory of Elasticity*: 2nd ed. New York : McGraw-Hill , 1956.
3. Zielinski,A.P., and Zienkiewicz,O.C. Generalized Finite Element Analysis with T-Complete Boundary Solution Functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.21 (1985) : 509-528.
4. Jin,W.G., Cheung,Y.K., and Zienkiewicz,O.C. Application of the Trefftz Method in Plane Elasticity Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.30 (1990) : 1147-1161.
5. สมศักดิ์ เหลืองวิระเจริญ. การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของแมกซ์เวลล์และเบตตี ร่วมกับทฤษฎีฟังก์ชันที่บริบูรณ์ในโครงสร้างแผ่นพื้นบาง. *วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย* , 2540.
6. Karasudhi,P. *Foundations of Solid Mechanics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers , 1991.
7. Kreyszig,E. *Advanced Engineering Mathematics*. 7th ed. New York : John Wiley & Sons Inc., 1993.
8. Little,R.W. *Elasticity*. New Jersey : Prentice-Hall Inc., 1973.
9. Fung,Y.C. *Foundations of Solid Mechanics*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall , 1965.
10. Timoshenko,S., and Goodier,J.N. *Theory of Elasticity*. 2nd ed. New York : McGraw-Hill , 1934.
11. Gradshteyn,I.S.,and Ryzhik,I.M. *Table of Integrals, Series, and Products*. 4th ed. New York : Academic Press , 1965.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ตารางและรูปประกอบ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 1. ค่าความเค้น และการกระจัด ของแต่ละพจน์ในชุดฟังก์ชันความเค้นของแอร์[6] ตามสมการ (2.2.20)

| $\phi$                                                               | $\sigma_{rr}(r, \theta)$     | $\sigma_{r\theta}(r, \theta)$ | $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$ | $2\mu u_r(r, \theta)$             | $2\mu u_\theta(r, \theta)$        |
|----------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1                                                                    | 0                            | 0                             | 0                                  | 0                                 | 0                                 |
| $r^2$                                                                | 2                            | 0                             | 2                                  | $(\kappa-1)r$                     | 0                                 |
| $\ln r$                                                              | $1/r^2$                      | 0                             | $-1/r^2$                           | $-1/r$                            | 0                                 |
| $\theta$                                                             | 0                            | $1/r^2$                       | 0                                  | 0                                 | $-1/r$                            |
| $(\kappa-1)r \ln r \cos \theta$<br>$-(\kappa+1)r \theta \sin \theta$ | $-(\kappa+3)\cos \theta / r$ | $(\kappa-1)\sin \theta / r$   | $(\kappa-1)\cos \theta / r$        | $-(2\kappa \ln r - 1)\cos \theta$ | $(2\kappa \ln r + 1)\sin \theta$  |
| $(\kappa-1)r \ln r \sin \theta$<br>$+(\kappa+1)r \theta \cos \theta$ | $-(\kappa+3)\sin \theta / r$ | $-(\kappa-1)\cos \theta / r$  | $(\kappa-1)\sin \theta / r$        | $-(2\kappa \ln r - 1)\sin \theta$ | $-(2\kappa \ln r + 1)\cos \theta$ |

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 1. (ต่อ) แสดงค่าความเค้น และการกระจัด ของแต่ละพจน์ในชุดฟังก์ชันความเค้นของไอรี[6] ตามสมการ (2.2.20)

| $\phi$                                          | $\sigma_{rr}(r, \theta)$          | $\sigma_{r\theta}(r, \theta)$   | $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$ | $2\mu u_r(r, \theta)$                | $2\mu u_\theta(r, \theta)$            |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| $r^j \cos(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$     | $-j(j-1)r^{j-2} \cos(j\theta)$    | $j(j-1)r^{j-2} \sin(j\theta)$   | $j(j-1)r^{j-2} \cos(j\theta)$      | $-jr^{j-1} \cos(j\theta)$            | $jr^{j-1} \sin(j\theta)$              |
| $r^{-j} \cos(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$  | $-j(j+1)r^{-j-2} \cos(j\theta)$   | $-j(j+1)r^{-j-2} \sin(j\theta)$ | $j(j+1)r^{-j-2} \cos(j\theta)$     | $jr^{-j-1} \cos(j\theta)$            | $jr^{-j-1} \sin(j\theta)$             |
| $r^{2+j} \cos(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$ | $-(j+1)(j-2)r^j \cos(j\theta)$    | $j(j+1)r^j \sin(j\theta)$       | $(j+2)(j+1)r^j \cos(j\theta)$      | $-(j+1-\kappa)r^{j+1} \cos(j\theta)$ | $(j+1+\kappa)r^{j+1} \sin(j\theta)$   |
| $r^{2-j} \cos(j\theta)$<br>$j = 2, 3, 4, \dots$ | $-(j+2)(j-1)r^{-j} \cos(j\theta)$ | $-j(j-1)r^{-j} \sin(j\theta)$   | $(j-1)(j-2)r^{-j} \cos(j\theta)$   | $(j-1+\kappa)r^{-j+1} \cos(j\theta)$ | $(j-1-\kappa)r^{-j+1} \sin(j\theta)$  |
| $r^j \sin(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$     | $-j(j-1)r^{j-2} \sin(j\theta)$    | $-j(j-1)r^{j-2} \cos(j\theta)$  | $j(j-1)r^{j-2} \sin(j\theta)$      | $-jr^{j-1} \sin(j\theta)$            | $-jr^{j-1} \cos(j\theta)$             |
| $r^{-j} \sin(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$  | $-j(j+1)r^{-j-2} \sin(j\theta)$   | $j(j+1)r^{-j-2} \cos(j\theta)$  | $j(j+1)r^{-j-2} \sin(j\theta)$     | $jr^{-j-1} \sin(j\theta)$            | $-jr^{-j-1} \cos(j\theta)$            |
| $r^{2+j} \sin(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$ | $-(j+1)(j-2)r^j \sin(j\theta)$    | $-j(j+1)r^j \cos(j\theta)$      | $(j+2)(j+1)r^j \sin(j\theta)$      | $-(j+1-\kappa)r^{j+1} \sin(j\theta)$ | $-(j+1+\kappa)r^{j+1} \cos(j\theta)$  |
| $r^{2-j} \sin(j\theta)$<br>$j = 2, 3, 4, \dots$ | $-(j+2)(j-1)r^{-j} \sin(j\theta)$ | $j(j-1)r^{-j} \cos(j\theta)$    | $(j-1)(j-2)r^{-j} \sin(j\theta)$   | $(j-1+\kappa)r^{-j+1} \sin(j\theta)$ | $-(j-1-\kappa)r^{-j+1} \cos(j\theta)$ |

ตารางที่ 2. ความเค้น และการกระจัด ในระบบพิกัด  $(r, \theta)$  ที่สอดคล้องกับชุดฟังก์ชันความเค้นของไอริจากสมการ(2.2.20)

| $\phi(r, \theta)$                                                        | $\sigma_{rr}(r, \theta; \alpha)$                                                                     | $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta; \alpha)$                                      | $\sigma_{r\theta}(r, \theta; \alpha)$                                                                | $2\mu u_r(r, \theta; \alpha)$                              | $2\mu u_\theta(r, \theta; \alpha)$                         |
|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1                                                                        | 0                                                                                                    | 0                                                                               | 0                                                                                                    | 0                                                          | 0                                                          |
| $r^2$                                                                    | 2                                                                                                    | 0                                                                               | 2                                                                                                    | $(\kappa - 1)r \cos(\theta - \alpha)$                      | $(\kappa - 1)r \sin(\theta - \alpha)$                      |
| $\ln r$                                                                  | $\frac{1}{r^2} \cos 2(\theta - \alpha)$                                                              | $\frac{1}{r^2} \sin 2(\theta - \alpha)$                                         | $-\frac{1}{r^2} \cos 2(\theta - \alpha)$                                                             | $-\frac{1}{r} \cos(\theta - \alpha)$                       | $-\frac{1}{r} \sin(\theta - \alpha)$                       |
| $\theta$                                                                 | $-\frac{1}{r^2} \sin 2(\theta - \alpha)$                                                             | $\frac{1}{r^2} \cos 2(\theta - \alpha)$                                         | $\frac{1}{r^2} \sin 2(\theta - \alpha)$                                                              | $\frac{1}{r} \sin(\theta - \alpha)$                        | $-\frac{1}{r} \cos(\theta - \alpha)$                       |
| $(\kappa - 1)r \ln r \cos \theta$<br>$-(\kappa + 1)r \theta \sin \theta$ | $-\frac{1}{r} [ 2 \cos \theta$<br>$+ \kappa \cos(\theta - 2\alpha)$<br>$+ \cos(3\theta - 2\alpha) ]$ | $-\frac{1}{r} [ \kappa \sin(\theta - 2\alpha)$<br>$+ \sin(3\theta - 2\alpha) ]$ | $-\frac{1}{r} [ 2 \cos \theta$<br>$- \kappa \cos(\theta - 2\alpha)$<br>$- \cos(3\theta - 2\alpha) ]$ | $-2\kappa \cos \alpha \ln r$<br>$+ \cos(2\theta - \alpha)$ | $2\kappa \sin \alpha \ln r$<br>$+ \sin(2\theta - \alpha)$  |
| $(\kappa - 1)r \ln r \sin \theta$<br>$+(\kappa + 1)r \theta \cos \theta$ | $-\frac{1}{r} [ 2 \sin \theta$<br>$- \kappa \sin(\theta - 2\alpha)$<br>$+ \sin(3\theta - 2\alpha) ]$ | $-\frac{1}{r} [ \kappa \cos(\theta - 2\alpha)$<br>$- \cos(3\theta - 2\alpha) ]$ | $-\frac{1}{r} [ 2 \sin \theta$<br>$+ \kappa \sin(\theta - 2\alpha)$<br>$- \sin(3\theta - 2\alpha) ]$ | $-2\kappa \sin \alpha \ln r$<br>$+ \sin(2\theta - \alpha)$ | $-2\kappa \cos \alpha \ln r$<br>$- \cos(2\theta - \alpha)$ |

ตารางที่ 2.(ต่อ) ความเค้น และการกระจัด ในระบบพิกัด  $(r, t)$  ที่สอดคล้องกับชุดฟังก์ชันความเค้นของไอริจากสมการ(2.2.20)

| $\phi(r, \theta)$                               | $\sigma_{rr}(r, \theta; \alpha)$                                        | $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta; \alpha)$                | $\sigma_{r\theta}(r, \theta; \alpha)$                                   | $2\mu u_r(r, \theta; \alpha)$                                                                          | $2\mu u_\theta(r, \theta; \alpha)$                                                                     |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r^j \cos(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$     | $-j(j-1)r^{j-2} \times$<br>$\cos[(j-2)\theta + 2\alpha]$                | $j(j-1)r^{j-2} \times$<br>$\sin[(j-2)\theta + 2\alpha]$   | $j(j-1)r^{j-2} \times$<br>$\cos[(j-2)\theta + 2\alpha]$                 | $-jr^{j-1} \cos[(j-1)\theta + \alpha]$                                                                 | $jr^{j-1} \sin[(j-1)\theta + \alpha]$                                                                  |
| $r^{-j} \cos(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$  | $-j(j+1)r^{-j-2} \times$<br>$\cos[(j+2)\theta - 2\alpha]$               | $-j(j+1)r^{-j-2} \times$<br>$\sin[(j+2)\theta - 2\alpha]$ | $j(j+1)r^{-j-2} \times$<br>$\cos[(j+2)\theta - 2\alpha]$                | $jr^{-j-1} \cos[(j+1)\theta - \alpha]$                                                                 | $jr^{-j-1} \sin[(j+1)\theta - \alpha]$                                                                 |
| $r^{j+2} \cos(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$ | $(j+1)r^j \{ 2\cos(j\theta)$<br>$-j \cos[(j-2)\theta + 2\alpha] \}$     | $j(j+1)r^j \times$<br>$\sin[(j-2)\theta + 2\alpha]$       | $(j+1)r^j \{ 2\cos(j\theta)$<br>$+j \cos[(j-2)\theta + 2\alpha] \}$     | $-r^{j+1} \times$<br>$\{ (j+1) \cos[(j-1)\theta + \alpha]$<br>$- \kappa \cos[(j+1)\theta - \alpha] \}$ | $r^{j+1} \times$<br>$\{ (j+1) \sin[(j-1)\theta + \alpha]$<br>$+ \kappa \sin[(j+1)\theta - \alpha] \}$  |
| $r^{-j+2} \cos(j\theta)$<br>$j = 2, 3, \dots$   | $-(j-1)r^{-j} \{ 2\cos(j\theta)$<br>$+j \cos[(j+2)\theta - 2\alpha] \}$ | $-j(j-1)r^{-j} \times$<br>$\sin[(j+2)\theta - 2\alpha]$   | $-(j-1)r^{-j} \{ 2\cos(j\theta)$<br>$-j \cos[(j+2)\theta - 2\alpha] \}$ | $r^{-j+1} \times$<br>$\{ (j-1) \cos[(j+1)\theta - \alpha]$<br>$+ \kappa \cos[(j-1)\theta + \alpha] \}$ | $r^{-j+1} \times$<br>$\{ (j-1) \sin[(j+1)\theta - \alpha]$<br>$- \kappa \sin[(j-1)\theta + \alpha] \}$ |

สถาบันวิจัยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 2.(ต่อ) ความเค้น และการกระจัด ในระบบพิกัด  $(r, \theta)$  ที่สอดคล้องกับชุดฟังก์ชันความเค้นของไอริจากสมการ(2.2.20)

| $\phi(r, \theta)$                               | $\sigma_{rr}(r, \theta; \alpha)$                                                                   | $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta; \alpha)$               | $\sigma_{r\theta}(r, \theta; \alpha)$                                                              | $2\mu u_r(r, \theta; \alpha)$                                                                                                    | $2\mu u_\theta(r, \theta; \alpha)$                                                                                                |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r^j \sin(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$     | $-j(j-1)r^{j-2} \times$<br>$\sin[(j-2)\theta + 2\alpha]$                                           | $-j(j-1)r^{j-2} \times$<br>$\cos[(j-2)\theta + 2\alpha]$ | $j(j-1)r^{j-2} \times$<br>$\sin[(j-2)\theta + 2\alpha]$                                            | $-jr^{j-1} \sin[(j-1)\theta + \alpha]$                                                                                           | $-jr^{j-1} \cos[(j-1)\theta + \alpha]$                                                                                            |
| $r^{-j} \sin(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$  | $-j(j+1)r^{-j-2} \times$<br>$\sin[(j+2)\theta - 2\alpha]$                                          | $j(j+1)r^{-j-2} \times$<br>$\cos[(j+2)\theta - 2\alpha]$ | $j(j+1)r^{-j-2} \times$<br>$\sin[(j+2)\theta - 2\alpha]$                                           | $jr^{-j-1} \sin[(j+1)\theta - \alpha]$                                                                                           | $-jr^{-j-1} \cos[(j+1)\theta - \alpha]$                                                                                           |
| $r^{j+2} \sin(j\theta)$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$ | $(j+1)r^j \left\{ 2\sin(j\theta) \right.$<br>$\left. - j \sin[(j-2)\theta + 2\alpha] \right\}$     | $-j(j+1)r^j \times$<br>$\cos[(j-2)\theta + 2\alpha]$     | $(j+1)r^j \left\{ 2\sin(j\theta) \right.$<br>$\left. + j \sin[(j-2)\theta + 2\alpha] \right\}$     | $-r^{j+1} \times$<br>$\left\{ (j+1) \sin[(j-1)\theta + \alpha] \right.$<br>$\left. - \kappa \sin[(j+1)\theta - \alpha] \right\}$ | $-r^{j+1} \times$<br>$\left\{ (j+1) \cos[(j-1)\theta + \alpha] \right.$<br>$\left. + \kappa \cos[(j+1)\theta - \alpha] \right\}$  |
| $r^{-j+2} \sin(j\theta)$<br>$j = 2, 3, \dots$   | $-(j-1)r^{-j} \left\{ 2\sin(j\theta) \right.$<br>$\left. + j \sin[(j+2)\theta - 2\alpha] \right\}$ | $j(j-1)r^{-j} \times$<br>$\cos[(j+2)\theta - 2\alpha]$   | $-(j-1)r^{-j} \left\{ 2\sin(j\theta) \right.$<br>$\left. - j \sin[(j+2)\theta - 2\alpha] \right\}$ | $r^{-j+1} \times$<br>$\left\{ (j-1) \sin[(j+1)\theta - \alpha] \right.$<br>$\left. + \kappa \sin[(j-1)\theta + \alpha] \right\}$ | $-r^{-j+1} \times$<br>$\left\{ (j-1) \cos[(j+1)\theta - \alpha] \right.$<br>$\left. - \kappa \cos[(j-1)\theta + \alpha] \right\}$ |

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3. ค่าสัมประสิทธิ์  $A_j$  และ  $B_j$  สำหรับตัวอย่างที่ 5

| $j$ | $A_j$        |              |              | $B_j$        |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|     | $N=8$        | $N=16$       | $N=24$       | $N=8$        | $N=16$       | $N=24$       |
| 0   |              |              |              | -0.222143619 | -0.222891198 | -0.222910191 |
| 1   |              |              |              | 0.099252716  | 0.099826032  | 0.099912407  |
| 2   | 0.041629491  | 0.045789416  | 0.045639325  | 0.102116506  | 0.098091612  | 0.098310495  |
| 3   | -0.127286224 | -0.120408376 | -0.120642869 | 0.065037190  | 0.059333705  | 0.059633453  |
| 4   | -0.038567408 | -0.034279642 | -0.034464549 | 0.015280505  | 0.011670627  | 0.011883417  |
| 5   | 0.002594375  | 0.007025998  | 0.005940995  | -0.005262857 | -0.007867372 | -0.006802340 |
| 6   | 0.014573993  | 0.017888801  | 0.016616231  | -0.007804184 | -0.010973312 | -0.009796749 |
| 7   | 0.011812025  | 0.012464381  | 0.011461296  | -0.004874775 | -0.006425348 | -0.005539013 |
| 8   | 0.005851155  | 0.004763575  | 0.004436257  | -0.002338242 | -0.002306962 | -0.002047323 |
| 9   |              | 0.000538046  | -0.000659995 |              | -0.000458900 | 0.000680054  |
| 10  |              | -0.001379425 | -0.001685787 |              | 0.000460935  | 0.000862801  |
| 11  |              | -0.001542878 | -0.001094790 |              | 0.000651767  | 0.000388781  |
| 12  |              | -0.001136126 | -0.000270330 |              | 0.000579453  | -0.000099508 |
| 13  |              | -0.000626994 | -0.000456156 |              | 0.000288623  | 0.000356102  |
| 14  |              | -0.000451334 | 0.000333382  |              | 0.000232566  | -0.000239017 |
| 15  |              | -0.000236600 | 0.000698886  |              | 0.000132385  | -0.000547074 |
| 16  |              | -0.000049390 | 0.000668647  |              | 0.000039803  | -0.000549236 |
| 17  |              |              | 0.000240033  |              |              | -0.000116359 |
| 18  |              |              | 0.000235469  |              |              | -0.000174127 |
| 19  |              |              | 0.000160678  |              |              | -0.000158332 |
| 20  |              |              | 0.000056520  |              |              | -0.000092665 |
| 21  |              |              | 0.000024870  |              |              | -0.000014615 |
| 22  |              |              | -0.000003962 |              |              | -0.000005250 |
| 23  |              |              | -0.000018163 |              |              | 0.000000881  |
| 24  |              |              | -0.000020501 |              |              | 0.000004421  |



ตารางที่ 4. ค่าสัมประสิทธิ์  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$  และ  $E_j$  สำหรับตัวอย่างที่ 6

| $A_j$       |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| $N=8$       | $N=16$      | $N=24$      |
| 0.059888114 | 0.062585137 | 0.063744583 |

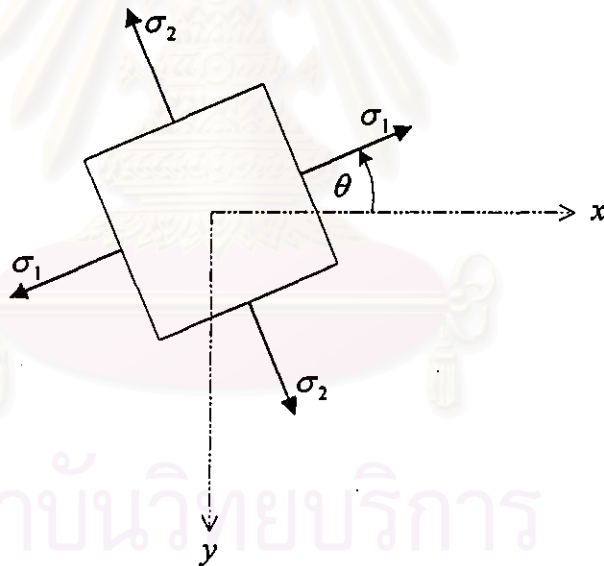
| $j$ | $B_j$        |              |              | $C_j$        |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|     | $N=8$        | $N=16$       | $N=24$       | $N=8$        | $N=16$       | $N=24$       |
| 0   |              |              |              | -0.249822074 | -0.251626168 | -0.252137282 |
| 1   |              |              |              | 0.103134894  | 0.104019675  | 0.104358886  |
| 2   | 0.073029088  | 0.080037843  | 0.079957497  | 0.088254124  | 0.082497701  | 0.082627647  |
| 3   | -0.137382944 | -0.131992858 | -0.132600052 | 0.070576571  | 0.066128145  | 0.066665955  |
| 4   | -0.034279660 | -0.028865777 | -0.028841959 | 0.011824125  | 0.007300131  | 0.007356654  |
| 5   | 0.002861236  | 0.007084260  | 0.005951314  | -0.005379600 | -0.007847184 | -0.006740938 |
| 6   | 0.015169572  | 0.019430009  | 0.018170862  | -0.008385721 | -0.012388173 | -0.011227802 |
| 7   | 0.011270198  | 0.011029850  | 0.009956231  | -0.004435227 | -0.005184189 | -0.004232271 |
| 8   | 0.006028967  | 0.005337248  | 0.005068254  | -0.002557609 | -0.002903768 | -0.002697467 |
| 9   |              | 0.000472715  | -0.000751405 |              | -0.000410724 | 0.000751340  |
| 10  |              | -0.001293222 | -0.001584103 |              | 0.000337192  | 0.000724901  |
| 11  |              | -0.001634732 | -0.001221514 |              | 0.000776962  | 0.000546628  |
| 12  |              | -0.001120305 | -0.000231725 |              | 0.000539387  | -0.000161243 |
| 13  |              | -0.000627987 | -0.000460955 |              | 0.000291419  | 0.000363574  |
| 14  |              | -0.000454162 | 0.000333238  |              | 0.000229256  | -0.000245727 |
| 15  |              | -0.000233944 | 0.000692874  |              | 0.000135928  | -0.000534244 |
| 16  |              | -0.000050044 | 0.000672727  |              | 0.000038728  | -0.000555557 |
| 17  |              |              | 0.000240397  |              |              | -0.000116289 |
| 18  |              |              | 0.000235066  |              |              | -0.000174129 |
| 19  |              |              | 0.000160476  |              |              | -0.000157504 |
| 20  |              |              | 0.000056566  |              |              | -0.000093064 |
| 21  |              |              | 0.000024841  |              |              | -0.000014605 |
| 22  |              |              | -0.000003966 |              |              | -0.000005244 |
| 23  |              |              | -0.000018128 |              |              | 0.000000897  |
| 24  |              |              | -0.000020531 |              |              | 0.000004421  |

ตารางที่ 4.(ต่อ) ค่าสัมประสิทธิ์  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$  และ  $E_j$  สำหรับตัวอย่างที่ 6

| $j$ | $D_j$        |              |              | $E_j$        |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|     | $N=8$        | $N=16$       | $N=24$       | $N=8$        | $N=16$       | $N=24$       |
| 0   |              |              |              |              |              |              |
| 1   | 0.002808247  | 0.003139046  | 0.003341982  |              |              |              |
| 2   | 0.000847049  | 0.000969470  | 0.001016643  | -0.017255726 | -0.018681382 | -0.019014938 |
| 3   | -0.000364336 | -0.000427293 | -0.000467362 | 0.004850931  | 0.005254463  | 0.005530897  |
| 4   | 0.000063003  | 0.000091342  | 0.000107420  | -0.000500380 | -0.000699154 | -0.000804743 |
| 5   | -0.000002128 | -5.02542E-06 | -7.17981E-06 | 0.000009881  | 0.000027988  | 0.000042057  |
| 6   | -0.000001524 | -2.90155E-06 | -3.70105E-06 | 0.000016595  | 0.000028115  | 0.000034007  |
| 7   | 0.000000694  | 1.54998E-06  | 2.17903E-06  | -6.53262E-06 | -1.31050E-05 | -1.75978E-05 |
| 8   | -0.000000090 | -3.48908E-07 | -5.86599E-07 | 4.04258E-07  | 2.15625E-06  | 3.79003E-06  |
| 9   |              | 9.12472E-09  | 3.31448E-08  |              | 9.40202E-09  | -1.45438E-07 |
| 10  |              | 1.17940E-08  | 2.34044E-08  |              | -1.02222E-07 | -1.91659E-07 |
| 11  |              | -5.21197E-09 | -1.29899E-08 |              | 3.63661E-08  | 9.27275E-08  |
| 12  |              | 6.73663E-10  | 3.14767E-09  |              | 1.29411E-10  | -1.61813E-08 |
| 13  |              | 4.40076E-11  | -6.36154E-11 |              | -7.88783E-10 | -5.10508E-10 |
| 14  |              | -2.29642E-11 | -1.24864E-10 |              | 1.67218E-10  | 9.36859E-10  |
| 15  |              | 3.35317E-12  | 5.53350E-11  |              | 2.30276E-11  | -3.02989E-10 |
| 16  |              | 3.11493E-12  | -7.37865E-12 |              | -5.43557E-11 | -2.35214E-11 |
| 17  |              |              | -8.35149E-13 |              |              | 1.40664E-11  |
| 18  |              |              | 3.57706E-13  |              |              | -1.95729E-12 |
| 19  |              |              | -3.94731E-14 |              |              | -8.57216E-13 |
| 20  |              |              | -5.91923E-14 |              |              | 1.06499E-12  |
| 21  |              |              | 6.53422E-15  |              |              | -8.28886E-14 |
| 22  |              |              | 1.19849E-16  |              |              | -6.04128E-15 |
| 23  |              |              | -7.48252E-16 |              |              | 1.11438E-14  |
| 24  |              |              | 4.76933E-16  |              |              | -6.12644E-15 |

ตารางที่ 5. ความเค้นหลัก (principal stress) ที่มุมของเปิดของคานสำหรับตัวอย่างที่ 6.

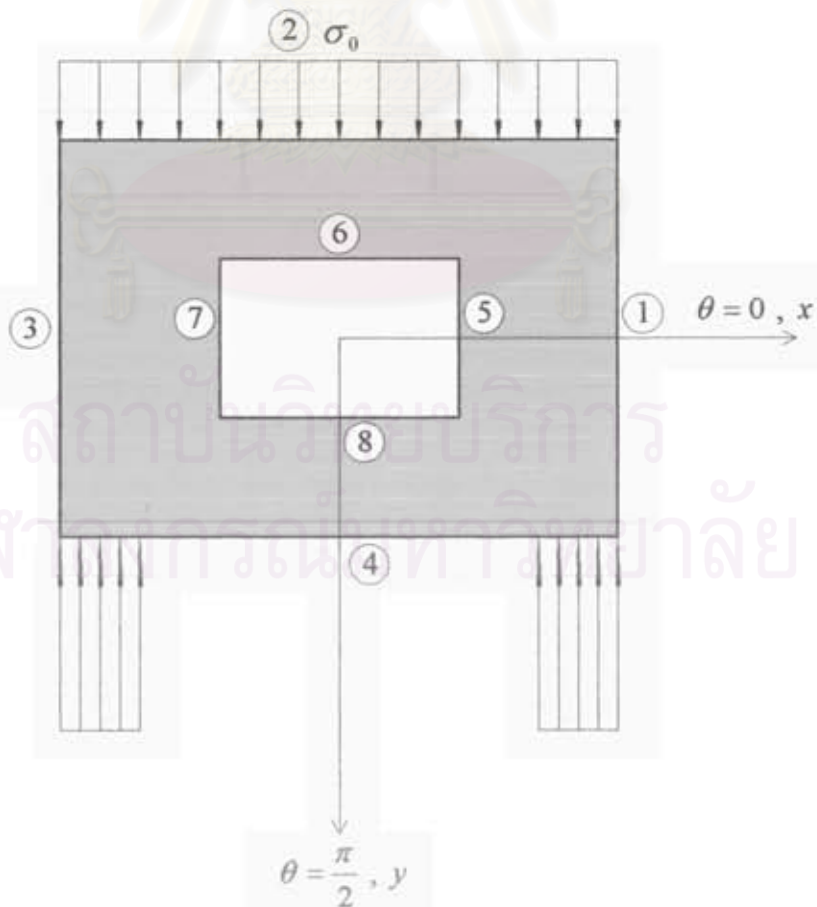
|        | พิกัด (0.3,0.3) |            |               | พิกัด (0.3,-0.3) |            |              |
|--------|-----------------|------------|---------------|------------------|------------|--------------|
|        | $\sigma_1$      | $\sigma_2$ | $\theta$      | $\sigma_1$       | $\sigma_2$ | $\theta$     |
| $N=8$  | -0.0833         | -0.5945    | $13.04^\circ$ | 0.6411           | -2.1973    | $8.03^\circ$ |
| $N=16$ | -0.1316         | -0.5485    | $11.75^\circ$ | 0.6288           | -2.2926    | $7.92^\circ$ |
| $N=24$ | -0.1361         | -0.5485    | $11.69^\circ$ | 0.6079           | -2.3455    | $7.72^\circ$ |
| FEM.   | -0.1388         | -0.5512    | $11.42^\circ$ | 0.5450           | -2.4150    | $7.44^\circ$ |



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 6. หน่วยแรงลัพท์ในแต่ละขอบของโดเมนในตัวอย่างที่ 6

| แรงลัพท์ในแนวแกน y |              |              |              |             |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|-------------|
| ด้าน               | $N=8$        | $N=16$       | $N=24$       | คำตอบแม่นยำ |
| 1                  | -0.007958707 | 0.018984494  | -0.004014908 | 0           |
| 2                  | 2.054958001  | 2.008892029  | 1.993391655  | 2           |
| 3                  | -0.007958707 | 0.018984494  | -0.004014908 | 0           |
| 4                  | -2.039040586 | -2.046861017 | -1.985361839 | -2          |
| 5                  | 0.079565552  | 0.062548547  | 0.054819073  | 0           |
| 6                  | -0.174277172 | -0.144480299 | -0.127451371 | 0           |
| 7                  | 0.079565552  | 0.062548547  | 0.054819073  | 0           |
| 8                  | 0.015146067  | 0.019383206  | 0.017813224  | 0           |
| ผลรวม              | 4.05058E-15  | 1.91513E-15  | -8.31973E-15 | 0           |



ตารางที่ 7. ค่าสัมประสิทธิ์  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$  และ  $E_j$  สำหรับตัวอย่างที่ 7

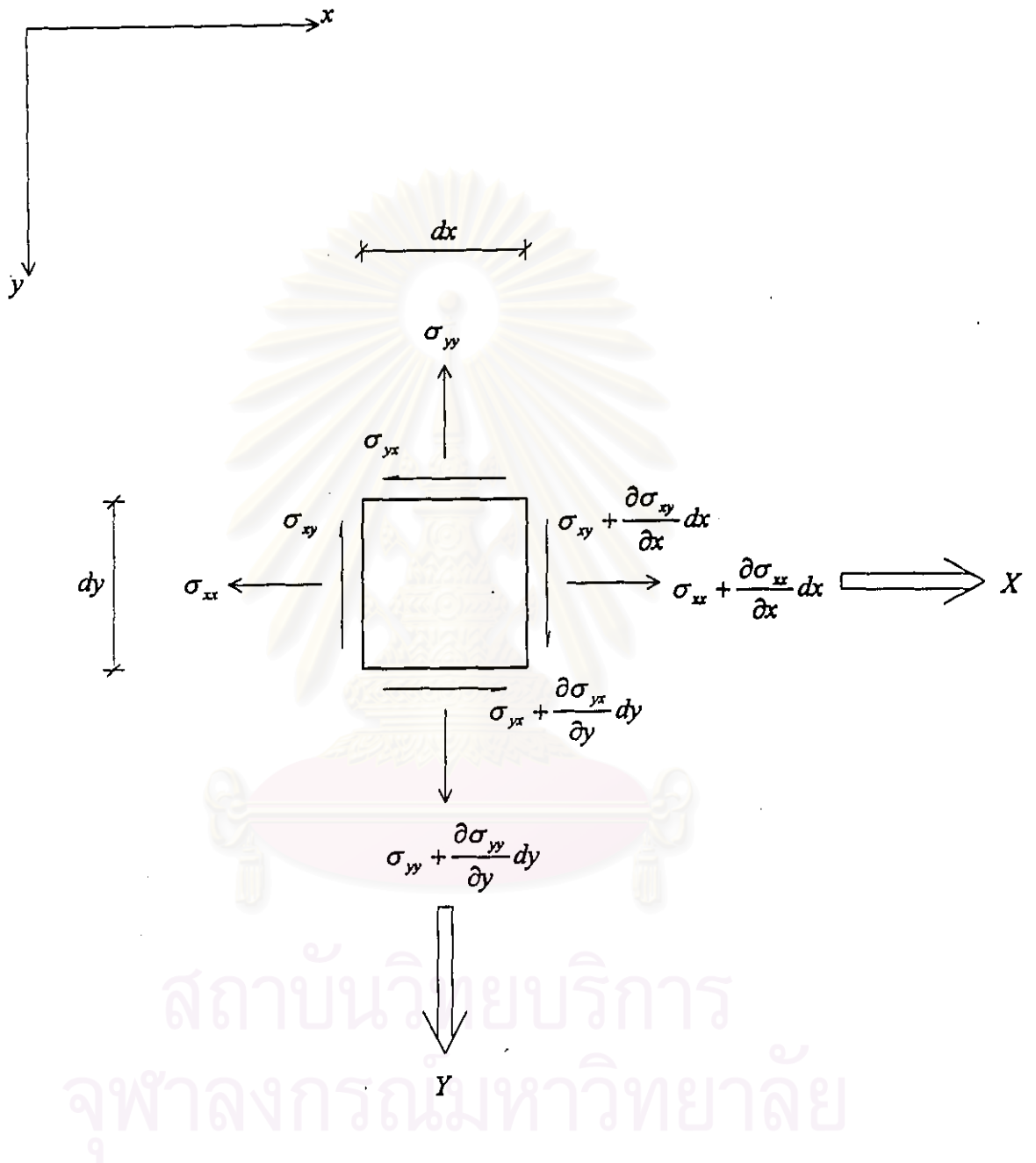
| $A_j$        |              |              |
|--------------|--------------|--------------|
| $N=12$       | $N=16$       | $N=20$       |
| -0.148961731 | -0.149030943 | -0.148944827 |

| $j$ | $B_j$        |              |              | $C_j$        |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|     | $N=12$       | $N=16$       | $N=20$       | $N=12$       | $N=16$       | $N=20$       |
| 0   |              |              |              | 0.396921902  | 0.396766076  | 0.396712198  |
| 2   | -0.297495567 | -0.298917024 | -0.300257419 | -0.051184212 | -0.049980713 | -0.048610798 |
| 4   | -0.053792010 | -0.051560769 | -0.048458790 | 0.026028584  | 0.024556449  | 0.021992449  |
| 6   | 0.001226895  | -0.000247229 | -0.003184654 | -0.003811484 | -0.002935396 | -0.000735298 |
| 8   | 0.000415138  | 0.000868221  | 0.002196584  | 0.000443207  | 0.000150795  | -0.000935303 |
| 10  | -0.000148573 | -0.000218498 | -0.000518403 | -0.000017906 | 0.000041798  | 0.000382082  |
| 12  | 0.000005041  | 0.000004228  | 0.000016054  | 0.000001360  | -0.000005159 | -0.000074147 |
| 14  |              | 0.000001624  | 0.000012774  |              | 0.000000266  | 0.000009082  |
| 16  |              | -0.000000249 | -0.000003327 |              | 0.000000026  | -0.000000590 |
| 18  |              |              | 0.000000349  |              |              | 0.000000014  |
| 20  |              |              | -0.000000016 |              |              | 0.000000001  |

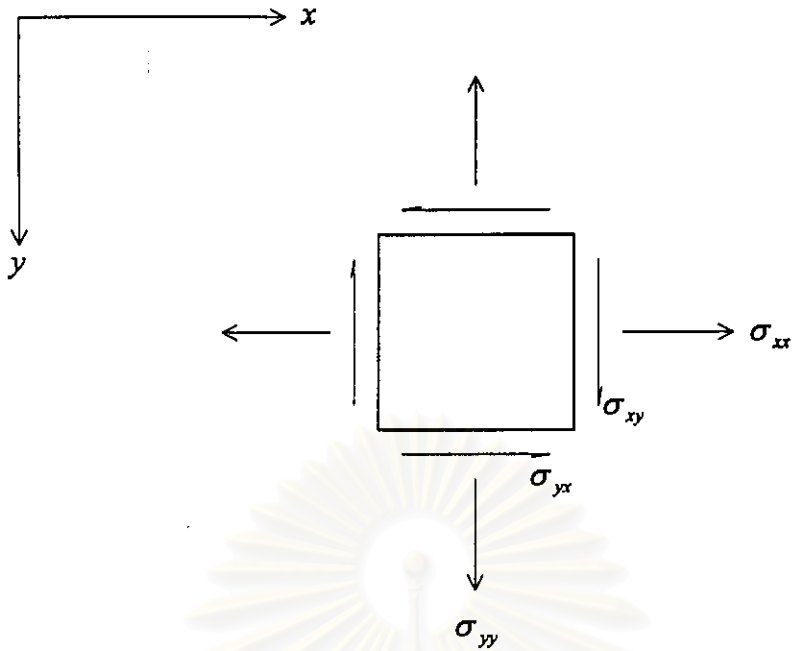
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 7.(ต่อ) ค่าสัมประสิทธิ์  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$  และ  $E_j$  สำหรับตัวอย่างที่ 7

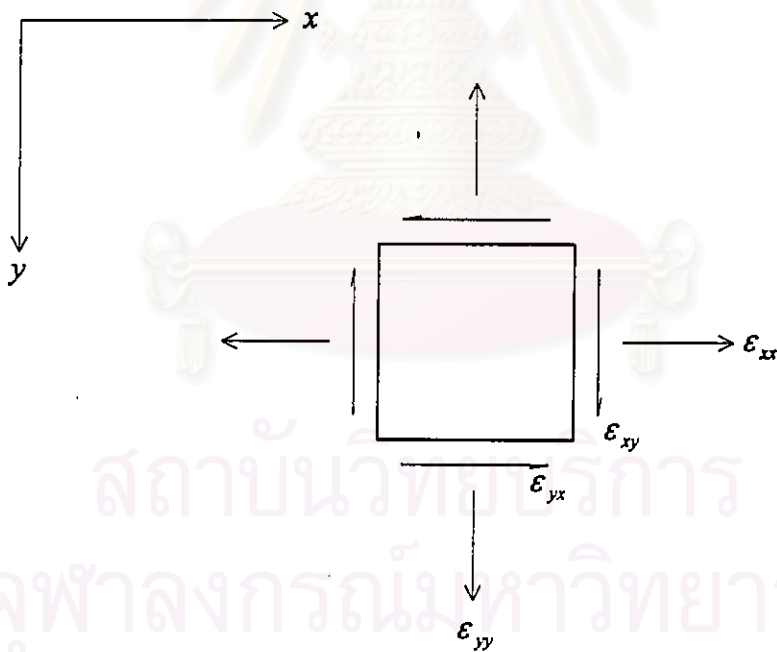
| $j$ | $D_j$        |              |              | $E_j$        |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|     | $N=12$       | $N=16$       | $N=20$       | $N=12$       | $N=16$       | $N=20$       |
| 0   |              |              |              |              |              |              |
| 1   | 0.004147640  | 0.004147935  | 0.004148484  |              |              |              |
| 2   | -0.027641672 | -0.027672181 | -0.027726261 | 0.227387771  | 0.227645389  | 0.228095117  |
| 3   | -0.002553548 | -0.002588360 | -0.002607100 | 0.015759737  | 0.015970013  | 0.016083411  |
| 4   | 0.000267884  | 0.000265874  | 0.000277736  | -0.001441461 | -0.001430653 | -0.001494009 |
| 5   | -4.22672E-05 | -4.11625E-05 | -4.06554E-05 | 0.000212997  | 0.000207474  | 0.000204931  |
| 6   | -7.17067E-06 | -7.94516E-06 | -9.67791E-06 | 0.000034886  | 0.000038606  | 0.000046925  |
| 7   | -1.30366E-06 | -1.53878E-06 | -1.63654E-06 | 6.17812E-06  | 7.27570E-06  | 7.73203E-06  |
| 8   | 1.79222E-07  | 1.62954E-07  | 2.22485E-07  | -8.40800E-07 | -7.66421E-07 | -1.03859E-06 |
| 9   | -1.03642E-07 | -1.05914E-07 | -1.07905E-07 | 4.75532E-07  | 4.85749E-07  | 4.94715E-07  |
| 10  | 5.27585E-08  | 5.19461E-08  | 4.91817E-08  | -2.38280E-07 | -2.34668E-07 | -2.22380E-07 |
| 11  | -2.90941E-08 | -2.93135E-08 | -2.95991E-08 | 1.29794E-07  | 1.30759E-07  | 1.32016E-07  |
| 12  | 1.57436E-08  | 1.57426E-08  | 1.57580E-08  | -6.95040E-08 | -6.94991E-08 | -6.95664E-08 |
| 13  |              | -8.47029E-09 | -8.46983E-09 |              | 3.70730E-08  | 3.70711E-08  |
| 14  |              | 4.53402E-09  | 4.53766E-09  |              | -1.97012E-08 | -1.97169E-08 |
| 15  |              | -2.41654E-09 | -2.41796E-09 |              | 1.04355E-08  | 1.04416E-08  |
| 16  |              | 1.28277E-09  | 1.28351E-09  |              | -5.51000E-09 | -5.51316E-09 |
| 17  |              |              | -6.78941E-10 |              |              | 2.90277E-09  |
| 18  |              |              | 3.58024E-10  |              |              | -1.52447E-09 |
| 19  |              |              | -1.88274E-10 |              |              | 7.98774E-10  |
| 20  |              |              | 9.87620E-11  |              |              | -4.17658E-10 |



รูปที่ 1. สภาพสมดุลของชิ้นส่วนน้อยยิ่ง ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน



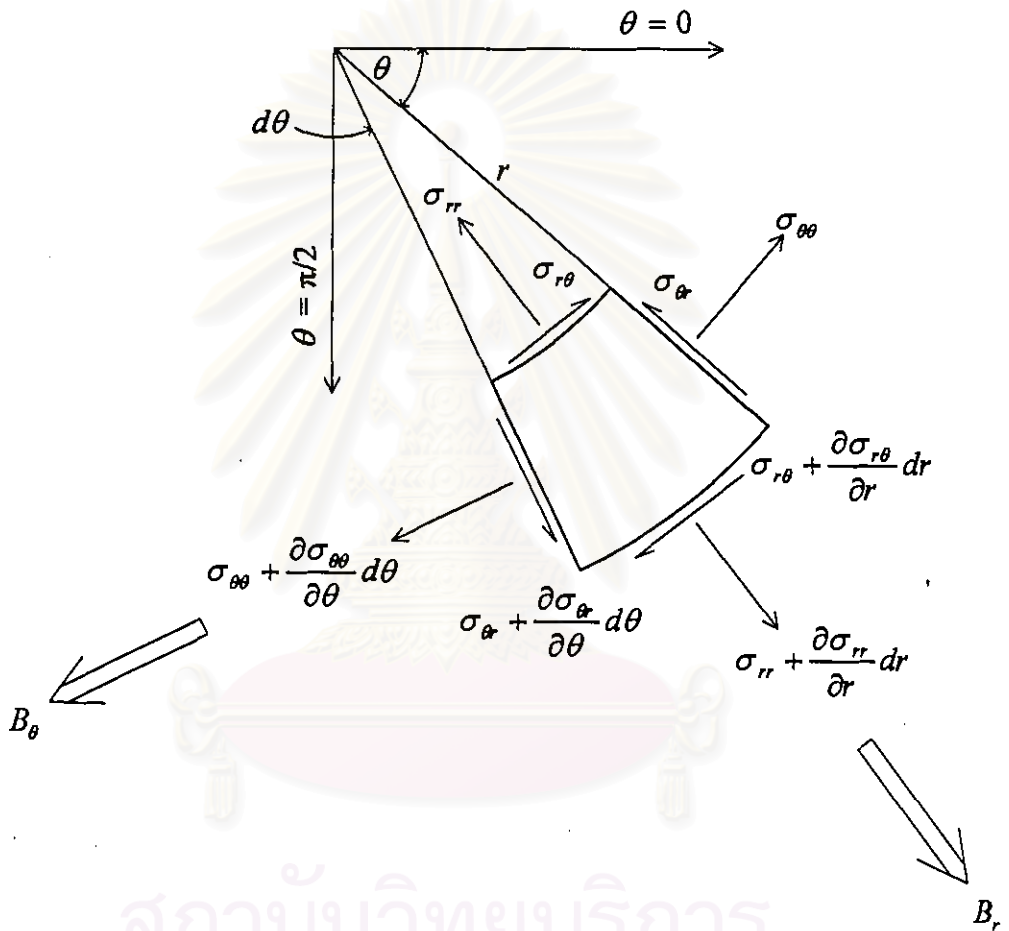
รูปที่ 2ก. ทิศทางที่เป็นบวกของความเค้น ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน



รูปที่ 2ข. ทิศทางที่เป็นบวกของความเครียด ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

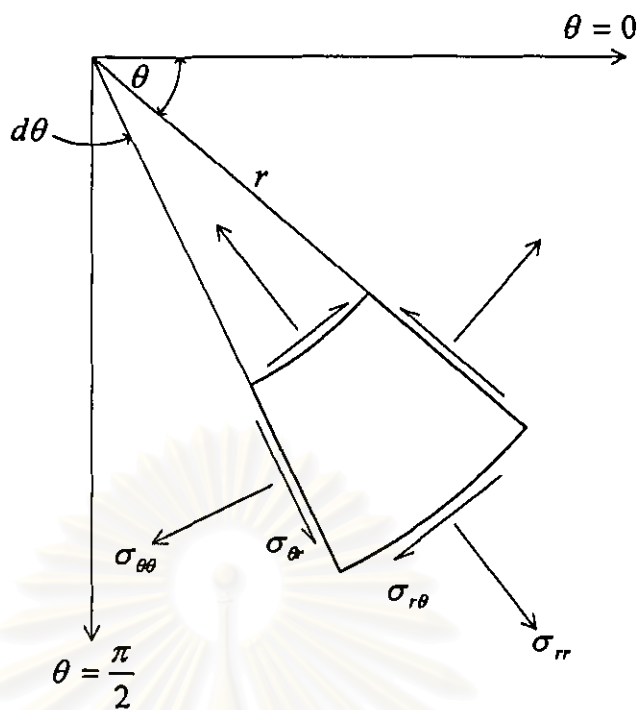
รูปที่ 2. ทิศทางที่เป็นบวกของความเค้นและความเครียด ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน



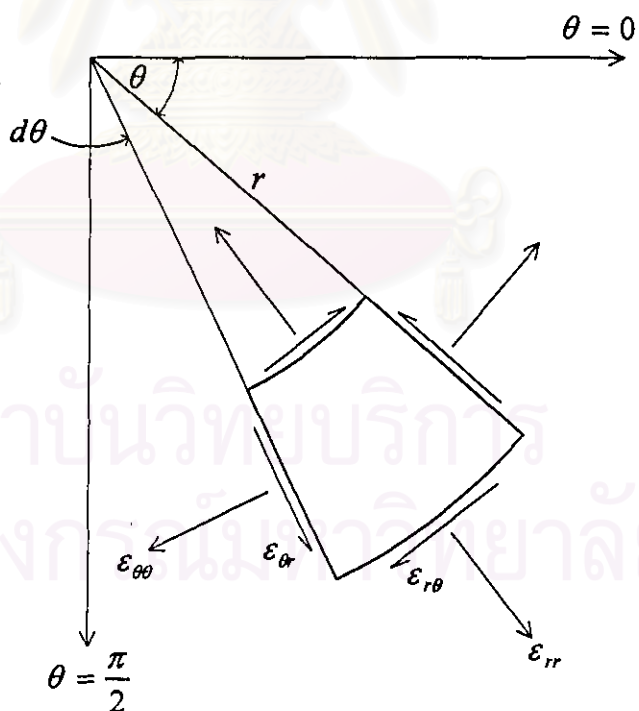


สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 3. สภาพสมดุลของชิ้นส่วนน้อยยิ่ง ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

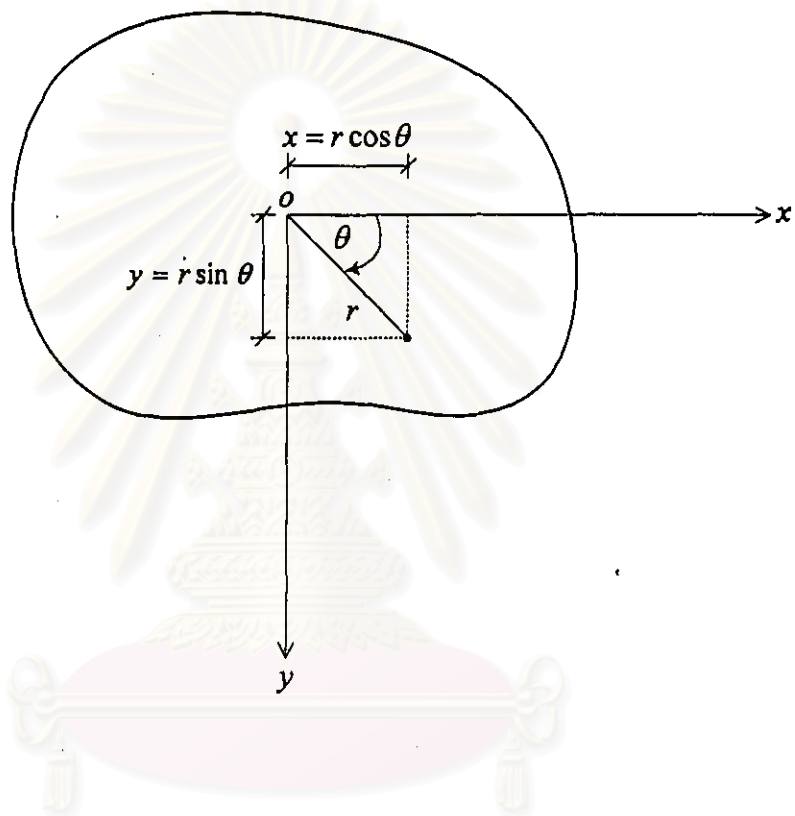


รูปที่ 4ก. ทิศทางที่เป็นบวกของความเค้น ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



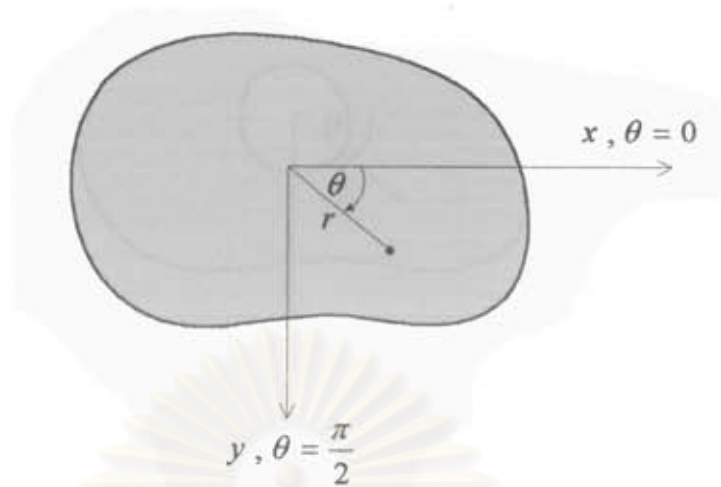
รูปที่ 4ข. ทิศทางที่เป็นบวกของความเครียด ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

รูปที่ 4. ทิศทางที่เป็นบวกของความเค้นและความเครียด ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

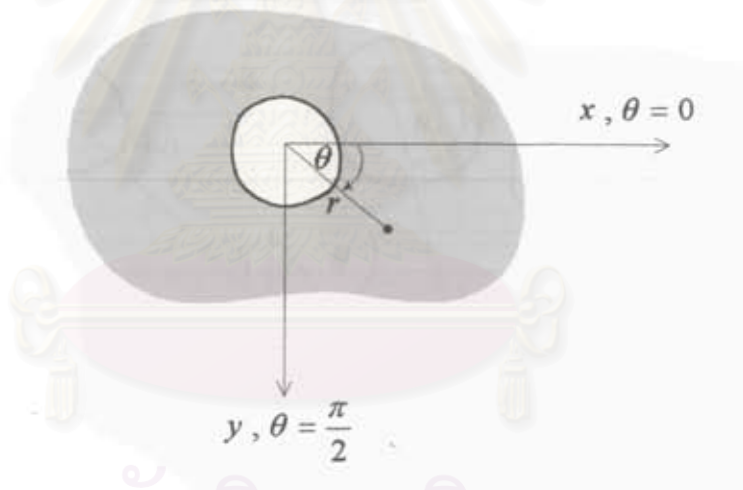


รูปที่ 5. ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดคาร์ทีเซียน กับระบบพิกัดเชิงขั้ว สำหรับปัญหาเรขาคณิต

สถาบันวิจัยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

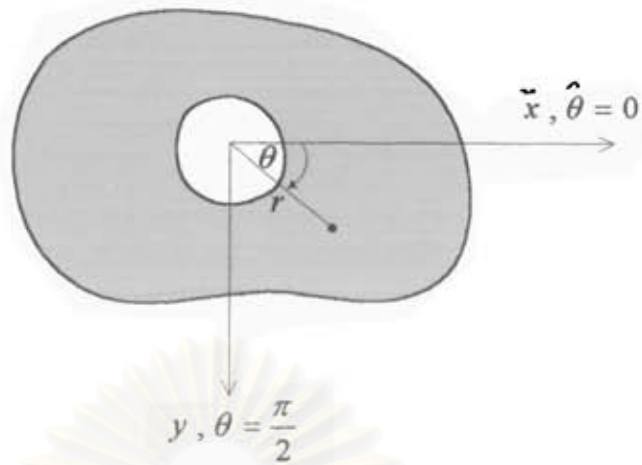


รูปที่ 6ก. ปัญหาโดเมนข้างใน (interior domain problem)

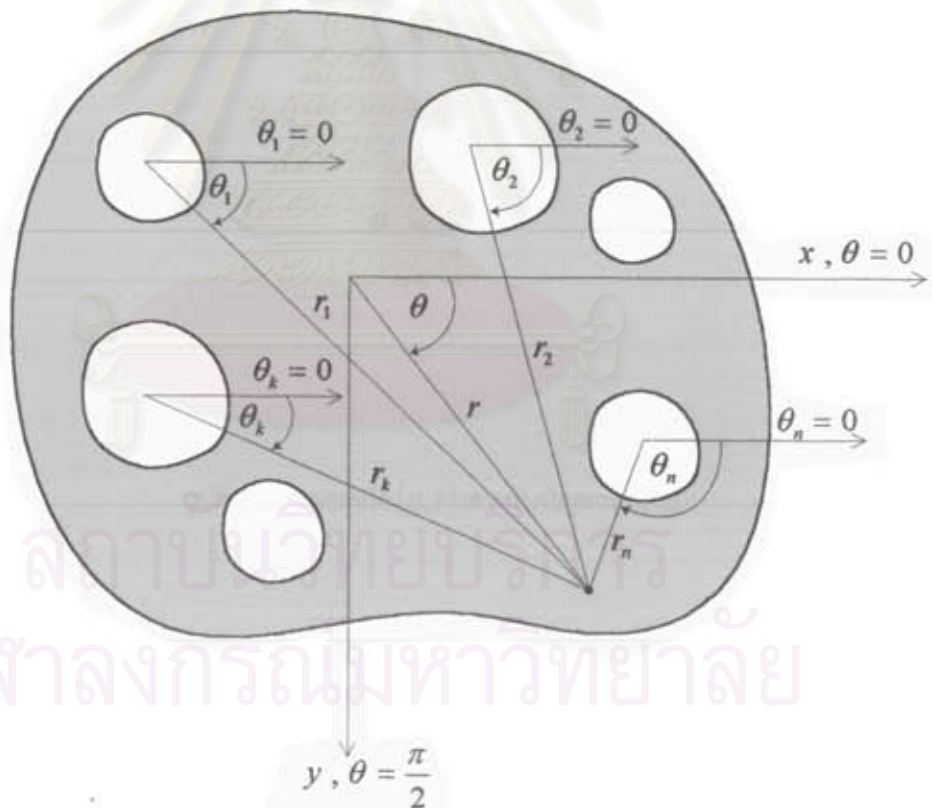


รูปที่ 6ข. ปัญหาโดเมนข้างนอก (exterior domain problem)

รูปที่ 6. โดเมนกรณีต่าง ๆ สำหรับปัญหาระนาบ

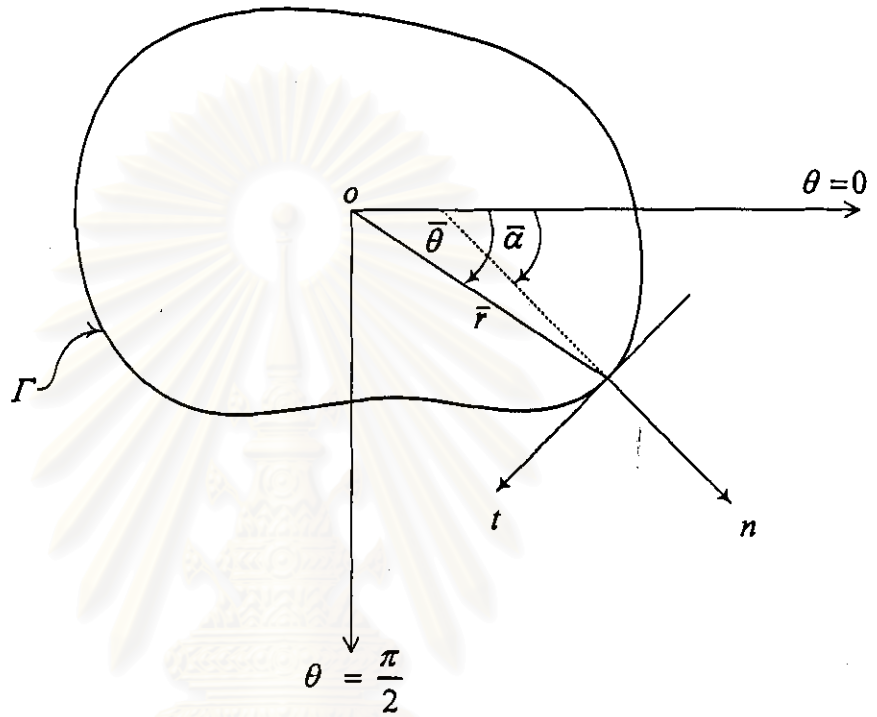


รูปที่ 6ค. ปัญหาโดเมนวงแหวน(ring domain problem)



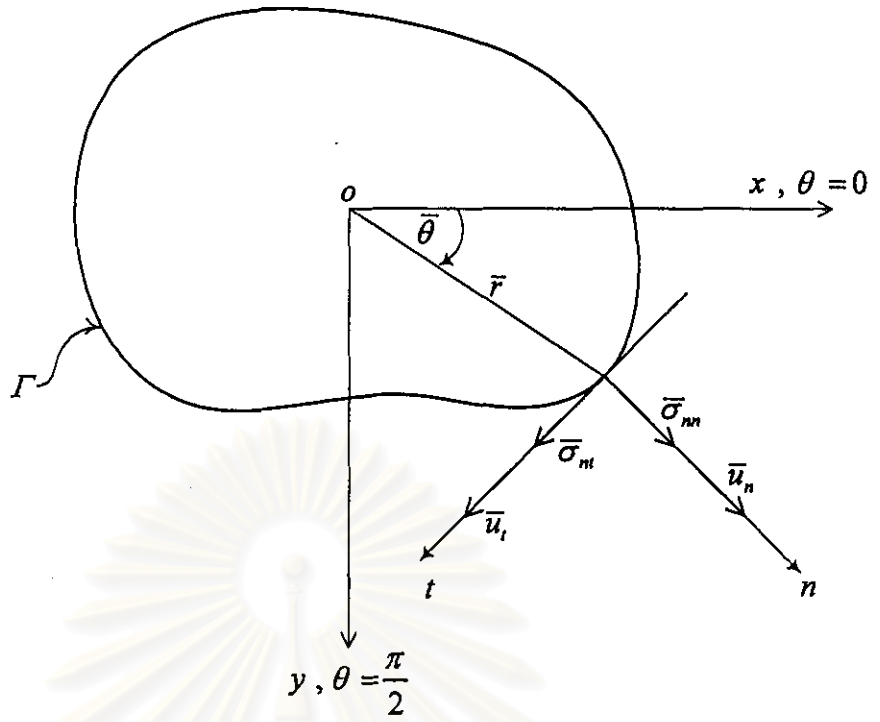
รูปที่ 6ง. ปัญหาโดเมนวงแหวนหลายชั้น(multiple-ring domain problem)

รูปที่ 6. (ต่อ) โดเมนกรณีต่าง ๆ สำหรับปัญหาระนาบ

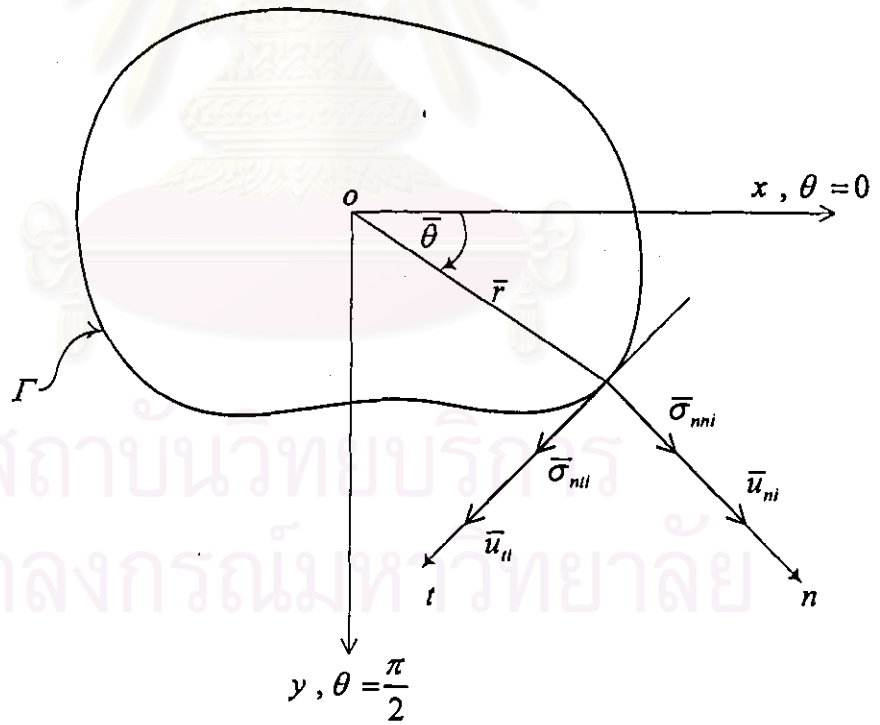


รูปที่ 7. ระบบพิกัด  $(n, t)$  สำหรับปัญหาระนาบ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

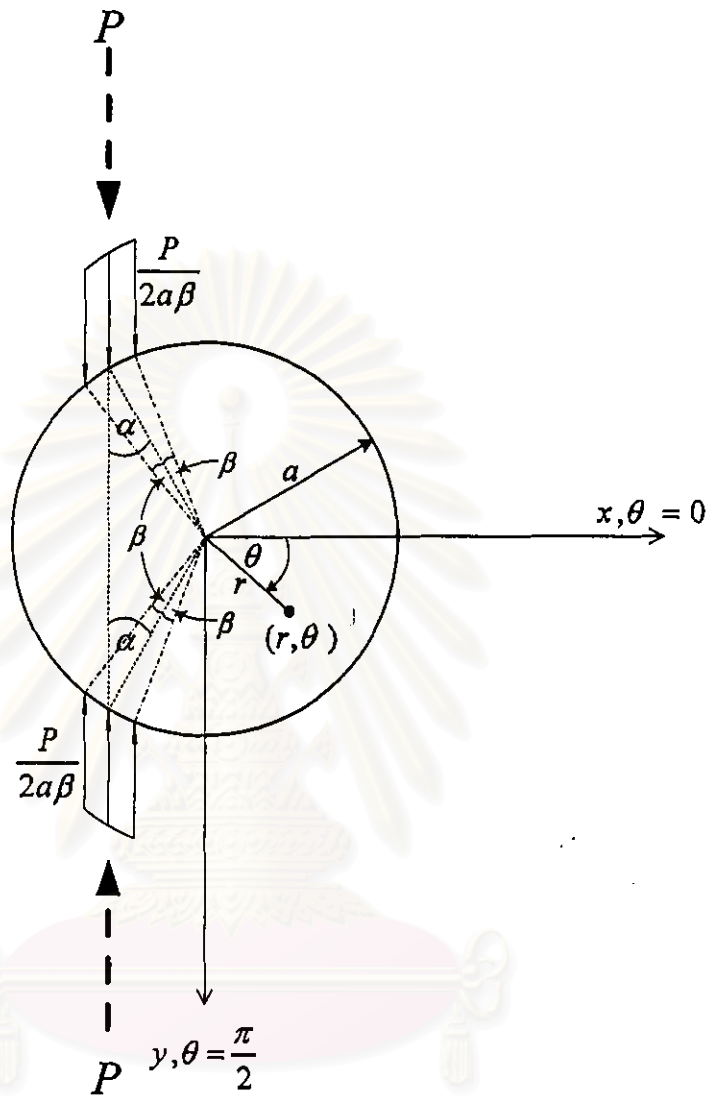


รูปที่ 8ก. ระบบผลเฉลย(solution system)



รูปที่ 8ข. ระบบทดสอบที่ i (i-th trial system)

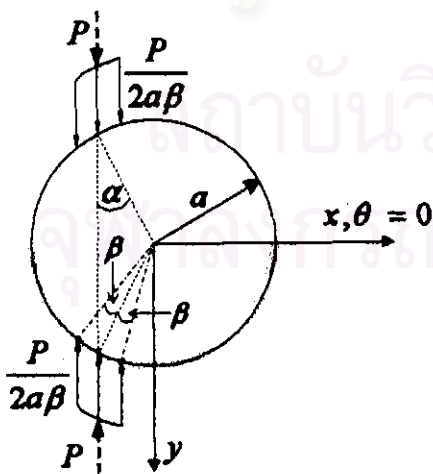
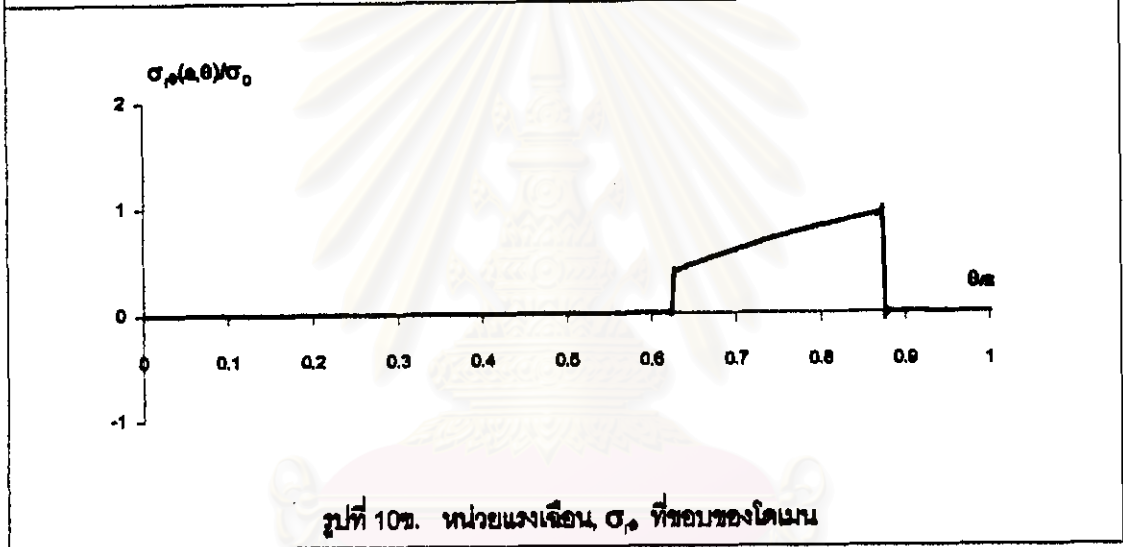
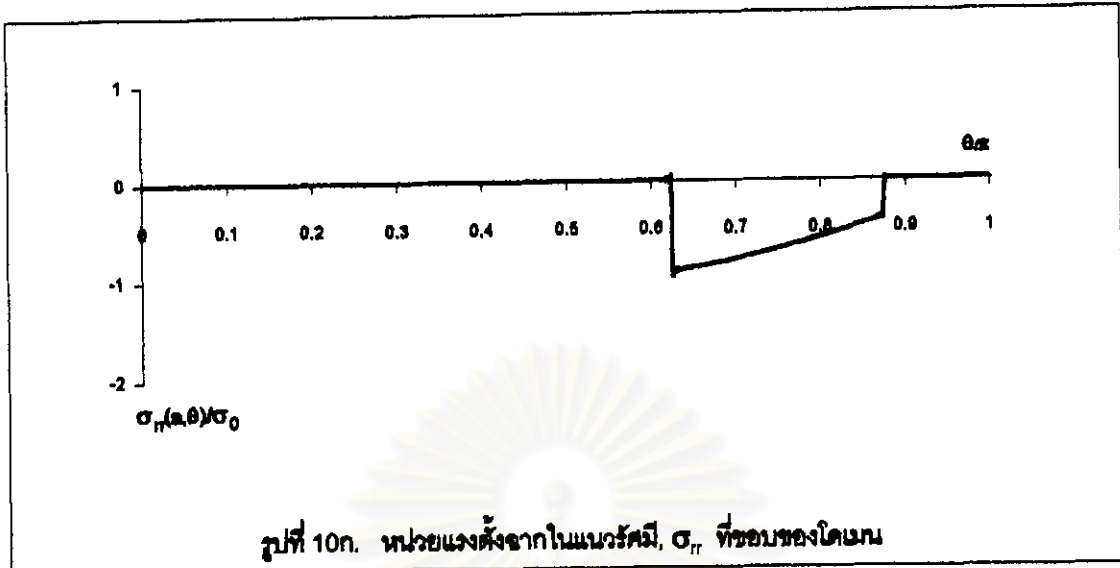
รูปที่ 8. แรงกระทำและการกระจัดของระบบผลเฉลยและระบบทดสอบ



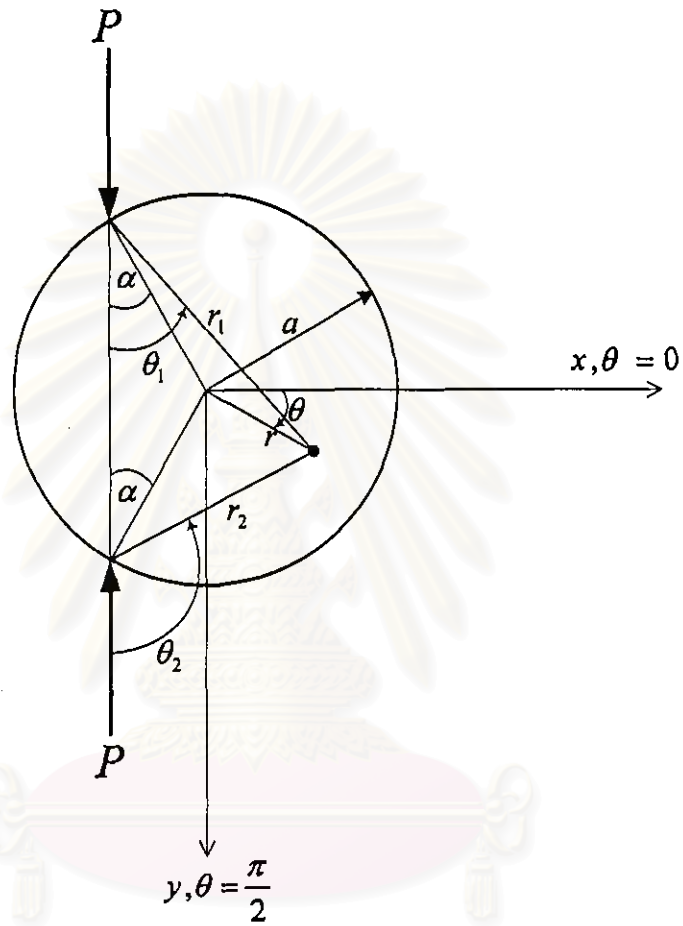
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 9. ตัวอย่างที่ 1. แผ่นยึดหยุ่นรูปวงกลม



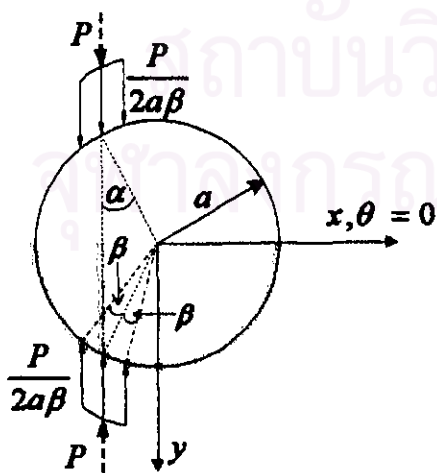
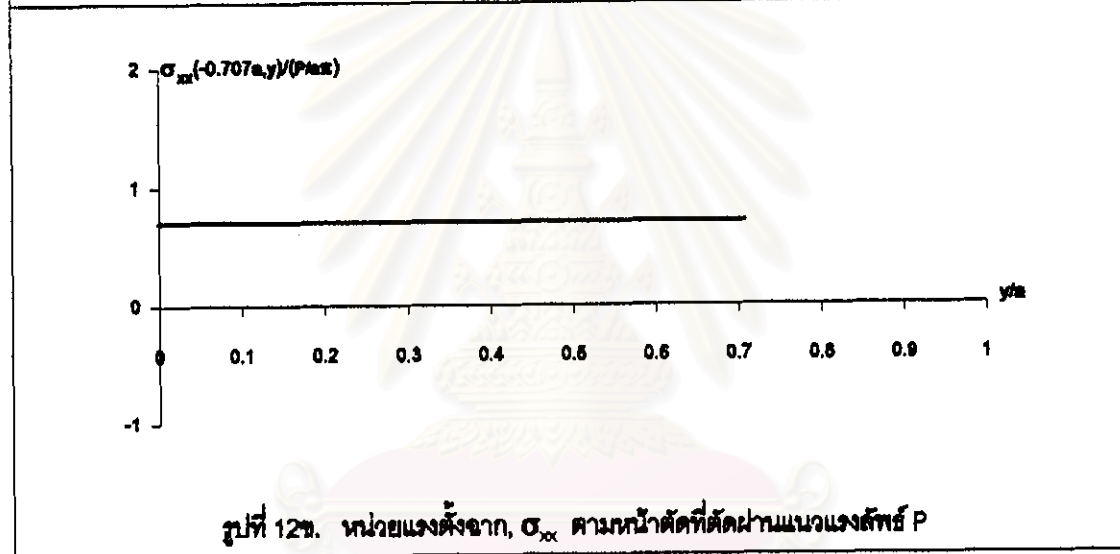
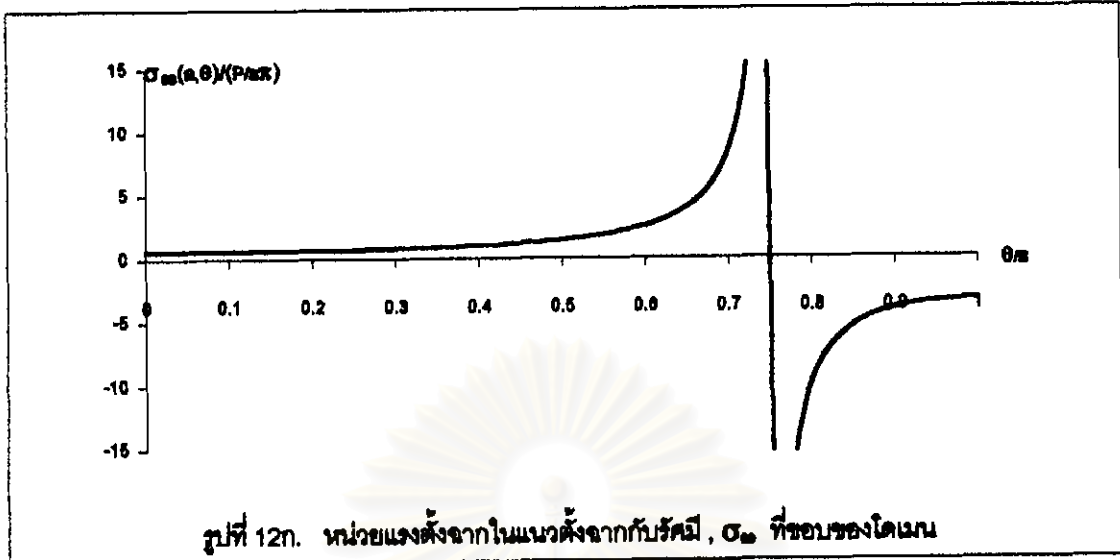


รูปที่ 10. หน่วยแรงต่าง ๆ บริเวณขอบของโดเมน สำหรับตัวอย่างที่ 1. เมื่อ  $\beta = \pi/2$  และ  $\alpha = \pi/4$

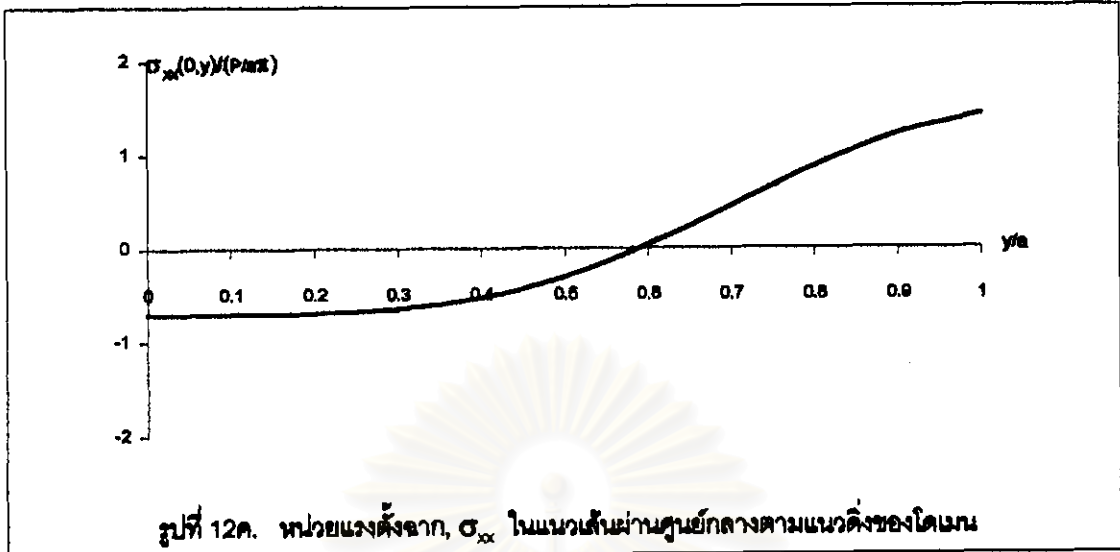


รูปที่ 11. ระบบพิกัดสำหรับผลเฉลยของเฮิร์ตซ์(Hertz's solution) ในตัวอย่างที่ 1.

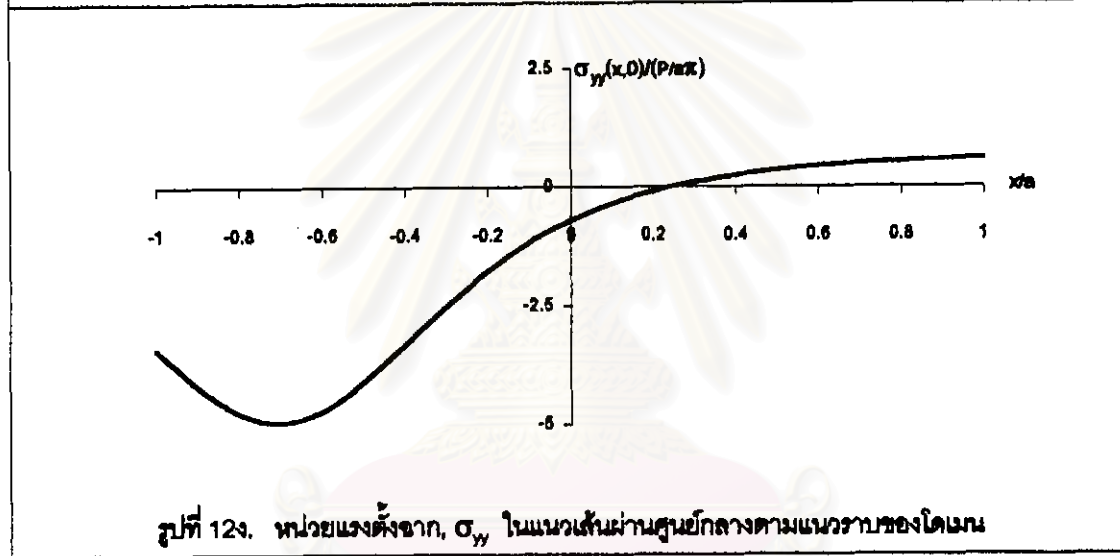
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



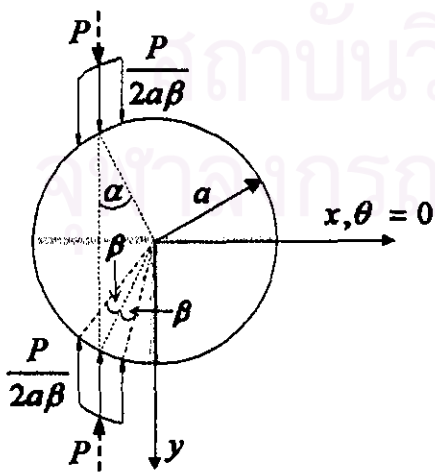
รูปที่ 12. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 1  
เมื่อ  $\beta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ  $\alpha = \pi/4$



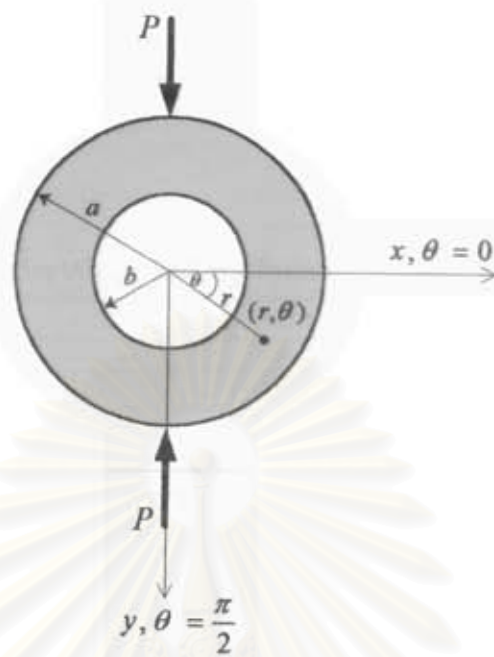
รูปที่ 12ค. หน่วยแรงดึงจาก,  $\sigma_{xx}$  ในแนวเส้นผ่านศูนย์กลางตามแนวตั้งของโดเมน



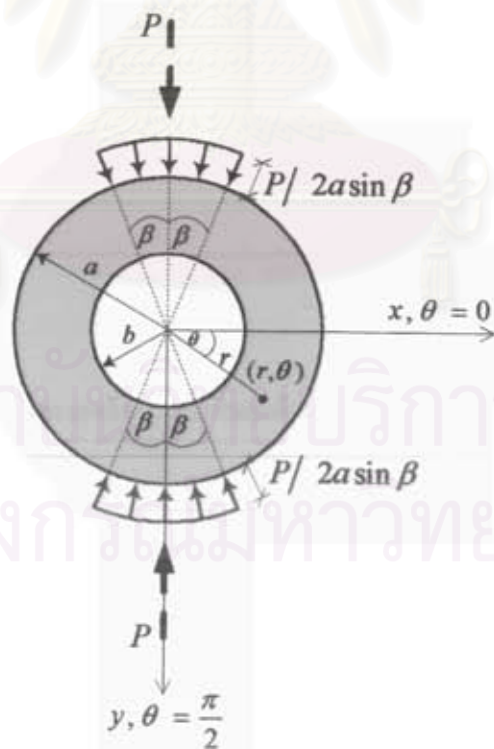
รูปที่ 12ง. หน่วยแรงดึงจาก,  $\sigma_{yy}$  ในแนวเส้นผ่านศูนย์กลางตามแนวราบของโดเมน



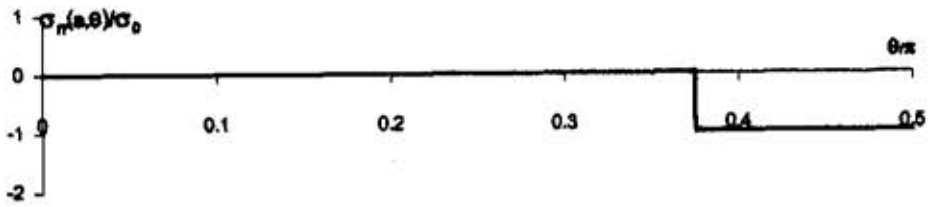
รูปที่ 12. (ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 1  
เมื่อ  $\beta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ  $\alpha = \pi/4$



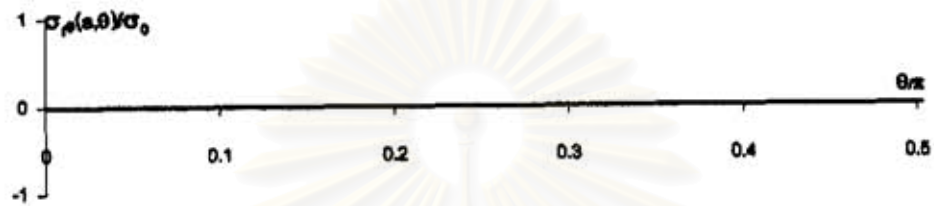
รูปที่ 13. ตัวอย่างที่ 2. แขนงยึดท่อนรูปวงแหวน



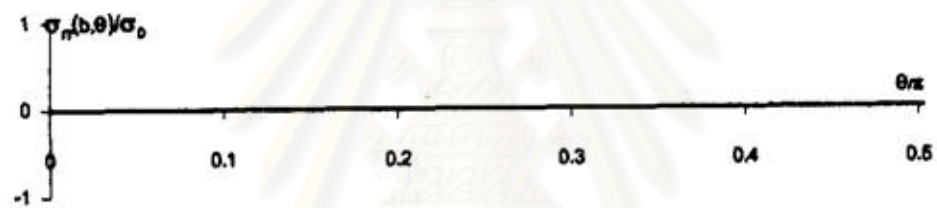
รูปที่ 14. การปรับแก้แรงเคี้ยว  $P$  ให้เป็นหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอที่มีแรงลัพธ์เท่ากับ  $P$  สำหรับตัวอย่างที่ 2



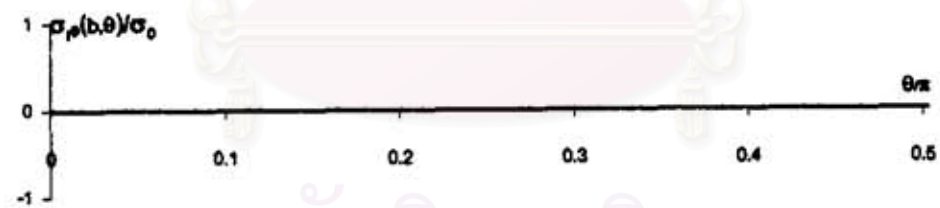
รูปที่ 15ก. หน่วยแรงดึงฉากในแนวรัศมี,  $\sigma_r$  ที่ขอบด้านนอกของวงแหวน ( $r = a$ )



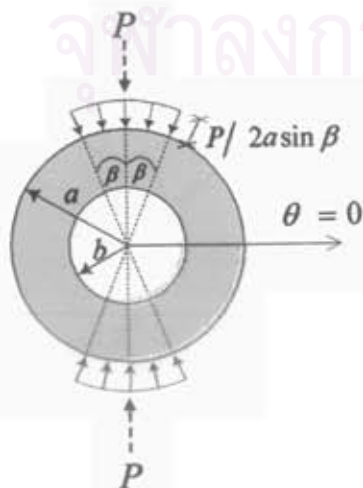
รูปที่ 15ข. หน่วยแรงเฉือน,  $\sigma_\theta$  ที่ขอบด้านนอกของวงแหวน ( $r = a$ )



รูปที่ 15ค. หน่วยแรงดึงฉากในแนวรัศมี,  $\sigma_r$  ที่ขอบด้านในของวงแหวน ( $r = b$ )



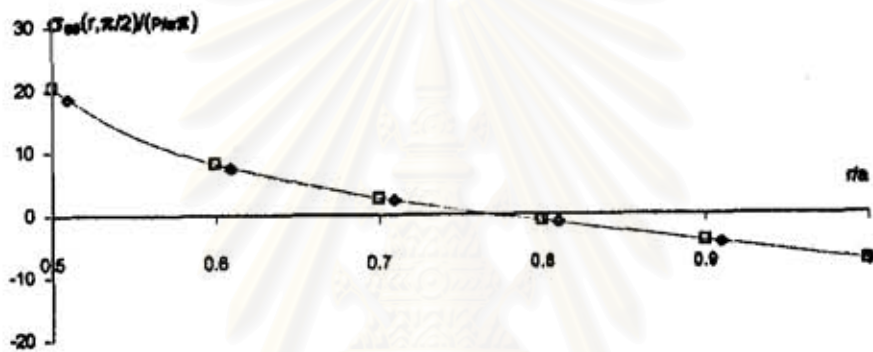
รูปที่ 15ง. หน่วยแรงเฉือน,  $\sigma_\theta$  ที่ขอบด้านในของวงแหวน ( $r = b$ )



รูปที่ 15. หน่วยแรงต่าง ๆ บริเวณขอบของโดเมน  
ในตัวอย่างที่ 2. เมื่อ  $\beta = \pi/8$



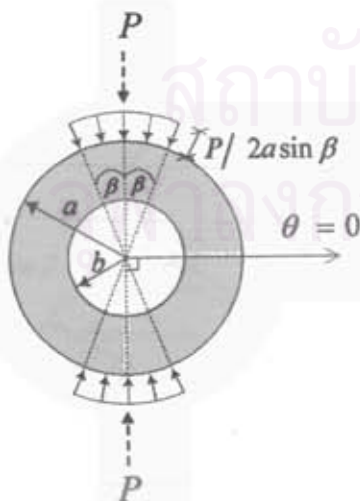
รูปที่ 16ก. หน่วยแรงดึงฉากในแนวตั้งฉากกับรัศมี,  $\sigma_{00}$  ตามแนวแกน  $\theta = 0$



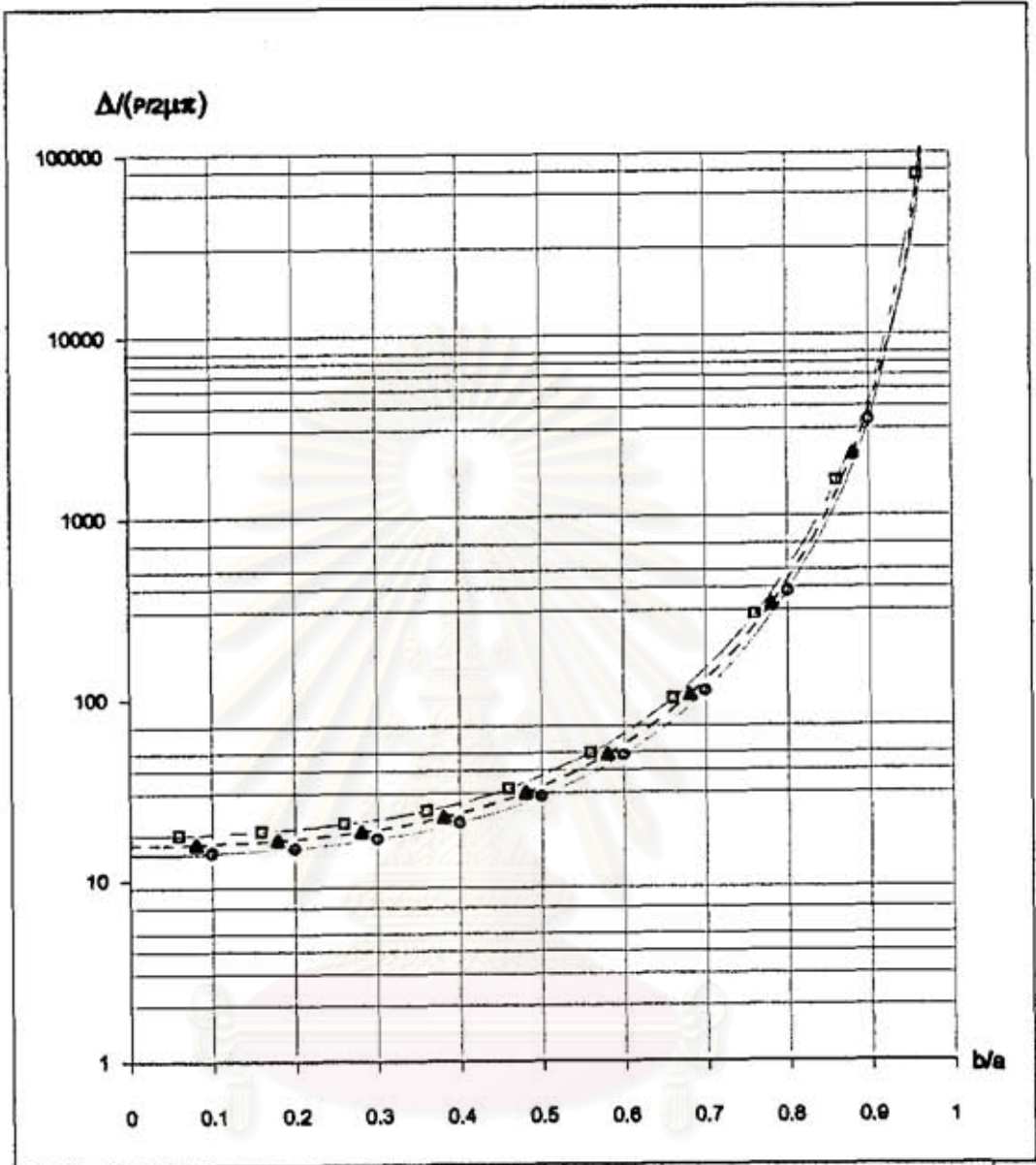
รูปที่ 16ข. หน่วยแรงดึงฉากในแนวตั้งฉากกับรัศมี,  $\sigma_{00}$  ตามแนวแกน  $\theta = \pi/2$

--◇-- ผลเฉลยจากงานวิจัย

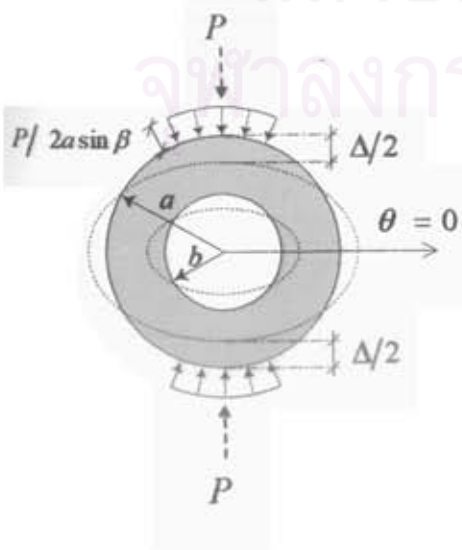
—□— ผลเฉลยของทีโมเชนโก(Timoshenko's solution)



รูปที่ 16. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 2.  
เมื่อ  $\beta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ  $b/a = 0.5$

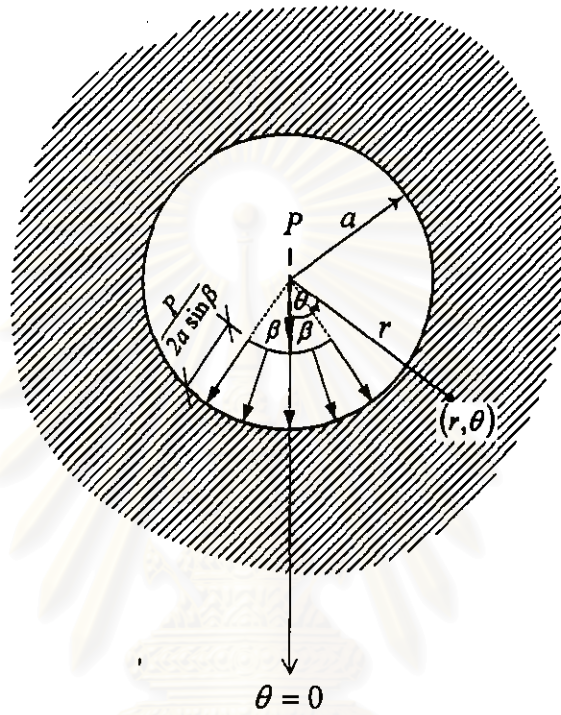


$\square$  - - - เมื่อ  $\nu=0.05$      $\triangle$  - - - เมื่อ  $\nu=0.25$   
 $\circ$  - - - เมื่อ  $\nu=0.45$



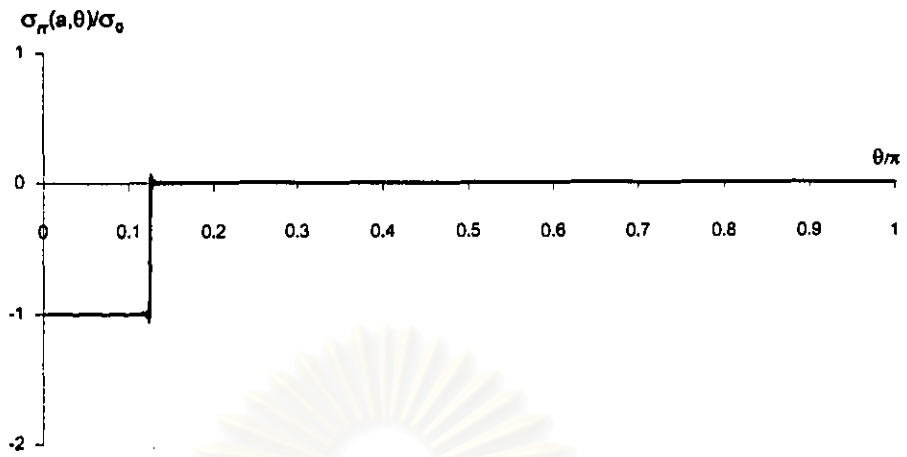
รูปที่ 17. ระยะการหดตัวตามแนวแรงของวงแหวน  
 ปรับเทียบ(proving ring)



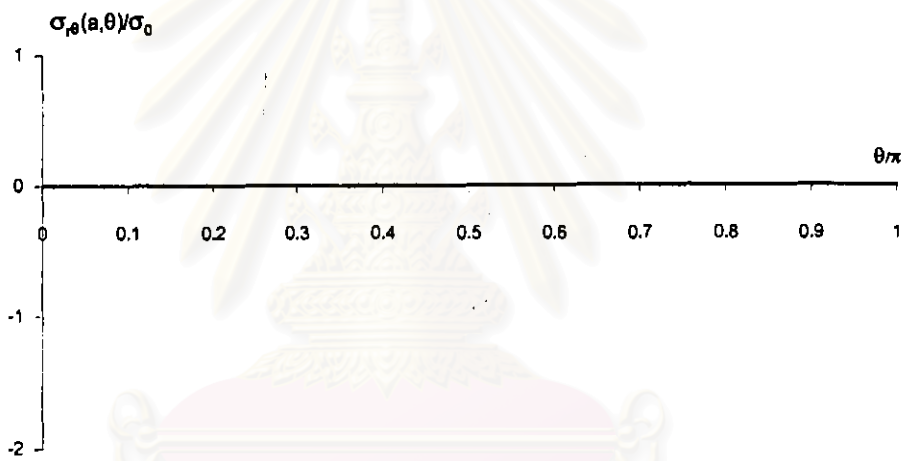


รูปที่ 18. ตัวอย่างที่ 3. แผ่นยึดหยุ่นมีพื้นที่อนันต์และรับหน่วยแรงตั้งฉากในรูเจาะรูปวงกลม

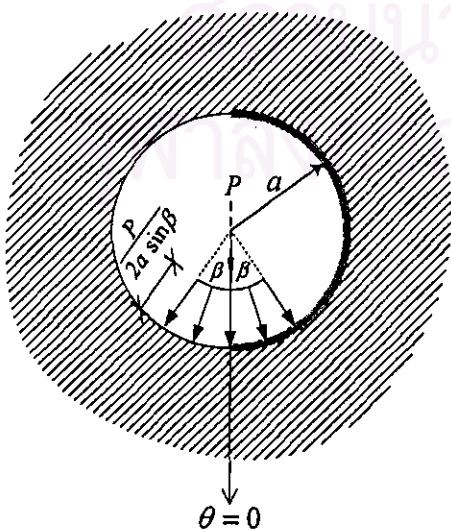
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



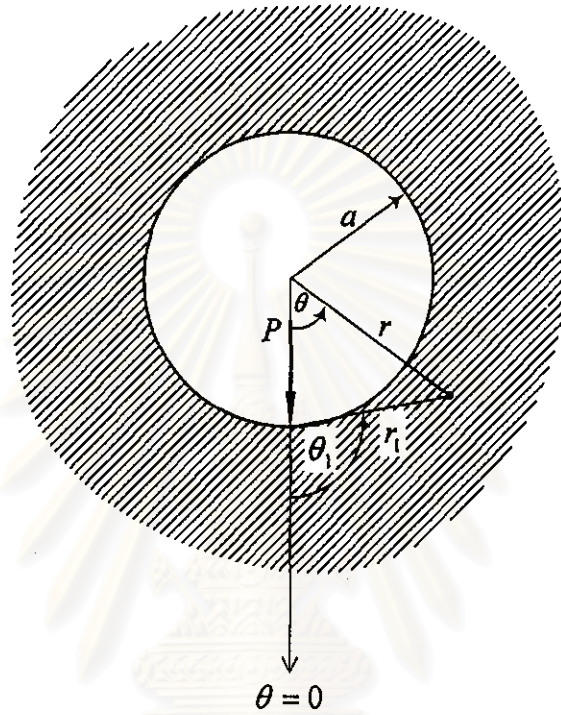
รูปที่ 19ก. หน่วยแรงดึงฉากในแนวรัศมี,  $\sigma_n$  ที่ขอบของโดเมน



รูปที่ 19ข. หน่วยแรงเฉือน,  $\sigma_s$  ที่ขอบของโดเมน

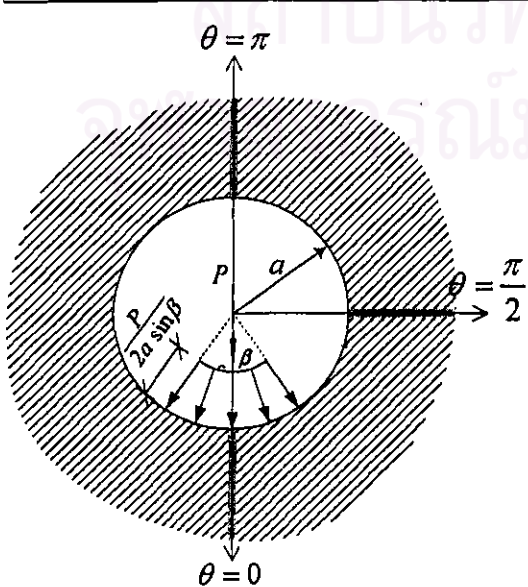
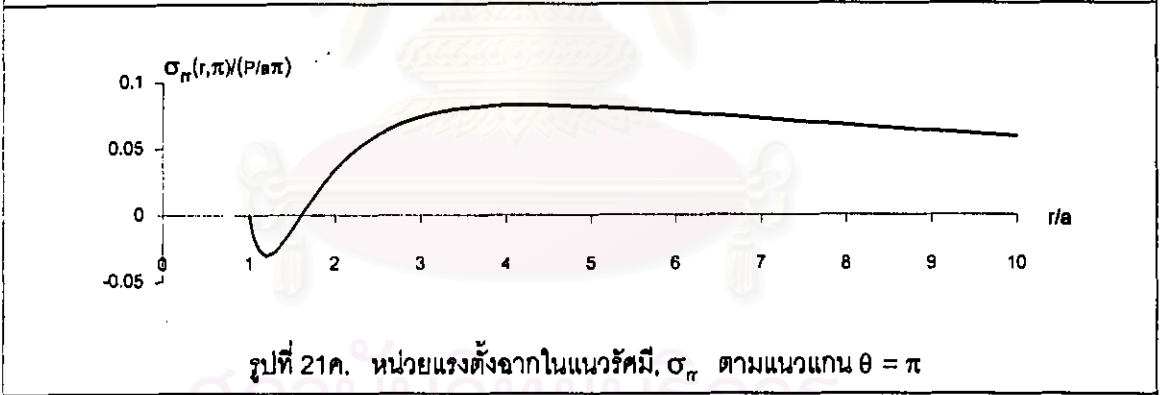
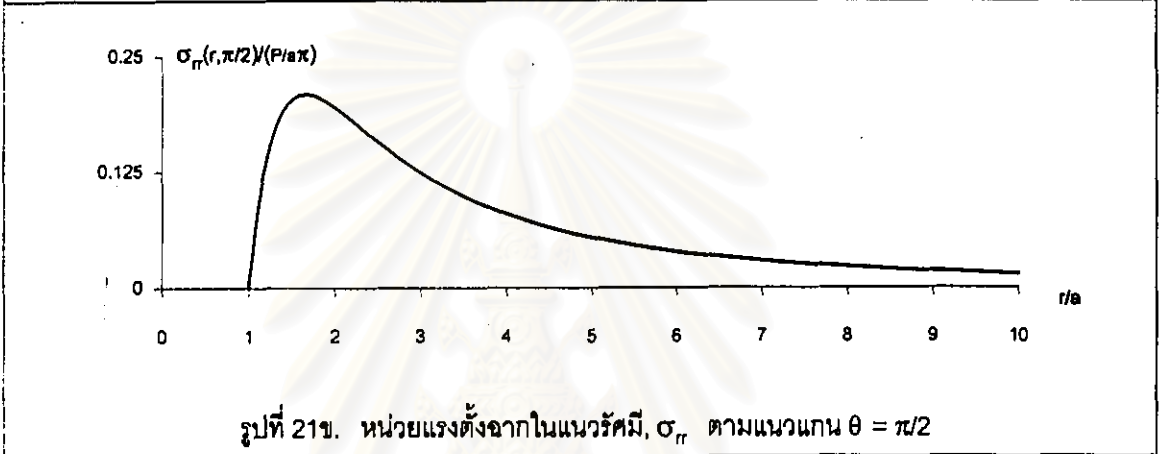
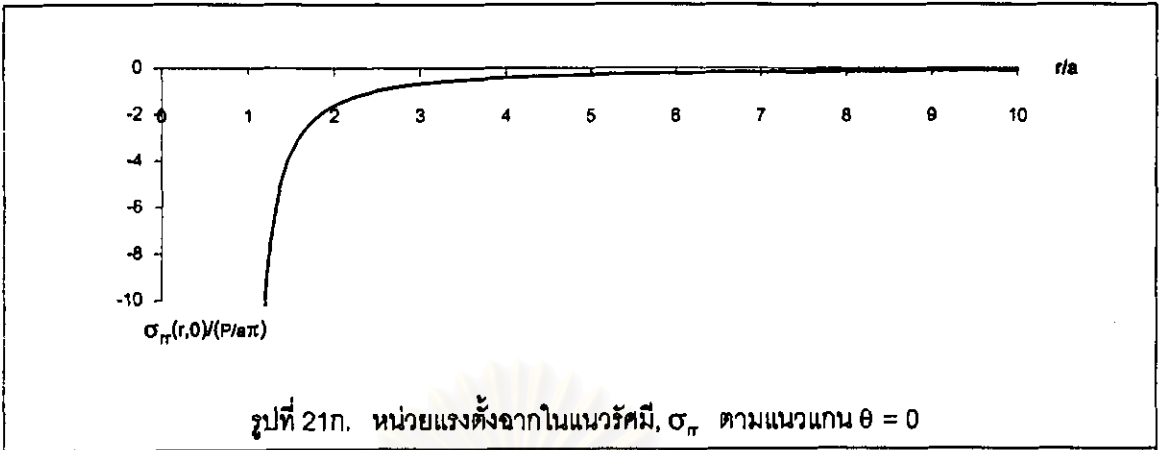


รูปที่ 19. หน่วยแรงต่าง ๆ ที่ขอบของโดเมน  
ในตัวอย่างที่ 3. เมื่อ  $\beta = \pi/8$

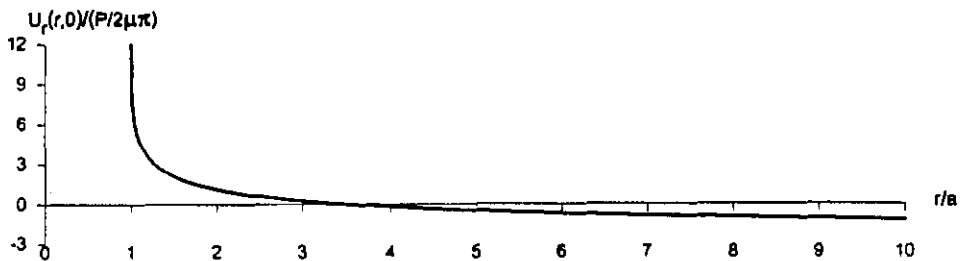


รูปที่ 20. ระบบพิกัด สำหรับผลเฉลยเฉพาะที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว  $P$   
ของปัญหาในตัวอย่างที่ 3

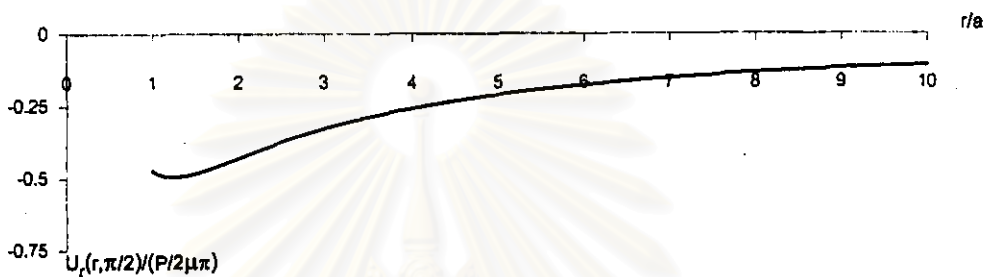
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



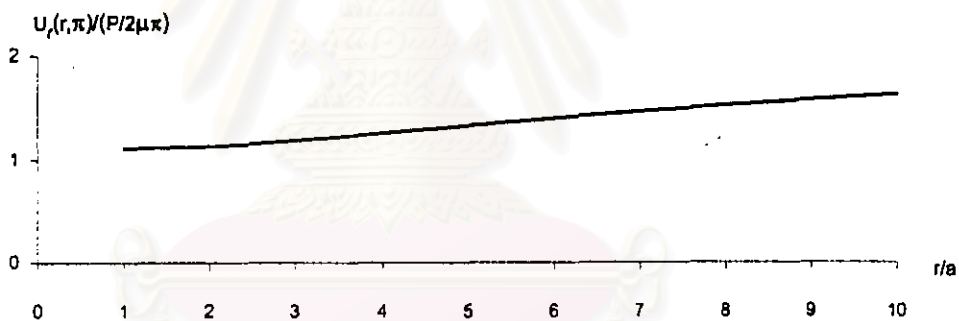
รูปที่ 21. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 3.  
เมื่อ  $\beta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์  $\nu = 0.25$   
และ เป็นปัญหาหระนาบทางความเค้น



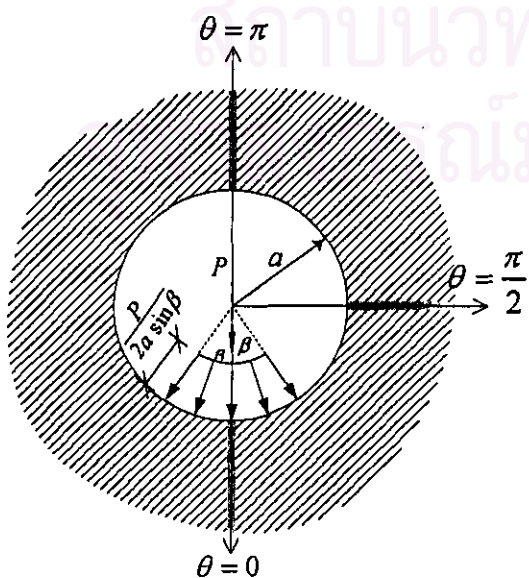
รูปที่ 21จ. การกระจัดในแนวรัศมี,  $u$ , ตามแนวแกน  $\theta = 0$



รูปที่ 21จ. การกระจัดในแนวรัศมี,  $u$ , ตามแนวแกน  $\theta = \pi/2$

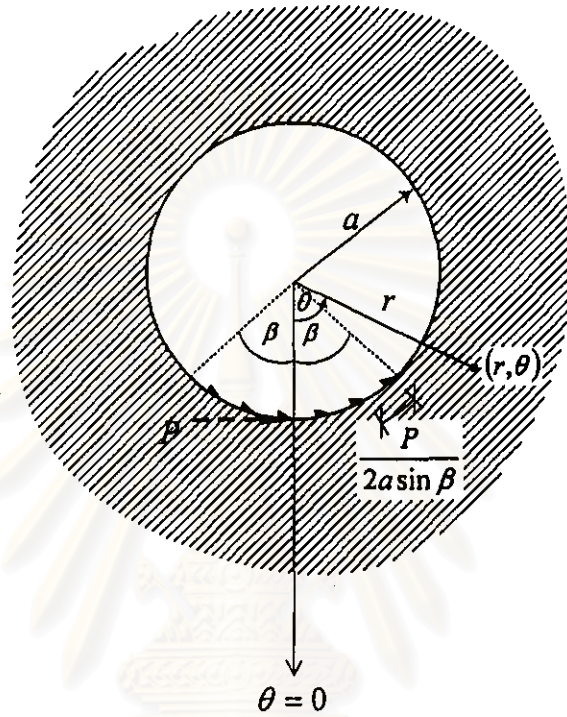


รูปที่ 21ข. การกระจัดในแนวรัศมี,  $u$ , ตามแนวแกน  $\theta = \pi$



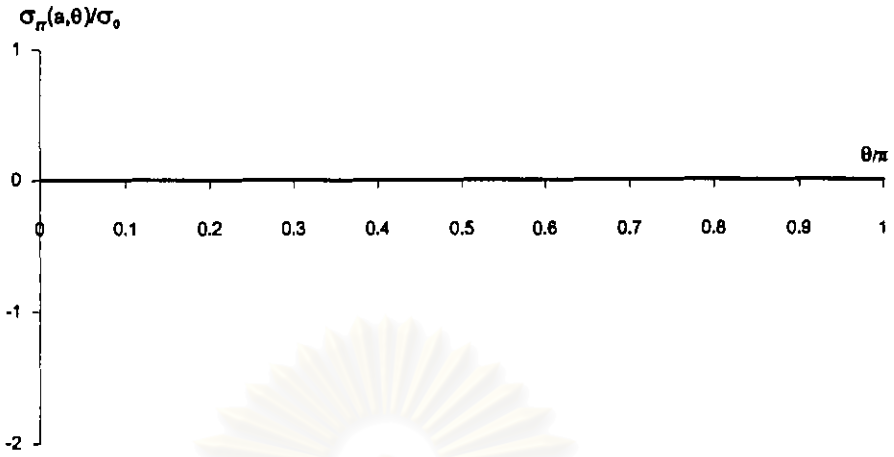
รูปที่ 21.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 3.

เมื่อ  $\beta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์  $\nu = 0.25$   
และ เป็นปัญหาระนาบทางความเค้น

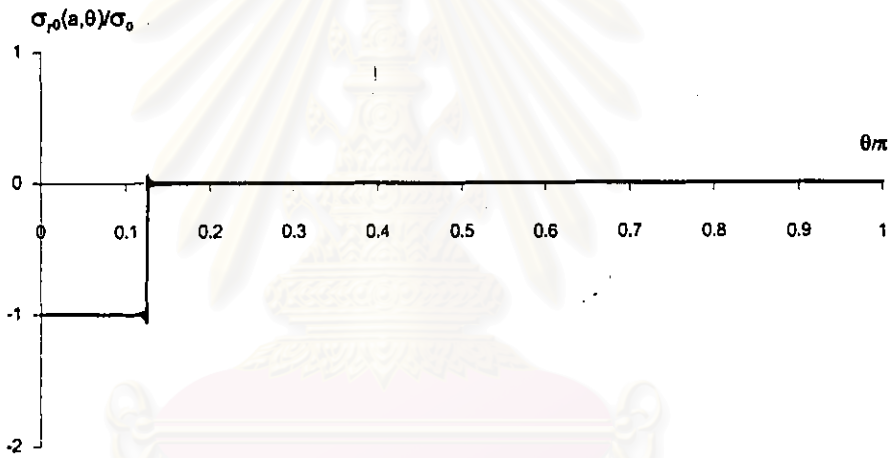


รูปที่ 22. ตัวอย่างที่ 4. แผ่นยึดหมุ่นมีพื้นที่อนันต์และรับหน่วยแรงเฉือนในรูเจาะรูปวงกลม

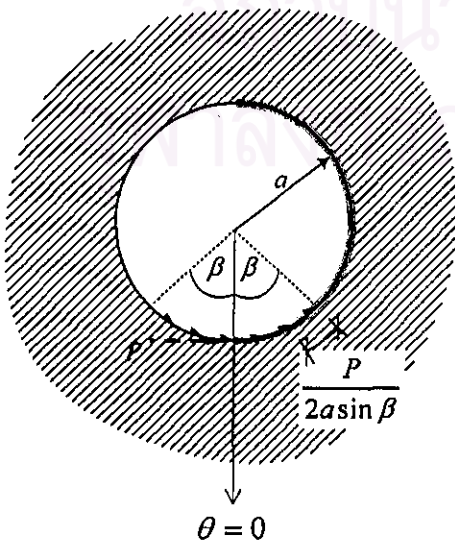
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



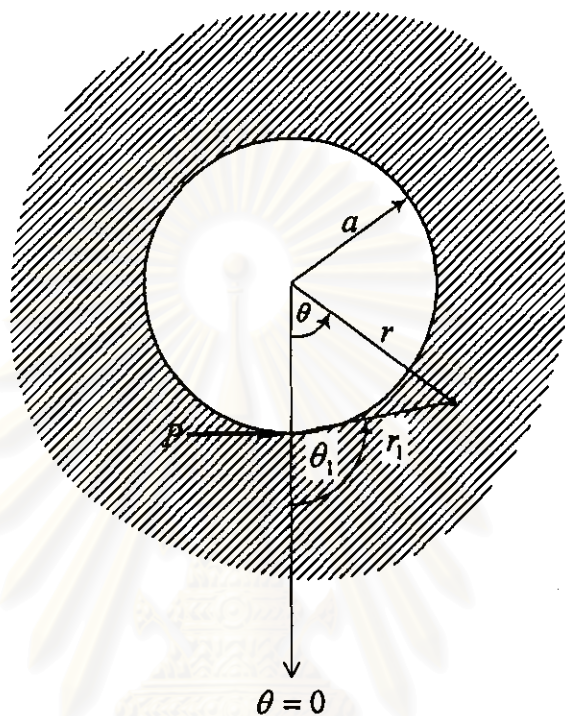
รูปที่ 23ก. หน่วยแรงดึงจากในแนวรัศมี,  $\sigma_r$  ที่ขอบของโดเมน



รูปที่ 23ข. หน่วยแรงเฉือน,  $\sigma_{r\theta}$  ที่ขอบของโดเมน



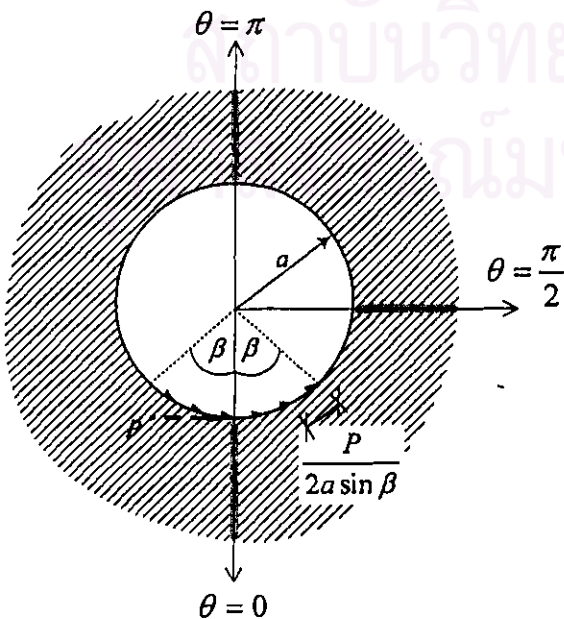
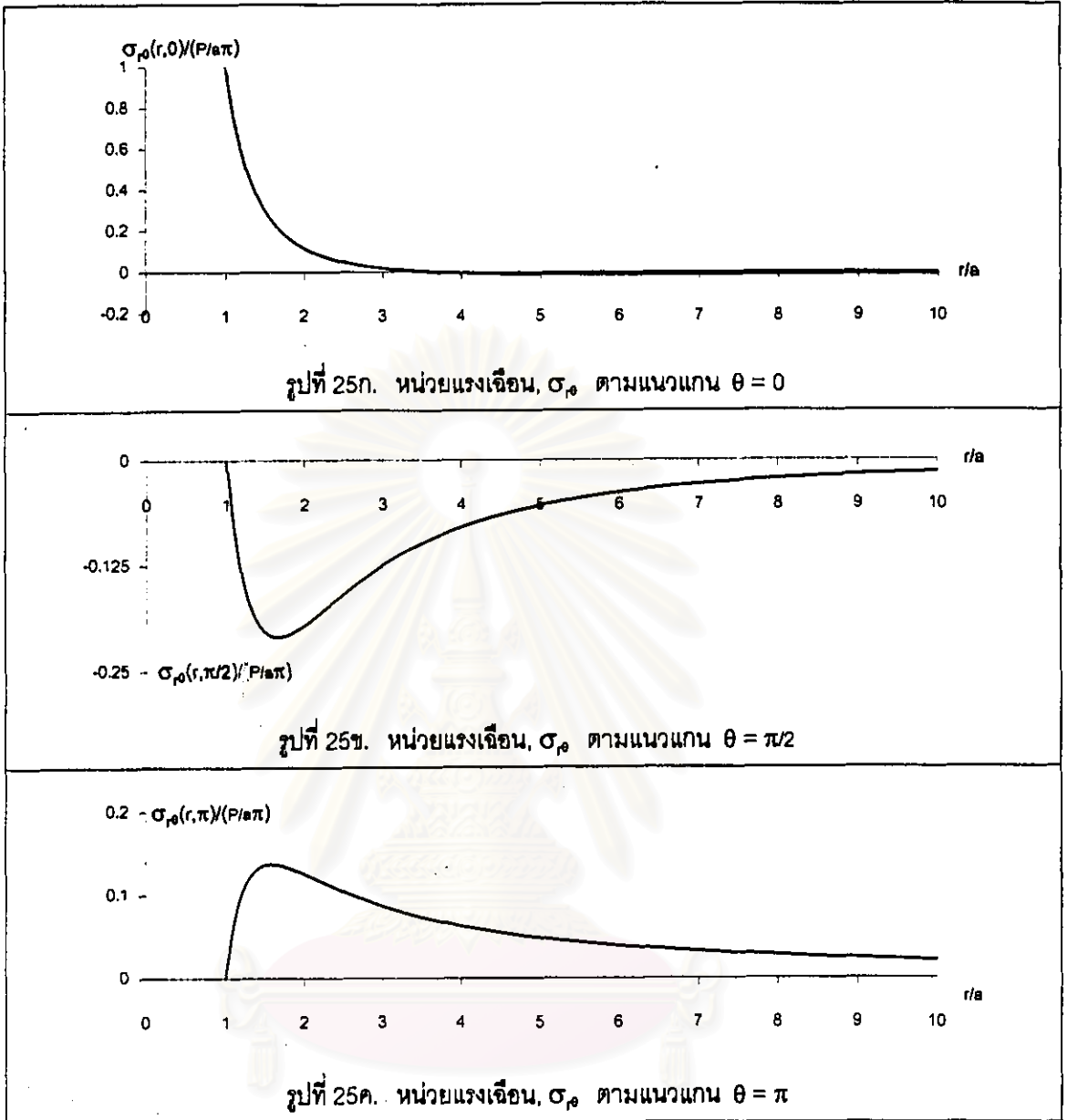
รูปที่ 23. หน่วยแรงต่าง ๆ ที่ขอบของโดเมน ในตัวอย่างที่ 4 เมื่อ  $\beta = \pi/8$



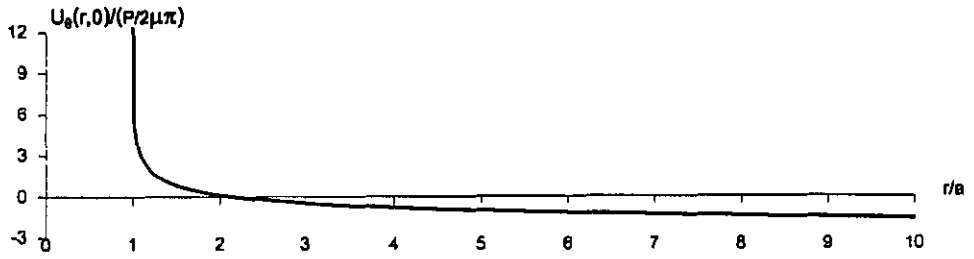
รูปที่ 24. ระบบพิกัด สำหรับผลเฉลยเฉพาะที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว  $P$  ของปัญหาในตัวอย่างที่ 4.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





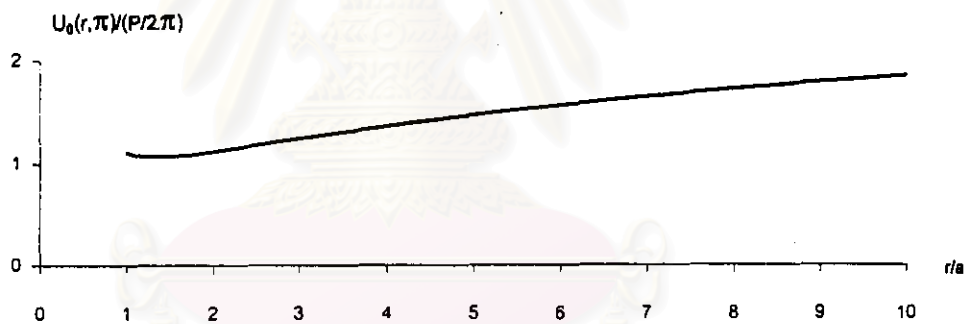
รูปที่ 25. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 4. เมื่อ  $\beta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์  $\nu = 0.25$  และเป็นปัญหาระนาบทางความเค้น



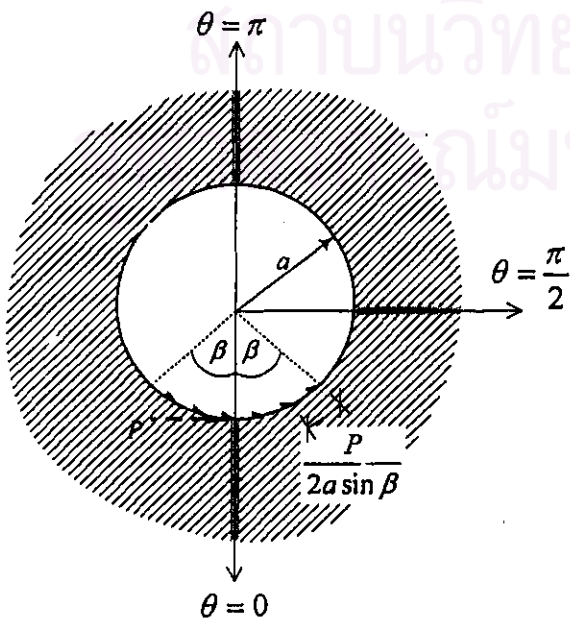
รูปที่ 25ง. การกระจัดในแนวตั้งฉากรัศมี,  $U_0$  ตามแนวแกน  $\theta = 0$



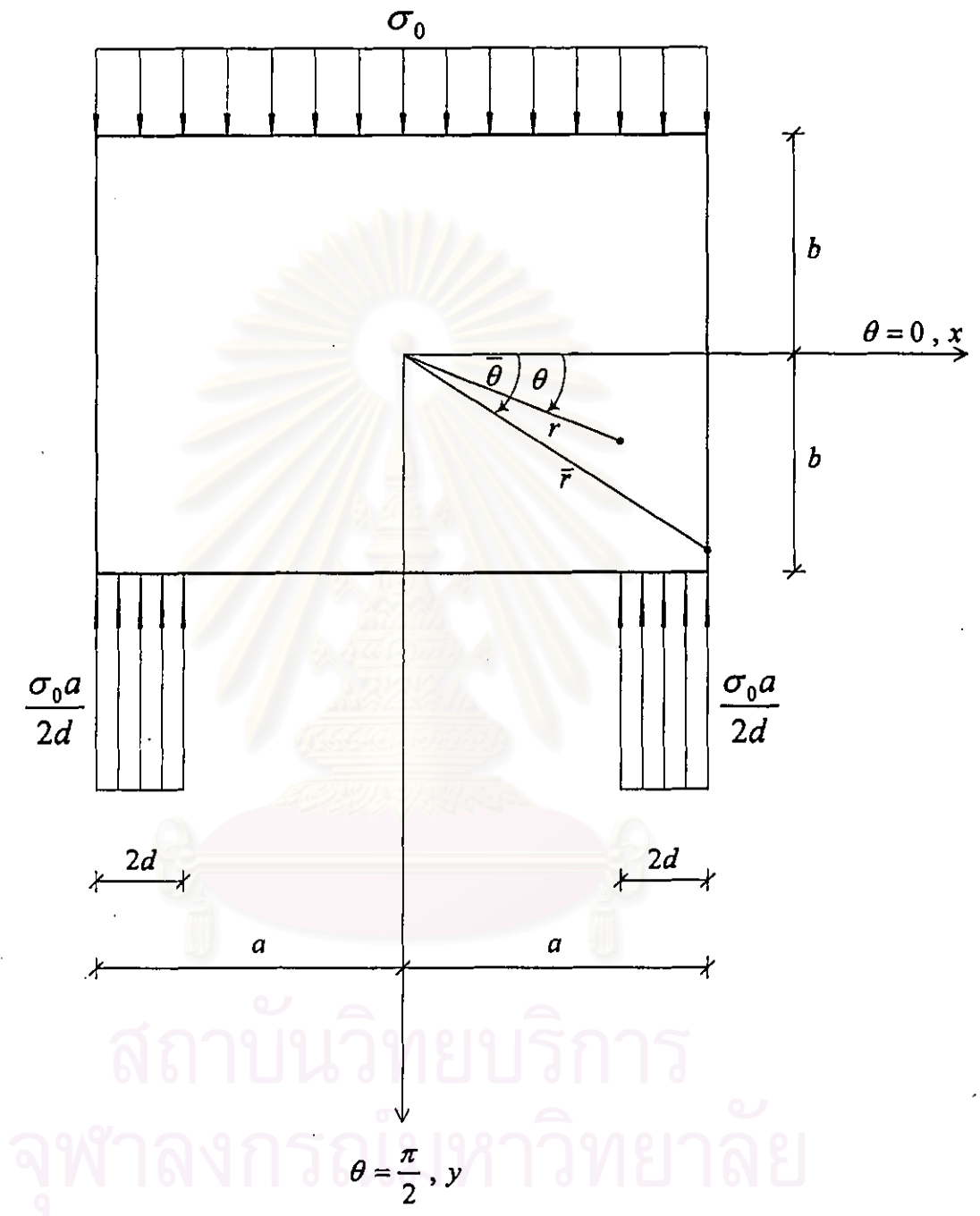
รูปที่ 25จ. การกระจัดในแนวตั้งฉากรัศมี,  $U_0$  ตามแนวแกน  $\theta = \pi/2$



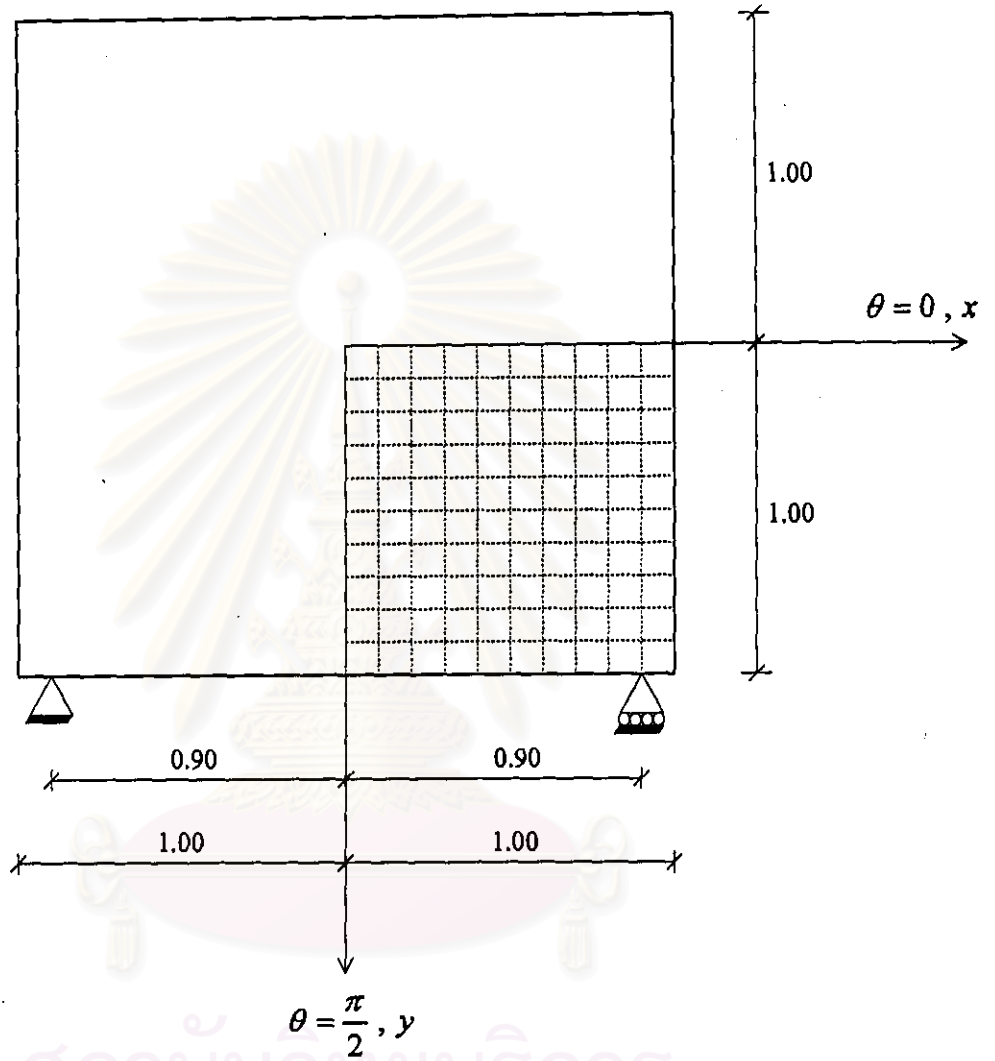
รูปที่ 25ฉ. การกระจัดในแนวตั้งฉากรัศมี,  $U_0$  ตามแนวแกน  $\theta = \pi$



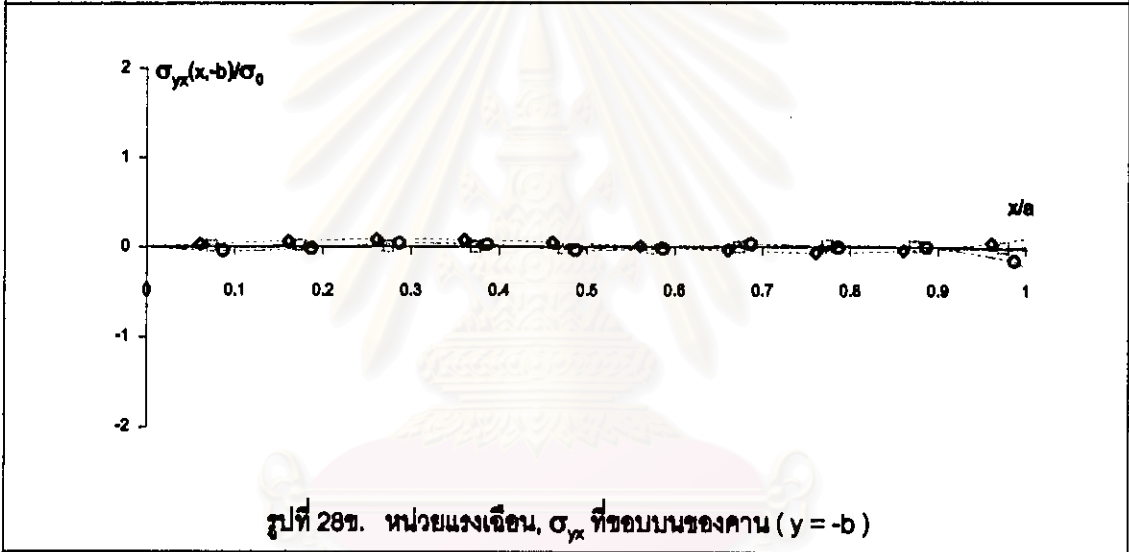
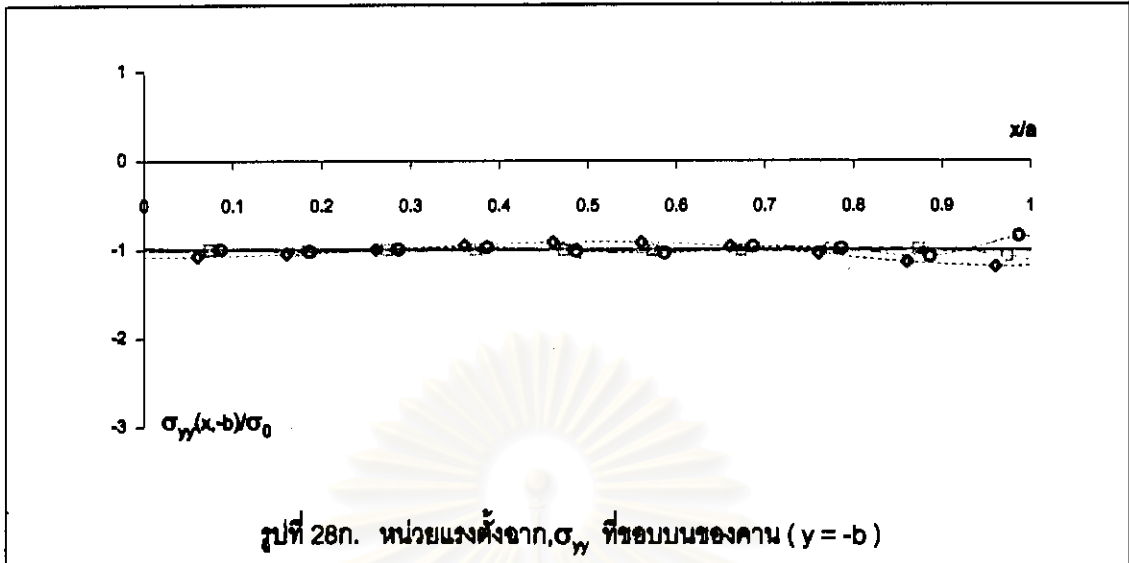
รูปที่ 25.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 4.  
เมื่อ  $\beta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์  $v = 0.25$   
และเป็นปัญหาระนาบทางความเค้น



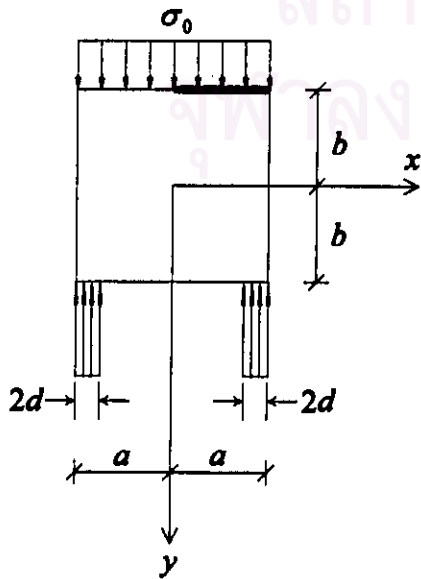
รูปที่ 26. ตัวอย่างที่ 5. คานช่วงเดียวรับหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอที่ขอบบน



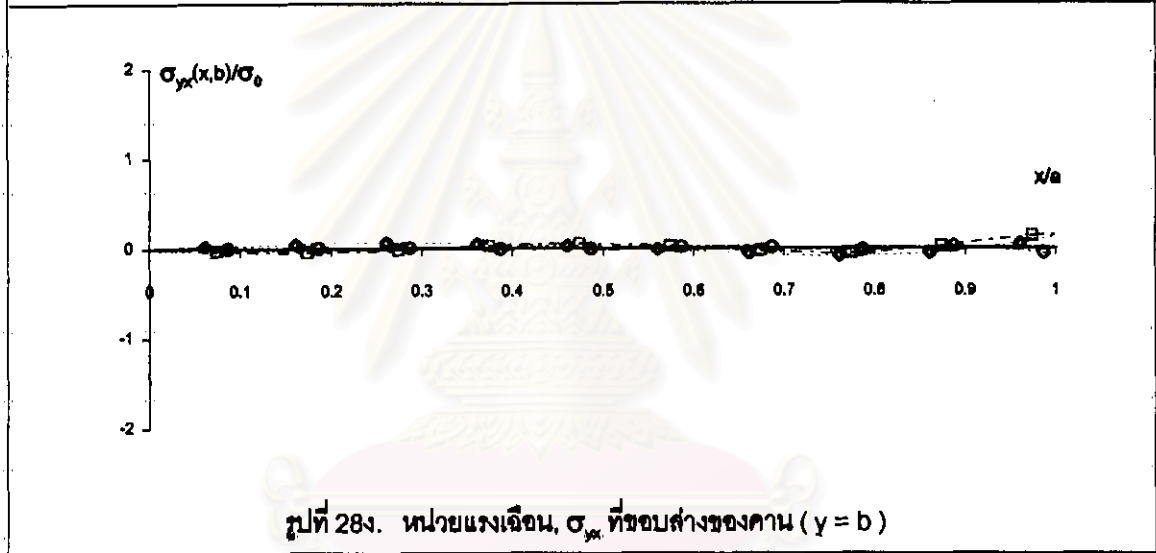
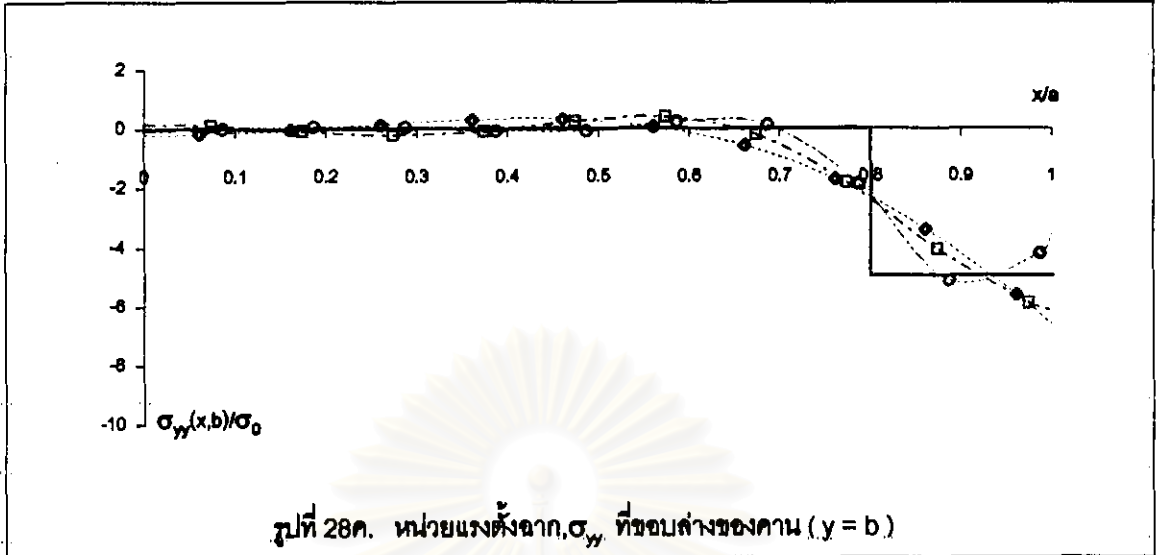
รูปที่ 27.1 แบบจำลองและการแบ่งจำนวนชิ้นส่วนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม STADD III ของคานช่วงเดียวสำหรับกรณีที่มี  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$  ของตัวอย่างที่ 5.



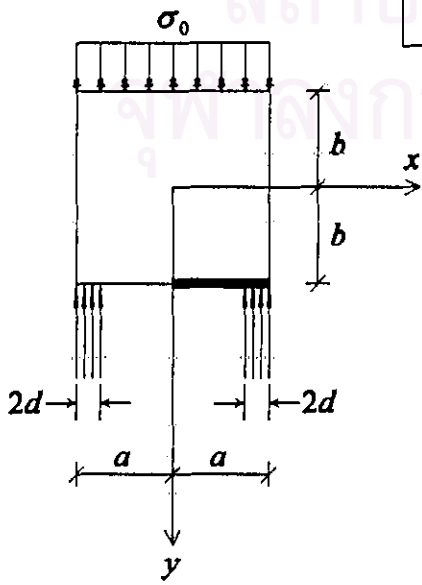
-◇- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       -□- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 -○- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       — ค่าที่ถูกต้อง



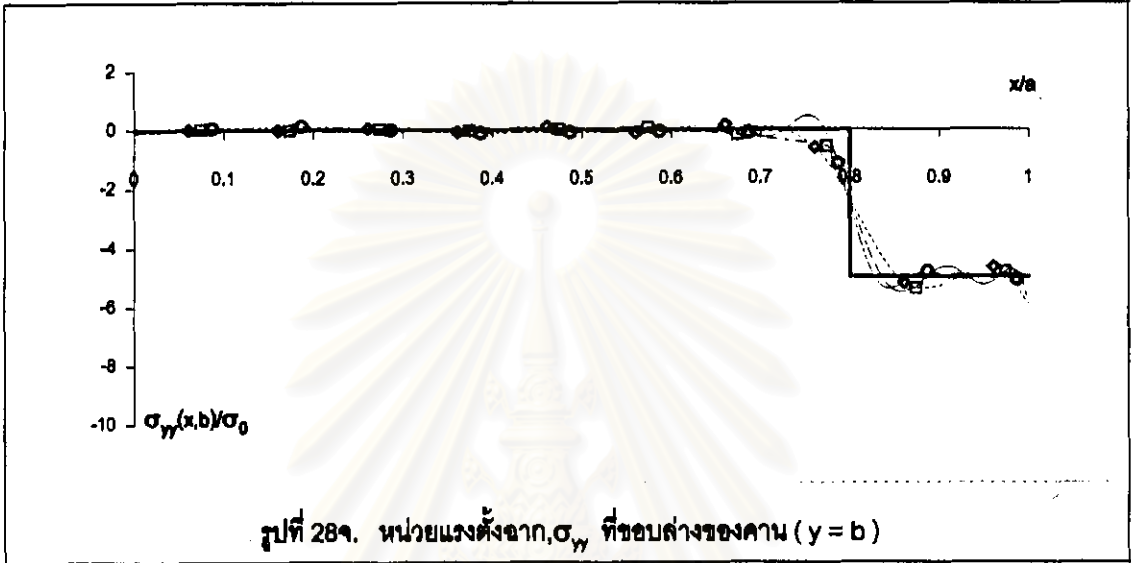
รูปที่ 28. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 5.  
เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$



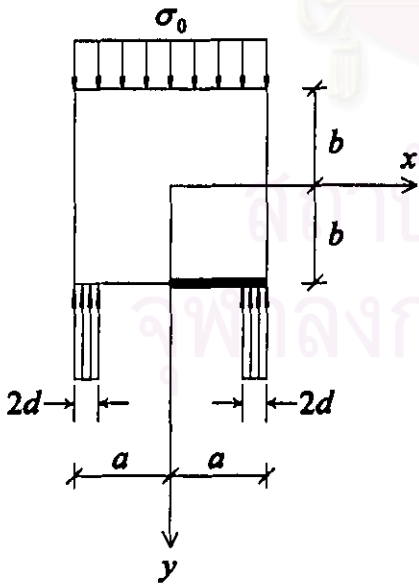
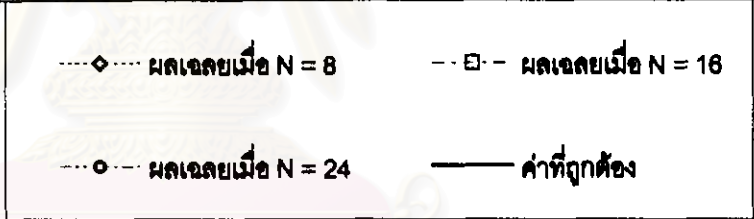
..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 ..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ——— ค่าที่ถูกต้อง



รูปที่ 28.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 5.  
เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$

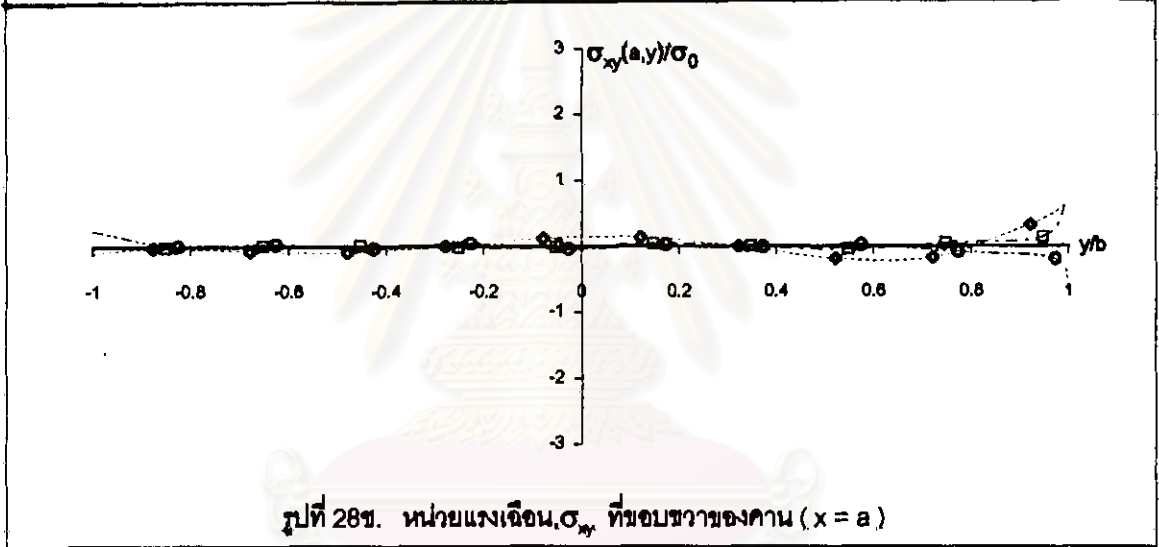
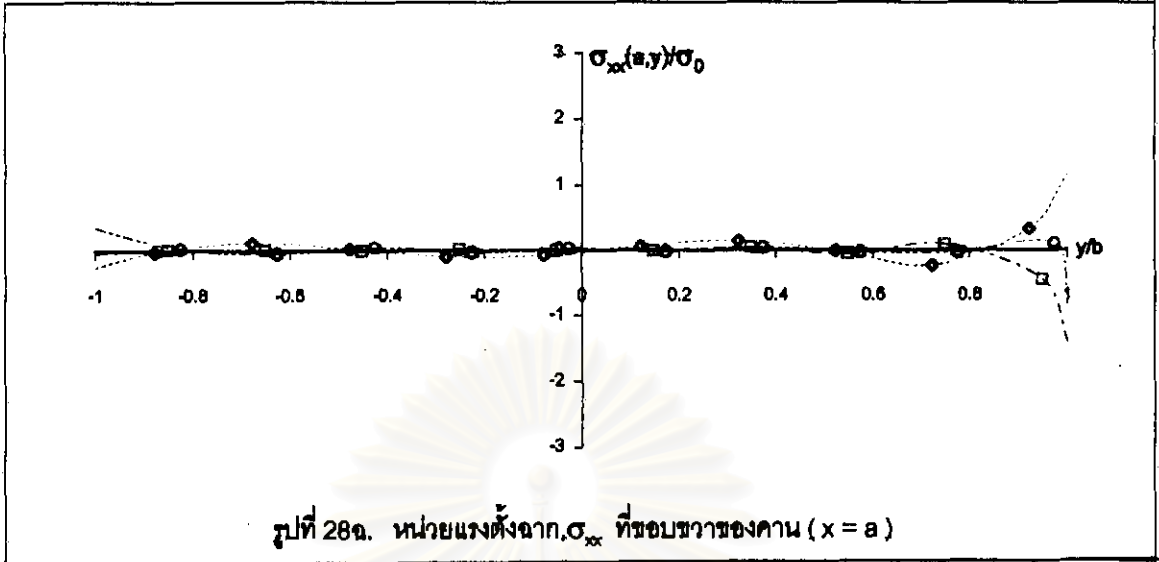


รูปที่ 28๑. หน่วยแรงตั้งฉาก,  $\sigma_{yy}$  ที่ขอบล่างของคาน ( $y = b$ )

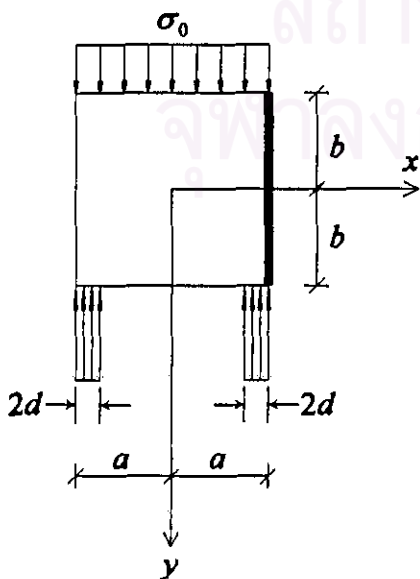


รูปที่ 28.(๓๒) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 5.

เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$

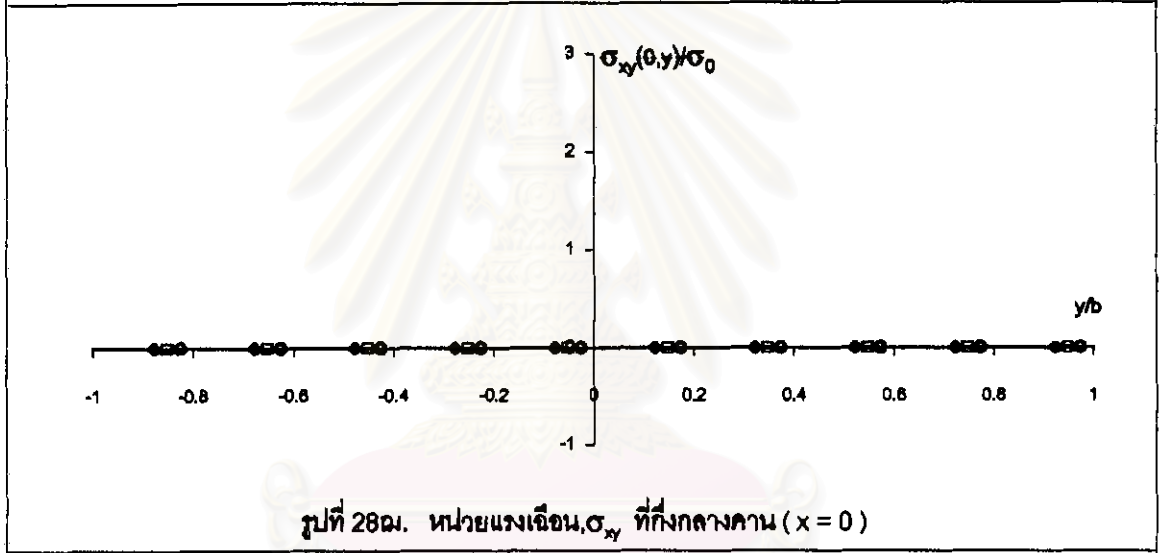
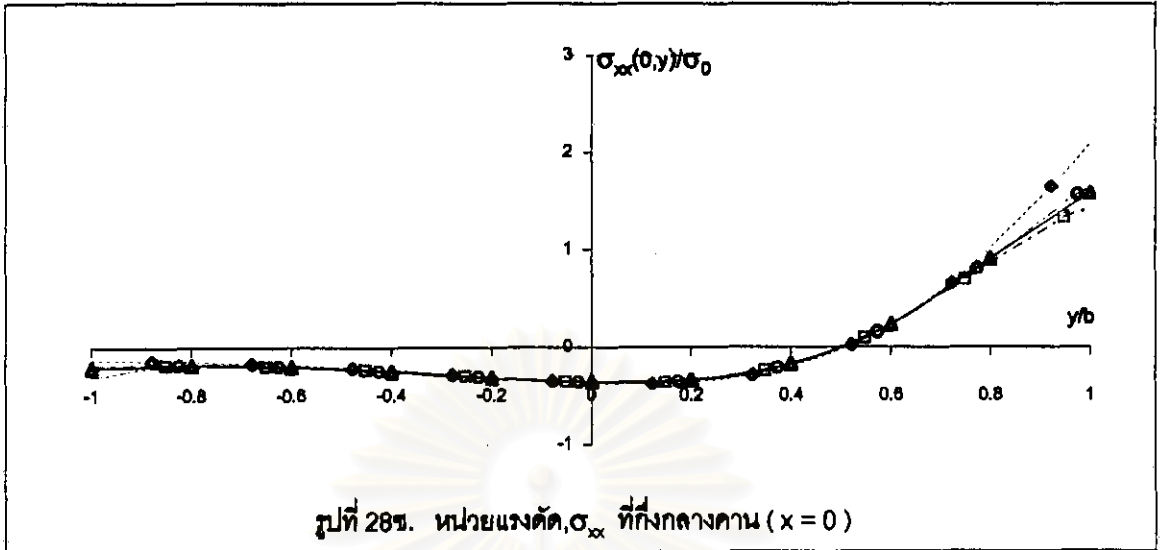


..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - - - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 ..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ——— ค่าที่ถูกต้อง

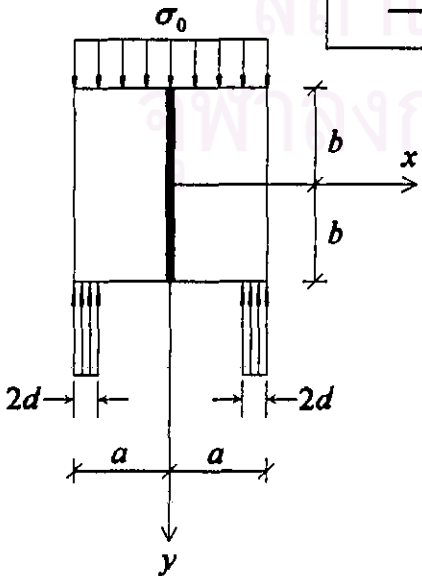


รูปที่ 28.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 5.  
 เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$

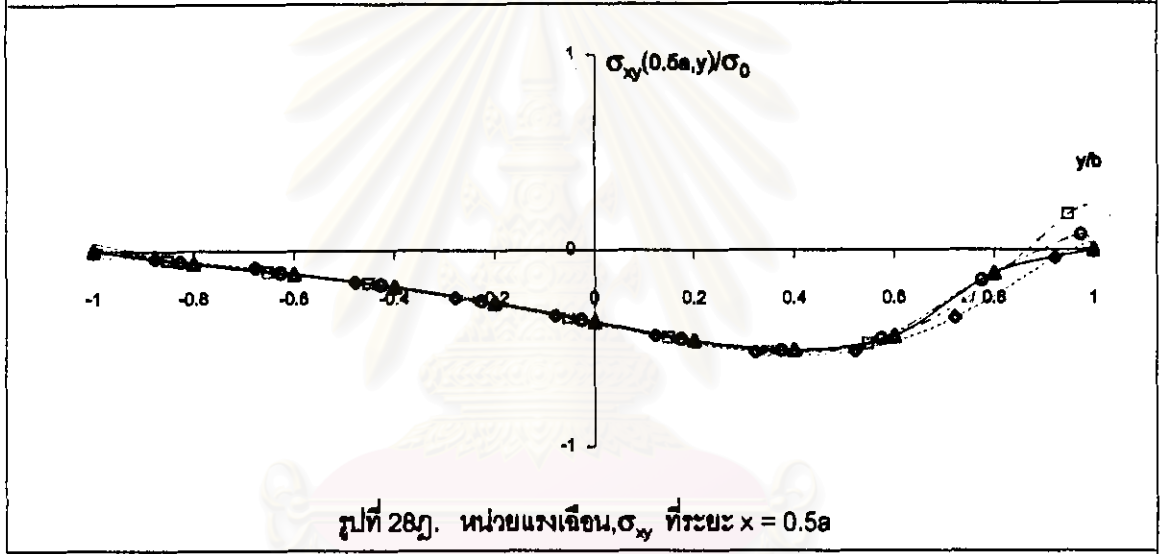
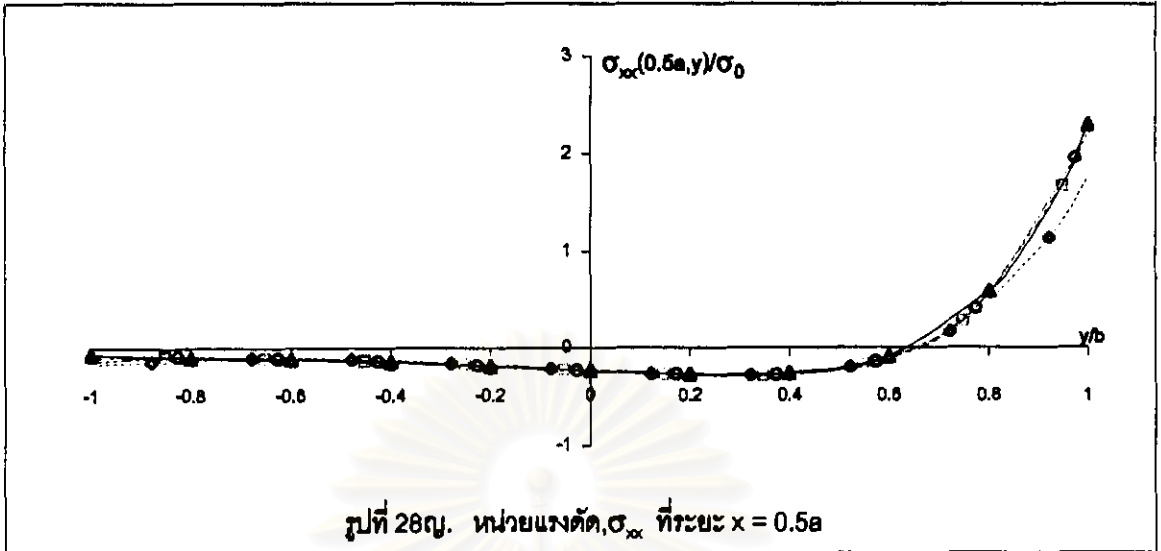




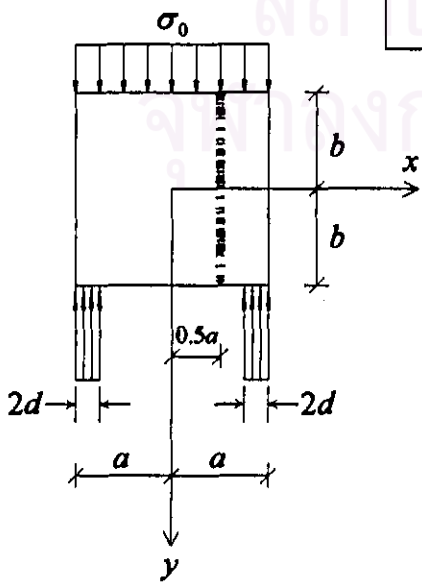
-◇- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       -E- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 -◇- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       -▲- ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  
 — ค่าที่ถูกต้อง



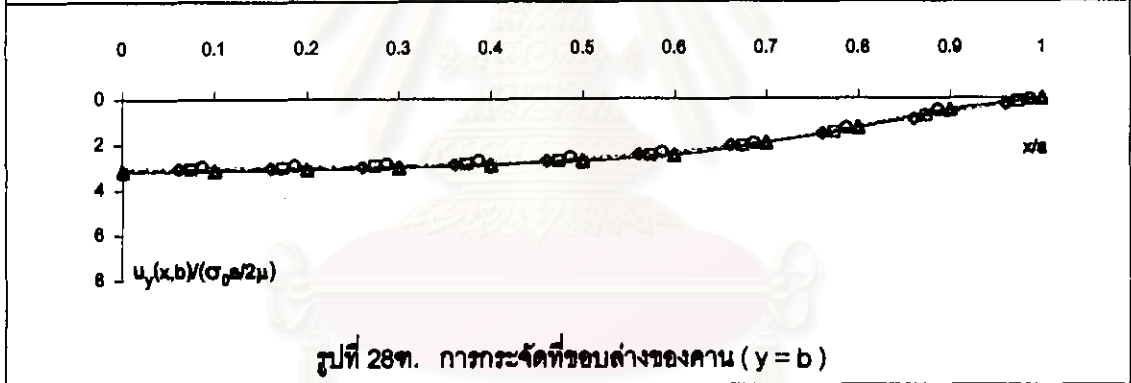
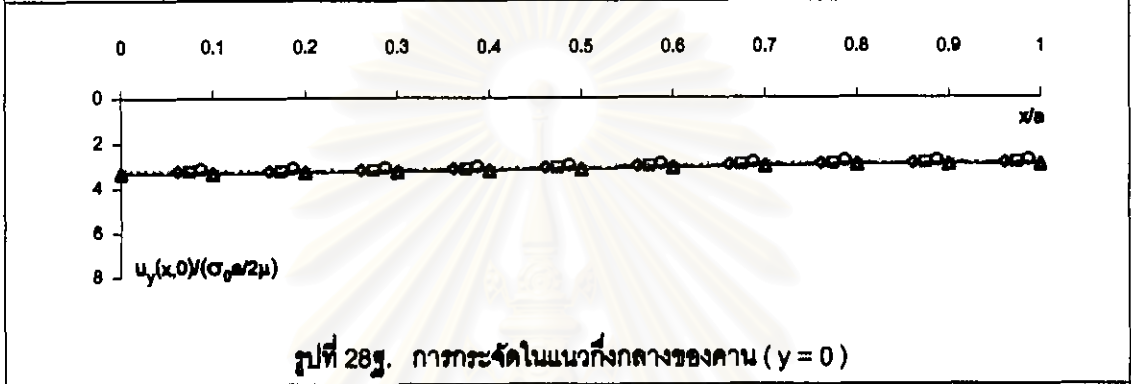
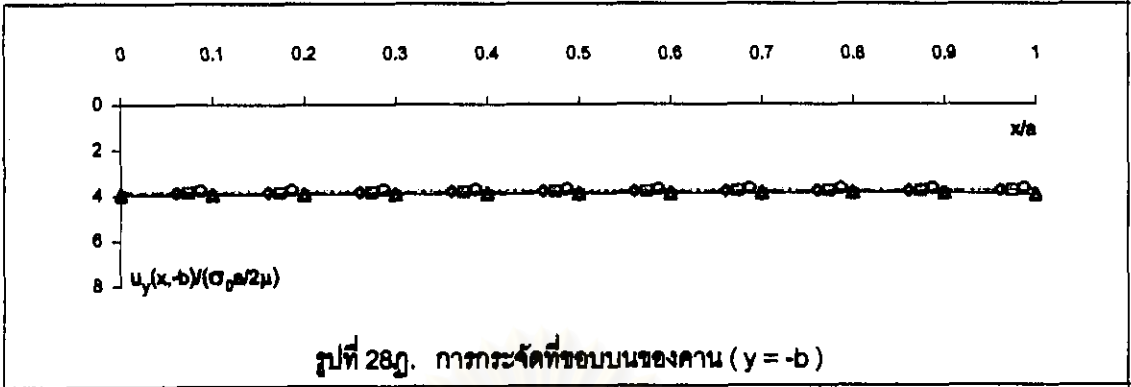
รูปที่ 28.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 5.  
 เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$



- ◇--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$
- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$
- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$
- ▲--- ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 28.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 5.  
เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$



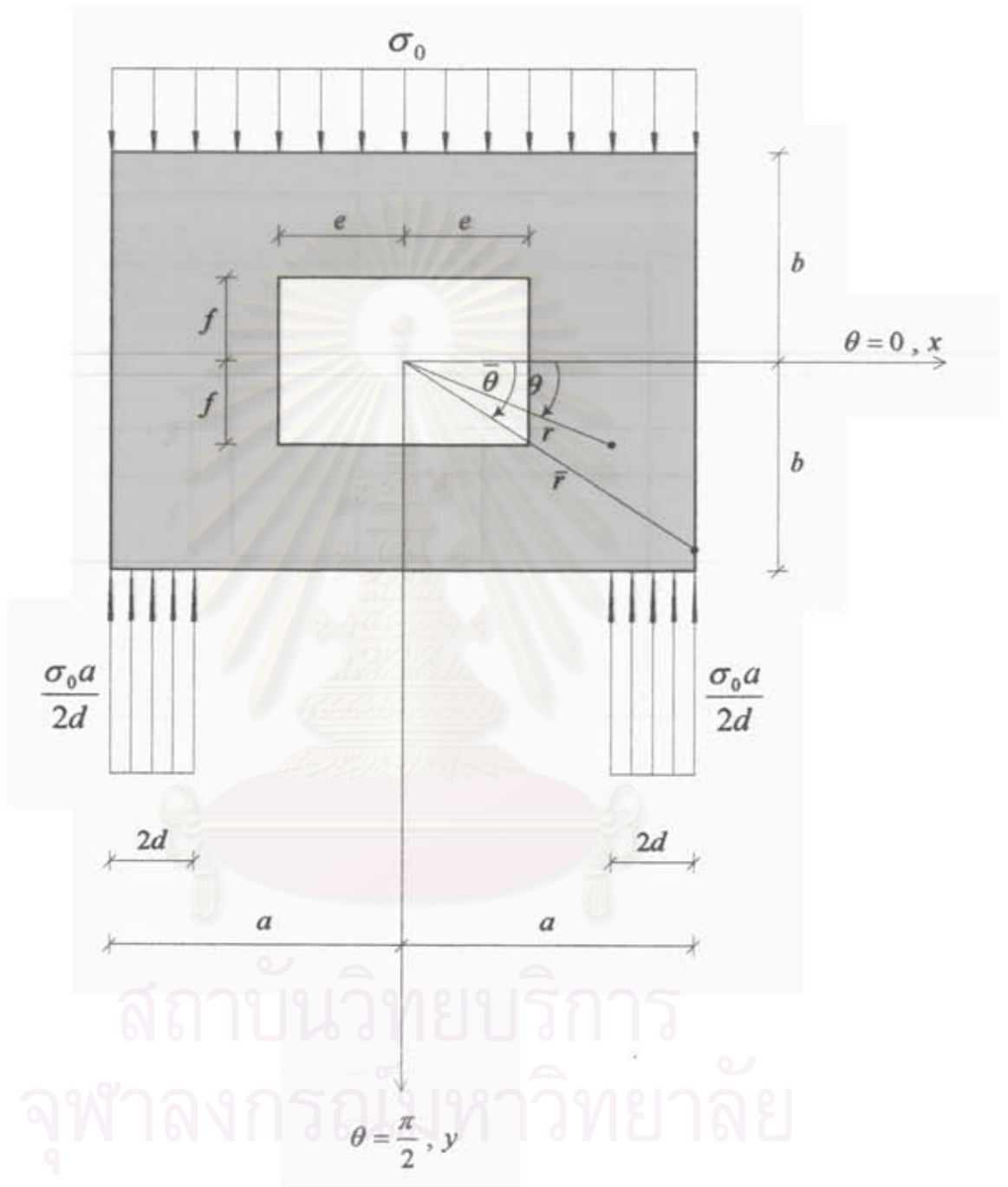
ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$ 

 ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$

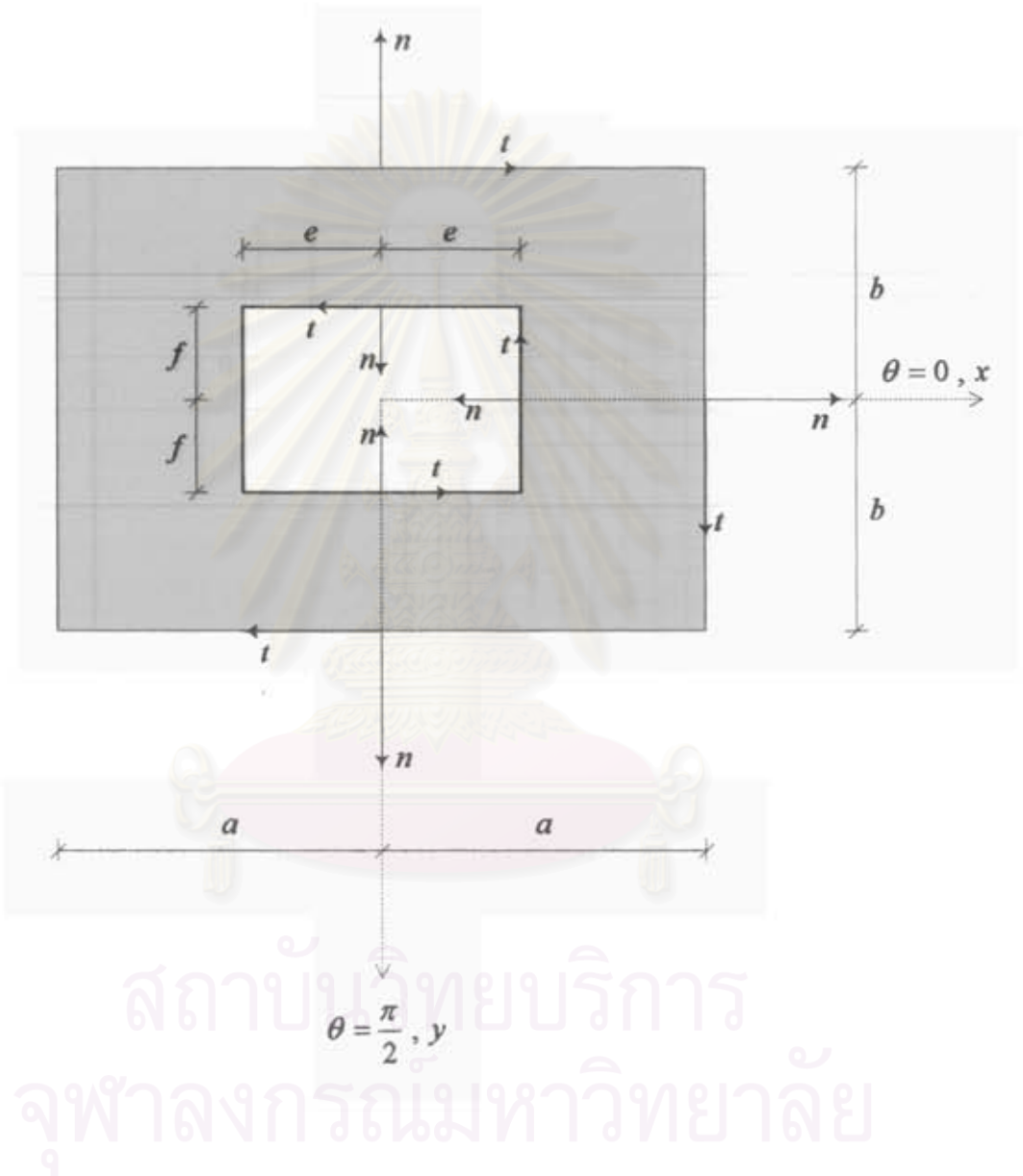
ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$ 

 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลเมนต์

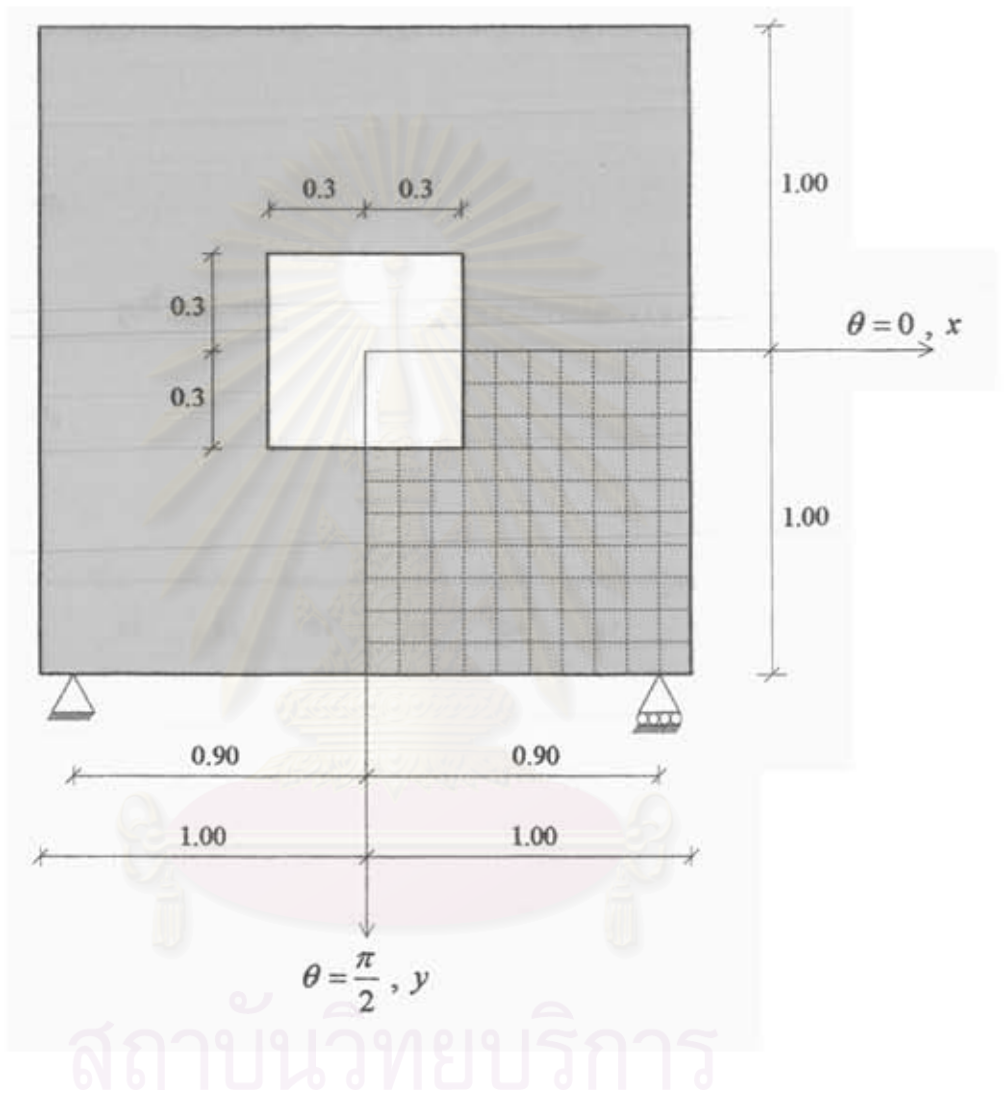
รูปที่ 28.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์หันทัวอย่างที่ 5.  
เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$  และ  $d/a = 0.1$



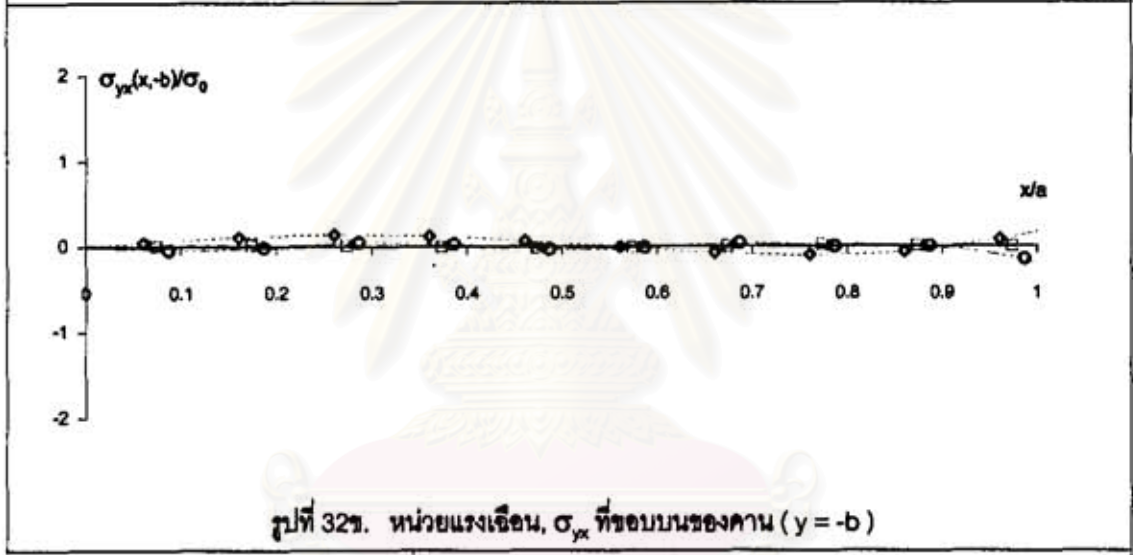
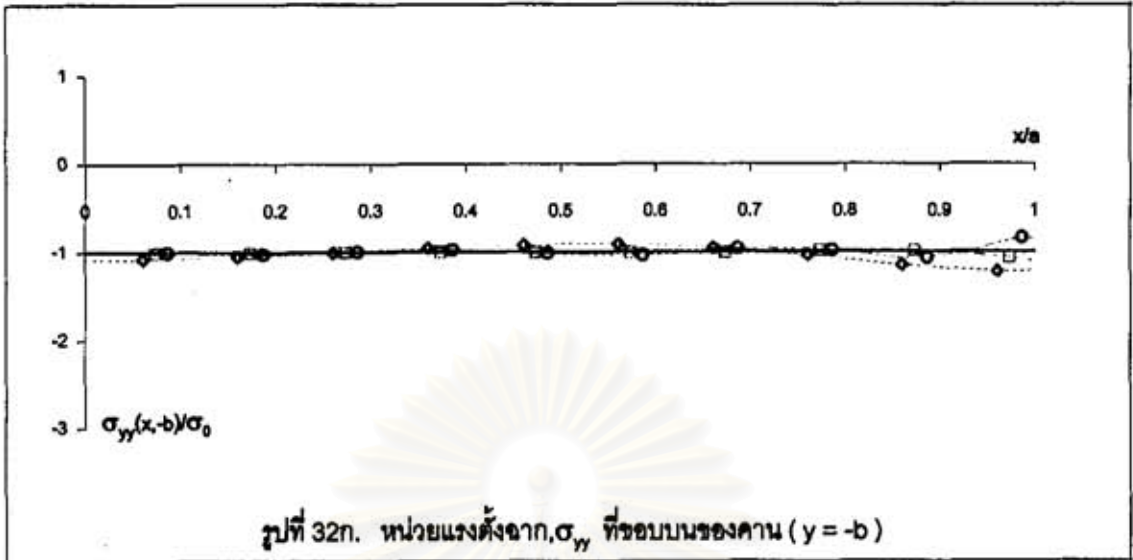
รูปที่ 29. ตัวอย่างที่ 6. คานช่วงเดียวมีช่องเปิดที่กึ่งกลาง และรับหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอที่ขอบบน



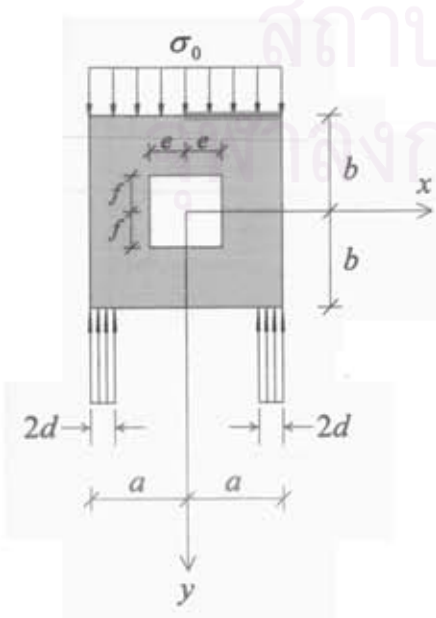
รูปที่ 30. ทิศทางของระบบพิกัด  $n, t$  ที่ขอบต่าง ๆ ของโดเมนในตัวอย่างที่ 6.



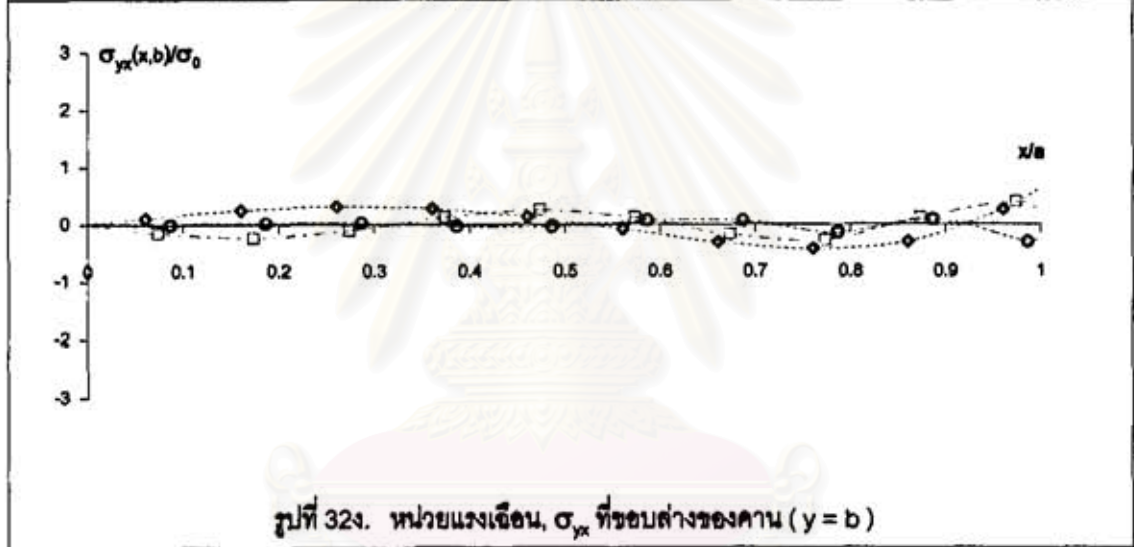
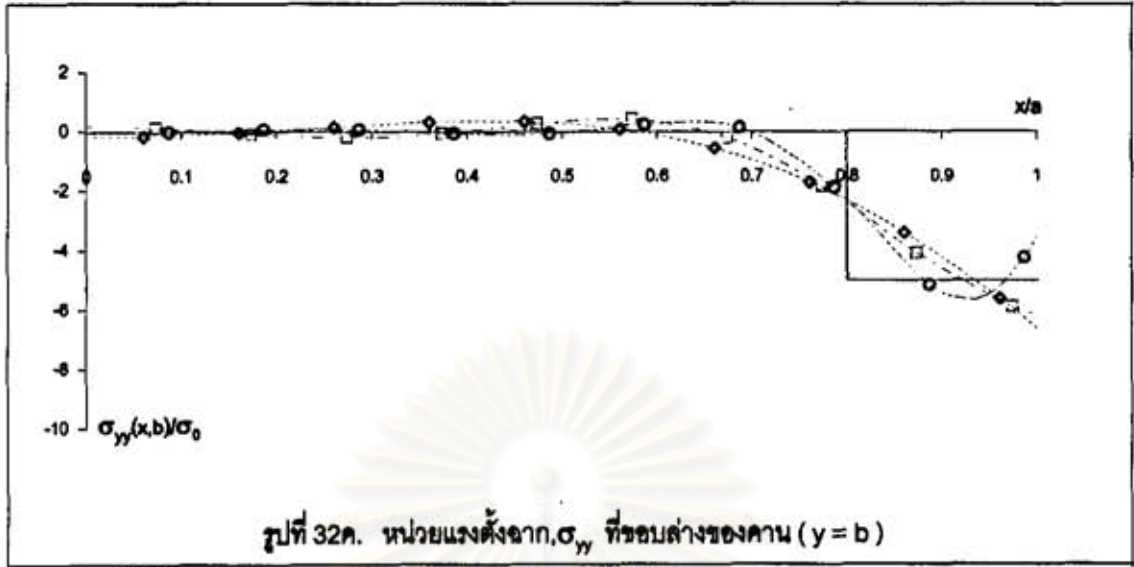
- รูปที่ 31. แบบจำลองและการแบ่งจำนวนจันส่วนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม STADD III ของคานช่วงเดียวมีช่องเปิด สำหรับกรณีนี้  $b/a = 1$ ,  $d/a = 0.1$ ,  $e/a = 0.3$  และ  $f/a = 0.3$  ของตัวอย่างที่ 6.



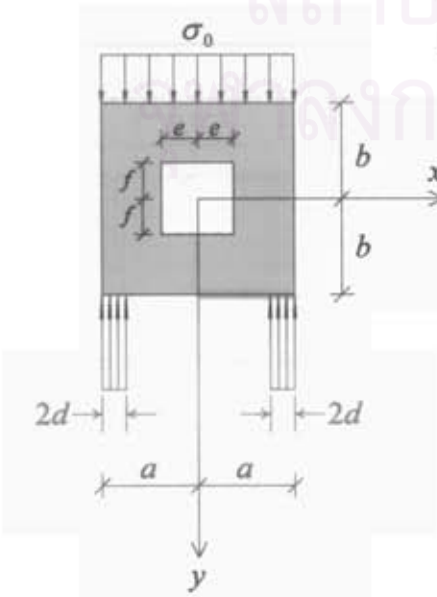
- - -  $\diamond$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - -  $\square$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 - - -  $\circ$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ——— ค่าที่ถูกต้อง



รูปที่ 32. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$

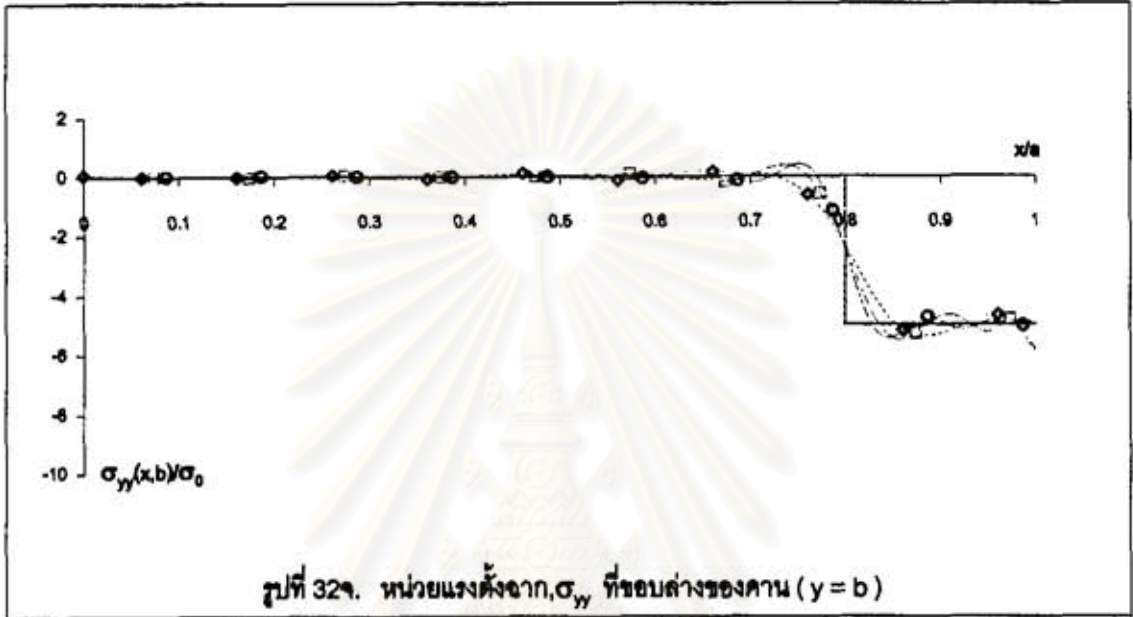


.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 .....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ————— ค่าที่ถูกต้อง

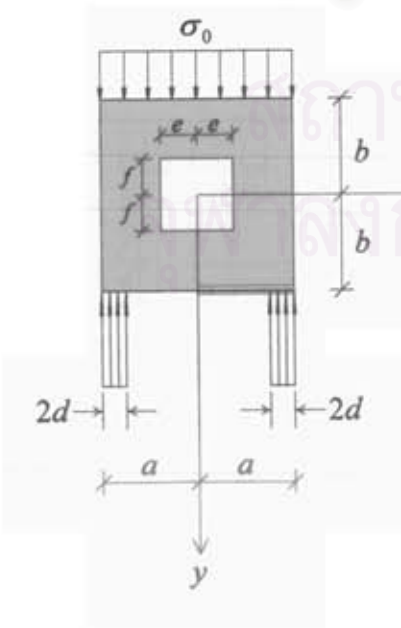
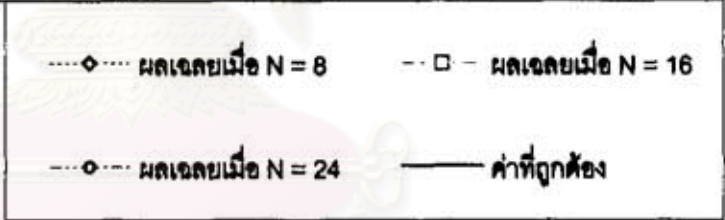


รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$

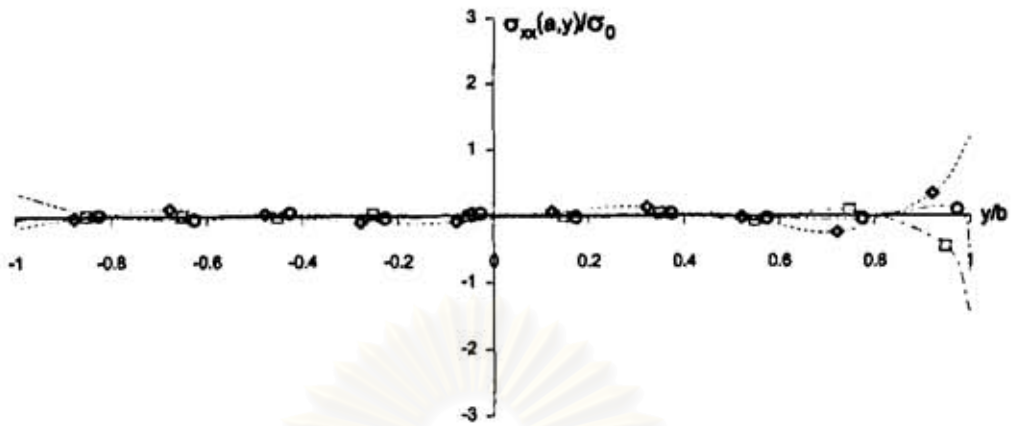




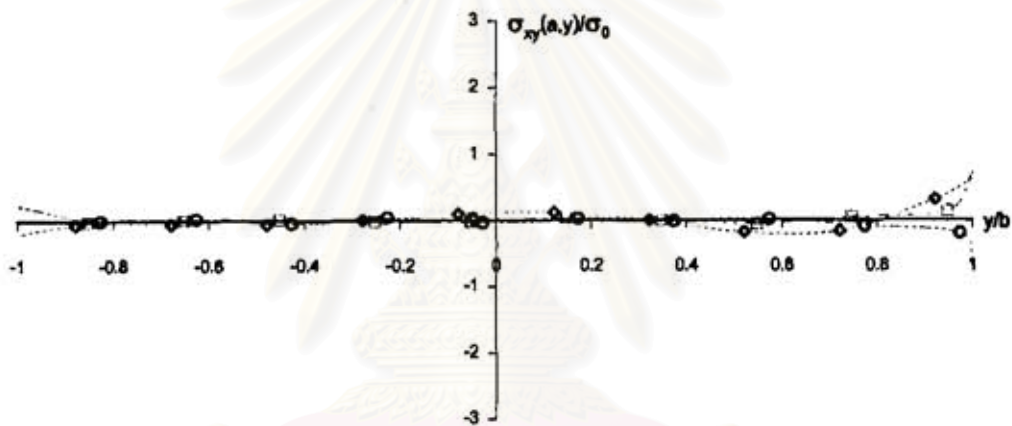
รูปที่ 32๑. หน่วยแรงดึงจาก  $\sigma_{yy}$  ที่ขอบล่างของคาน ( $y = b$ )



รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$



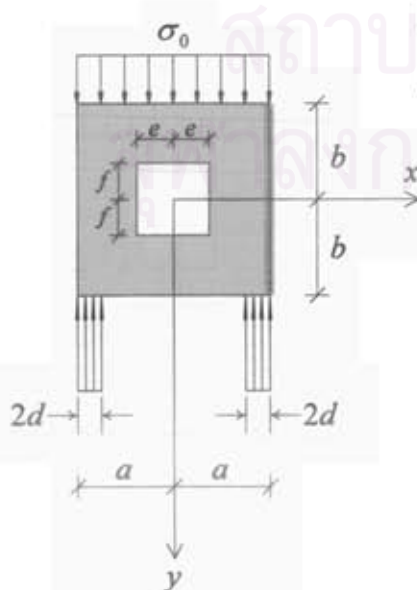
รูปที่ 32อ. หน่วยแรงดัดฉาก,  $\sigma_{xx}$  ที่ขอบขวาของคาน ( $x = a$ )



รูปที่ 32ข. หน่วยแรงเฉือน,  $\sigma_{xy}$  ที่ขอบขวาของคาน ( $x = a$ )

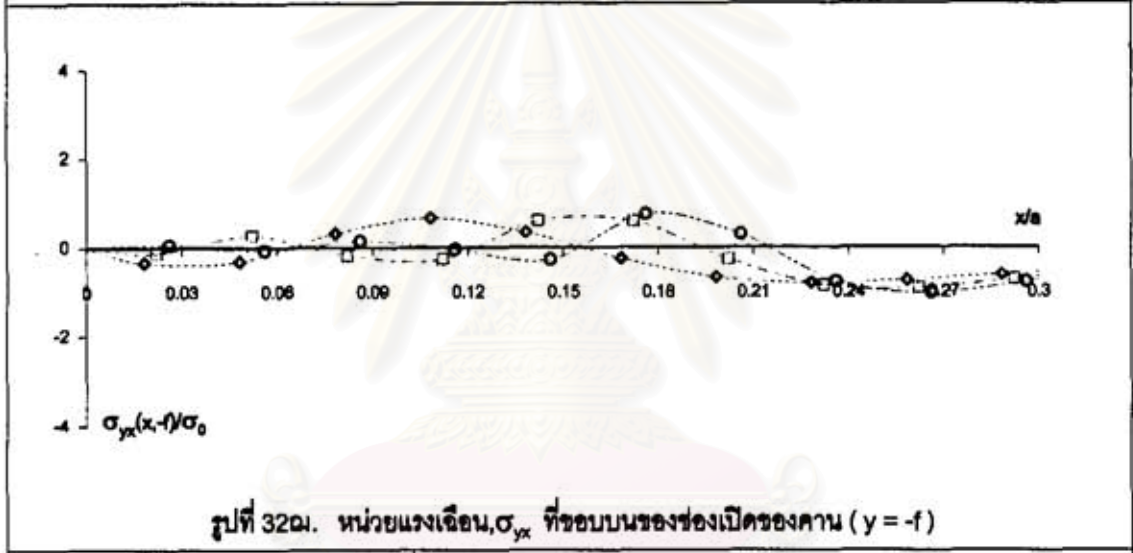
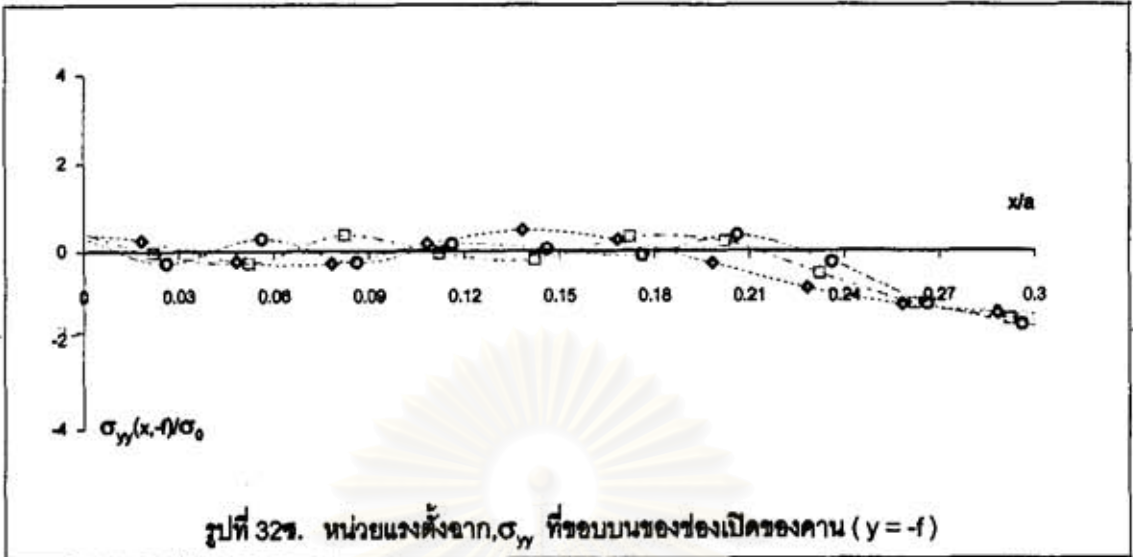
.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$

.....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ——— ค่าที่ถูกต้อง

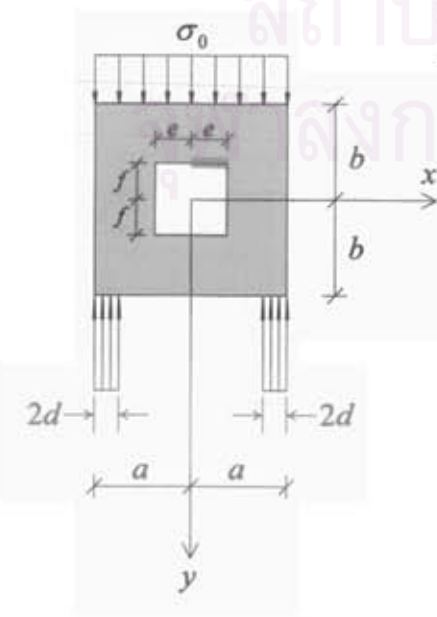


รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้

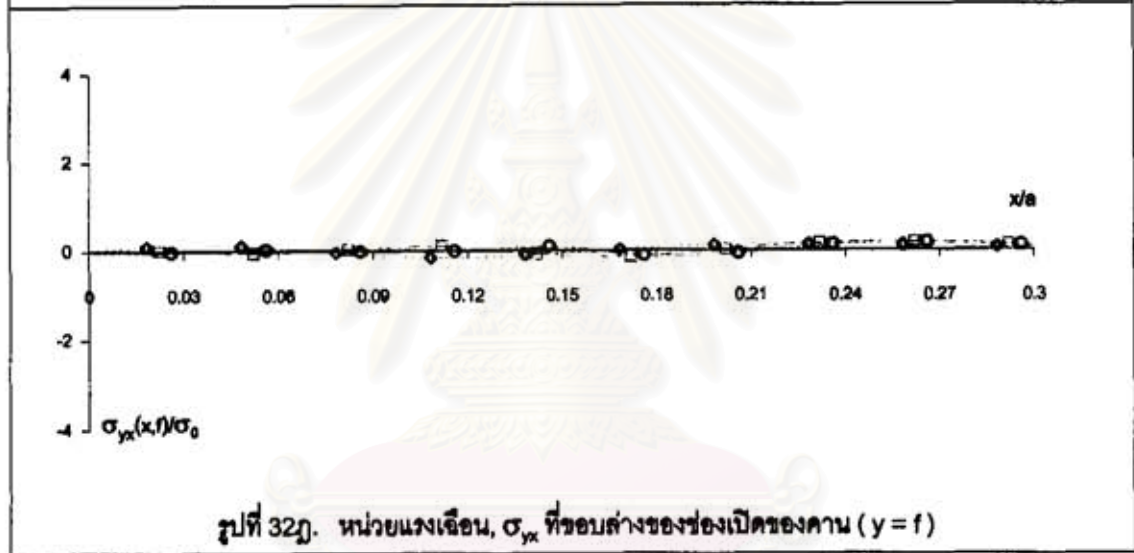
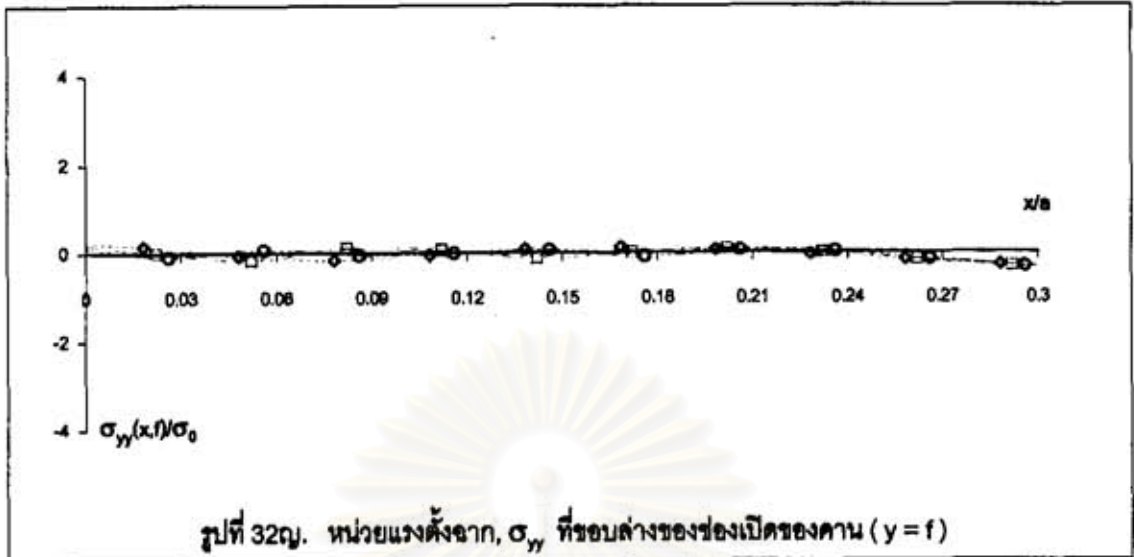
$$b/a = 1, \quad e/a = f/a = 0.3 \quad \text{และ} \quad d/a = 0.1$$



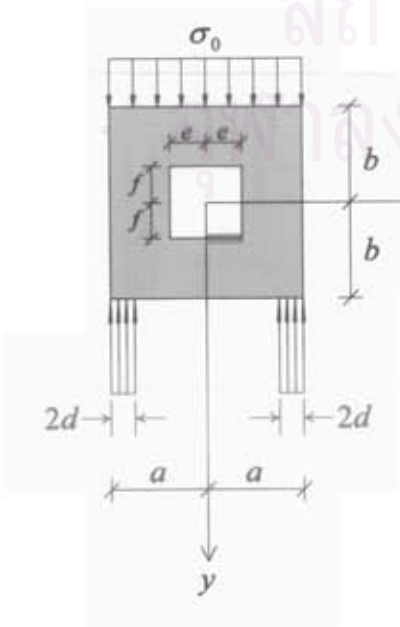
.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 .....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ——— ค่าที่ถูกต้อง



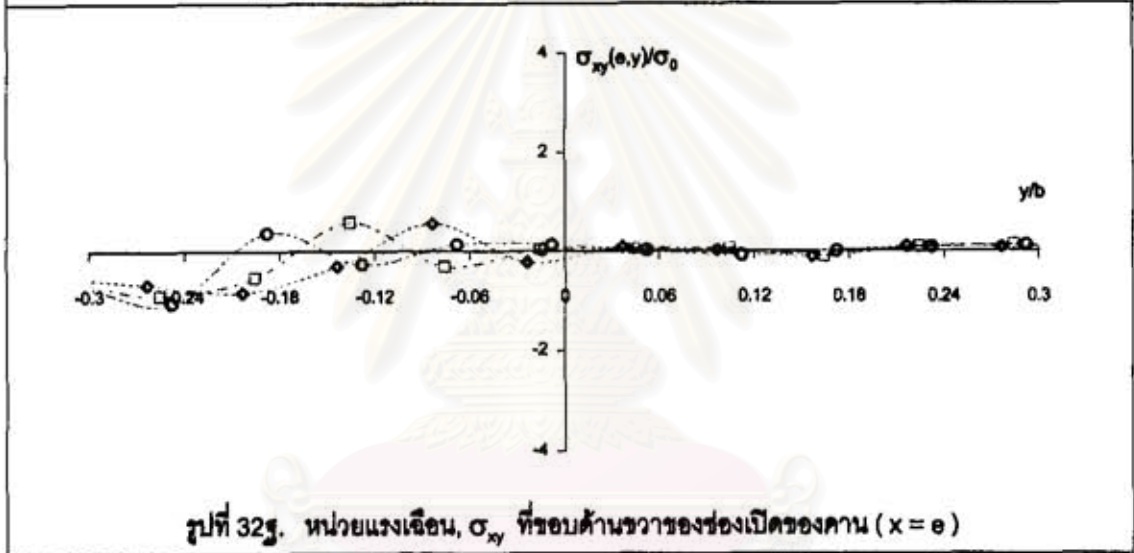
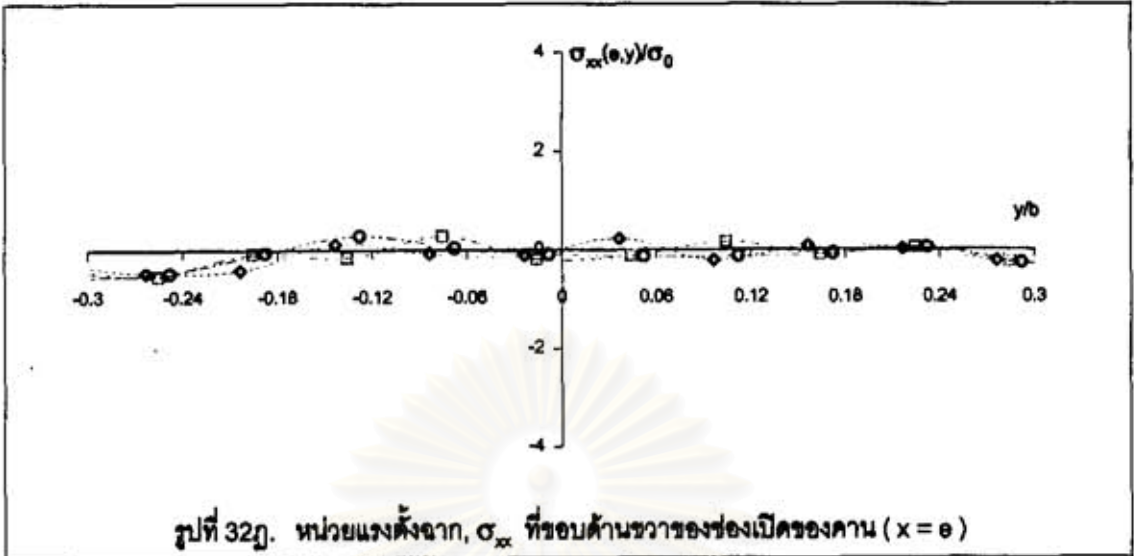
รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$



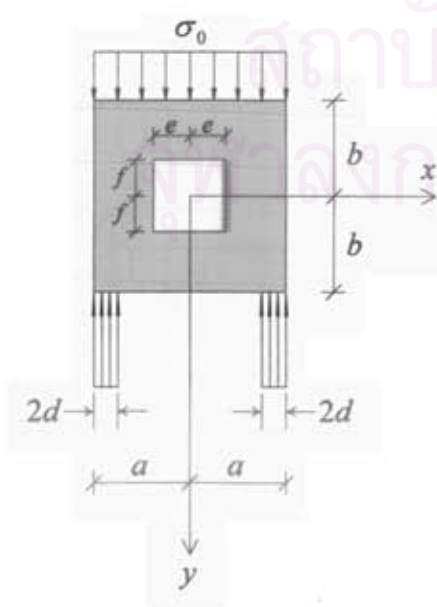
.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 .....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ——— ค่าที่ถูกต้อง



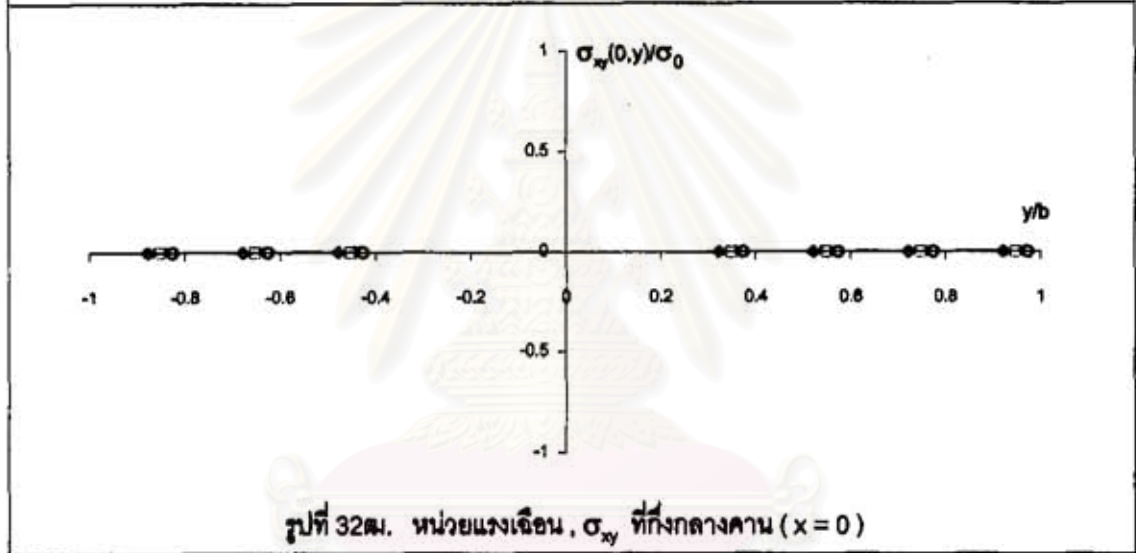
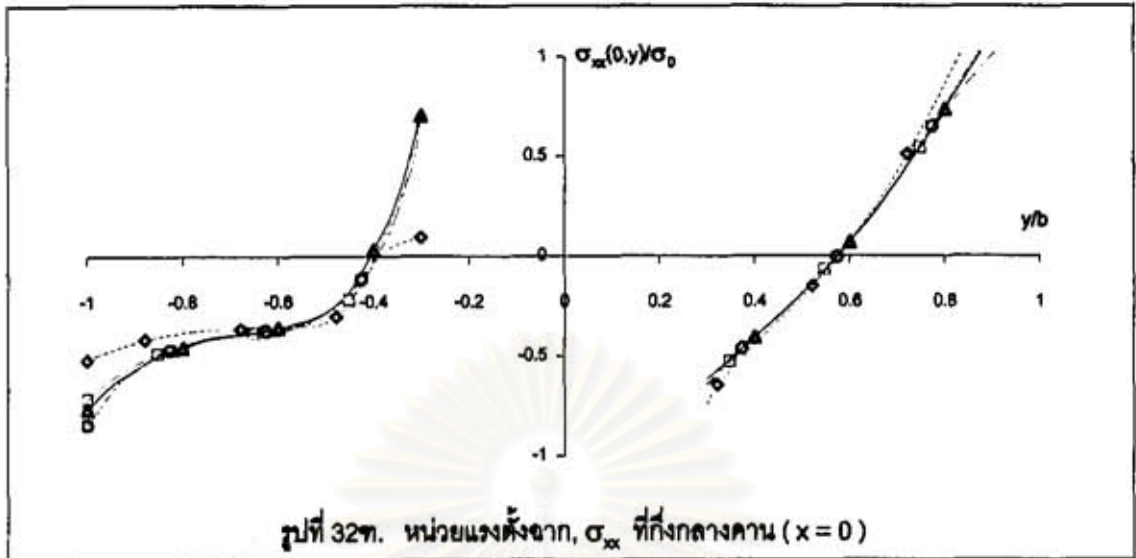
รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1, e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$



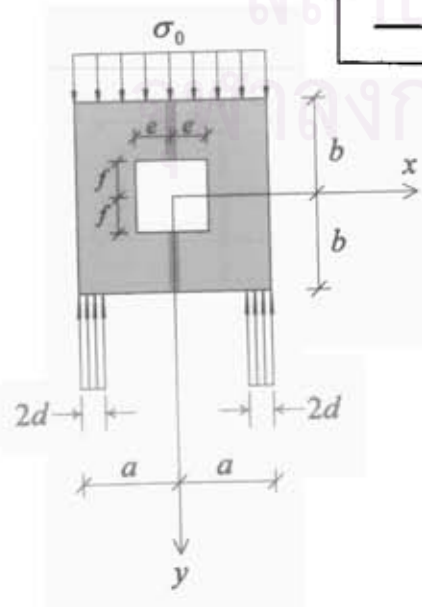
.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 .....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ————— ค่าที่ถูกต้อง



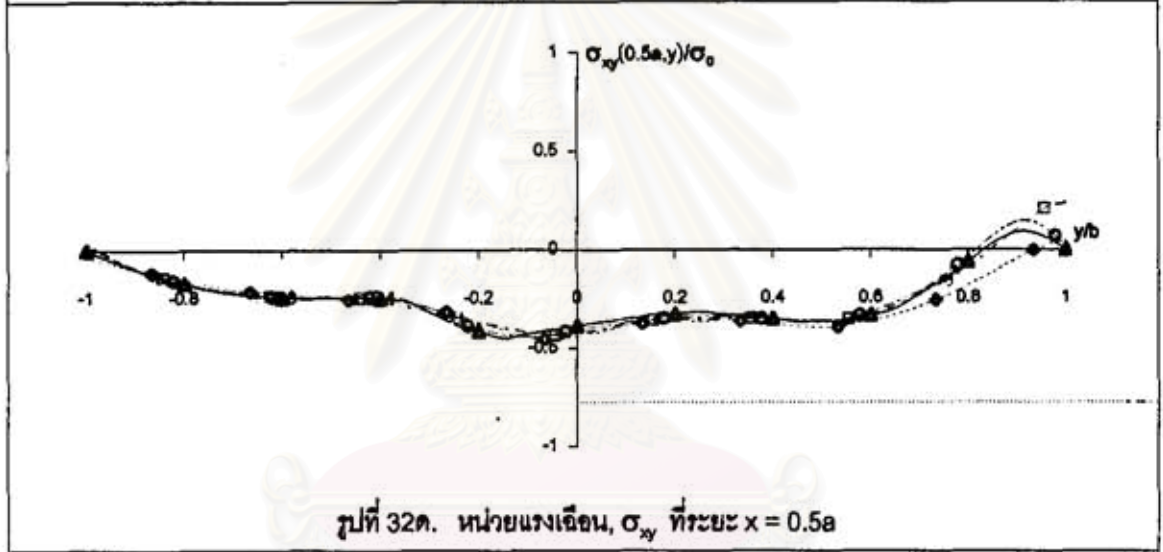
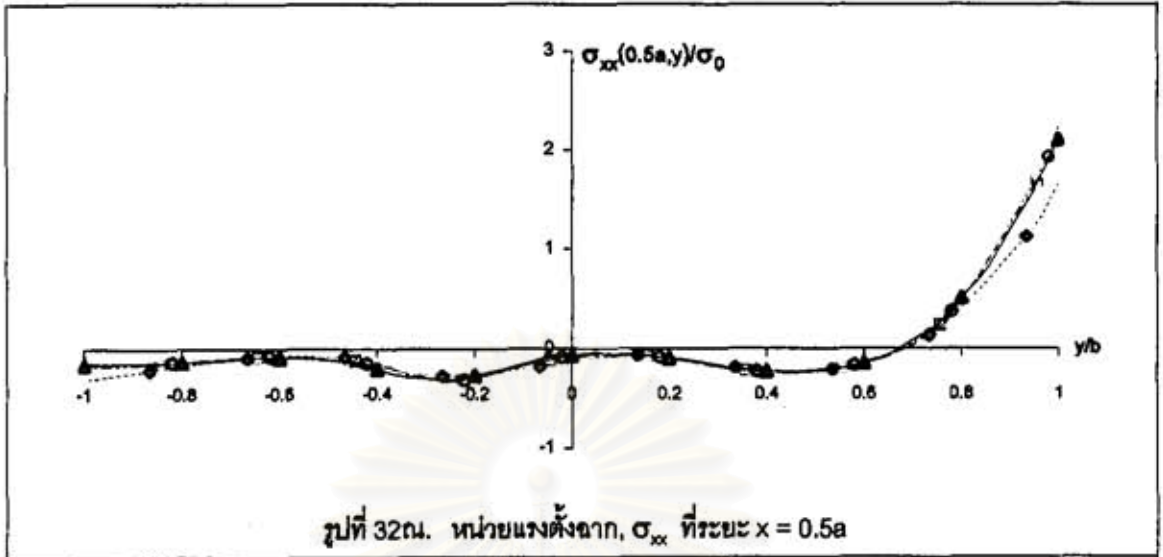
รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$



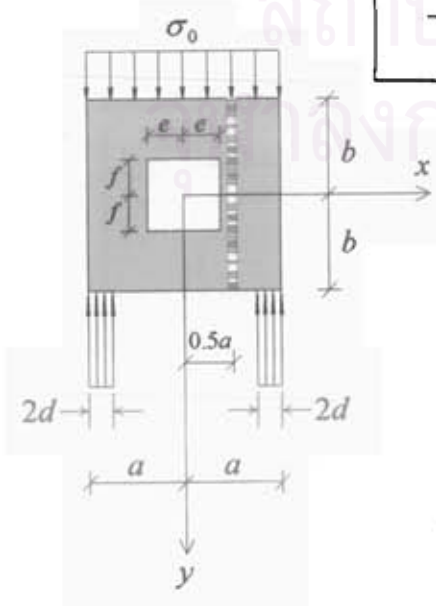
- ◇--- ผลเฉลยเมื่อ  $N=8$
- ผลเฉลยเมื่อ  $N=16$
- ผลเฉลยเมื่อ  $N=24$
- ▲--- ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- ค่าที่ถูกต้อง



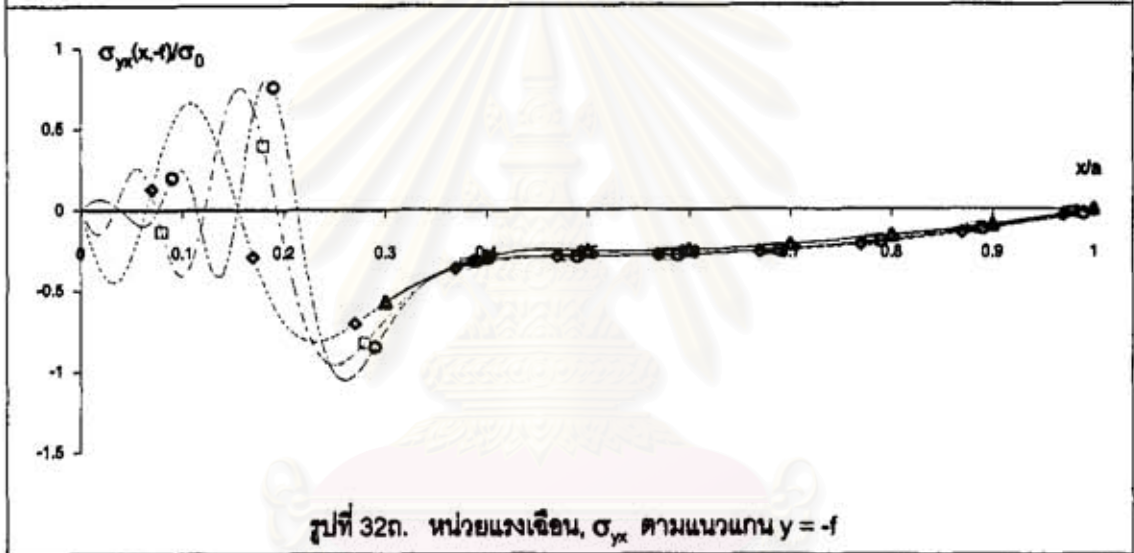
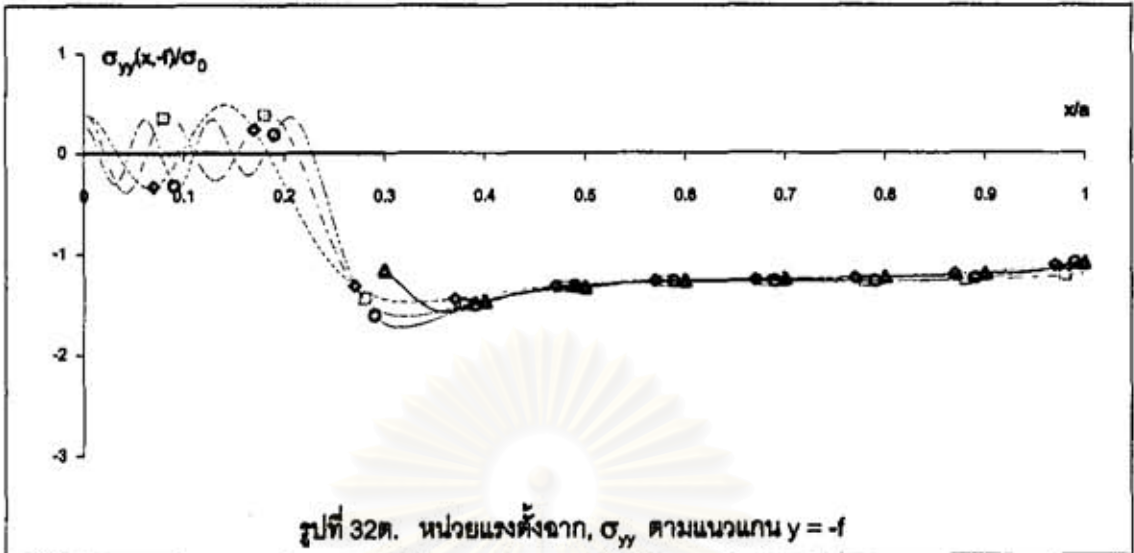
รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$



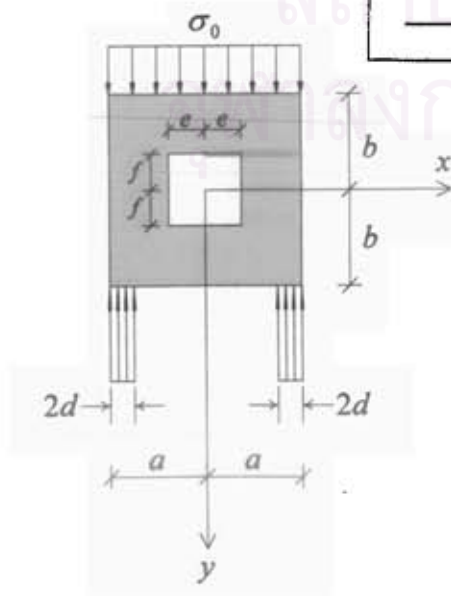
- - -  $\diamond$  - - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - -  $\square$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 - - -  $\circ$  - - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       - -  $\blacktriangle$  - - ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 32.(ต่อ) แสดงผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$

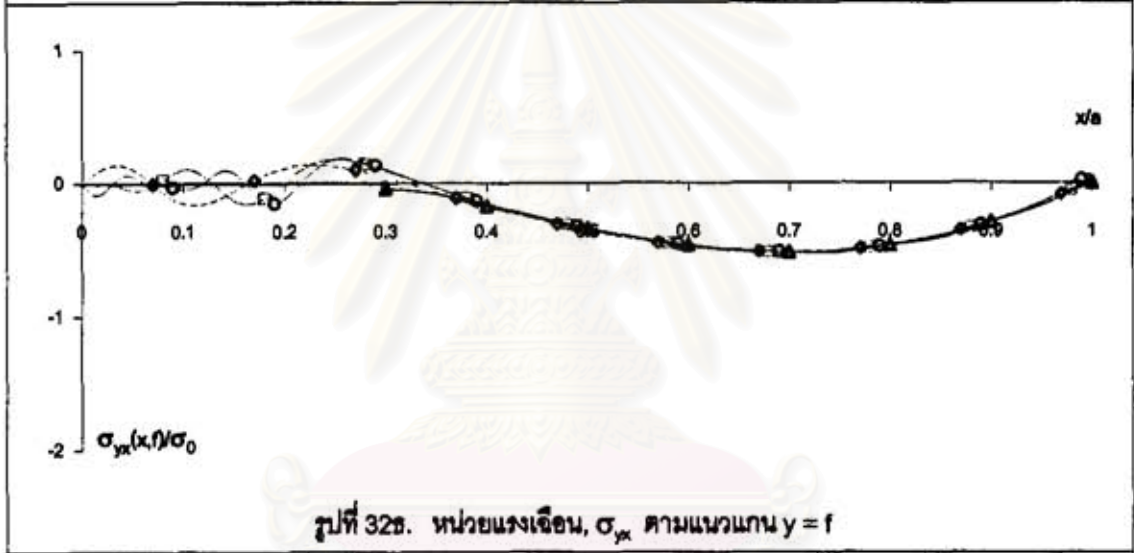
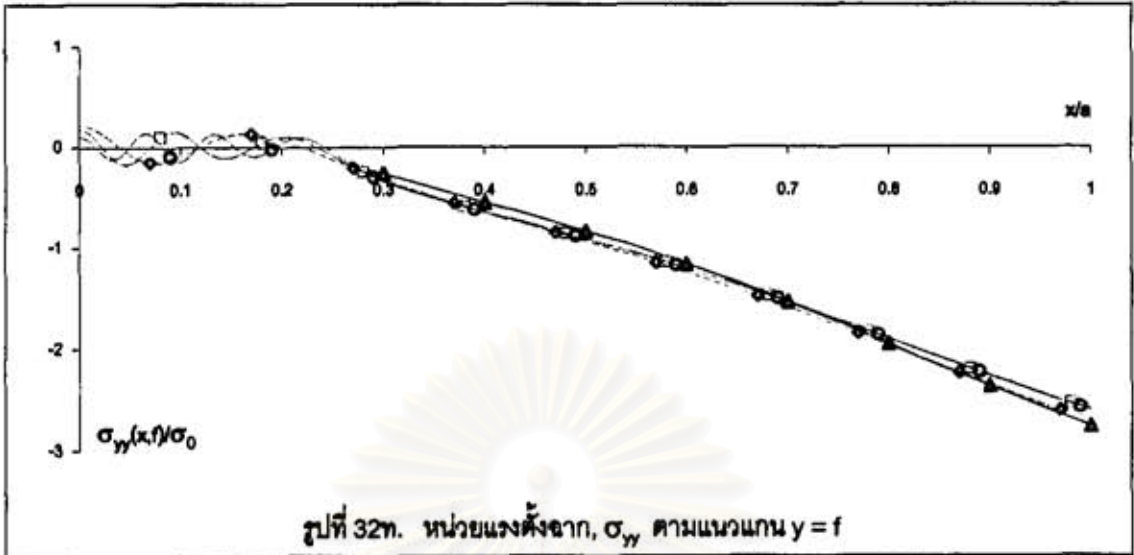


---◇--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 ---○--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       —▲— ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  
 ————— ค่าที่ถูกต้อง

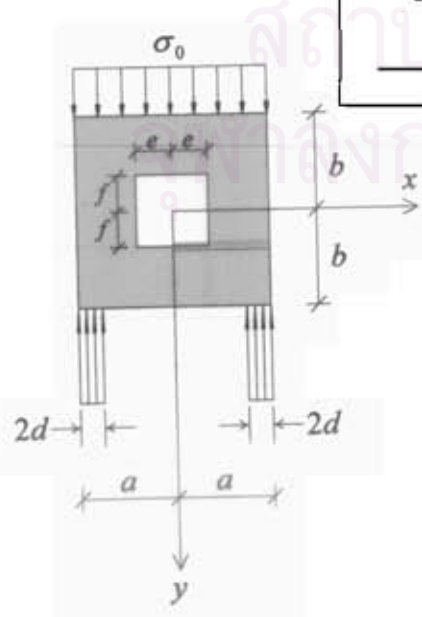


รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$

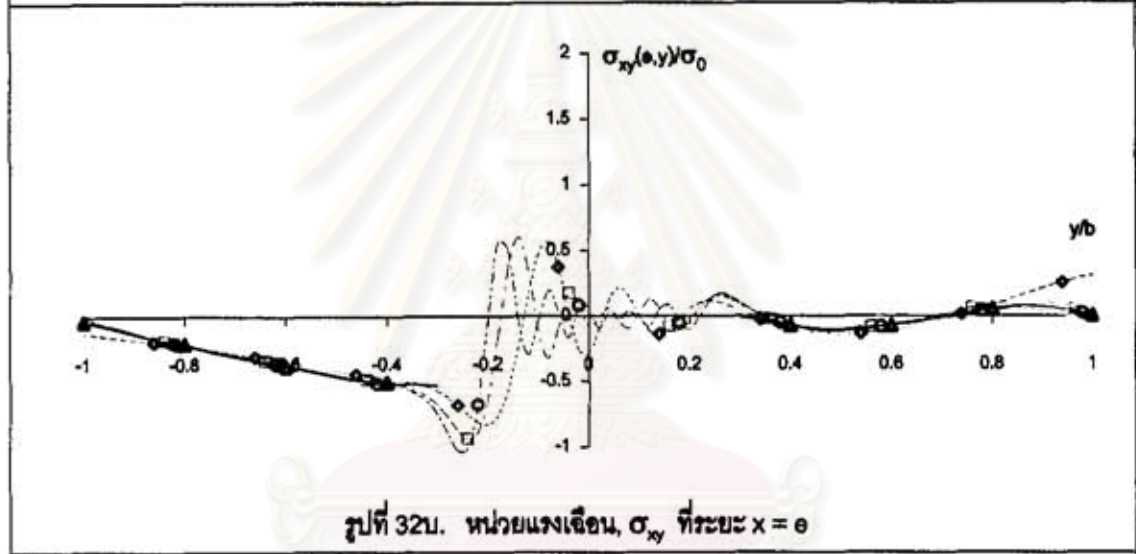
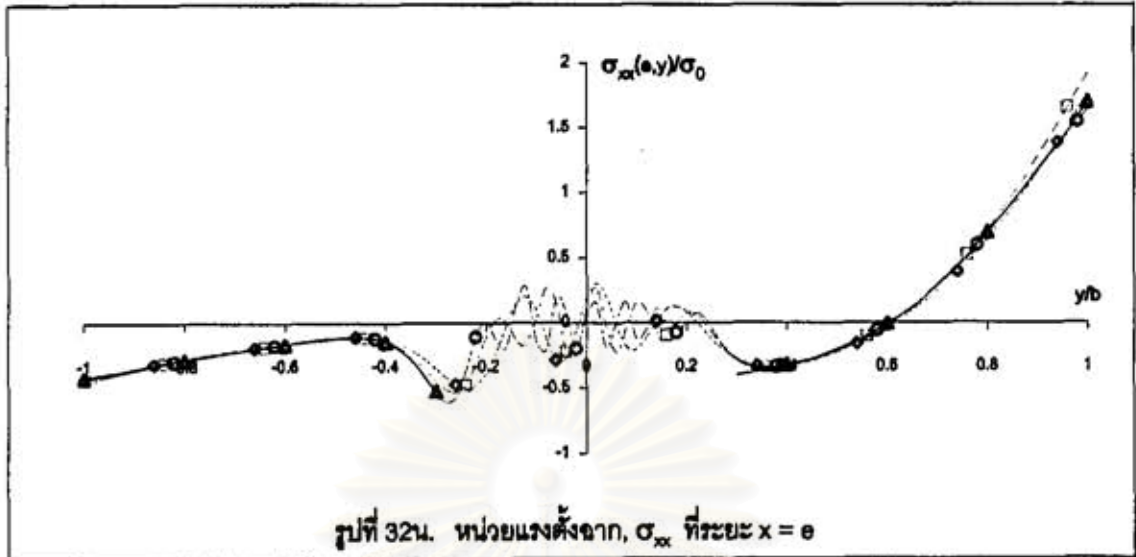




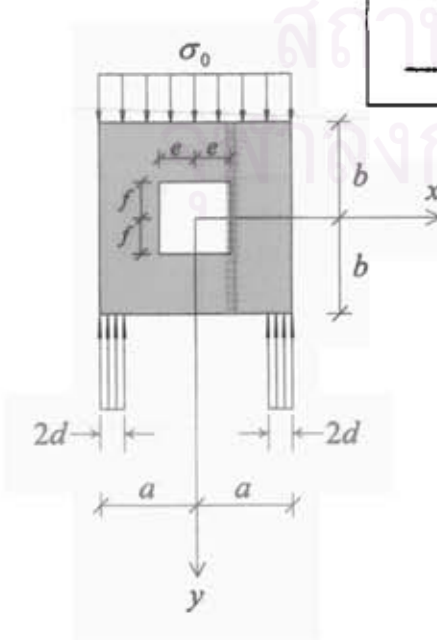
- ◇--- ผลเฉลยเมื่อ  $N=8$
- ผลเฉลยเมื่อ  $N=16$
- ผลเฉลยเมื่อ  $N=24$
- ▲— ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- ค่าที่ถูกต้อง



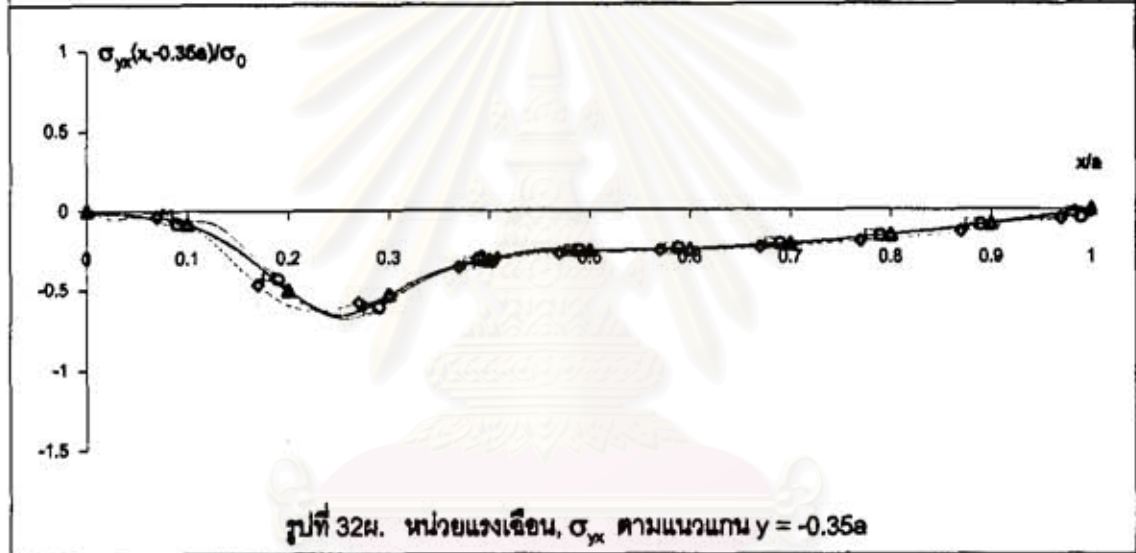
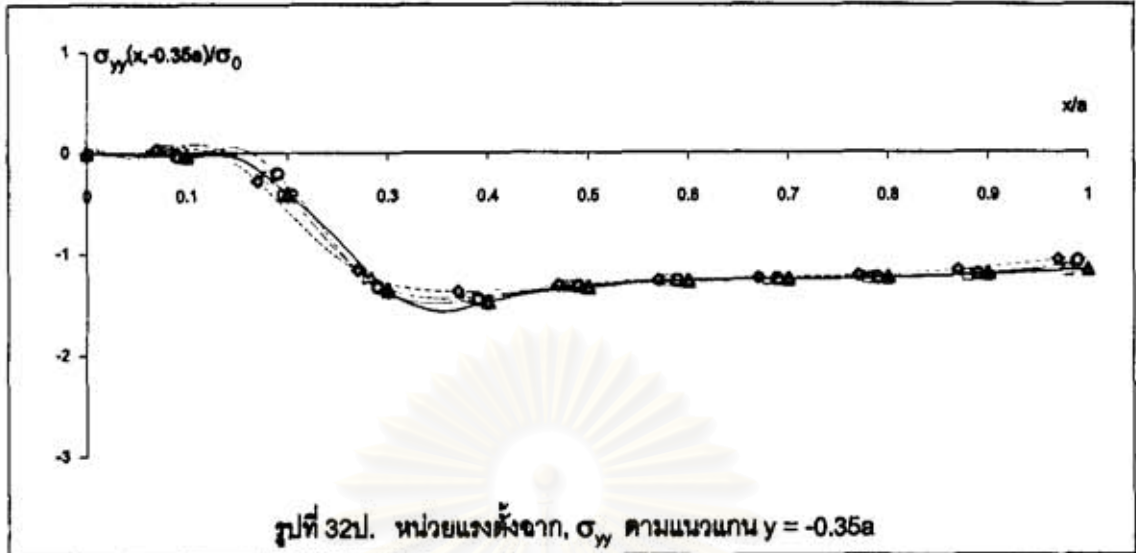
รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์หิโนตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$



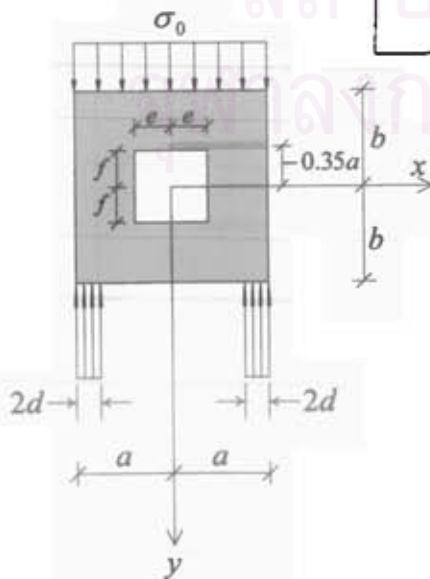
.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$                       - - □ - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 - - ○ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$                       —▲— ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  
 ————— ค่าที่ถูกต้อง



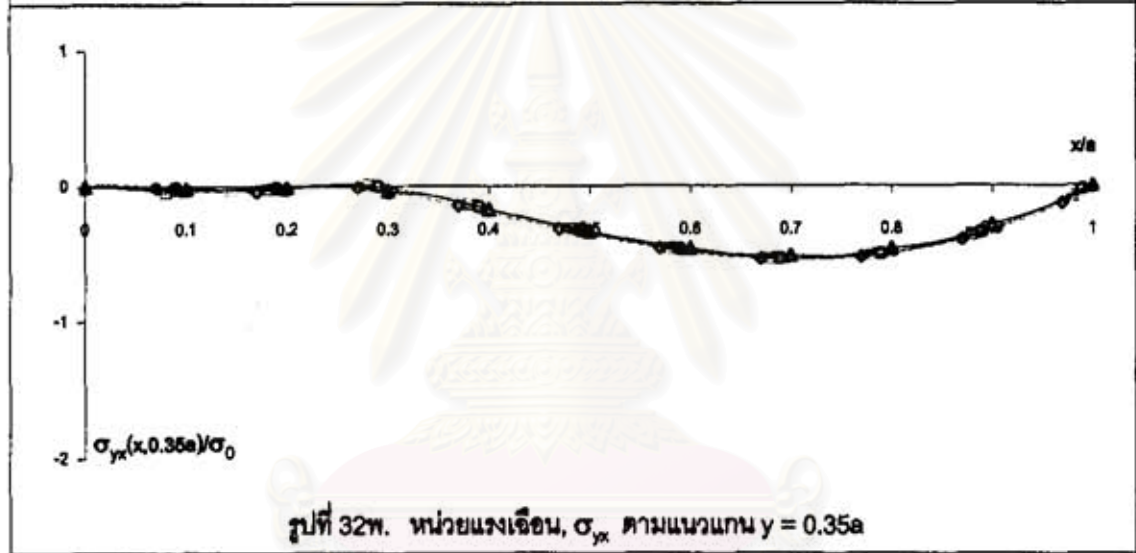
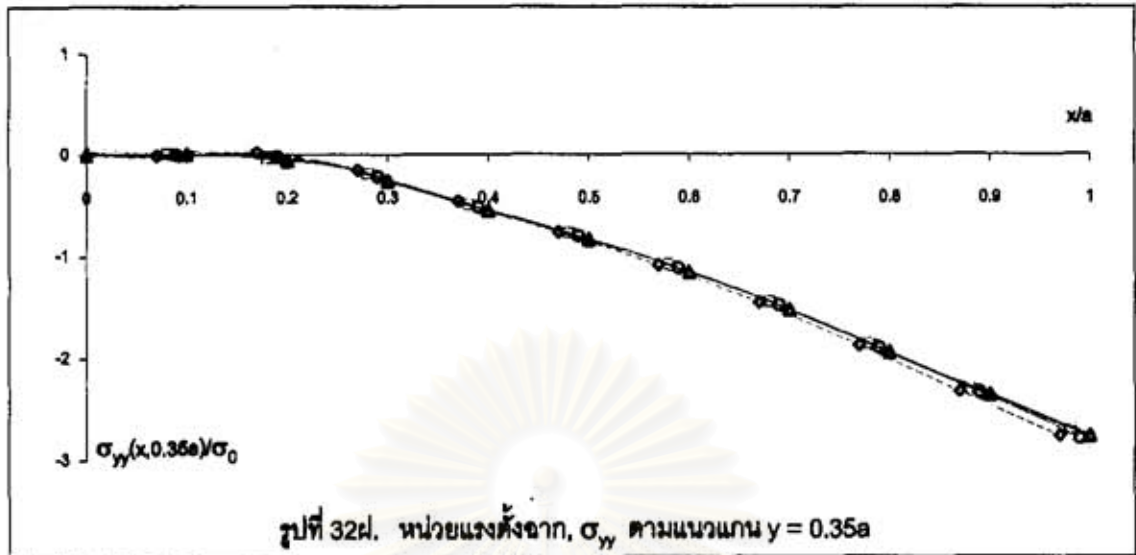
รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$



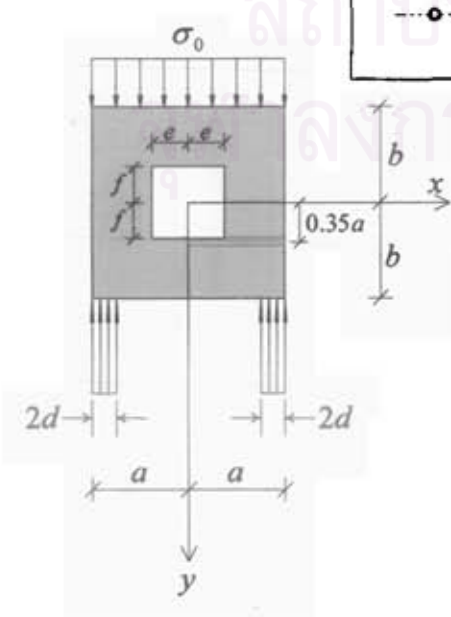
---◇--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       ---□--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 ---○--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ---▲--- ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์หินตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$

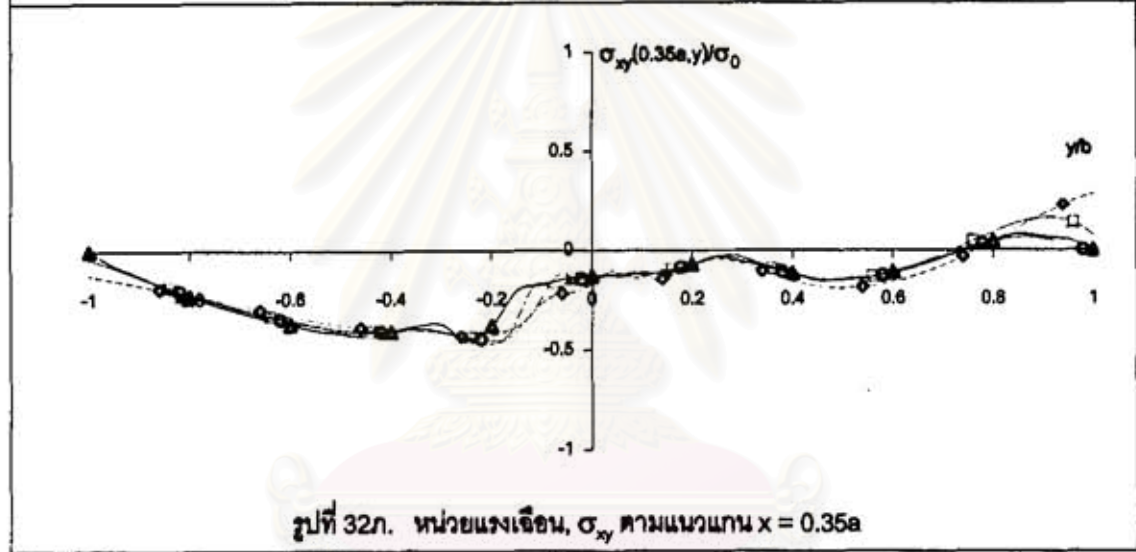
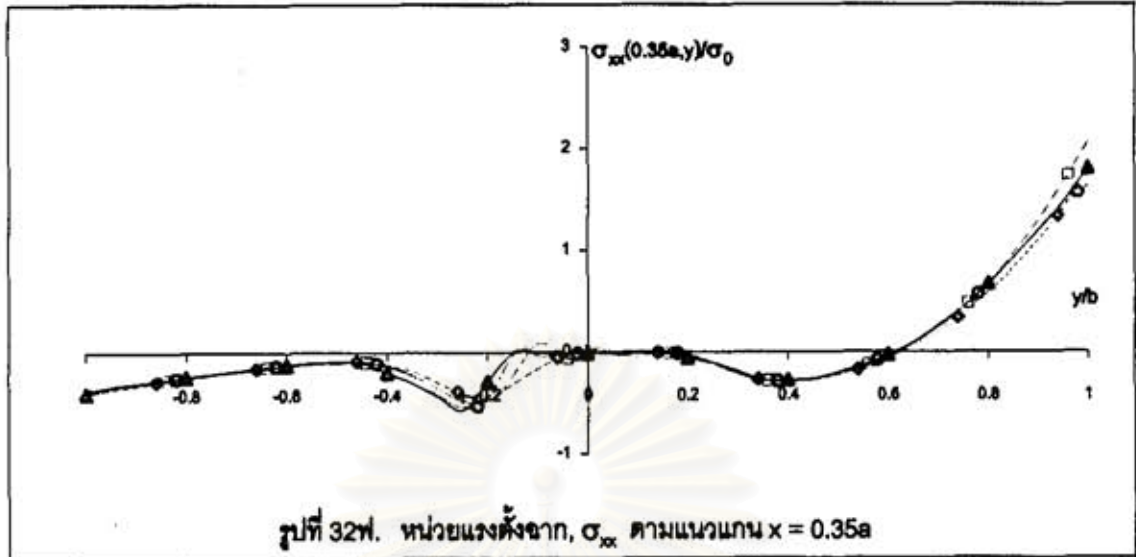


.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 .....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       —▲— ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

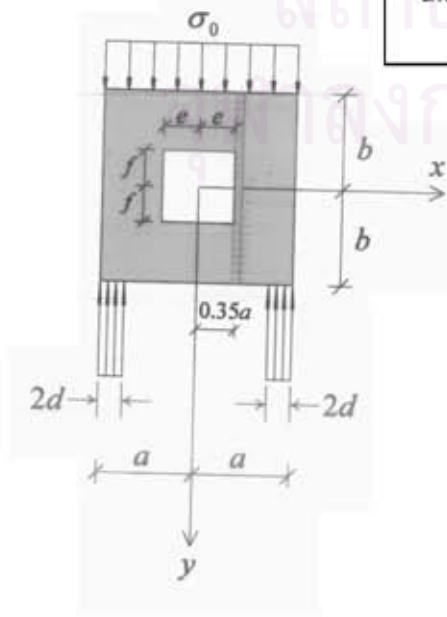


รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้

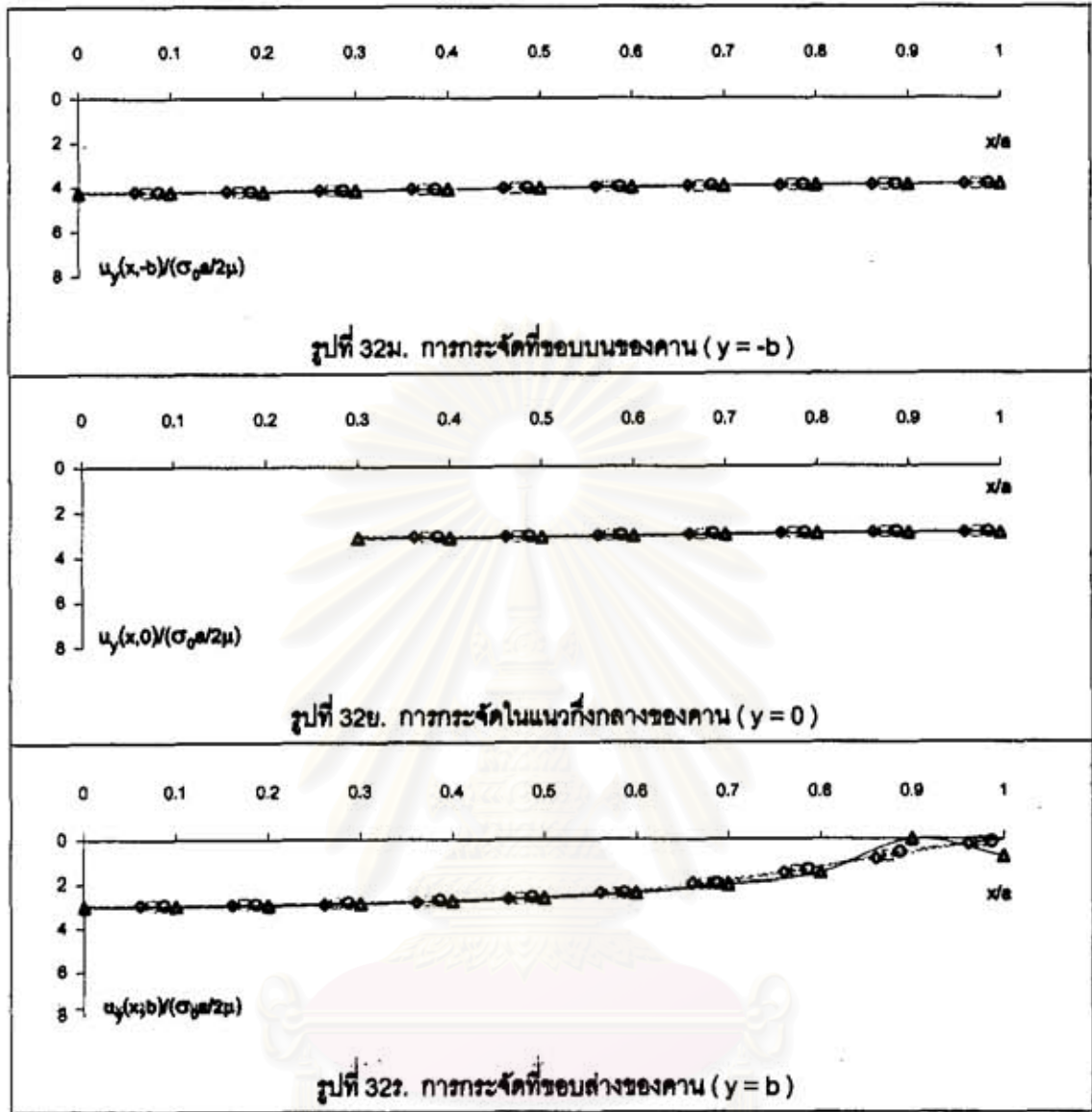
$$b/a = 1, e/a = f/a = 0.3 \text{ และ } d/a = 0.1$$



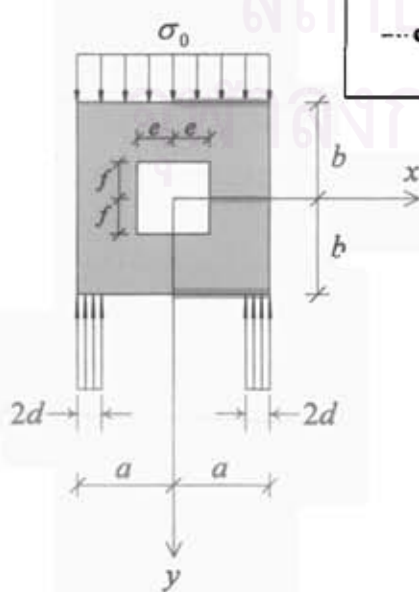
.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 .....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       —▲— ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์หิ้นตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้  $b/a = 1$ ,  $e/a = f/a = 0.3$  และ  $d/a = 0.1$

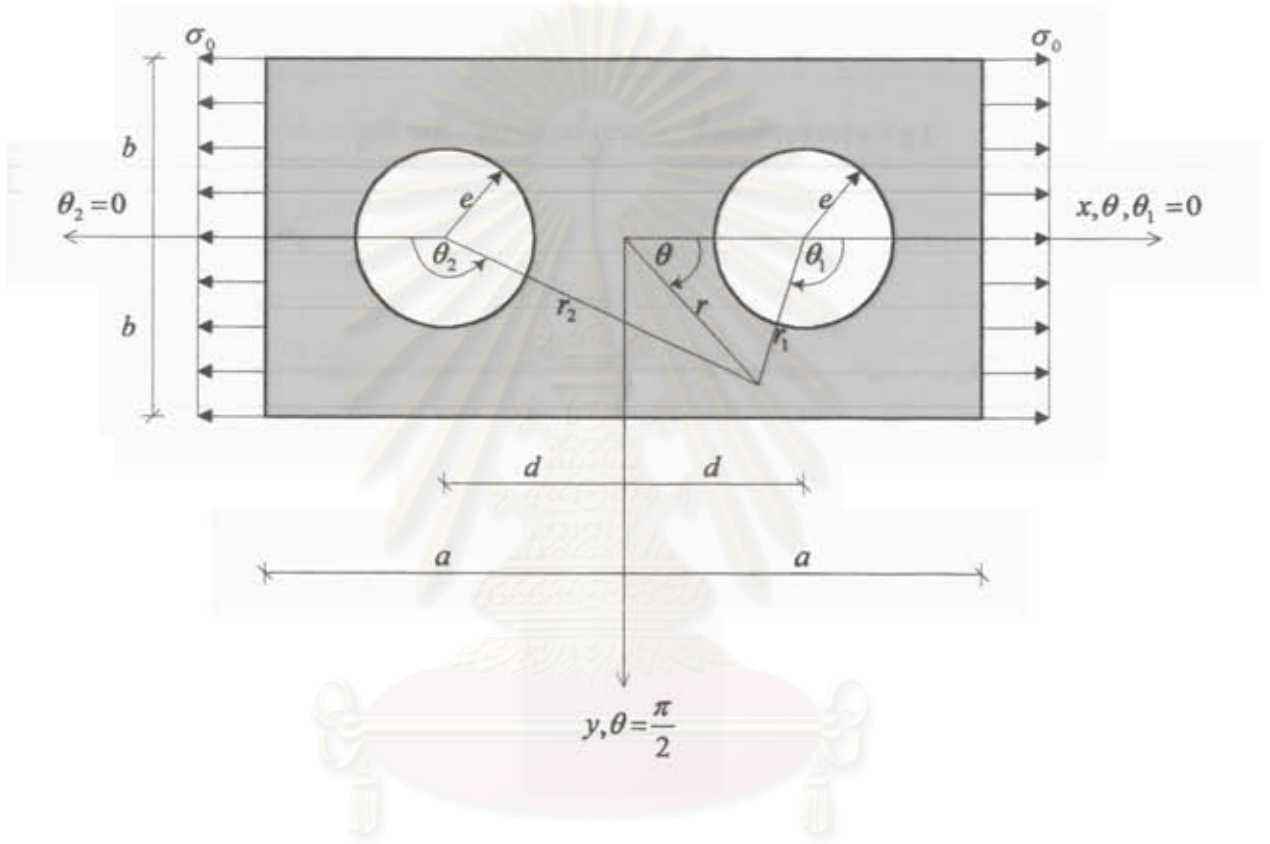


-◇-◇- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 8$       -□-□- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 -○-○- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       -▲-▲- ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



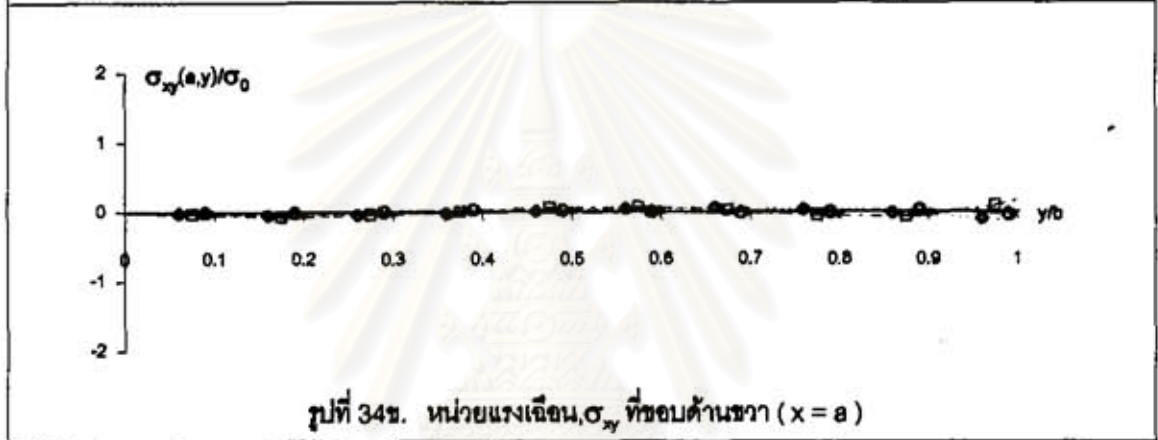
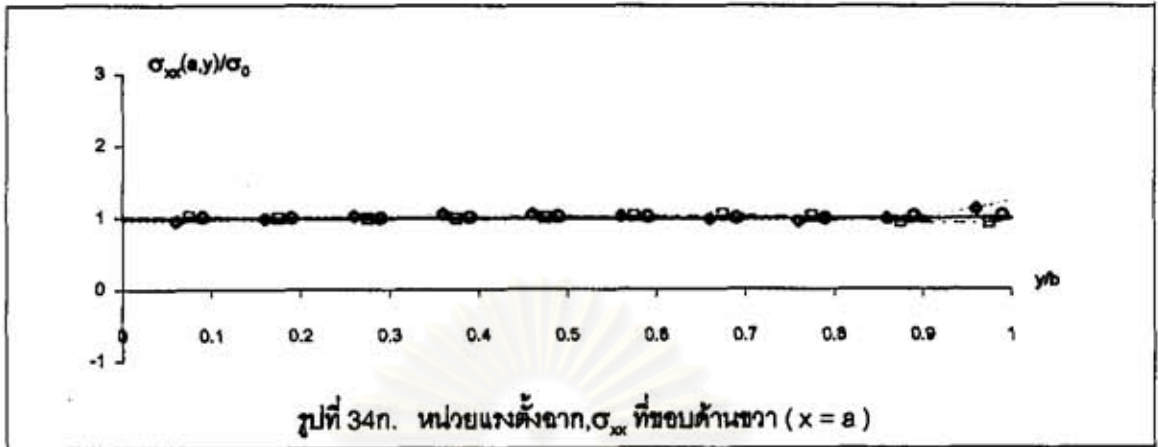
รูปที่ 32.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 6. เมื่อกำหนดให้

$$b/a = 1, e/a = f/a = 0.3 \text{ และ } d/a = 0.1$$

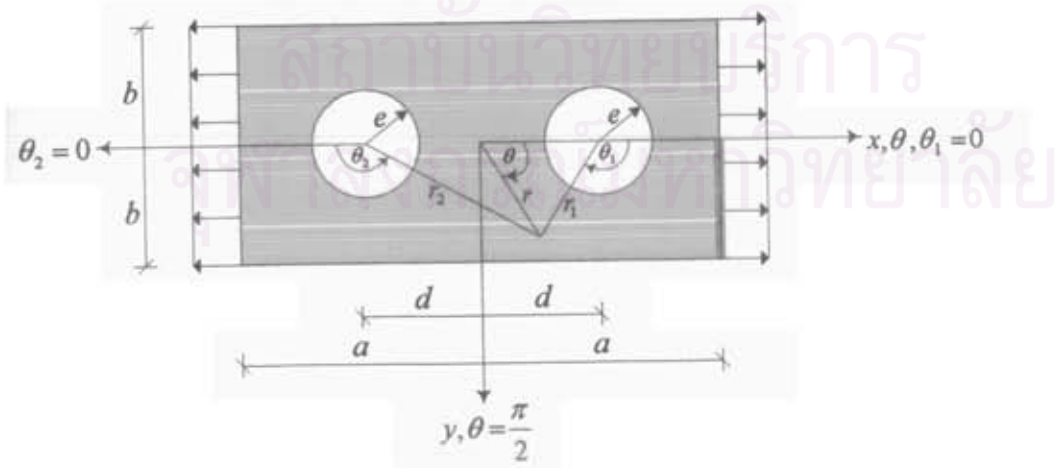


รูปที่ 33. ตัวอย่างที่ 7. แผ่นยึดหน้ารูปสี่เหลี่ยมเป็นน้ำมีรูเจาะรูปวงกลมสองรูและรับหน่วยแรงดึงตามแนวแกน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

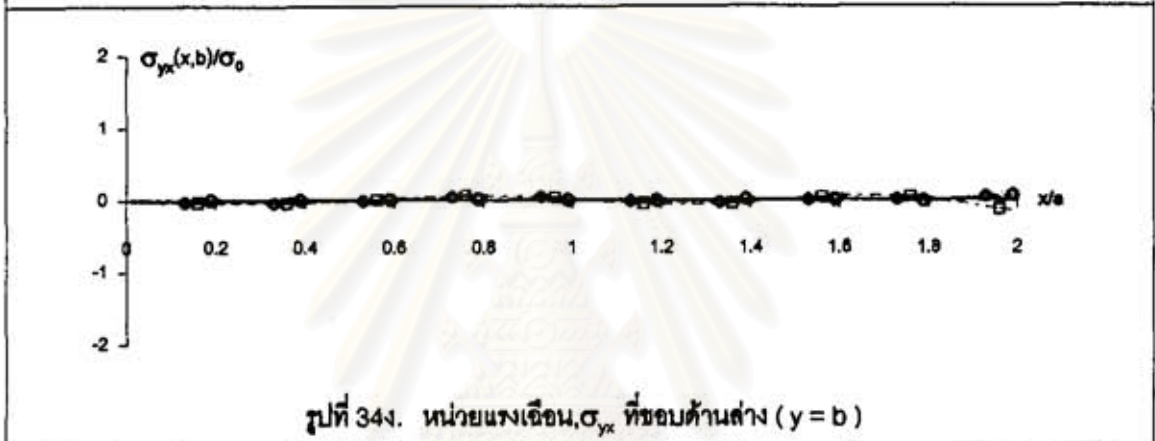
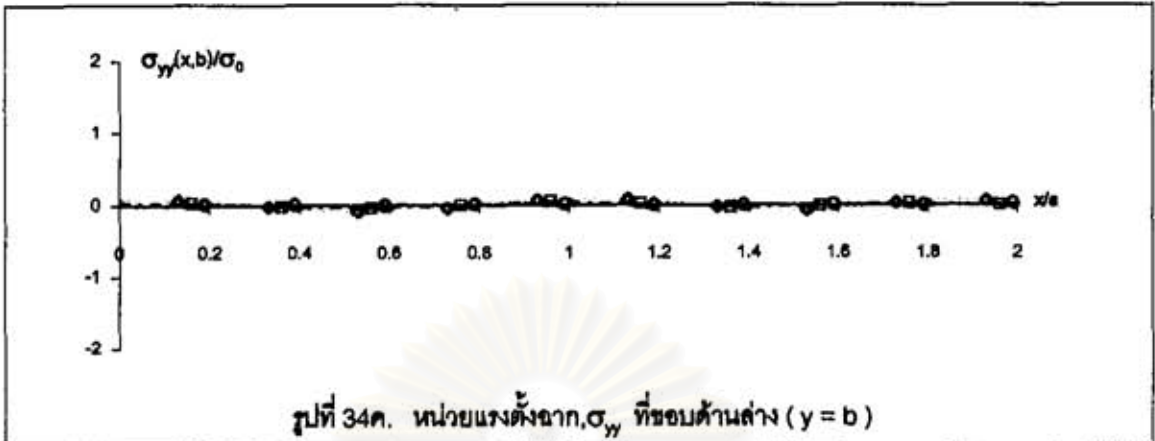


..... $\diamond$ ..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 12$       - -  $\square$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 ..... $\circ$ ..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ————— ค่าที่ถูกต้อง

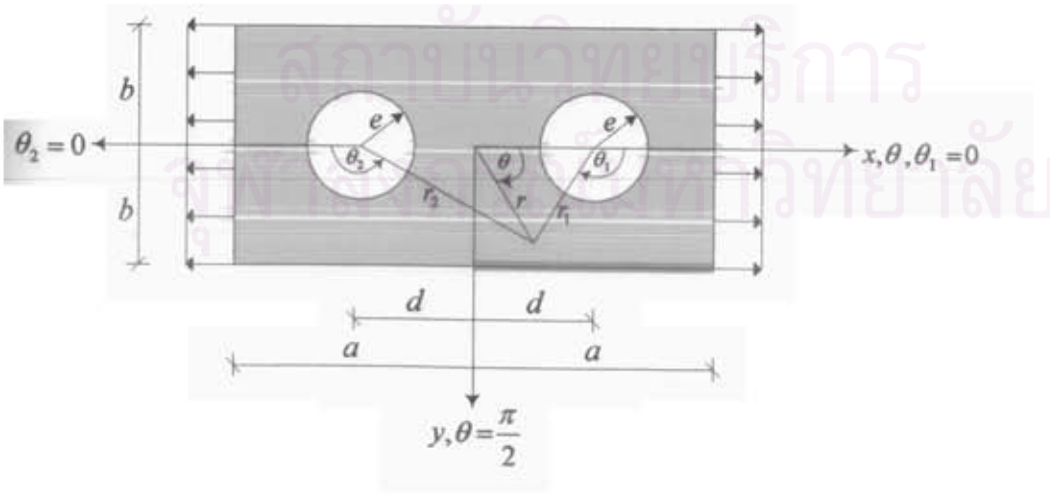


รูปที่ 34. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 7. เมื่อกำหนดให้  $a/b = 2$ ,  $d/b = 1$  และ  $e/b = 0.5$

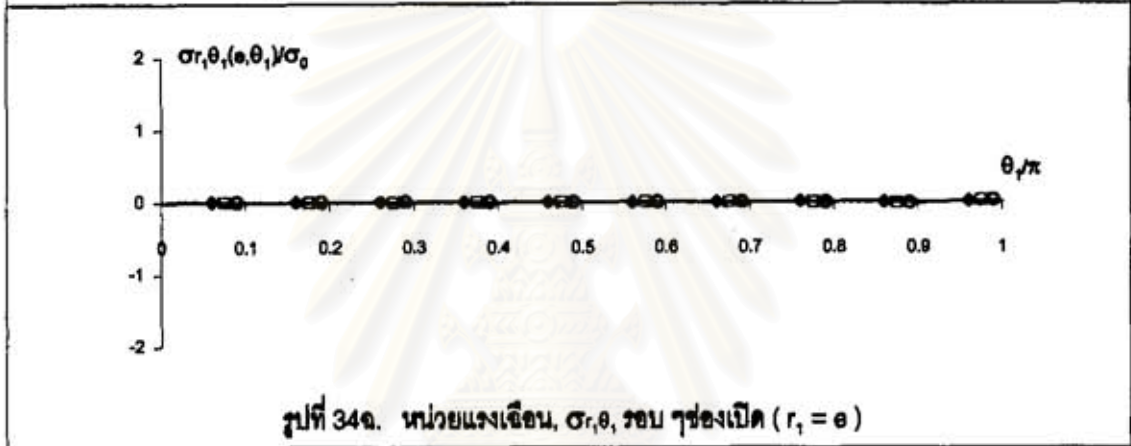
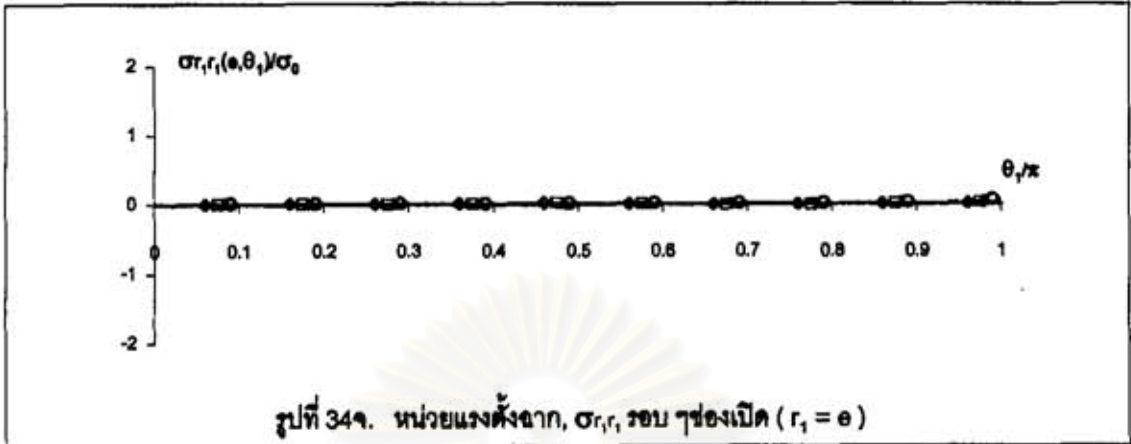




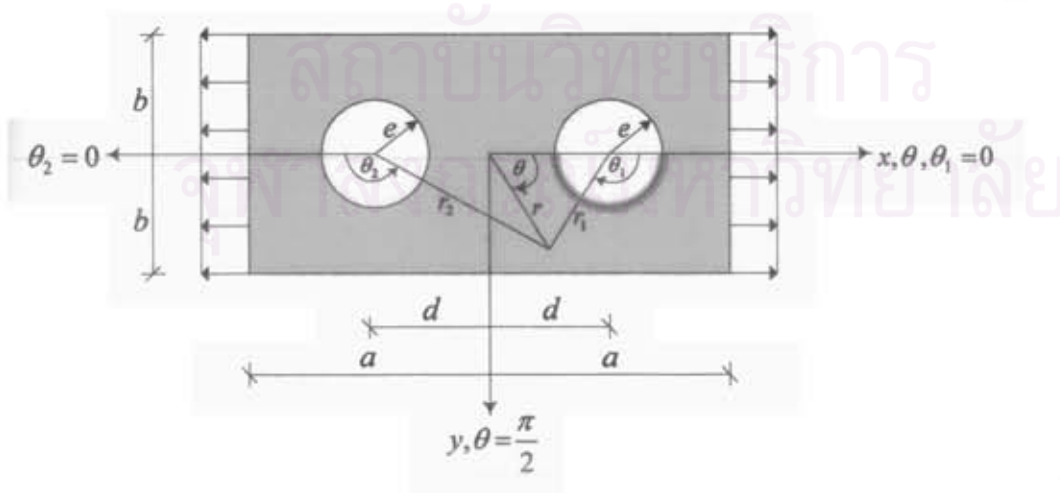
..... $\circ$ ..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 12$       - - $\square$ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 ..... $\circ$ ..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ————— ค่าที่ถูกต้อง



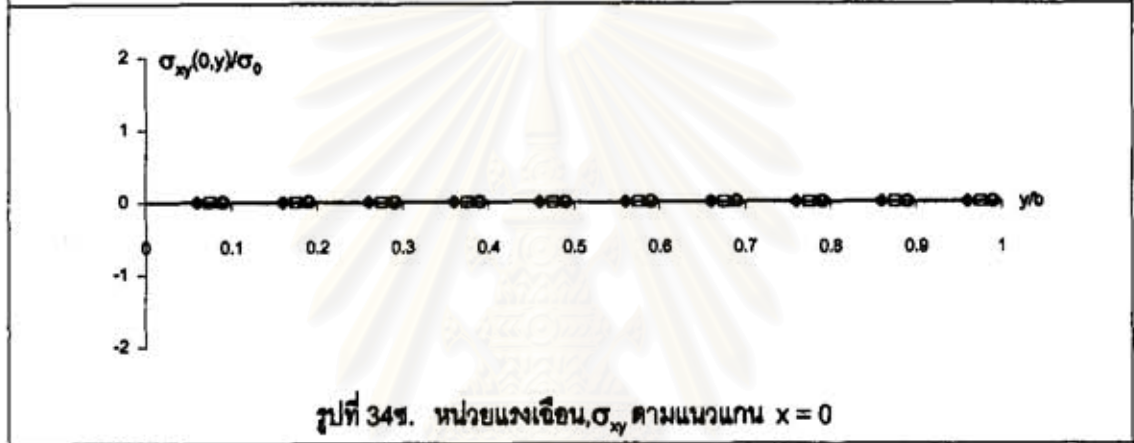
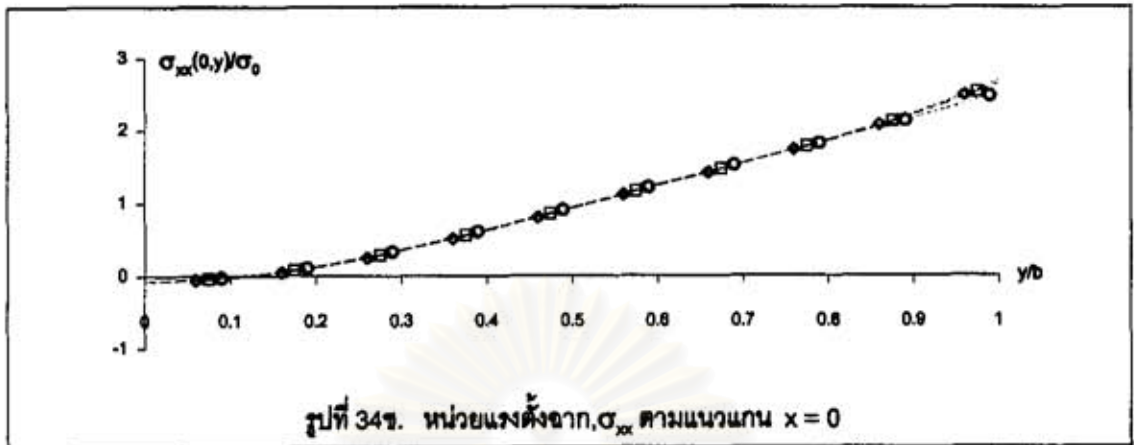
รูปที่ 34.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์หาค่าอย่างที 7. เมื่อกำหนดให้  $a/b = 2$  ,  $d/b = 1$  และ  $e/b = 0.5$



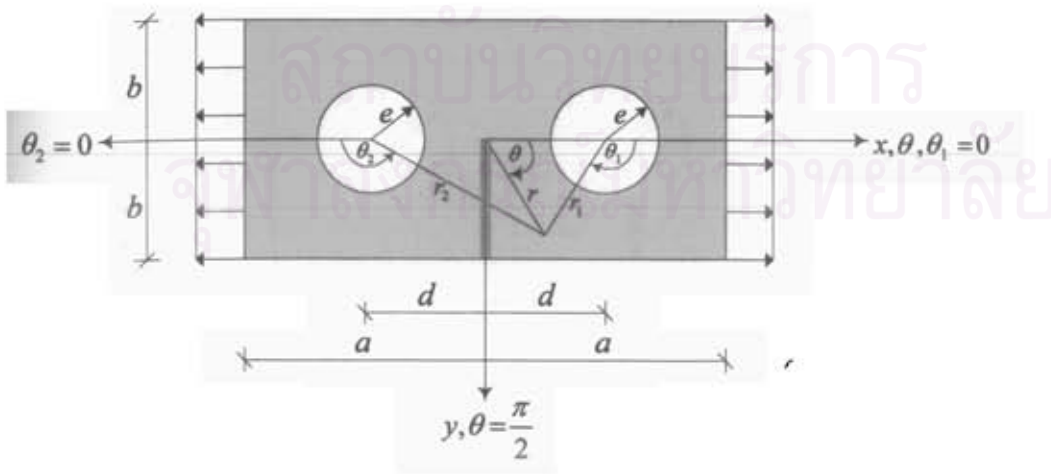
.....◇..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 12$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 .....○..... ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       ——— ค่าที่ถูกต้อง



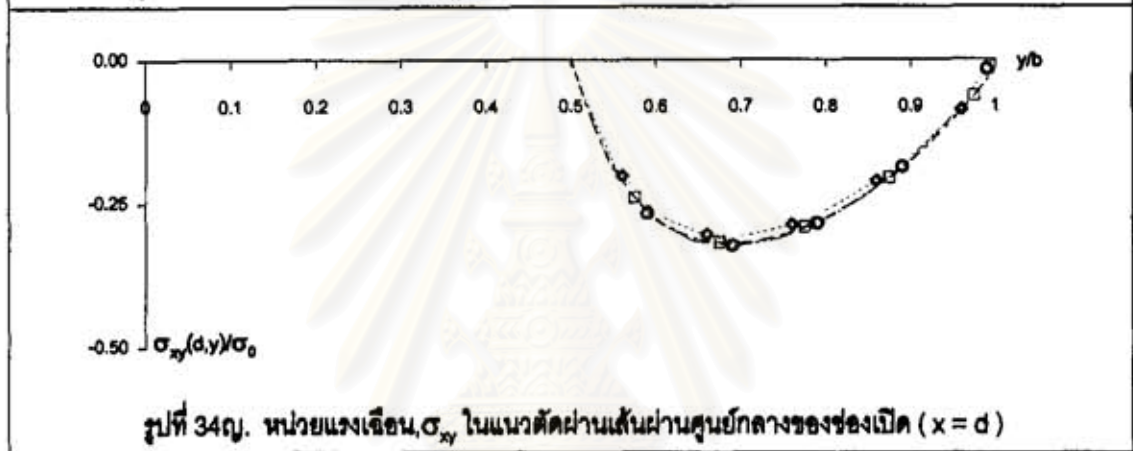
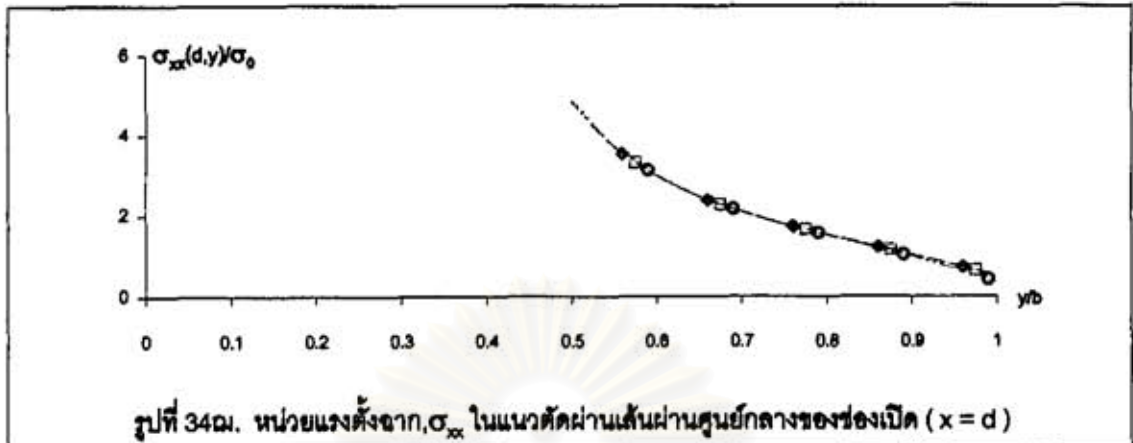
รูปที่ 34.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์หาค่าอย่างที 7. เมื่อกำหนดให้  $a/b = 2$ ,  $d/b = 1$  และ  $e/b = 0.5$



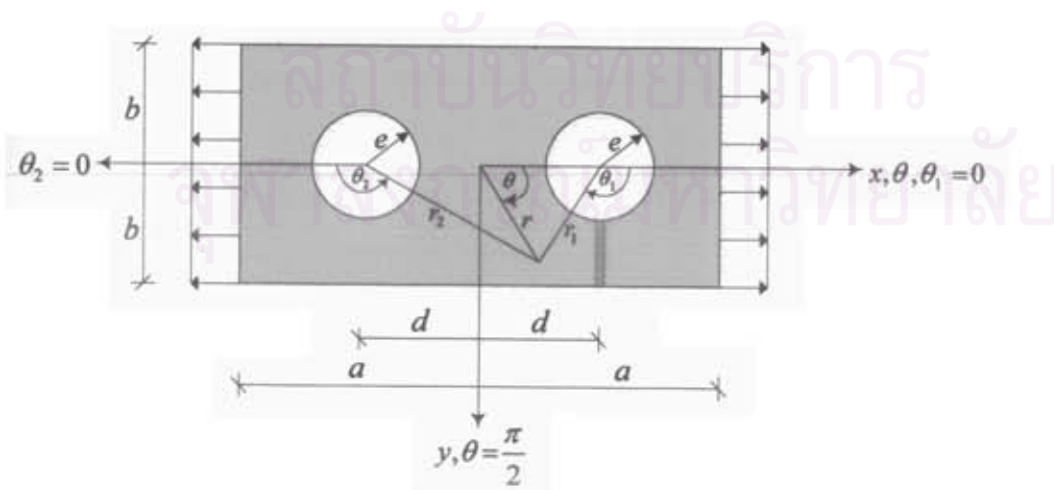
- -  $\diamond$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 12$       - -  $\square$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 - -  $\circ$  - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$       - - ค่าที่ถูกต้อง



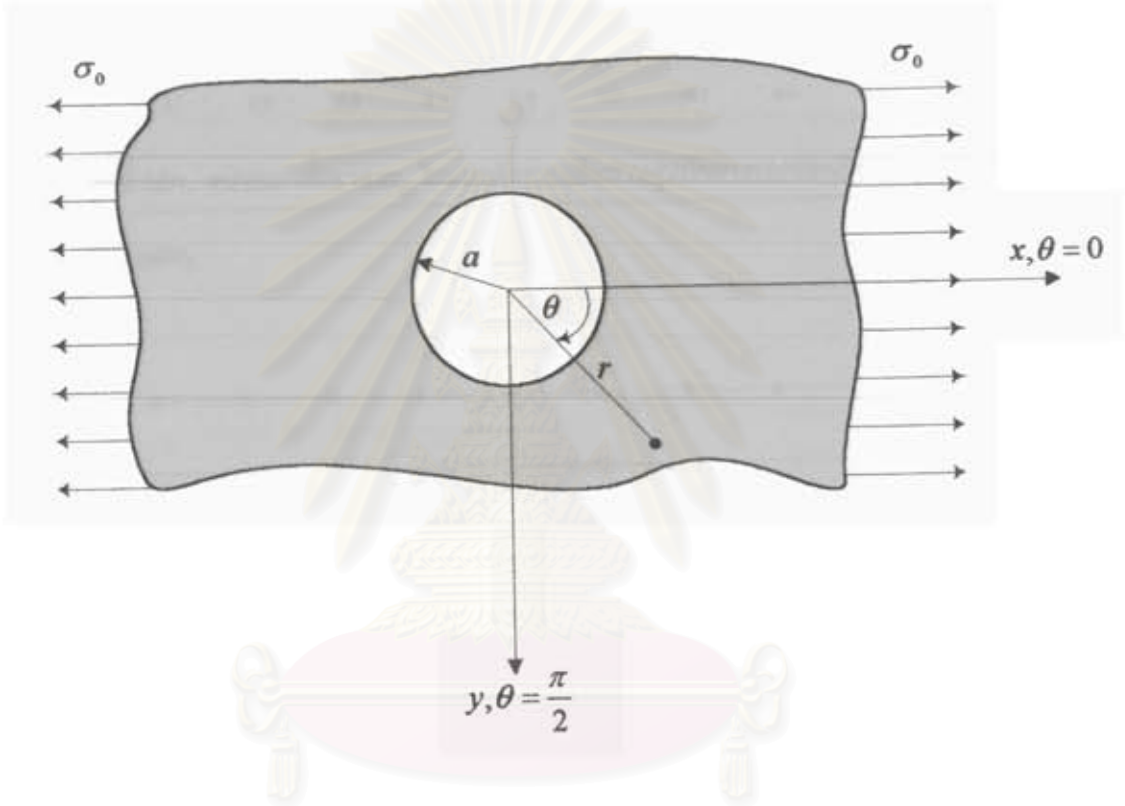
รูปที่ 34.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 7. เมื่อกำหนดให้  $a/b = 2$ ,  $d/b = 1$  และ  $e/b = 0.5$



---◇--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 12$       - - □ - - ผลเฉลยเมื่อ  $N = 16$   
 ---○--- ผลเฉลยเมื่อ  $N = 24$

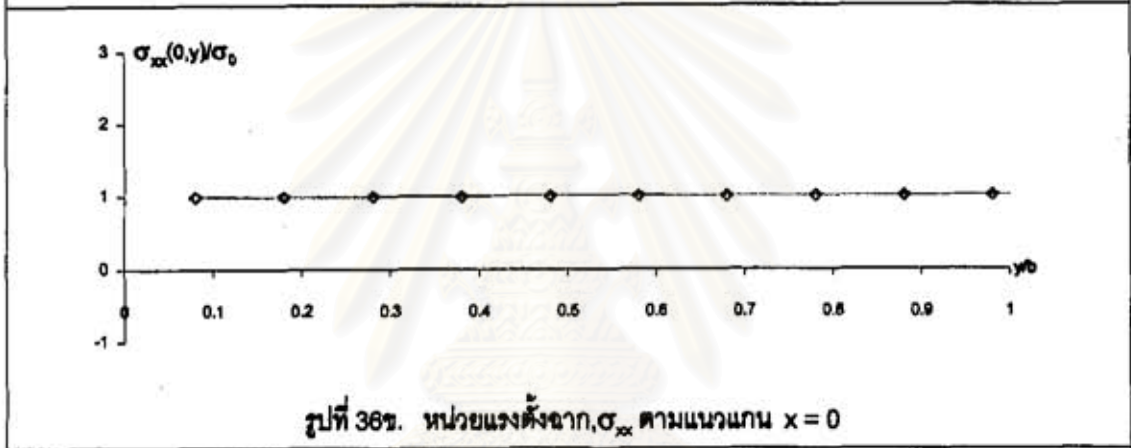
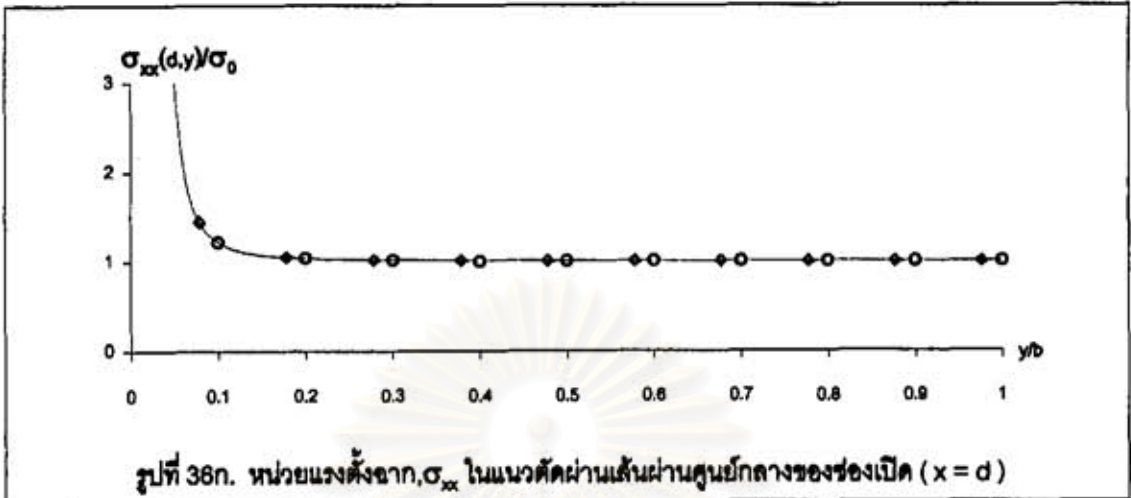


รูปที่ 34.(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 7. เมื่อกำหนดให้  $a/b = 2$ ,  $d/b = 1$  และ  $e/b = 0.5$

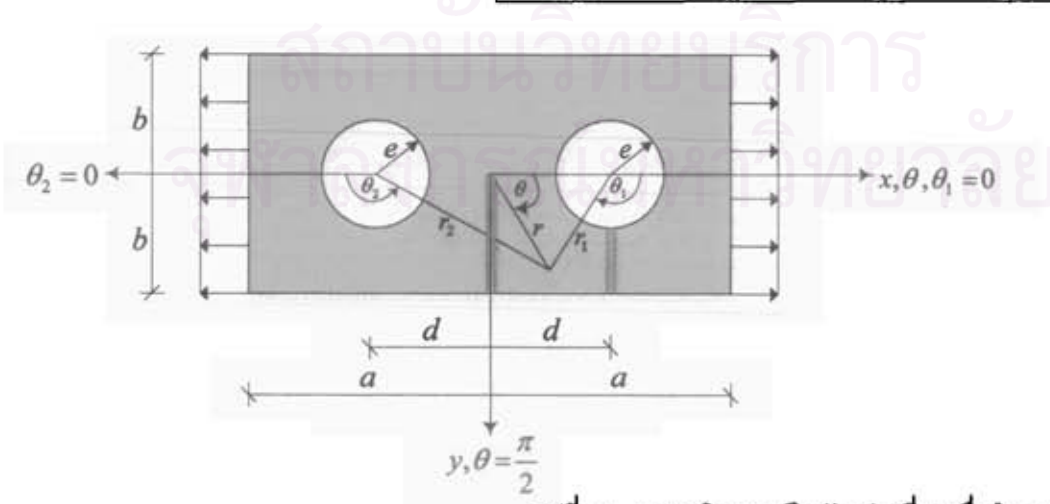


รูปที่ 35. แผ่นยึดหนาทั้งที่อนันต์มีรูเจาะรูปวงกลมอยู่หนึ่งรู รับแรงดึงตามแนวแกนที่ระยะอนันต์

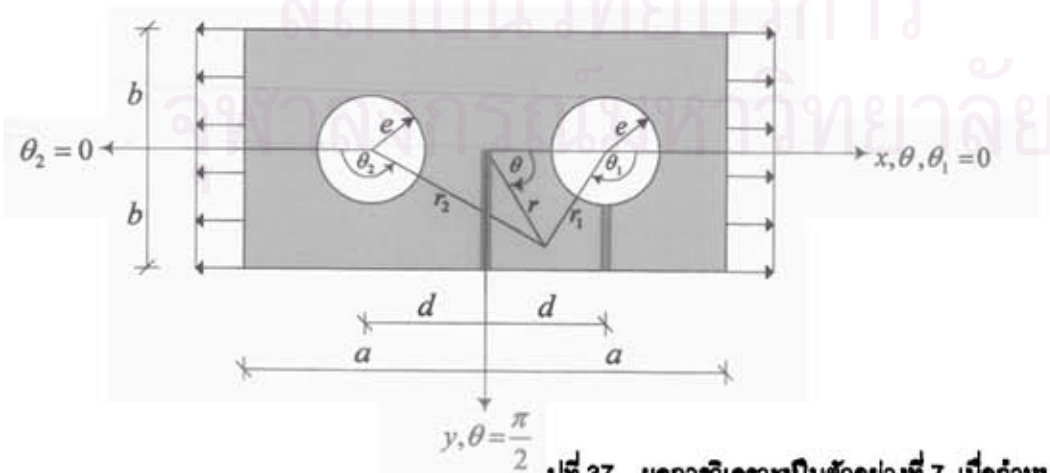
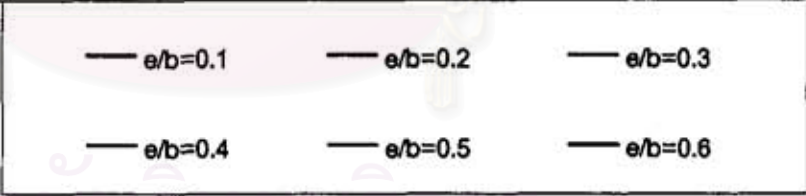
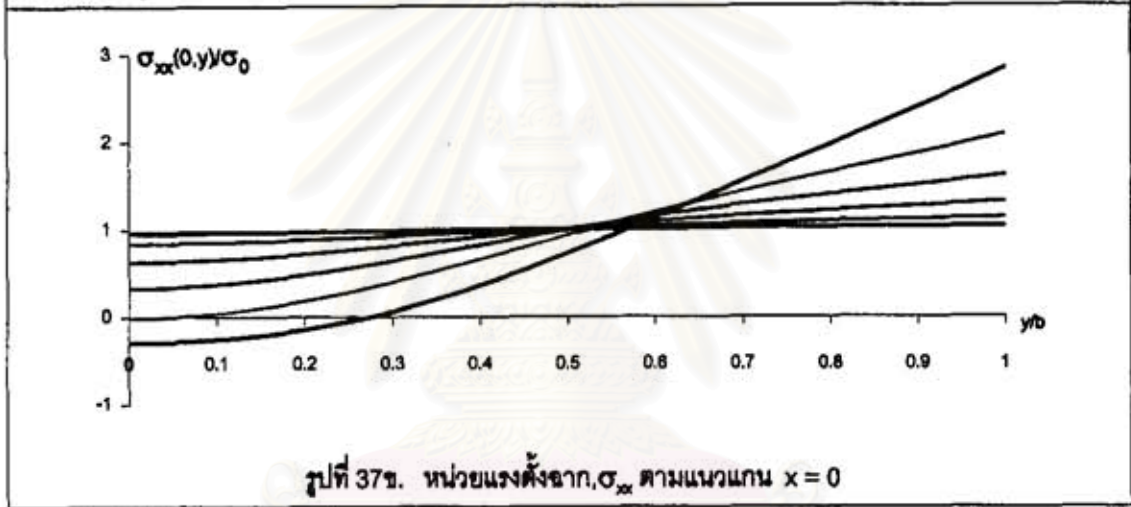
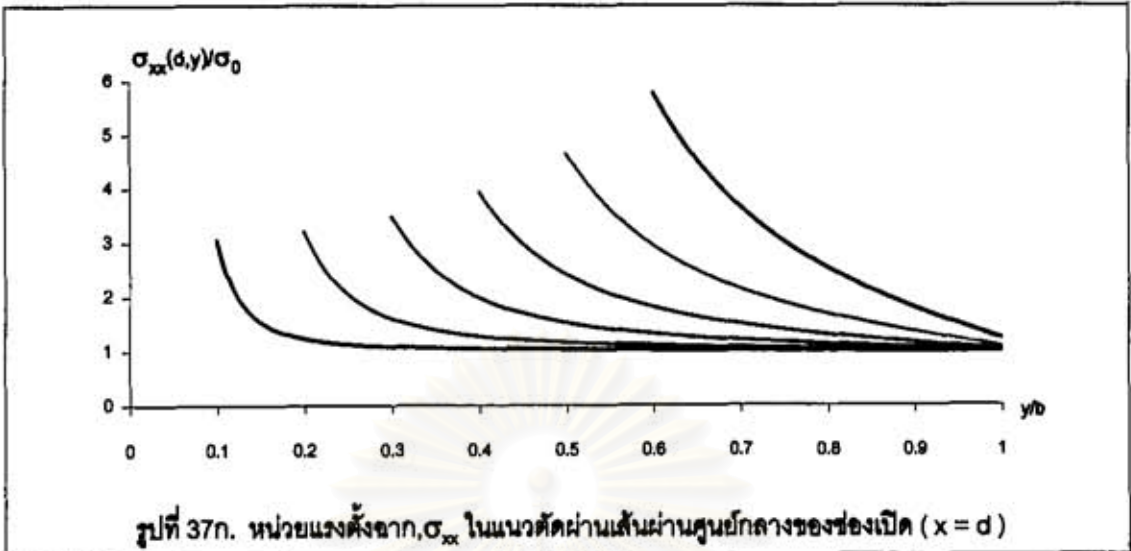
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



—○— ผลเฉลยเมื่อ  $N = 12$   
 —○— ผลเฉลยแม่นยำตรงจากปัญหาในรูปที่ 35



รูปที่ 36. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 7 เมื่อกำหนดให้  $a/b = 2$ ,  $d/b = 1$  และ  $e/b = 0.05$



รูปที่ 37. ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 7 เมื่อกำหนดให้  $a/b = 2$  และ  $d/b = 1$



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ภาคผนวก ก

เปรียบเทียบผลเฉลยจากงานวิจัยกับผลเฉลยของเฮิร์ตซ์(Hertz's solution)ในตัวอย่างที่ 1

จากสมการ(3.1.26)

$$\frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos\alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos\theta - \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^j \left[ \frac{1}{j(j-1)} \sin\left[(j-1)\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] - \frac{1}{j} \sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] \right] + \left(\frac{r}{a}\right)^{j+2} \frac{1}{(j+1)} \sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] \right\} \cos(j\theta) \quad (3.1.26)$$

เมื่อแปลงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติเฉพาะที่อยู่ในอนุกรมในสมการข้างบนให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned} \quad (n-1)$$

ก็จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos\alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos\theta \\ &\quad - \frac{i \sin\alpha}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j} \left(-\frac{ir}{a} e^{-i(\alpha-\theta)}\right)^j + \frac{i \sin\alpha}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{ir}{a} e^{i(\alpha-\theta)}\right)^j \\ &\quad - \frac{i \sin\alpha}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j} \left(-\frac{ir}{a} e^{-i(\alpha+\theta)}\right)^j + \frac{i \sin\alpha}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{ir}{a} e^{i(\alpha+\theta)}\right)^j \\ &\quad - \frac{ire^{i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(-\frac{ir}{a} e^{-i(\alpha-\theta)}\right)^{j-1} + \frac{ire^{-i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(\frac{ir}{a} e^{i(\alpha-\theta)}\right)^{j-1} \\ &\quad - \frac{ire^{-i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(-\frac{ir}{a} e^{-i(\alpha+\theta)}\right)^{j-1} + \frac{ire^{i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(\frac{ir}{a} e^{i(\alpha+\theta)}\right)^{j-1} \\ &\quad - \frac{ire^{-i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(-\frac{ir}{a} e^{-i(\alpha-\theta)}\right)^{j+1} + \frac{ire^{i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(\frac{ir}{a} e^{i(\alpha-\theta)}\right)^{j+1} \end{aligned}$$

$$-\frac{ire^{\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots} \frac{1}{j+1} \left( -\frac{ir}{a} e^{-i(\alpha+\theta)} \right)^{j+1} + \frac{ire^{-\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots} \frac{1}{j+1} \left( \frac{ir}{a} e^{i(\alpha+\theta)} \right)^{j+1} \quad (n-2)$$

จากสมการข้างต้นสังเกตได้ว่าอนุกรมส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\sum_{k=2,3,\dots} \frac{1}{k} x^k \quad \sum_{k=2,3,\dots} \frac{1}{k-1} x^{k-1} \quad \text{และ} \quad \sum_{k=2,3,\dots} \frac{1}{k+1} x^{k+1} \quad (n-3)$$

ซึ่งทั้งหมดแล้วแต่อยู่ในรูปแบบและมีผลรวมอนุกรมเป็น[11]

$$\sum_{k=1,2,\dots} \frac{1}{k} x^k = -\ln(1-x) \quad (n-4)$$

โดยที่ค่าสัมบูรณ์ของค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ  $x$  ต้องน้อยกว่าหนึ่ง ซึ่งสอดคล้องกับอนุกรมที่อยู่ในสมการ (n-2) ทั้งหมด จึงสามารถนำมาปรับใช้ได้ดังนี้

$$\sum_{k=2,3,\dots} \frac{1}{k} x^k = \sum_{k=1,2,3,\dots} \frac{1}{k} x^k - x = -x - \ln(1-x) \quad (n-5)$$

$$\sum_{k=2,3,\dots} \frac{1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1,2,3,\dots} \frac{1}{k} x^k = -\ln(1-x) \quad (n-6)$$

$$\sum_{k=2,3,\dots} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=3,4,5,\dots} \frac{1}{k} x^k = \sum_{k=1,2,3,\dots} \frac{1}{k} x^k - x - \frac{x^2}{2} = -x - \frac{x^2}{2} - \ln(1-x) \quad (n-7)$$

นำความสัมพันธ์จากสมการ (n-5) (n-6) และ (n-7) ไปใช้กับฟังก์ชัน  $\phi$  ในสมการ (n-2) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \cos \alpha + \frac{r}{a} \sin(2\alpha) \cos \theta \\ &\quad - i \frac{P}{2\pi} \ln \left( \frac{[a-r \sin(\theta-\alpha) - ir \cos(\theta-\alpha)][a+r \sin(\theta+\alpha) - ir \cos(\theta+\alpha)]}{[a-r \sin(\theta-\alpha) + ir \cos(\theta-\alpha)][a+r \sin(\theta+\alpha) + ir \cos(\theta+\alpha)]} \right) (r \cos \theta + a \sin \alpha) \end{aligned} \quad (n-8)$$

ตัดพจน์  $(r/a) \sin(2\alpha) \cos \theta$  ซึ่งเป็นพจน์ของการกระจัดของวัตถุแข็งเกร็งออก และจัดรูปเสียใหม่ จะได้

$$\phi(r, \theta) = \frac{Pr^2}{2a\pi} \cos \alpha + \frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \frac{-r \cos(\alpha - \theta)}{a + r \sin(\alpha - \theta)}}{i + \frac{-r \cos(\alpha - \theta)}{a + r \sin(\alpha - \theta)}} \right) - \frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \frac{-r \cos(\alpha + \theta)}{a + r \sin(\alpha + \theta)}}{i + \frac{-r \cos(\alpha + \theta)}{a + r \sin(\alpha + \theta)}} \right) \right\} \times (r \cos \theta + a \sin \alpha) \quad (n-9)$$

จากรูปที่ 11. ซึ่งแสดงระบบพิกัดสำหรับผลเฉลยของเฮิร์ตซ์[6](Hertz's solution) จะได้ว่า

$$r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2 = r \cos \theta + a \sin \alpha \quad (n-10)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{r \cos \theta + a \sin \alpha}{r \sin \theta + a \cos \alpha} \quad \text{และ} \quad \tan \theta_2 = \frac{r \cos \theta + a \sin \alpha}{r \sin \theta - a \cos \alpha} \quad (n-11)$$

จากสมการ(n-11)สามารถให้ความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\tan(\alpha + \theta_2) = \frac{-r \cos(\alpha - \theta)}{a + r \sin(\alpha - \theta)} \quad \text{และ} \quad \tan(\alpha - \theta_1) = \frac{-r \cos(\alpha + \theta)}{a + r \sin(\alpha + \theta)} \quad (n-12)$$

และเมื่อนำไปแทนค่าในสมการ(n-9) ก็จะลดรูปเป็น

$$\phi = \frac{Pr^2}{2a\pi} \cos \alpha + \frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \tan(\alpha + \theta_2)}{i + \tan(\alpha + \theta_2)} \right) - \frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \tan(\alpha - \theta_1)}{i + \tan(\alpha - \theta_1)} \right) \right\} (r \cos \theta + a \sin \alpha) \quad (n-13)$$

จากความสัมพันธ์ข้างล่างนี้[11]

$$x = -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \tan x}{i + \tan x} \right) \quad (n-14)$$

เมื่อนำมาใช้กับสมการ(n-13) จะได้ว่า

$$\phi(r, \theta) = \frac{Pr^2}{2a\pi} \cos \alpha + \frac{P}{\pi} (\theta_2 - \theta_1 + 2\alpha) (r \cos \theta + a \sin \alpha) \quad (n-15)$$

ตัดพจน์ที่เป็นการกระจัดของวัตถุแข็งเกร็ง  $2P\alpha(r \cos \theta + a \sin \alpha)/\pi$  ทิ้งไปเสีย และใช้ความสัมพันธ์ในสมการ(n-10) สมการข้างบนก็จะแปรรูปเป็น

$$\phi = -\frac{P}{\pi} \left[ r_1 \theta_1 \sin \theta_1 - r_2 \theta_2 \sin \theta_2 - \frac{\cos \alpha}{2} \frac{r^2}{a} \right] \quad (n-16)$$

ซึ่งก็คือผลเฉลยของเฮิรท์ซ(Hertz's solution)นั่นเอง



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ข

เปรียบเทียบผลเฉลยจากงานวิจัยกับผลเฉลยของทิโมเชนโก(Timoshenko's solution)ในตัวอย่างที่ 3

จากสมการ(3.3.15) เมื่อ  $\beta$  เข้าใกล้ศูนย์ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} = & -\frac{1}{2} \ln r + \frac{(\kappa-1)r}{2(\kappa+1)a} \ln r \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \theta \sin \theta + \frac{(\kappa-1)}{4(\kappa+1)} \frac{1}{(r/a)} \cos \theta \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{1}{(j+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-j} - \frac{1}{(j-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2-j} \right] \cos(j\theta) \end{aligned} \quad (ข-1)$$

เมื่อแปลงให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ(ก-1) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} = & -\frac{1}{2} \ln r + \frac{(\kappa-1)r}{2(\kappa+1)a} \ln r \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \theta \sin \theta + \frac{(\kappa-1)}{4(\kappa+1)} \frac{1}{(r/a)} \cos \theta \\ & - \frac{re^{i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(\frac{e^{-i\theta}}{r/a}\right)^{j+1} - \frac{re^{-i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(\frac{e^{i\theta}}{r/a}\right)^{j+1} \\ & + \frac{re^{-i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(\frac{e^{-i\theta}}{r/a}\right)^{j-1} + \frac{re^{i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(\frac{e^{i\theta}}{r/a}\right)^{j-1} \end{aligned} \quad (ข-2)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการ(ก-6)และ(ก-7)กับสมการข้างบนนี้ ก็จะได้

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta) = & \frac{1}{2} - \frac{Pa}{2\pi} \ln r + \frac{P(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)} r \ln r \cos \theta - \frac{P}{2\pi} r \theta \sin \theta + \frac{Pa^2\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{r} \cos \theta \\ & + \frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \frac{-a \sin \theta}{r - a \cos \theta}}{i + \frac{-a \sin \theta}{r - a \cos \theta}} \right) \right\} (r \sin \theta) \end{aligned} \quad (ข-3)$$

จากรูปที่ 19. ซึ่งแสดงระบบพิกัดสำหรับผลเฉลยเฉพาะสำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว  $P$  ซึ่งเป็นผลเฉลยของทิโมเชนโก(Timoshenko's solution) [6] จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$r_1 \sin \theta_1 = r \sin \theta \quad (ข-4)$$

$$\tan(\theta - \theta_1) = \frac{-a \sin \theta}{r - a \cos \theta} \quad (\text{ข-5})$$

แทนสมการข้างบนนี้ลงในฟังก์ชัน  $\phi$  (ข-3) และตัดพจน์  $1/2$  ซึ่งเป็นพจน์ของการกระจัดของวัตถุแข็งเกร็ง จะได้

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = & -\frac{Pa}{2\pi} \ln r + \frac{P(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)} r \ln r \cos \theta - \frac{P}{2\pi} r \theta \sin \theta + \frac{Pa^2 \kappa}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{r} \cos \theta \\ & + \frac{P}{\pi} \left[ -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \tan(\theta - \theta_1)}{i + \tan(\theta - \theta_1)} \right) \right] (r_1 \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (\text{ข-6})$$

และเมื่อนำความสัมพันธ์ในสมการ(ก-14)มาใช้กับฟังก์ชัน  $\phi$  ข้างบน ก็จะได้เป็น

$$\phi = -\frac{P}{\pi} \left[ r_1 \theta_1 \sin \theta_1 - \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)} r \ln r \cos \theta - \frac{1}{2} r \theta \sin \theta + \frac{a}{2} \ln r - \frac{\kappa}{2(\kappa+1)} \frac{a^2}{r} \cos \theta \right] \quad (\text{ข-7})$$

ซึ่งก็คือผลเฉลยแม่นยำตรงของทิโมเชนโก(Timoshenko's solution)นั่นเอง

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ค

เปรียบเทียบหาค่าผลเฉลยจากงานวิจัยกับผลเฉลยของทิโมเชนโก(Timoshenko's solution)ในตัวอย่างที่ 4

จากสมการ(3.3.18)เมื่อ  $\beta$  เข้าใกล้ศูนย์จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r, \theta)}{Pa/\pi} = & -\frac{\theta}{2} + \frac{(\kappa-1)r}{2(\kappa+1)a} \ln r \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{r}{a} \theta \cos \theta - \frac{(\kappa+3)}{4(\kappa+1)(r/a)} \sin \theta \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{j+2}{j(j+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-j} - \frac{1}{(j-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2-j} \right] \sin(j\theta) \end{aligned} \quad (ค-1)$$

และเมื่อแปลงให้อยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อนในทำนองเดียวกับในภาคผนวก ข จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r, \theta)}{Pa/\pi} = & -\frac{\theta}{2} + \frac{(\kappa-1)r}{2(\kappa+1)a} \ln r \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{r}{a} \theta \cos \theta - \frac{(\kappa+3)}{4(\kappa+1)(r/a)} \sin \theta \\ & - \frac{i}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{e^{-i\theta}}{r/a}\right)^j + \frac{i}{2} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{e^{i\theta}}{r/a}\right)^j \\ & + \frac{ire^{-i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(\frac{e^{-i\theta}}{r/a}\right)^{j-1} - \frac{ire^{i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j-1} \left(\frac{e^{i\theta}}{r/a}\right)^{j-1} \\ & + \frac{ire^{i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(\frac{e^{-i\theta}}{r/a}\right)^{j+1} - \frac{ire^{-i\theta}}{4a} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(\frac{e^{i\theta}}{r/a}\right)^{j+1} \end{aligned} \quad (ค-2)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการ(ก-6)และ(ก-7)กับสมการข้างบนนี้ ก็จะได้

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = & -\frac{Pa}{2\pi} \theta + \frac{P(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)} r \ln r \sin \theta + \frac{P}{2\pi} r \theta \cos \theta + \frac{P\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \frac{a^2}{r} \sin \theta \\ & + \frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \frac{a \sin \theta}{r - a \cos \theta}}{i + \frac{a \sin \theta}{r - a \cos \theta}} \right) \right\} (r \cos \theta - a) \end{aligned} \quad (ค-3)$$

จากรูปที่ 23. ซึ่งแสดงระบบพิกัดสำหรับผลเฉลยเฉพาะสำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว  $P$  ซึ่งเป็นผลเฉลยแน่นอนตรง

$$r_1 \cos \theta_1 = r \cos \theta - a \quad (\text{ค-4})$$

$$\tan(\theta_1 - \theta) = \frac{a \sin \theta}{r - a \cos \theta} \quad (\text{ค-5})$$

และเมื่อแทนลงในฟังก์ชัน  $\phi$  จะได้

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = & -\frac{Pa}{2\pi} \theta + \frac{P(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)} r \ln r \sin \theta + \frac{P}{2\pi} r \theta \cos \theta + \frac{P\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \frac{a^2}{r} \sin \theta \\ & + \frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{i - \tan(\theta_1 - \theta)}{i + \tan(\theta_1 - \theta)} \right) \right\} r_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (\text{ค-6})$$

นำความสัมพันธ์ในสมการ(ค-14)มาใช้กับฟังก์ชัน  $\phi$  ข้างบน ก็จะได้

$$\phi = \frac{P}{\pi} \left[ r_1 \theta_1 \cos \theta_1 + \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)} r \ln r \sin \theta - \frac{1}{2} r \theta \cos \theta + \frac{a}{2} \theta + \frac{\kappa}{2(\kappa+1)} \frac{a^2}{r} \sin \theta \right] \quad (\text{ค-7})$$

ซึ่งก็คือผลเฉลยแม่นยำตรงของทิโมเชงโก(Timoshenko's solution)นั่นเอง

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ประวัติผู้วิจัย

นายณัฐวัฒน์ โฆษิตชัยวัฒน์ เกิดเมื่อวันที่ 9 พฤศจิกายน พ.ศ. 2519 ที่จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเมื่อปี พ.ศ. 2539



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย