การวิเคราะห์การแพร่กระจายของลำแสงในท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

นาย สุรพัชร์ เจริญยิ่ง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-03-1656-5

ANALYSIS OF OPTICAL BEAM PROPAGATION IN AN ANISOTROPIC OPTICAL WAVEGUIDE BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Mr. Surapus Charoenying

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2001

ISBN 974-03-1656-5

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์การแพร่กระจายของลำแสงในท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
โดย	นาย สุรพัชร์ เจริญยิ่ง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

....อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว)

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร)

สุรพัชร์ เจริญยิ่ง: การวิเคราะห์การแพร่กระจายของลำแสงในท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์. (ANALYSIS OF OPTICAL BEAM PROPAGATION IN AN ANISOTROPIC OPTICAL WAVEGUIDE BY THE FINITE ELEMENT METHOD) อ. ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว, 163 หน้า. ISBN 974-03-1656-5.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นแสงด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชัน (Finite Element Beam Propagation Method) โดยผู้เขียนวิทยานิพนธ์ประยุกต์ใช้อัลกอริทึมนิวมาร์ก (Newmark Method) ที่มีการใช้งานอย่างแพร่หลายในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดเมนเวลาในงานบีมพรอพาเกชันโดยได้ศึกษาในกรณีที่สมการคลื่นอยู่ในรูปสมการสเกลาร์และรูปเวกเตอร์ เพื่อวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ทำจากวัสดุแอนไอโซทรอปิก นอกจากนี้ยังได้ศึกษาถึงการใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบ PMLและแบบโปร่งใสเพื่อลดบริเวณที่ใช้ในการคำนวณสำหรับอัลกอริทึมนิวมาร์ก

ผลการคำนวณในกรณีตัวอย่างได้มีการนำมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ หรือ ผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันซึ่งใช้การประมาณแบบปาเด (Pade Approximation) ของผู้วิจัยอื่น พบว่าอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กสามารถใช้งานในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันได้เป็นอย่างดีโดยมีข้อดีกว่าวิธีปาเด คือ 1.สามารถจัดรูปสมการได้ง่ายกว่า 2. มีพารามิเตอร์ในการปรับแต่งค่า 2 ตัวคือ β และ γ จึงทำให้อยู่ในรูปทั่วไปที่ง่ายกว่า

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า. ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า. ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....
ปีการศึกษา 2544.

4170602521 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: FEBPM / BPM / FEM / PADE APPROXIMATION / VECTOR EQUATION / NEWMARK METHOD / TBC / PML / ANISOTROPIC

SURAPUS CHAROENYING : ANALYSIS OF OPTICAL BEAM PROPAGATION IN AN ANISOTROPIC OPTICAL WAVEGUIDE BY THE FINITE ELEMENT METHOD. THESIS ADVISOR : ASSIST. PROF. TUPTIM ANGKAEW. Ph.D., 163 pp. ISBN 974-03-1656-5.

This thesis presents the finite element beam propagation analysis method for anisotropic optical waveguides. The Newmark algorithm is introduced in this thesis to replace the conventional Pade algorithm. Use of the Newmark algorithm in FE-BPM has been verified in various cases such as in scalar and vector equations. In addition, the use of the transparent boundary condition and the perfectly matched layer have been studied in conjunction with the FE-BPM based on Newmark algorithm.

Computational results of the presented method have been compared with results from previously published data for which the Pade' approximation was used. The advantage of this algorithm includes: the formulation is easy to manipulate, and the algorithm can be adjusted by using two parameters.

Department Electrical Engineering .	Student's signature ....
Field of study. Electrical Engineering .	Advisor's signature ....
Academic year 2001 .	

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้คำแนะนำในการวิจัย แนวทางการวิจัยตลอดจนให้คำปรึกษา ข้อคิดเห็นต่างๆในการวิจัยและจัดหาอุปกรณ์การดำเนินการวิจัยอย่างครบถ้วน

ขอขอบคุณ อาจารย์สุวิทย์ นาคพีระยุทธ ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำในวิทยานิพนธ์นี้, ขอขอบคุณ Dr. Yasuhide Tsuji ที่กรุณาตอบคำถามและข้อสงสัยในงานวิทยานิพนธ์นี้, ขอขอบคุณ นายปราโมทย์ จางอิสระกุล ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำในงานวิทยานิพนธ์นี้, ขอขอบคุณ นายชัยรัตน์ พิณทอง ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำในงานวิทยานิพนธ์นี้, ขอขอบคุณ นางสาวนันทิยา นาฬิกาวิท ขอขอบคุณ ดร.ชนินทร์ ที่แนะนำการใช้ภาษาในงานวิทยานิพนธ์นี้

นอกจากนั้นขอขอบคุณสมาชิกในห้องปฏิบัติการวิจัยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทุกท่านที่คอยช่วยเหลือกันตลอดเวลา ขอบคุณ นางสาวสุวภา เจริญยิ่ง พี่สาว ที่ออกค่าใช้จ่ายในการเล่าเรียนทั้งหมด

ท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาของผู้วิจัย ที่สนับสนุนในด้านการเรียนและให้กำลังใจเสมอจนสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

หน้า

สารบัญ

สารบัญ

หน้า

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\vec{a}_x,\vec{a}_y,\vec{a}_z$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x,y,z
$\vec{B}$	ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก
BPM	วิธีบีมพรอพาเกชัน
β	สัมประสิทธิ์นิวมาร์ค
β_e	ค่าคงที่การแพร่กระจายของสนามโมดคู่
β_o	ค่าคงที่การแพร่กระจายของสนามโมดคี่
θ_c	มุมระหว่างแกน Crystalline C กับแกน Y
θ_F	มุมการหมุนของฟาราเดย์
Δ	พื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม
δ	สภาพยอมไฟฟ้าที่เป็นผลมาจากปรากฏการณ์หมุนของฟาราเดย์
ε_0	สภาพยอมไฟฟ้า
$\vec{E}$	ความเข้มสนามไฟฟ้า
E_t	สนามไฟฟ้าตามขวาง
E_z	สนามไฟฟ้าตามแกนยาว
$[\varepsilon]$	เทนเซอร์สภาพยอมไฟฟ้า
F_b	พลังงานวิ่งออกจากหน้าต่างการคำนวณ
F_a	พลังงานที่วิ่งสู่หน้าต่างการคำนวณ
FD-BPM	วิธีไฟไนต์ดิพเฟอร์เรนต์บีมพรอพาเกชัน
FDTD	วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนต์โดเมนเวลา
FE-BPM	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชัน
FEM	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
FFT-BPM	วิธีการแปลงฟูเรียร์อย่างเร็วบีมพรอพาเกชัน
H	ความเข้มสนามแม่เหล็ก
j	สัญญลักษณ์ค่าเชิงซ้อน
k_0	เลขคลื่นในอวกาศว่าง
l_i	ความยาวของด้านในอีลีเมนต์สามเหลี่ยมและใช้ในการกำหนดทิศทางของสนามในอีลีเมนต์ขอบ
L	ระยะเชื่อมต่อของท่อนำคลื่นตัวเชื่อมต่อ

คำอธิบายสัญลักษณ์

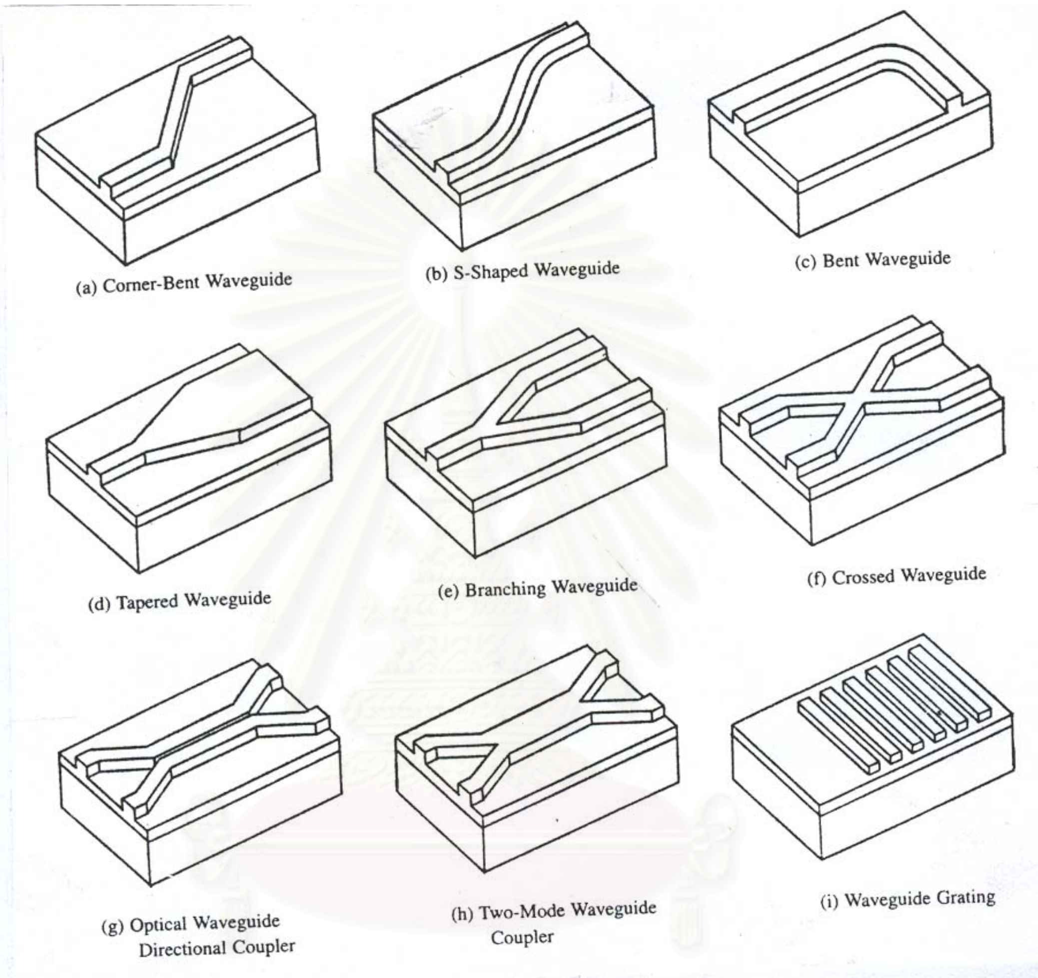
สัญลักษณ์	ความหมาย
λ	ความยาวคลื่นแสง
PML	เงื่อนไขขอบเขตแบบ PML
$\rho(A)$	spectral radius ของเมตริกซ์ A
ρ	ความหนาของชั้นดูดซับ
s	พารามิเตอร์ของชั้นดูดซับ
TBC	เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส
σ	สภาพนำไฟฟ้า
σ^*	สภาพนำแม่เหล็ก

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

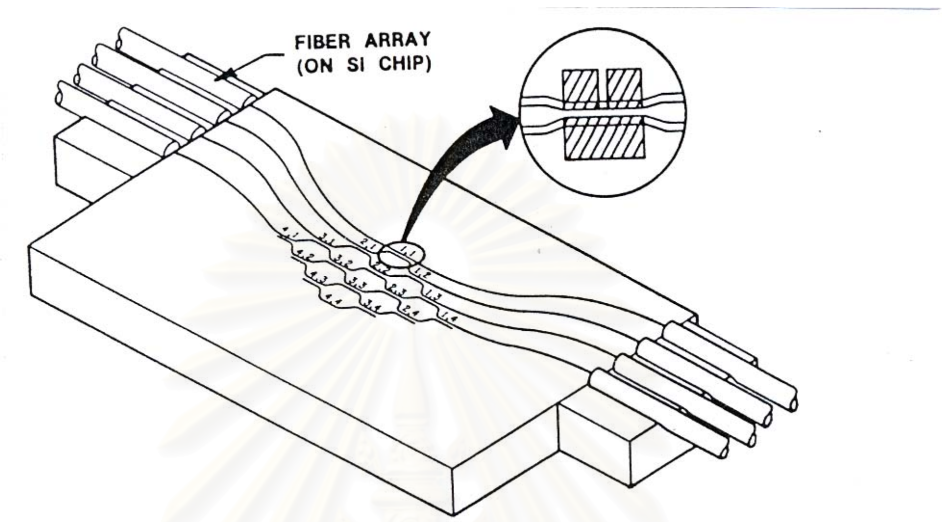
ในปัจจุบันนี้ระบบโทรคมนาคม เช่น ระบบสื่อสารไมโครเวฟบนภาคพื้นดิน ระบบสื่อสารผ่านดาวเทียม และ ระบบสื่อสารทางเคเบิ้ลใยแก้วนำแสง มีความสำคัญเป็นอย่างมาก โดยระบบสื่อสารผ่านใยแก้วนำแสงเริ่มเข้ามามีบทบาทสำคัญมากขึ้น ข้อดีของระบบสื่อสารผ่านเส้นใยแก้วนำแสงคือ 1.มีขนาดแบนด์วิดท์กว้างทำให้สามารถส่งผ่านข้อมูลจำนวนมากได้อย่างรวดเร็ว 2. พลังงานสูญเสียต่ำกว่าการใช้งานด้วยลวดทองแดงหรือคลื่นความถี่ย่านไมโครเวฟ 3.เส้นใยแก้วนำแสงมีขนาดเล็กและน้ำหนักเบา 4.มีความปลอดภัยทางข้อมูลสูง 5.ปราศจากสัญญาณรบกวนจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก

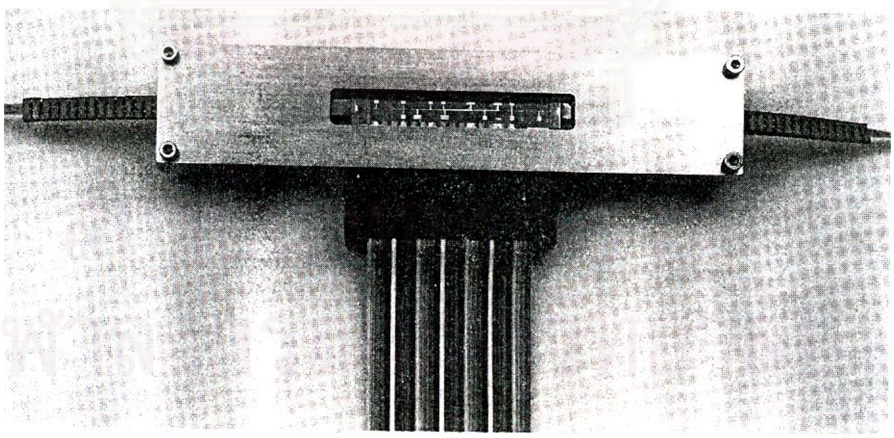
อุปกรณ์ที่มีบทบาทสำคัญในการสื่อสารผ่านเส้นใยแก้วนำแสง คือ ท่อนำคลื่นแสง (optical waveguide) ดังรูปที่ 1.1 ท่อนำคลื่นแสงทำหน้าที่นำแสงเปลี่ยนแปลงทิศทางลำแสงและปรับแต่งลำแสงให้มีคุณสมบัติทางแสงตามต้องการ ท่อนำคลื่นแสงสร้างจากวัสดุไดอิเล็กตริกสองชนิดมาวางซ้อนกัน โดยสารที่มีดัชนีหักเหมากกว่าทำหน้าที่เป็นแกน (core) และสารที่มีดัชนีหักเหน้อยกว่าทำหน้าที่เป็นเปลือก หรือ วัสดุหุ้ม (cladding) ท่อนำคลื่นแสงมีมากมายหลายชนิดโดยทำหน้าที่แตกต่างกันออกไป ตัวอย่างเช่น ท่อนำคลื่นแสงแบบ corner-bent, แบบ S-shaped และ แบบ bent ทำหน้าที่เปลี่ยนทิศทางของลำแสง ท่อนำคลื่นแสงแบบ tapered ทำหน้าที่เปลี่ยนแปลงขนาดของท่อนำคลื่นแสง, ท่อนำคลื่นแสงแบบ branching และแบบ crossed ทำหน้าที่รวมลำแสง แยกลำแสง และ แทรกสอดลำแสง ท่อนำคลื่นแสงแบบ directional coupler และ แบบ two mode coupler ทำหน้าที่ coupling ในขณะที่ท่อนำคลื่นแสงแบบ grating ทำหน้าที่ filter, mode converter, reflector, resonator และ demultiplexer เป็นต้น



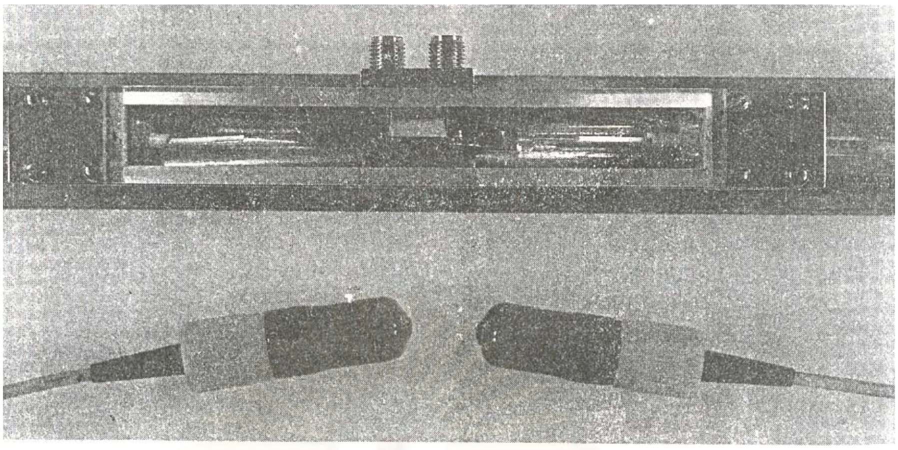
รูปที่1.1 ท่อนำคลื่นแสงแบบต่างๆ (Koshiba, 1990:3)

นอกจากนั้นยังพบการใช้งานรวมกันของท่อนำคลื่นแสงดังรูปที่ 1.2 โดยเป็น optical switch ที่สร้างจากท่อนำคลื่นแสงแบบ coupler มาวางต่อกันแบบ คาสเคด กัน และนอกจากนั้นยังมีใช้งานในตัว modulator ดังรูปที่ 1.3





รูปที่ 1.2 optical switch ที่สร้างจากท่อนำคลื่นแสง coupler หลายตัวมาวางต่อกันแบบคาสเคด (Tamir, 1990:202)



รูปที่ 1.3 ตัว modulator (Tamir, 1990:204)

การใช้งานอีกลักษณะหนึ่งของท่อนำคลื่นแสงคือนำมาใช้งานในวงจรรวมทางแสง (optical integrated circuits) โดย OIC คือ วงจรแสงที่ประกอบด้วยอุปกรณ์หลัก 3 ชนิด คือ source, waveguide และ detector สร้างอยู่บนแผ่นฐาน (substrate) เดียวกัน โดยถ้าอุปกรณ์ทั้งสามชนิดอยู่บน แผ่นฐานเดียวกันหมดจะถูกเรียกว่า monolithic optical IC ในขณะที่อุปกรณ์ทั้ง 3 ชนิดวางอยู่ต่างแผ่นฐานกันหมดจะเรียกว่า hybrid optical IC และถ้ามี 2 ชนิดอยู่บนแผ่นฐานเดียวกันจะถูกเรียกว่า quasi-hybrid หรือ quasi-monolithic IC

วงจรรวมทางแสงถูกคิดค้นขึ้นในทศวรรษที่ 60 แต่หลังจากที่แก้ไขปัญหาความสูญเสียในเส้นใยแก้วนำแสงได้ทำให้งานวิจัยเกี่ยวกับ OIC ลดลงเพราะเป็นที่คาดกันว่าจะยังไม่ได้นำมาใช้งานในอนาคตอันใกล้นี้และหันไปมุ่งเน้นงานวิจัยเกี่ยวกับเส้นใยแก้วนำแสงแทน จนกระทั่งการสื่อสารผ่านเส้นใยแก้วนำแสงพัฒนาจนใช้ความยาวคลื่นมีขนาดเล็กมากทำให้เกิดปัญหาเรื่อง alignment และ ความเสถียรของระบบจึงทำให้หันกลับมาสนใจวิเคราะห์วงจรรวมทางแสงอีกครั้งหนึ่ง โดยวิวัฒนาการของวงจรรวมทางแสงแสดงดังตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 วิวัฒนาการของวงจรรวมทางแสง (Nishihara, Haruna, and Suhara,1985:4)

	First Generation	Second Generation	Third Generation	
Technology	Conventional Optics	Micro-optics	Integrated Optics	-Wave Optics -Thin-film Tech -Micro fabrication
Typical Components	Gas laser, lenses, Mirrors	LED, LD, Multimode fibers, rod lenses	Optical ICs single-mode LD, fibers	-Integration -Diffuculties of coupling to LDs and fibers
Alignment of components	necessary	Necessary (hard task)	not necessary (all fixed)	-stable (for vibration)
Propagation system (size)	beam	beam multimode waveguides	single-mode waveguides	-Easy control -High intensity ♦ strong interaction ♦ large nonlinearity ♦ optical demage
size of control electrodes (order)	$1\,cm$	$1\,mm$	$1\,\mu m$	-Low drive voltage -High speed
Size of devices (order)	$1m\ square$	$10\,cm\ square$	$a\ few\,cm\ square$ $(thin\ film)$	-Compact -Light weight

คุณสมบัติที่สำคัญของวงจรรวมทางแสงในยุคที่สามคือ

1.การวิเคราะห์ต้องทำด้วยวิธีเชิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถวิเคราะห์แบบรังสีได้อีกต่อไปเพราะท่อนำคลื่นแสงไม่ได้มีรูปร่างใหญ่กว่าความยาวคลื่นมากนัก

2.ไม่ต้องเล็งแนวเส้นตรง(alignment) เพราะสร้างอยู่บนแผ่นฐานเดียวกัน

3. ง่ายต่อการควบคุม เนื่องจากเป็นการส่งผ่านข้อมูลแบบ single mode จึงสามารถควบคุมได้ทั้ง electrooptics effect, acoustooptic effect และ thermooptic effect

4. ใช้แรงดันไฟฟ้าต่ำในการควบคุม และ ใช้ระยะการควบคุมสั้น

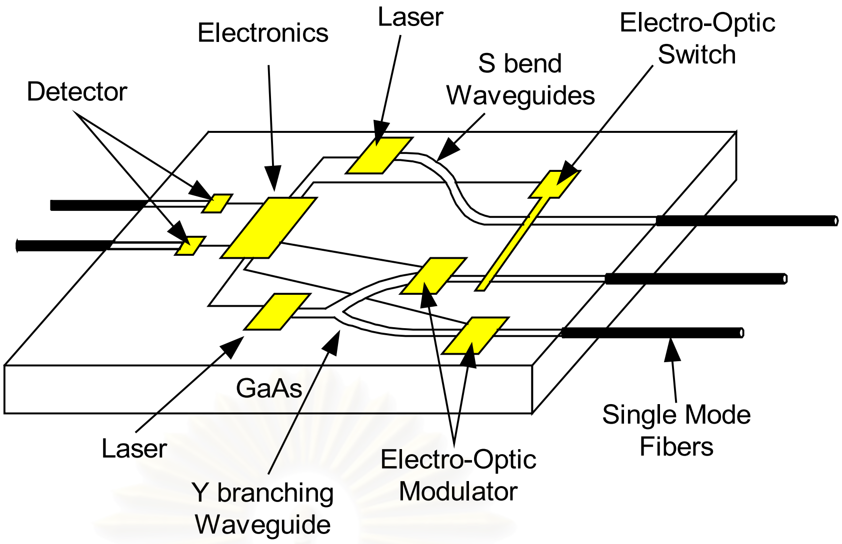
5. การทำงานรวดเร็ว

6.ส่งพลังงานสูงเนื่องจากใช้งานในท่อนำคลื่นแสงเหมาะสำหรับใช้งานร่วมกับ nonlinear optic

7.รูปร่างเล็กและน้ำหนักเบา

8.ราคาถูก

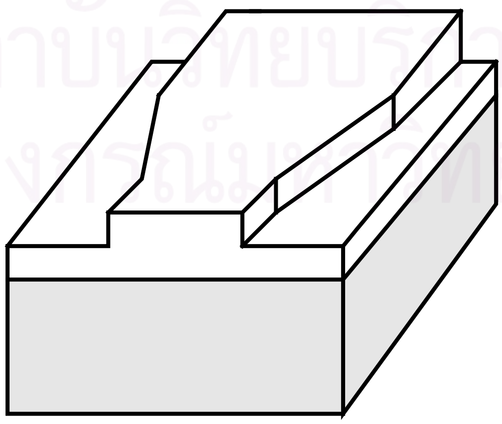
ก่อนอื่นต้องทำความเข้าใจเบื้องต้นว่าวงจรรวมทางแสงไม่ได้ช่วยให้วงจรทำงานได้เร็วมากขึ้นกล่าวคือวงจรโลหะที่ใช้ในปัจจุบันที่ใช้กระแสไฟฟ้าเป็นตัวพาห์เมื่อเทียบกับวงจรรวมทางแสงเมื่อใช้งานกับลำแสงพบว่าวงจรรวมทางแสงทำงานเร็วกว่าเพียงเล็กน้อยเท่านั้นแต่วงจรชนิดนี้มีความเหมาะสมที่จะใช้งานกับลำแสงมากกว่าวงจรโลหะอีกทั้งมีความจุหรือแบนด์วิดท์ที่กว้างกว่ามาก ในปัจจุบันการสื่อสารด้วยแสงยังใช้วงจรอิเล็กทรอนิกร่วมอยู่เนื่องจากความจุที่ต้องการยังคงสามารถใช้งานได้อยู่ แต่ในอนาคตเมื่อใช้ความถี่ที่สูงมากๆเช่น THz วงจรโลหะจะไม่สามารถใช้งานได้ สาเหตุอีกประการที่วงจรรวมทางแสงยังไม่มีการใช้งานเนื่องจากราคาในการสร้างยังสูงและยังไม่คุ้มค่าในการลงทุน ซึ่งกำลังรอคอยเทคนิคการสร้างที่จะช่วยลดต้นทุนในการผลิตเมื่อถึงจุดคุ้มทุนก็จะสามารถนำมาใช้งานได้เช่นเดียวกับระบบสื่อสารผ่านใยแก้วนำแสง



รูปที่ 1.4 วงจรรวมทางแสง (optical integrated circuits)

การสร้างท่อนำคลื่นแสงต้องอาศัยการออกแบบและวิเคราะห์ผลก่อนการสร้างจริงเสมอเพื่อลดปัญหาและค่าใช้จ่ายในการสร้างลง โดยการวิเคราะห์จะอาศัยการจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ สิ่งที่นำมาวิเคราะห์คือลักษณะทางกายภาพของท่อนำคลื่นแสงและชนิดของวัสดุที่ใช้ทำท่อนำคลื่นแสง เป็นต้น

รูปร่างของท่อนำคลื่นแสงที่นำมาใช้วิเคราะห์คือ ท่อนำคลื่นแสงที่มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนแพร่กระจาย เช่น ท่อนำคลื่นแสงแบบเรียว (Tapered optical waveguide) ดังแสดงในรูปที่ 1.5 โดยท่อนำคลื่นแสงแบบเรียวมีความกว้างของแกนเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน ทำหน้าที่คู่ควบระหว่างท่อนำคลื่นแสง 2 ชนิดที่มีความกว้างของท่อนำคลื่นแสงต่างกัน นอกจากนั้นยังสามารถใช้กรองโมดการแพร่กระจายได้อีกด้วย



รูปที่ 1.5 ท่อนำคลื่นแสงที่มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน เช่น ท่อนำคลื่นแสงแบบเรียว (Tapered optical waveguide)

นอกจากรูปร่างของท่อนำคลื่นแสงแล้วในวิทยานิพนธ์นี้ยังสนใจชนิดของวัสดุของท่อนำคลื่นแสงโดยวัสดุที่จะนำมาวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้คือ วัสดุแอนไอโซทรอปิก คุณลักษณะของวัสดุชนิดนี้คือ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าขึ้นกับทิศทางของสนามไฟฟ้า หรือ ดัชนีหักเหของท่อนำคลื่นแสงขึ้นกับทิศทาง โดยค่าสภาพยอมไฟฟ้าของวัสดุชนิดนี้สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ดังสมการ (1.1) ดังนี้

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{1.1}$$

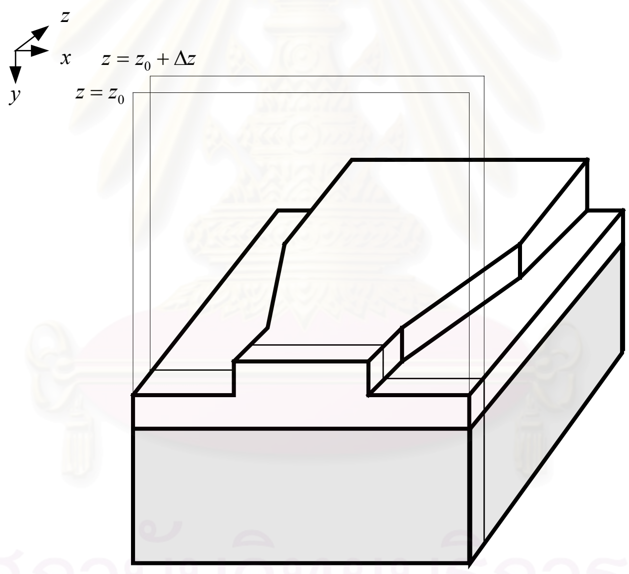
วัสดุที่มีคุณสมบัติแบบแอนไอโซทรอปิก เช่น ผลึกแก้ว proton exchanged $LiNbO_3$, ผลึกแก้ว (crystal) เป็นต้น วัสดุแอนไอโซทรอปิกนำมาสร้างท่อนำคลื่นแสงที่ควบคุมได้ด้วยสนามไฟฟ้า เช่น polarization convertors, wavelenght multiplexers, TE-TM mode coupler เป็นต้น นอกจากนั้นยังนำมาสร้างใยแก้วนำแสงที่มีโพราไรเซชันคงที่เพื่อจะนำมาส่งผ่านข้อมูลในหลายๆโพราไรเซชันได้ เช่น highly birefringence optical fibers เป็นต้น

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนมากนักสามารถใช้วิธีเชิงวิเคราะห์มาวิเคราะห์ปัญหาได้แต่ถ้าท่อนำคลื่นแสงที่มีโครงสร้างซับซ้อนการวิเคราะห์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์จะทำได้ยาก หรือ อาจหาผลเฉลยไม่ได้เลย วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) จึงเข้ามามีประโยชน์ในลักษณะดังกล่าวนี้

วิธีเชิงตัวเลขที่นำมาวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงมีมากมายหลายวิธี โดยวิธีบีมพรอพาเกชันเป็นวิธีวิเคราะห์ที่ได้รับความนิยมอย่างมากในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงที่มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนเนื่องจากการคำนวณจะแบ่งท่อนำคลื่นแสงออกเป็นระนาบย่อยๆทำให้ประหยัดหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณและลดเวลาในการคำนวณลง

1.2 วิธีบีมพรอพาเกชัน

วิธีบีมพรอพาเกชัน (Beam Propagation Method) เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมอย่างมากในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงที่มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนโดยวิธีนี้เป็นวิธีที่ดัดแปลงมาจากวิธีวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นในอากาศโดยนำมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสง Fiet and Fleck, 1978 เสนอวิธีคำนวณด้วยวิธี BPM โดยเริ่มจากการแบ่งท่อนำคลื่นแสงออกเป็นหลายระนาบ โดยระนาบแต่ละระนาบมีระยะห่างกันน้อยมาก และตั้งฉากกับทิศทางการแพร่กระจายดังรูปที่ 1.6 การคำนวณจะสมมติคำตอบของสมการให้อยู่ในรูปใกล้เคียงกับคลื่นระนาบ (nearly plane wave) โดยขนาดของสนามมีการเปลี่ยนแปลงแบบช้าๆเมื่อเทียบกับทิศทางการแพร่กระจาย (slowly varying envelope approximation) และค่าเฟสของสนามมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเมื่อเทียบกับทิศทางการแพร่กระจาย



รูปที่ 1.6 การแบ่งท่อนำคลื่นแสงออกเป็นระนาบย่อยๆโดยแต่ละระนาบมีทิศทางตั้งฉากกับทิศทางการแพร่กระจายและมีระยะห่างระหว่างระนาบน้อยๆ

สมการ BPM เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามในระนาบทั้งสองดังสมการ (1.2) เมื่อป้อนสนามอินพุตเข้าที่ระนาบแรกจึงคำนวณด้วยสมการ BPM หาเอาท์พุตที่ระนาบที่สอง ค่าสนามเอาท์พุตนี้จะเป็นค่าอินพุตของการคำนวณในระนาบถัดไปดังรูปที่ 1.7 เมื่อคำนวณเป็นระนาบๆไปเรื่อยๆจะสามารถหาสนามได้ตลอดความยาวของท่อนำคลื่นแสง

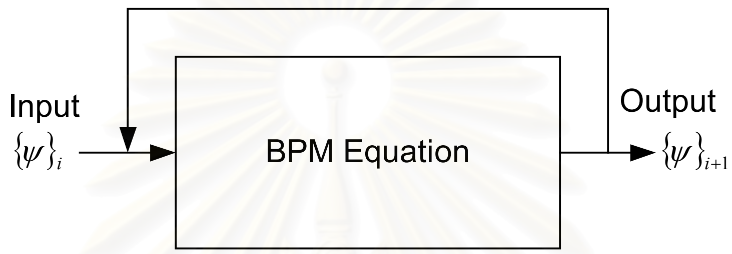
$$[A]\{\psi\}_{i+1} = [B]\{\psi\}_i \qquad (1.2)$$

โดยที่

$\{\psi\}_{i+1}$ คือ ขนาดของสนามที่ระนาบ $i+1$

$\{\psi\}_i$ คือ ขนาดของสนามที่ระนาบ i

$[A]$, $[B]$ เป็น เมทริกซ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี BPM



รูปที่ 1.7 การคำนวณด้วยวิธีBPM เป็นขั้นๆ

การวิเคราะห์ด้วยวิธี BPM มีข้อดี คือ รวมผลของสนามที่แผ่พลังงานออกไป (Radiated) และ สนามที่ถูกนำ (Guided) ทำให้สามารถวิเคราะห์การควบคู่ของสนามในท่อนำคลื่นแสงแบบตัวคู่ควบ (Coupler) ได้ดี และ ใช้คำนวณแทนวิธีทฤษฎีโมดเชื่อมโยง (Coupling Mode Theory) ได้ นอกจากนั้นยังสามารถคำนวณหาค่าสนามของท่อนำคลื่นแสงที่มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงตามแนวแพร่กระจายได้ดี ในการคำนวณยังแบ่งท่อนำคลื่นแสงออกเป็นช่วงย่อยๆทำให้ประหยัดการใช้หน่วยความจำในการคำนวณและประหยัดเวลาในการคำนวณ

ข้อด้อยของวิธีบีมพรอพาเกชันคือการคำนวณละเลยผลการสะท้อนกลับจากการแพร่กระจาย ดังนั้นวิธีบีมพรอพาเกชันจึงไม่เหมาะในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างทันทีทันใดนอกจากนั้นการคำนวณจะให้คำตอบ เฉพาะในช่วงความถี่แคบเท่านั้นทำให้ไม่เหมาะกับงานที่ต้องการคำตอบช่วงความถี่กว้าง

วิธีบีมพรอพาเกชันที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ คือวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชัน (Finite Element-Beam Propagation Method) โดยวิธีนี้นำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มาแก้ไขปัญหาในระนาบตัดขวาง(xy) และใช้วิธีไฟไนต์ดิพเฟอเรนซ์มาแก้ไขปัญหาในแนวแกน (z) การใช้งานวิธีนี้มีข้อดีคือ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สามารถคำนวณบนหน้าตัดใดๆได้ดีกว่าวิธี ไฟไนต์ดิพเฟอร์เรนซ์บีมพรอพาเกชัน (Finite Difference –Beam Propagation Method) โดยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สามารถแบ่งจำนวนอีลีเมนต์ให้เล็กมากๆได้และมีขนาดใดๆตามต้องการได้ (nonuniform finite element mesh) ซึ่งทำให้สามารถแบ่งพื้นที่การคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพและลดจำนวนโนดที่ใช้ในการคำนวณลง นอกจากนั้นวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ยังสามารถปรับแต่งอีลีเมนต์ให้สอดคล้องกับสนามและรูปร่างของท่อนำคลื่นแสงในระหว่างขั้นการคำนวณได้ (adaptive mesh generation) ทำให้สามารถให้ผลการคำนวณที่ละเอียดแม่นยำขึ้น

จุดเด่นของงานวิทยานิพนธ์นี้ที่แตกต่างจากงานวิจัยอื่นๆคือ ผู้วิจัยได้นำเอาอัล-กอริทึมแบบนิวมาร์กมาแก้ปัญหาในแนวแกนแทนวิธีเดิม (การประมาณแบบปาเด และวิธีไฟไนต์ดิพเฟอเรนซ์ อัลกอริทึม แครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicholson)) โดยรายละเอียดจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

1.3 **สมการบีมพรอพาเกชัน**

พิจารณาการคำนวณซึ่งเริ่มจากสมการคลื่นดังนี้

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+k^2\phi \quad = \quad 0 \tag{1.3}$$

โดยที่

ϕ คือ ฟังก์ชันของสนามไฟฟ้า หรือ ฟังก์ชันของสนามแม่เหล็ก, k คือ เลขคลื่นในอวกาศว่าง

วิธีการของ BPM จะสมมติให้สนามมีคำตอบอยู่ในรูป

$$\phi(x,y,z)=\psi(x,y,z)\exp(-jk_0n_0z) \tag{1.4}$$

โดยที่

ψ คือ ขนาดของสนาม, k_0 คือ เลขคลื่นในอวกาศว่าง, n_0 คือ ดัชนีหักเหอ้างอิง

เมื่อแทนคำตอบของสมการ (1.4) ลงในสมการ (1.3) และนำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มาแก้ไขปัญหาในระนาบตัดขวาง (xy) จะสามารถจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับสองดังนี้ (ในที่นี้ให้คลื่นแพร่กระจายในทิศทาง+z)

$$[C]\frac{d^2\{\psi\}}{dz^2}+[D]\frac{d\{\psi\}}{dz}+[E]\{\psi\}=\{0\} \tag{1.5}$$

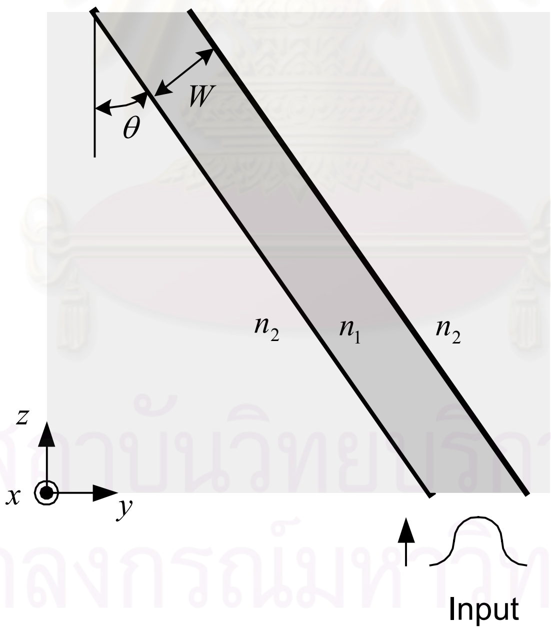
โดยที่ $[C]$, $[D]$, $[E]$ คือเมทริกซ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในระนาบตัดขวาง

ในกรณีที่ท่อนำคลื่นแสงมีรูปร่างเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนน้อยเราสามารถพิจารณาให้สนามมีค่าเปลี่ยนแปลงไม่มากนักในแกนการแพร่กระจาย ดังนั้นการคำนวณจะประมาณอนุพันธ์อันดับสองของสนามเมื่อเทียบกับ z ให้เป็นศูนย์ $\left(\frac{\quad}{dz^2} \approx 0\right)$ ทำให้สามารถเขียนสมการ (1.5) ได้ดังนี้

$$[D]\frac{d\{\psi\}}{dz} + [E]\{\psi\} = \{0\} \tag{1.6}$$

การประมาณแบบนี้เรียกว่าการประมาณแบบเฟรสเนล และสมการ (1.6) เรียกว่าสมการเฟรสเนล หรือ สมการ paraxial

การประมาณแบบเฟรสเนลทำให้ลดรูปเมทริกซ์ที่ใช้ในการคำนวณลงทำให้ประหยัดหน่วยความจำและลดเวลาในการคำนวณลง แต่เมื่อนำมาวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงที่รูปร่างมีการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนมากๆดังรูปที่ 1.8 จะทำให้ผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนสูง ปัญหานี้เรียกว่าปัญหามุมกว้าง(wide angle) และท่อนำคลื่นแบบนี้ถูกเรียกว่าท่อนำคลื่นมุมกว้าง



รูปที่ 1.8 ท่อนำคลื่นที่มีรูปร่างเบี่ยงเบนจากแนวแกนมาก

นักวิจัยจำนวนมากเสนอการแก้ปัญหามุมกว้างนี้ หนึ่งในนั้นคือ Hadley (1992) โดย Hadley ได้เสนอการประมาณแบบปาเด (pade approximation) มาใช้แก้ไขปัญหามุมกว้างในงาน FD-BPM โดยลดสมการอนุพันธ์อันดับสองให้เหลือเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$[F]\frac{d\{\psi\}}{dz}+[G]\{\psi\}=\{0\} \tag{1.7}$$

โดยที่ $[F]$, $[G]$ เป็น เมทริกซ์ที่ลดรูปจากสมการ (1.5) จากอนุพันธ์อันดับสองเหลือเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้การประมาณแบบปาเด

การประมาณแบบปาเดเป็นการประมาณแบบเศษส่วนโดย Koshiba and Tsuji (1996) นำมาใช้แก้ไขปัญหาในสมการสเกลาร์ FE-BPM ในขณะที่ schulz, Glingener, Bludzuweit and Voges (1998) นำมาใช้แก้ไขปัญหาในสมการเวกเตอร์ FE-BPM

จากสมการ (1.7) เราสามารถแก้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีไฟไนต์ดิพเฟอเรนซ์ได้ดังนี้

$$[H]\{\psi\}_{i+1}=[I]\{\psi\}_i \tag{1.8}$$

โดยที่

$\{\psi\}_{i+1}$ คือ สนามที่ระนาบ $i+1$

$\{\psi\}_i$ คือ สนามที่ระนาบ i

$[H]$, $[I]$ เป็น เมทริกซ์ที่หาได้จากวิธีไฟไนต์ดิพเฟอเรนซ์

จากสมการ (1.8) พบว่าเมื่อป้อนสนามที่ระนาบ i สามารถคำนวณหาค่าสนามที่ระนาบ $i+1$ ได้ สมการ (1.8) เรียกว่าสมการ BPM

นอกจากการประมาณแบบปาเดแล้ว Hernandez (1994) ได้เสนอการประมาณแบบนิวมาร์กมาแก้สมการอนุพันธ์อันดับสอง การประมาณแบบนิวมาร์กได้รับความนิยมอย่างมากในงานไฟไนต์อีลีเมนต์โดเมนเวลา (finite element time domain) โดยใช้งานอย่างแพร่หลายในงานวิศวกรรมโยธา วิศวกรรมเครื่องกล และ วิศวกรรมสิ่งแวดล้อม เป็นต้น การประมาณแบบนิวมาร์กเป็นการประมาณการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ด้วยฟังก์ชันโพลีโนเมียลโดยสามารถแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองและจัดรูปสมการออกมาได้ดังนี้

$$[J]\{\psi\}_{i+1} = [K]\{\psi\}_i + [L]\{\psi\}_{i-1} \tag{1.9}$$

โดยที่ $\{\psi\}_{i+1}$ คือ สนามที่ระนาบ $i+1$

$\{\psi\}_i$ คือ สนามที่ระนาบ i

$\{\psi\}_{i-1}$ คือ สนามที่ระนาบ $i-1$

$[J]$, $[K]$, $[L]$ เป็นเมทริกซ์ที่หาได้จากวิธีนิวมาร์ก

การประมาณแบบปาเดมีข้อดีคือ

1.ให้ผลการคำนวณที่มีความแม่นยำสูงเนื่องจากเป็นการประมาณแบบเศษส่วน ถ้าต้องการความละเอียดของการคำนวณเพิ่มขึ้นสามารถเพิ่มอันดับการประมาณให้สูงขึ้นได้

2. การคำนวณเก็บค่าสนามเพียงระนาบเดียวทำให้ไม่สิ้นเปลืองหน่วยความจำมากนัก

การประมาณแบบปาเดมีข้อเสีย คือ

เมื่อสมการ (1.5) อยู่ในรูปที่ซับซ้อนการจัดรูปสมการต้องมีการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ซึ่งจะทำให้การคำนวณเสียเวลามากขึ้น และเป็นที่ทราบกันดีว่าการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์จะทำให้ผลการคำนวณคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น

การประมาณแบบนิวมาร์กมีข้อดีคือ

1. การจัดรูปสมการทำได้ง่ายเพราะอยู่ในรูปการบวกลบเมทริกซ์เท่านั้น
2. มีพารามิเตอร์ในการปรับค่าถึง2ตัวคือ β และ γ ทำให้สมการอยู่ในรูปทั่วไปมากกว่า นอกจากนั้นค่าพารามิเตอร์ทั้งสองยังช่วยในการปรับแต่งให้คำตอบไม่เกิดการลู่ออกได้ง่ายขึ้นอีกด้วย
3. จัดรูปสมการได้ทันทีไม่ต้องใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนซ์ในการจัดรูปอีก

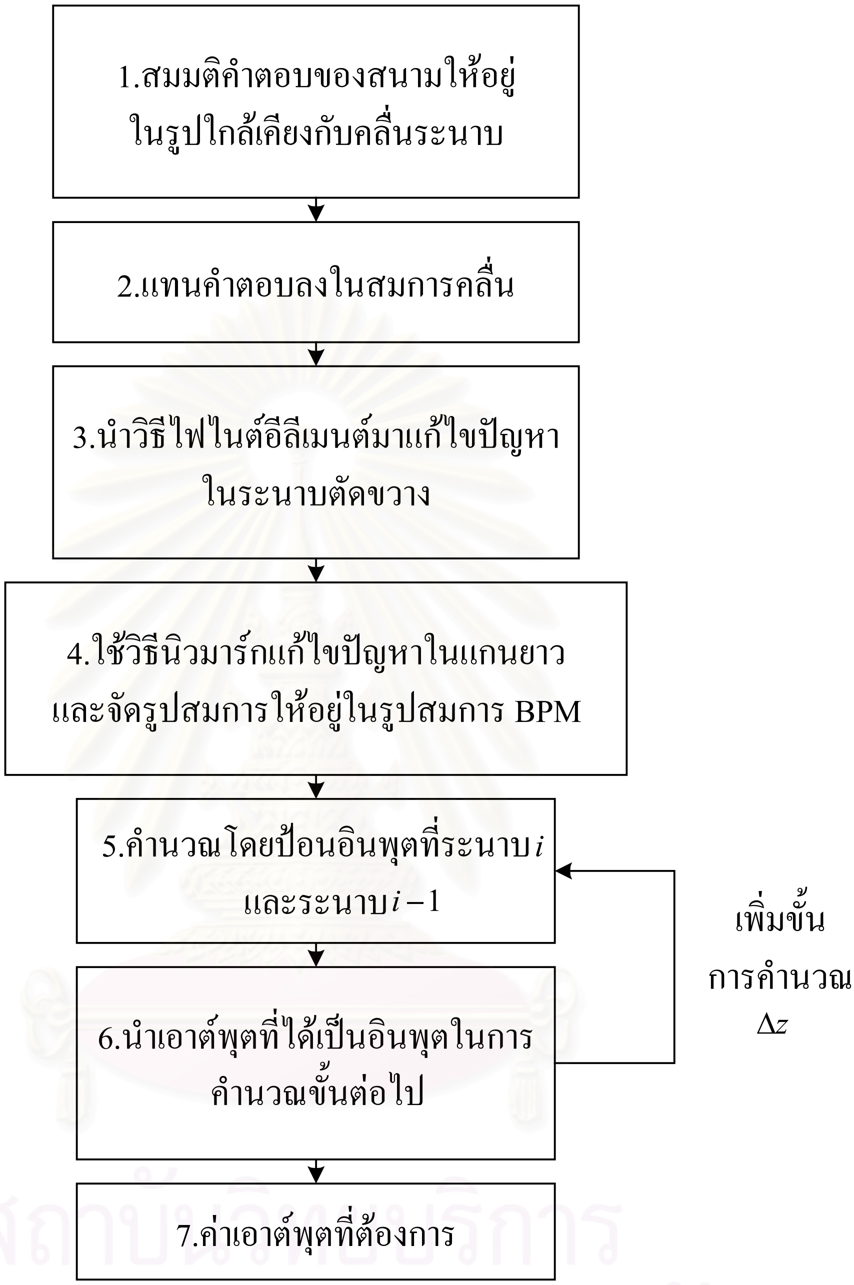
การประมาณแบบนิวมาร์กมีข้อเสียคือ

1.ต้องเก็บค่าสนามถึงสองระนาบทำให้ใช้หน่วยความจำเพิ่มขึ้น

2.ผลการคำนวณมีความถูกต้องแม่นยำน้อยกว่าวิธีปาเดเนื่องมาจากการประมาณแบบเศษส่วน (ปาเด) ให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องมากกว่าการประมาณแบบโพลีโนเมียล (นิวมาร์ก)

เมื่อเปรียบเทียบข้อดีข้อเสียของทั้งสองวิธี พบว่าในกรณีที่สมการมีความยุ่งยากมากขึ้นตัวอย่างเช่นในกรณีสมการเวกเตอร์ของวัสดุไบแอนไอโซทรอปิก การประมาณแบบปาเดต้องหาอินเวอร์สเมทริกซ์จะทำให้เสียเวลาและใช้หน่วยความจำเป็นจำนวนมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเมทริกซ์มีขนาดใหญ่มากๆดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำการประมาณแบบนิวมาร์กมาใช้งาน

รูปที่ 1.9 เป็นการสรุปขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธี FE-BPM อัลกอริทึม นิวมาร์ก ผู้วิจัยได้วิจัยเพิ่มเติมจากงานที่ Hernandez ได้เสนอไว้โดยคำนวณสมการทั้งแบบสเกลาร์และแบบเวกเตอร์ ศึกษาการคำนวณทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก คำนวณทั้งท่อนำคลื่นแสงแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ และศึกษาการใช้เงื่อนไขขอบเขตทั้งแบบโปร่งใสและแบบชั้นดูดซับ ในสมการเวกเตอร์ได้เลือกใช้ฟังก์ชันฐานแบบอีลีเมนต์ขอบที่ให้ผลการคำนวณในผิวรอยต่อที่ต่อเนื่องกันตลอดทั้งหน้าตัด นอกจากนั้นในงานท่อนำคลื่นแสงแบบสองมิติยังเสนอเงื่อนไขขอบเขตแบบใหม่ที่ใช้งานร่วมระหว่างเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นดูดซับและเงื่อนไขขอบเขตชนิดที่สามอีกด้วย โดยสามารถเปรียบเทียบงานวิทยานิพนธ์นี้กับงานวิจัยอื่นๆได้ดังตารางที่ 1.2 และ 1.3



รูปที่ 1.9 ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันอัลกอริทึมนิวมาร์ก

ตารางที่ 1.2 ตารางเปรียบเทียบงานวิจัยต่างๆที่ใช้สมการสเกลาร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันในการคำนวณกับงานในวิทยานิพนธ์นี้

งานวิจัย	สมการ	ท่อนำคลื่นแสง	วิธีแก้ปัญหาในแนวแกน	เงื่อนไขขอบเขต	วัสดุ	หมายเหตุ
Schmidt (1993)	เฟรสเนล	2 มิติ	Implicit midpoint	Neumann	ไอโซทรอปิก	adaptive mesh generation
Hernandez (1994,a)	นิวมาร์ก	2 มิติ	นิวมาร์ก	TBC	ไอโซทรอปิก	
Hernandez (1994,b)	นิวมาร์ก	2 มิติ	นิวมาร์ก	TBC	ไม่เชิงเส้น	
Tsuji and Koshiba (1996)	เฟรสเนล	2 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	ไอโซทรอปิก และ แอนไอโซทรอปิก	
Koshiba and Tsuji (1996)	ปาเด	2 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	ไอโซทรอปิก	
Tsuji, Koshiba, and Tanabe (1997)	ปาเด	2 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	ไอโซทรอปิก	adaptive mesh generation
Tsuji, Koshiba, and Shiraishi (1997)	ปาเด	3 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	ไอโซทรอปิก	ปรับปรุง TBC
Mitomi and Kasaya (1997)	ปาเด	2 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	ไอโซทรอปิก	ใช้ปาเดอันดับสูงในการคำนวณ
Niyama and Koshiba (1998)	ปาเด	3 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	ไม่เชิงเส้น	
Tsuji, Koshiba, and Takimoto (1999)	ปาเด	3 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	แอนไอโซทรอปิก	
Koshiba, Tsuji and Hikari (1999)	ปาเด	2 มิติ	Crank-Nicholson	PML	ไอโซทรอปิก	
Saitoh, Koshiba, and Tsuji (1999)	ปาเด	3 มิติ	Crank-Nicholson	TBC	แอนไอโซทรอปิก	ใช้วิเคราะห์ Piezoelectric Effects
Yasui, Koshiba, and Tsuji (1999)	ปาเด	2 มิติ	Crank-Nicholson	PML	ไม่เชิงเส้น	
Tsuji and Koshiba (2000)	ปาเด	3 มิติ	Crank-Nicholson	PML	ที่มีความสูญเสีย	
Saitoh and Koshiba (2001)	ปาเด	3 มิติ	Von-Nuemann	PML	แอนไอโซทรอปิก	
วิทยานิพนธ์	นิวมาร์ก	2,3 มิติ	นิวมาร์ก	TBC, PML	ไอโซทรอปิก และ แอนไอโซทรอปิก	

ตารางที่ 1.3 ตารางเปรียบเทียบงานวิจัยต่างๆที่ใช้สมการเวกเตอร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันในการคำนวณกับงานในวิทยานิพนธ์นี้

งานวิจัย	สมการ	สนาม	ฟังก์ชันฐาน	วิธีแก้ปัญหาในแนวแกน	เงื่อนไขขอบเขต	วัสดุ	หมายเหตุ
Mc h_t anari, Selleri, Vincetti and Zoboli (1998)	เฟรสเนล		โนด	Von-Nuemann	Neumann	ไอโซทรอปิก	
S ϕ_t, ϕ_z Glingener, Bludzuweit and Voges (1998)	ปาเด		อีลีเมนต์ขอบ	Crank-Nicholson	Neumann	ไอโซทรอปิก	
Cu ϕ_t otta, Pelosi, Selleri, Vincetti and Zoboli (1999)	เฟรสเนล		โนด	Von-Nuemann	PMA	ไอโซทรอปิก	
Pir h_t iro and Hernandez (2000)	เฟรสเนล		โนด	Von-Nuemann	dirichlet	แอนไอโซทรอปิก แบบ biaxial	
Ob h_t ya, Rahmann and Mikati (2000)	ปาเด		โนด	Von-Nuemann	PML	ไอโซทรอปิก	
Pir h_t iro, Barbero and Hernandez (2000)	เฟรสเนล		โนด	Von-Nuemann	dirichlet	แอนไอโซทรอปิก full tensor	
T ϕ_t, ϕ_z d Koshiba (2000)	ปาเด		อีลีเมนต์ขอบ	Crank-Nicholson	Neumann	ไอโซทรอปิก	adaptive mesh
Se ϕ_t i, Vincetti and Zoboli (2000)	เฟรสเนล		โนด	Von-Nuemann	PMA	แอนไอโซทรอปิก full tensor	
S ϕ_t, ϕ_z nd Koshiba (2001)	ปาเด		อีลีเมนต์ขอบ	Von-Nuemann	PML	แอนไอโซทรอปิก full tensor	
วิ ϕ_t, ϕ_z นธ์	นิวมาร์ก		อีลีเมนต์ขอบ	นิวมาร์ก	PML	แอนไอโซทรอปิก full tensor	

หมายเหตุ

ปาเด คือ การประมาณแบบปาเด, เฟรสเนล คือ การประมาณแบบเฟรสเนล หรือ การประมาณแบบ paraxial, นิวมาร์ก คือ การประมาณแบบนิวมาร์ก

ϕ_t, ϕ_z คือ สนามในระนาบตัดขวางกับสนามในแนวแกน, h_t คือ สนามแม่เหล็กระนาบตัดขวาง, TBC คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส

PMA คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบPML ชนิด วัสดุดูดซับแอนไอโซทรอปิก (anisotropic absorber)

PML คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบPML ในที่นี้หมายถึงแบบแปลงตัวแปร (stretched coordinate)

การนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็น 5 บท ดังนี้ บทที่1 บทนำ บทที่ 2 เสนอวิธีวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นแสงแบบ 2 มิติ (planar optical waveguide) โดยใช้สมการสเกลาร์อัลกอริทึมนิวมาร์กและแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์บนท่อนำคลื่นแสงตัวคู่ควบ (coupler optical waveguides) ท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอส (S bended optical waveguide) ในบทที่ 3 เสนอวิธีวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นแสงบนท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติ (3 Dimensional optical waveguide) โดยใช้สมการสเกลาร์อัลกอริทึมนิวมาร์ก และนำเสนอผลการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นแสงแบบตัวคู่ควบ (directional coupler optical waveguide), ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ (rib optical waveguide), ท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย (Y-rib optical waveguide),และ ท่อนำคลื่นแสงแบบตัวแยกโดดเดี่ยวแบบแมกนิโตออปติก (magnetooptic isolator optical waveguide) ในบทที่ 4 เสนอวิธีการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงด้วยสมการเวกเตอร์ (full vector wave equation) และแสดงผลการคำนวณการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นแสงแบบริบ, ท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย, ท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐาน (embeded optical waveguide) และ ใยแก้วนำแสงแบบ stress birefringence optical fiber, บทที่ 5 เป็นการสรุปและวิจารณ์

1.4 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาและเสนอวิธีวิเคราะห์การแพร่กระจายของลำแสงที่เดินทางไปในท่อนำคลื่นแสงโดยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

2. พัฒนาวิธีวิเคราะห์ให้สามารถใช้ได้กับท่อนำคลื่นแสงที่มีโครงสร้าง 3 มิติแบบใดๆ และมีความยาวอยู่ในช่วงที่ไม่เกิน 1000 เท่าของความยาวคลื่นแสง และ สามารถใช้ได้กับท่อนำคลื่นแสงที่มีสมบัติทางไฟฟ้าของตัวกลางเป็นแบบแอนไอโซทรอปิก

1.5 ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาและเสนอวิธีวิเคราะห์การแพร่กระจายของลำแสงที่เดินทางในท่อนำคลื่นแสงด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยใช้สมการคลื่นในรูปเวกเตอร์

2. พัฒนาวิธีวิเคราะห์ให้สามารถใช้ได้กับท่อนำคลื่นแสงที่มีโครงสร้าง 3 มิติแบบใดๆ และมีความยาวอยู่ในช่วงที่ไม่เกิน 1000 เท่าของความยาวคลื่นแสง อีกทั้งยังสามารถใช้ได้กับท่อนำคลื่นแสงที่มีสมบัติทางไฟฟ้าของตัวกลางเป็นแบบแอนไอโซทรอปิก

3. พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมกับการวิเคราะห์แบบเวกเตอร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชัน

4. เปรียบเทียบผลการคำนวณกับงานวิจัยที่ได้นำเสนอมาแล้ว

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.ได้พัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติโดยใช้การคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์

2. โปรแกรมตัวอย่างเพื่อนำไปพัฒนาและวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงแบบต่างๆ

1.7 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาวิธี FE-BPMที่มีผู้นำเสนอมาแล้ว

2. ศึกษาสมการคลื่นแบบเวกเตอร์ และไฟไนต์อีลีเมนต์แบบอีลีเมนต์ขอบ

3. เขียนโปรแกรมและทดสอบ

4. วิเคราะห์และแก้ไข

5. สรุปและรวบรวมผลการคำนวณ

6. จัดทำเอกสารวิทยานิพนธ์

บทที่ 2

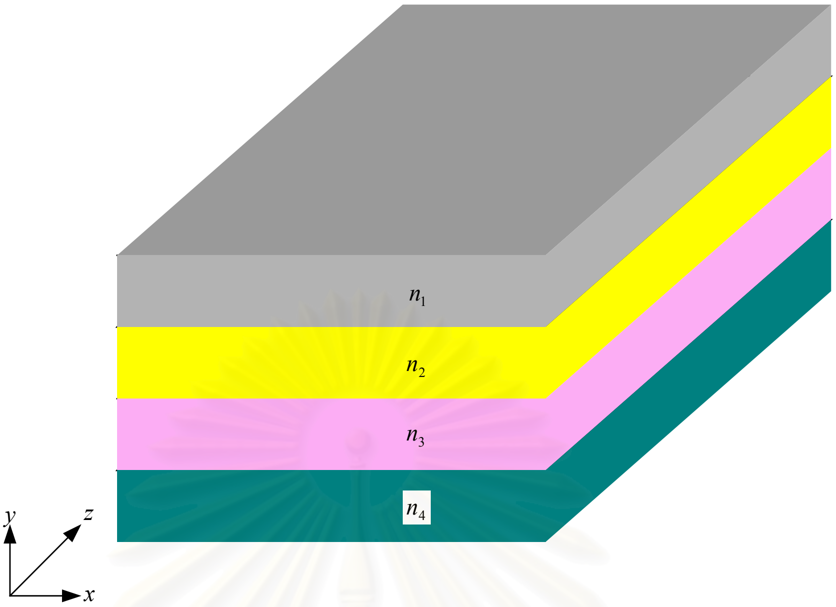
การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสง 2 มิติด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก

2.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กในท่อนำคลื่นแสงแบบ 2 มิติ ทฤษฎีต่าง ๆ ที่นำเสนอในบทนี้จะเป็นหลักการสำคัญที่ใช้ในการคำนวณในบทถัดไป การคำนวณในกรณีของท่อนำคลื่นแสง 2 มิติเป็นการคำนวณที่ง่าย, รวดเร็ว และไม่ซับซ้อน จึงเหมาะที่จะนำมาทดสอบอัลกอริทึมนิวมาร์ก เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย 4 หัวข้อ ในหัวข้อ 2.2 กล่าวถึงอัลกอริทึมนิวมาร์กที่จะนำมาใช้ในการคำนวณตลอดในงานวิทยานิพนธ์นี้ โดยนำเสนอในรูปแบบของการใช้ในสมการสเกลาร์สำหรับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสง 2 มิติ ในหัวข้อ 2.3 จะเป็นการนำเสนอตัวอย่างการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กในกรณีของท่อนำคลื่นแสงแบบ ตัวคู่ควบและท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวอักษรเอส(s) พร้อมผลการเปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณของอัลกอริทึมแบบปาเดกับอัลกอริทึมนิวมาร์กที่นำเสนอในงานวิทยานิพนธ์นี้ นอกจากนี้ยังนำเสนอผลและการหาค่าสัมประสิทธิ์นิวมาร์กที่เหมาะสม ในหัวข้อ 2.4 จะกล่าวถึง เงื่อนไขขอบเขตที่ระยะอนันต์ 2 แบบคือ เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส (transparent boundary- condition)และเงื่อนไขขอบเขตแบบPML (perfectly matched layer) ในหัวข้อ 2.5 จะกล่าวถึงเงื่อนไขขอบเขตแบบผสมที่ผู้วิจัยนำเสนอ

2.2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์ก

ท่อนำคลื่นแสง 2 มิติเป็นท่อนำคลื่นแสงที่มีโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยแผ่นตัวกลางหลายชนิดที่ถูกนำมาเรียงซ้อนกัน โครงสร้างตามแกนหนึ่งมีความสม่ำเสมอจึงถือได้ว่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นแสงไม่แปรตามระยะทางในแกนนี้ โครงสร้างของท่อนำคลื่นแสง 2 มิติแสดงได้ดังในรูปที่ 2.1 การวิเคราะห์ในบทนี้จะถือว่าตัวกลางเป็นไดอิเล็กตริกไร้การสูญเสียแบบไอโซทรอปิก เชิงเส้น และคลื่นแสงที่พิจารณามีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบไซนูซอยด์ด้วยความถี่เชิงมุม ω (rad/s) สมมติให้โครงสร้างของท่อนำคลื่นแสงมีความสม่ำเสมอในแนวแกน x ดังนั้นค่าดัชนีหักเหของแสงในตัวกลางไดอิเล็กตริกก็จะเป็นฟังก์ชันของ (y,z) โดยใช้สัญลักษณ์เป็น $n(y,z)$



รูปที่ 2.1 โครงสร้างทั่วไปของท่อนำคลื่นแสง 2 มิติ

คลื่นแสงที่แพร่กระจายในโครงสร้างของท่อนำคลื่นแสงสามารถวิเคราะห์ได้จากชุดสมการแมกซ์เวลล์ดังนี้

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \tag{2.1a}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2\vec{E} \tag{2.1b}$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 n^2\vec{E} = 0 \tag{2.1c}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{2.1d}$$

ในที่นี้ $\vec{E}$ คือ ความเข้มสนามไฟฟ้าในหน่วย V/m, $\vec{H}$ คือ ความเข้มสนามแม่เหล็กในหน่วย A/m, μ_0 คือค่าความซาบซึมได้ของอวกาศว่าง, ε_0 คือค่าสภาพยอมของอวกาศว่าง, n คือค่าดัชนีหักเหของตัวกลาง เมื่อให้ $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ เนื่องจากโครงสร้างของท่อนำคลื่นสม่ำเสมอตามแกน x และจัดรูปชุดสมการ (2.1) แล้ว จะสามารถแบ่งคลื่นที่เกิดขึ้นได้เป็น 2 ชุดคือ คลื่น TM ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบ H_x, E_y, E_z และ คลื่น TE ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบ E_x, H_y, H_z

สมการของคลื่นชุด TE และ TM แสดงได้ดังนี้

$$p\nabla^2\phi + k_0^2 q\phi \;\; = 0 \tag{2.2}$$

โดยที่

$$\phi = \begin{cases} E_x \text{ for TE} \\ H_x \text{ for TM} \end{cases} \tag{2.3a}$$

$$p = \begin{cases} 1 & \text{for TE} \\ 1/n^2 & \text{for TM} \end{cases}, \quad q = \begin{cases} n^2 & \text{for TE} \\ 1 & \text{for TM} \end{cases} \tag{2.3b}$$

และ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, k_0 คือเลขคลื่นในอวกาศว่าง

คลื่นแสงที่พิจารณาจะประกอบไปด้วยส่วนของคลื่นแสงที่เป็นคลื่นรูปไซน์ที่มีความถี่สูงมาก(ในย่าน 10^{14} Hz) ซึ่งมีแอมพลิจูดแปรตามตำแหน่ง (y,z) ตามหลักการของวิธี BPM จะให้คำตอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นแสงแสดงในรูปของผลคูณของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันไซนูซอยด์ที่แพร่กระจายไปตามแกน z ซึ่งถือว่าเป็นแกนของท่อนำคลื่นแสงในระบบ ด้วยความเร็วเสมือนว่าเป็นคลื่นระนาบซึ่งแพร่กระจายในตัวกลางที่มีค่าดัชนีหักเหของแสง n_0 เรียกค่าดัชนีหักเหของแสง n_0 ว่าค่าดัชนีหักเหของแสงอ้างอิง (reference index) ของระบบ ผลคูณของฟังก์ชันทั้งสองสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\phi \quad = \quad \psi_x(y,z)\exp(-jk_0 n_0 z) \tag{2.4}$$

โดยที่ $\psi_x(y,z)$ คือ ขนาดของแอมพลิจูดที่แปรตาม y และ z และ $\exp(-jk_0n_0z)$ คือ ฟังก์ชันของคลื่นที่แพร่กระจายไปในทิศทางตามแกน + z

ฟังก์ชัน $\psi_x(y,z)$ เป็นฟังก์ชันที่เราต้องหาคำตอบ ในขณะที่ค่าดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 จะถูกกำหนดให้เหมาะสม เราสามารถเลือกค่า n_0 ได้หลายค่าในช่วงของค่าดัชนีหักเหของแสงในตัวกลางของท่อนำคลื่นที่มีค่ามากที่สุดและน้อยที่สุด นอกจากการเลือกค่า n_0 ให้เป็นค่าคงที่แล้วยังมีวิธีการเลือกค่า n_0 ให้สามารถปรับค่าได้ (adaptive) อีกด้วย การคำนวณที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้จะละเลยการแพร่กระจายสะท้อนกลับในทิศทาง – z นั่นคือจะสมมติให้คลื่นแพร่กระจายในทิศทาง +z เพียงทางเดียว อย่างไรก็ตามยังมีวิธี BPM แบบ สองทิศทาง (Bidirectional) ที่พิจารณาการสะท้อนกลับรวมเข้ากับการคำนวณด้วย ซึ่งไม่ได้อยู่ในขอบเขตของงานในวิทยานิพนธ์นี้ ดังนั้นปัญหาท่อนำคลื่นที่นำมาวิเคราะห์จึงพิจารณาเฉพาะท่อนำคลื่นที่มีความต่อเนื่อง

ในแกนการแพร่กระจายเท่านั้น (ไม่พิจารณาท่อนำคลื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างทันทีทันใดตามแกน z)

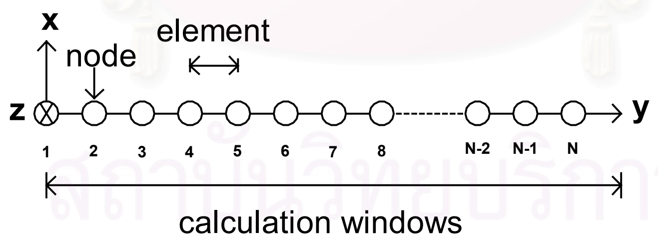
การหาผลเฉลยของฟังก์ชัน $\psi_x(y,z)$ เริ่มจากการแทนสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.2) แล้วจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปดังนี้

$$p\frac{\partial^2\psi_x}{\partial z^2}+p\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}-2jk_0n_0p\frac{\partial\psi_x}{\partial z}+(k_0^2q-k_0^2n_0^2p)\psi_x \quad = \quad 0 \qquad (2.5)$$

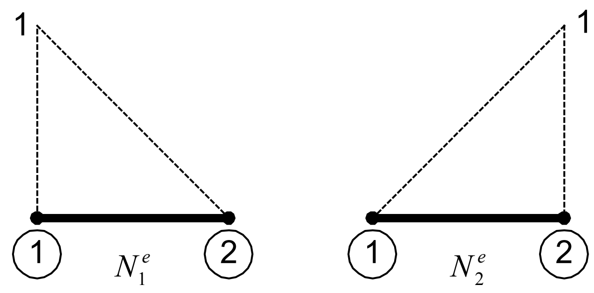
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะใช้ในการประมาณฟังก์ชัน $\psi_x(y,z)$ ในส่วนที่แปรตามแกน y ซึ่งเป็นแกนตามขวาง (transverse axis) ณ ระนาบ $z=z_0$ เริ่มต้นด้วยการแบ่งแกนตามขวางออกเป็นเส้นย่อยหรืออีลีเมนต์หนึ่งมิติดังรูปที่ 2.2 ฟังก์ชันในช่วงอีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์จะประมาณด้วยฟังก์ชันฐานแบบ 1 มิติ ดังรูปที่ 2.3 คูณกับพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า แสดงในรูปของผลคูณเมทริกซ์ดังนี้

$$\psi_x^e(y,z_0) \quad = \quad \{N(y)\}^T\{\varphi_x^e\}\Big|_{z_0} \qquad (2.6)$$

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่าง $\{N(y)\}^T=\begin{bmatrix}N_1^e(y)\\N_2^e(y)\end{bmatrix}^T$ แสดงในรูปทรานซโพสของเมทริกซ์ขนาด 2x1, $\{\varphi^e\}=[\varphi_1^e,\varphi_2^e]$ คือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าซึ่งมีอยู่ 2 ตัวต่อหนึ่งอีลีเมนต์ ในที่นี้ φ_1^e และ φ_2^e คือ ψ_x ที่โนดที่ 1 และโนดที่ 2 ของอีลีเมนต์หมายเลข e ตามลำดับ



รูปที่ 2.2 การแบ่งแกนขวางออกเป็นอีลีเมนต์ย่อย



(ก) (ข)

รูปที่ 2.3 ฟังก์ชันฐานของไฟไนต์อีลีเมนต์ 1มิติ (ก) N_1^e (ข) N_2^e

เมื่อแทนฟังก์ชัน $\psi_x^e(y, z_0)$ ตามสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.5) จะได้ว่า

$$p\{N\}^T \frac{\partial^2 \{\varphi_x^e\}}{\partial z^2} + p\frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial y^2}\{\varphi_x^e\} - 2jk_0 n_0 p\{N\}^T \frac{\partial \{\varphi_x^e\}}{\partial z} + \left(k_0^2 q - k_0^2 n_0^2 p\right)\{N\}^T\{\varphi_x^e\} = \{0\} \tag{2.7}$$

การหาผลเฉลยของพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าจะทำโดยใช้วิธีหาปริพันธ์ถ่วงน้ำหนักของเศษตกค้าง (weighted residual integral) ตามวิธีกาเลอคิน (Galerkin method) กล่าวคือจะหาผลคูณภายใน (inner product) ของสมการ (2.7) ด้วยฟังก์ชันทดสอบ และนำผลที่ได้จากอีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์มารวมกัน ผลที่ได้คือชุดสมการพีชคณิตเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{e}\int p\{N_i\}\{N_i\}^T dy \frac{d^2\{\varphi_x^e\}}{dz^2} + \sum_{i=1}^{e}\int p\{N_i\}\frac{d^2\{N_i\}^T}{dy^2} dy\{\varphi_x^e\} \\ &- 2jk_0 n_0 \sum_{i=1}^{e}\int p\{N_i\}\{N_i\}^T dy \frac{d\{\varphi_x^e\}}{dz} + \sum_{i=1}^{e}\int k_0^2 q\{N_i\}\{N_i\}^T dy\{\varphi_x^e\} \\ &- k_0^2 n_0^2 \sum_{i=1}^{e}\int p\{N_i\}\{N_i\}^T dy\{\varphi_x^e\} \quad = \quad \{0\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

แปลงพจน์ในสมการ (2.8) ที่มีอนุพันธ์อันดับสองให้เป็นพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.9)

$$\frac{d}{dy}\left(\{N\}\frac{d\{N\}^T}{dy}\right) = \frac{d\{N\}}{dy}\frac{d\{N\}^T}{dy} + \{N\}\frac{d^2\{N\}^T}{dy^2} \tag{2.9}$$

ผลที่ได้คือ

$$\sum_{i=1}^{e}\int \{N_i\}\frac{d^2\{N_i\}^T}{dy^2}dy = \sum_{i=1}^{e}\int \frac{d}{dy}\left(\{N_i\}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}\right)dy - \sum_{i=1}^{e}\int \frac{d\{N_i\}}{dy}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}dy$$

$$= \{N_i\}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}\Bigg|_{x_1}^{x_N} - \sum_{i=1}^{e}\int \frac{d\{N_i\}}{dy}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}dy \qquad (2.10)$$

เมื่อแทนผลจากสมการ (2.10) ลงในสมการ (2.8) แล้ว จัดรูปสมการใหม่ได้ผลเป็น

$$[M]\frac{d^2\{\varphi_x\}}{dz^2} - 2jk_0n_0[M]\frac{d\{\varphi_x\}}{dz} + \left([K] - k_0^2n_0^2[M]\right)\{\varphi_x\} = \{0\} \qquad (2.11)$$

โดยที่ $[K]$ และ $[M]$ คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีความสมมาตร โดยที่ค่าของสมาชิกจะแปรตามเงื่อนไขขอบเขตที่ระยะอนันต์ที่เลือกใช้งานว่าเป็นแบบใด

- ถ้าเลือกเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส (รายละเอียดในภาคผนวก ค)

เมทริกซ์ $[K]$และ $[M]$จะเป็นดังนี้

$$[K] = [K]' + [K]_\Gamma \qquad (2.12)$$

โดยที่

$$[K]' = \sum_{i=1}^{e}\int k_0^2 q\{N_i\}\{N_i\}^T - p\frac{d\{N_i\}}{dy}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}dy \qquad (2.13a)$$

$$[K]_\Gamma = p\begin{bmatrix} -jk_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -jk_m \end{bmatrix} \qquad (2.13b)$$

$$[M] = \sum_{i=1}^{e}\int p\{N_i\}\{N_i\}^T dy \qquad (2.13c)$$

ในที่นี้ k_1 และ k_m เป็นสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส (TBC)

- ถ้าใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPML เมทริกซ์ $[K]$และ $[M]$เขียนได้ดังนี้

$$[K] = \sum_{i=1}^{e} \int qsk_0^2 \{N_i\}\{N_i\}^T - \frac{1}{s} p \frac{d\{N_i\}}{dy} \frac{d\{N_i\}^T}{dy} dy \tag{2.14a}$$

$$[M] = \sum_{i=1}^{e} \int sp\{N_i\}\{N_i\}^T dy \tag{2.14b}$$

โดย s คือ PML พารามิเตอร์ (รายละเอียดในภาคผนวก ง)

การแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองของตัวแปร z ดังในสมการ (2.11) จะทำโดยการประมาณอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial z}$ ในรูปของผลต่าง งานวิจัยในช่วงแรกของวิธี BPM จะใช้การประมาณแบบเฟรสเนล (แบบ paraxial) กล่าวคือประมาณให้ $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx 0\right)$ เนื่องจากถือว่า $\psi_x(y,z)$ มีการเปลี่ยนแปลงไม่มากนักในทิศการแพร่กระจาย การใช้การประมาณแบบเฟรสเนลช่วยลดเมทริกซ์ที่ใช้ในการคำนวณลงและช่วยลดเวลาในการคำนวณ อย่างไรก็ตามการประมาณแบบเฟรสเนลให้ข้อผิดพลาดมากเมื่อใช้กับท่อนำคลื่นที่มีรูปร่างเปลี่ยนในแนวแกนมาก (wide angle) นักวิจัยจำนวนมากได้เสนอการแก้ปัญหา wide angle มากมายหลายวิธี ในจำนวนนี้วิธีการประมาณแบบปาเด (Pade’ approximation) ซึ่งได้รับความนิยมมากเนื่องจากให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องแม่นยำสูง การประมาณแบบปาเดจะอาศัยวิธีการประมาณแบบเศษส่วนเข้ามาลดอนุพันธ์อันดับสองให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หลังจากนั้นจึงใช้วิธีไฟไนต์ดิพเฟอเรนซ์ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง นอกจากวิธีปาเดแล้วยังมีการแก้ปัญหาอีกวิธีหนึ่งเสนอโดย Hernandez (1994) นั่นคือวิธีนิวมาร์ก (Newmark Method) วิธีนี้มีการใช้งานอย่างมากในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับปัญหาที่แก้สมการในโดเมนเวลา (time domain) ซึ่งพบในงานวิศวกรรมทั้งทางคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า โยธา เครื่องกล สิ่งแวดล้อม เป็นต้น โดย Hernandez ได้เสนอวิธีนิวมาร์กสำหรับการคำนวณในท่อนำคลื่นแสง 2 มิติแบบไอโซทรอปิกโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส วิทยานิพนธ์นี้ได้นำวิธีนิวมาร์กมาใช้ในสมการสเกลาร์ในท่อนำคลื่นแสงแบบ 2 มิติ และขยายผลไปสู่การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติ อีกทั้งยังใช้กับท่อนำคลื่นที่ใช้วัสดุแบบแอนไอโซทรอปิกในโครงสร้างด้วย

2.2.1 วิธีนิวมาร์ก

วิธีนิวมาร์กคือวิธีการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองวิธีหนึ่งโดยใช้การประมาณแบบอนุกรมเทย์เลอร์เข้ามาช่วยแก้ปัญหา โดย Newmark ได้เสนอวิธีในปี ค.ศ.1959 เพื่อแก้ปัญหาในสมการ การสั่นพลวัต (dynamic vibration) วิธีนิวมาร์กจะแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองโดยตรง ในที่นี้จะแสดงที่มาของวิธีนิวมาร์กที่ใช้แก้สมการอนุพันธ์อันดับสองในโดเมนเวลา

เริ่มต้นจากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองดังสมการ (2.15)

$$Mx'' + Cx' + Kx + f = 0 \tag{2.15}$$

โดยที่ M, C, K และ f เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ x'', x' คืออนุพันธ์อันดับสอง และ อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน x เทียบกับเวลาตามลำดับ สามารถกระจาย x' ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ได้ดังนี้

$$x'_{n+1} = x'_n + x''_n \Delta t + x''_n \Delta t^2 / 2 + ... \tag{2.16}$$

ตามวิธีนิวมาร์กเราจะประมาณอนุกรมเทย์เลอร์ด้วยตัวแปรนิวมาร์กสองตัวคือ γ กับ β โดยเขียนการกระจายเป็นดังนี้

$$x_{n+1} = x_n + x'_n \Delta t + (1 - 2\beta) x''_n \frac{\Delta t^2}{2} + 2\beta x''_{n+1} \frac{\Delta t^2}{2} \tag{2.17a}$$

$$x'_{n+1} = x'_n + (1 - \gamma) x''_n \Delta t + \gamma x''_{n+1} \Delta t \tag{2.17b}$$

เมื่อจัดรูปสมการ (2.15), (2.16), และ (2.17) ดังมีรายละเอียดในภาคผนวก ข เราจะได้

$$\begin{aligned} &(M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K) x_{n+1} + (-2M + (1 - 2\gamma) \Delta t C + (0.5 + \gamma - 2\beta) \Delta t^2 K) x_n \\ &+ (M + (\gamma - 1) \Delta t C + (0.5 - \gamma + \beta) \Delta t^2 K) x_{n-1} \\ &+ \Delta t^2 (\beta f_{n+1} + (0.5 + \gamma - 2\beta) f_n + (0.5 - \gamma + \beta) f_{n-1}) = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

หรือจัดสมการ (2.18) ใหม่ จะได้สมการอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\frac{\left(Mx_{n+1}-2Mx_n+Mx_{n-1}\right)}{\Delta t^2}+\frac{\left(\gamma Cx_{n+1}+(1-2\gamma)Cx_n+(\gamma-1)Cx_{n-1}\right)}{\Delta t}$$

$$+\left(\beta Kx_{n+1}+(0.5+\gamma-2\beta)Kx_n+(0.5-\gamma+\beta)Kx_{n-1}\right)$$

$$+\left(\beta f_{n+1}+(0.5+\gamma-2\beta)f_n+(0.5-\gamma+\beta)f_{n-1}\right) \quad = \quad 0 \qquad (2.19)$$

ผลที่ได้ในสมการ (2.19) แสดงให้เห็นว่าเราสามารถคำนวณหาฟังก์ชัน x ที่ขั้นเวลา n+1 จากฟังก์ชัน x ที่ขั้นเวลา n และ n-1 ซึ่งเป็นการคำนวณโดยใช้ค่าในอดีต 2 ค่า สังเกตว่าถ้าให้ $\beta=0,\ \gamma=0.5$ แล้วสมการ (2.19) จะคล้ายกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองด้วยวิธีไฟไนต์ดิพเฟอเรนซ์ด้วยอัลกอริทึมแบบ central difference

Hernandez ได้นำผลที่ได้จากสมการ (2.19) มาใช้กับวิธีคำนวณ BPM ในท่อนำคลื่นแสงโดยเทียบระหว่างสมการ (2.11) กับ (2.19) กล่าวคือถ้าให้ $M=[M]$, $C=-2jk_0n_0[M]$, $K=\left([K]-k_0^2n_0^2[M]\right)$, $f=0$ และ อนุพันธ์เทียบกับ z แทนการอนุพันธ์เทียบกับ t แล้ว ดังนั้นสมการ (2.11) เป็นดังนี้

$$[M]\left(\frac{\{\varphi_x\}_{i+1}-2\{\varphi_x\}_i+\{\varphi_x\}_{i-1}}{\Delta z^2}\right)$$

$$-2jk_0n_0[M]\left(\frac{\gamma\{\varphi_x\}_{i+1}+(1-2\gamma)\{\varphi_x\}_i+(\gamma-1)\{\varphi_x\}_{i-1}}{\Delta z}\right)$$

$$+\left([K]-k_0^2n_0^2[M]\right)\left(\beta\{\varphi_x\}_{i+1}+(0.5+\gamma-2\beta)\{\varphi_x\}_i+(0.5-\gamma+\beta)\{\varphi_x\}_{i-1}\right) \quad = \quad 0 \qquad (2.20)$$

เมื่อจัดรูปให้ $\{\varphi_x\}_{i+1}$ ให้อยู่ทางซ้ายมือของสมการและย้าย $\{\varphi_x\}_i$ และ $\{\varphi_x\}_{i-1}$ ไปทางขวามือของสมการแล้วจะได้

$$[A]\{\varphi_x\}_{i+1} \quad = \quad [B]\{\varphi_x\}_i+[C]\{\varphi_x\}_{i-1} \qquad (2.21)$$

โดยที่

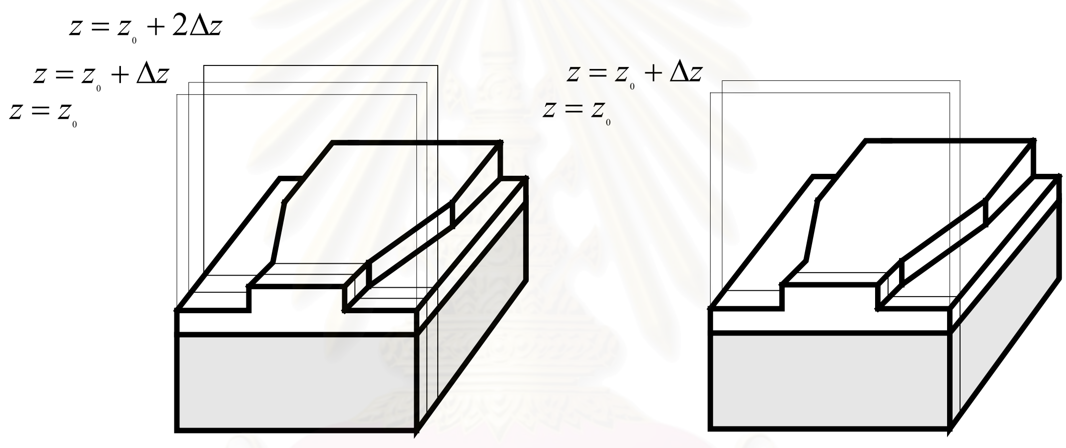
$$[A]=[M]-2jk_0n_0[M]\gamma\Delta z+\left([K]-k_0^2n_0^2[M]\right)\beta\Delta z^2 \qquad (2.22a)$$

$$[B]=2[M]+2jk_0n_0[M](1-2\gamma)\Delta z-\left([K]-k_0^2n_0^2[M]\right)(0.5+\gamma-2\beta)\Delta z^2 \qquad (2.22b)$$

$$[C]=\left(-[M]+2jk_0n_0[M](-1+\gamma)\Delta z-\left([K]-k_0^2n_0^2[M]\right)(0.5-\gamma+\beta)\Delta z^2\right) \qquad (2.22c)$$

สมการ (2.21) เป็นสมการ BPM ถ้าเราทราบค่าสนาม $\{\varphi_x\}_i$ และ $\{\varphi_x\}_{i-1}$ จะสามารถคำนวณสนาม $\{\varphi_x\}_{i+1}$ ได้

เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีปาเดในแบบเดิมแล้วพบว่าวิธีนิวมาร์กมีสูตรการคำนวณที่ง่ายกว่า แต่วิธีปาเดมีข้อดีคือ ให้คำตอบที่มีความละเอียดแม่นยำกว่า นอกจากนั้นอัลกอริทึมแบบ crank-nicholson ยังมีความเสถียรสูง และการคำนวณแบบนิวมาร์กยังต้องเก็บค่าสนามในสองระนาบในขณะที่วิธีปาเดเก็บค่าสนามเพียงระนาบเดียวทำให้ประหยัดหน่วยความจำมากกว่า อย่างไรก็ตามด้วยสูตรที่ง่ายกว่าของวิธีนิวมาร์กน่าจะทำให้การคำนวณง่ายในสมการเวกเตอร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อใช้ในกรณีของท่อนำคลื่นที่ประกอบด้วยวัสดุแอนไอโซทรอปิก



(ก) (ข)

รูปที่ 2.4 การเปรียบเทียบระนาบที่ใช้ในการคำนวณระหว่างวิธีนิวมาร์กและวิธีปาเด

(ก) แบบนิวมาร์กซึ่งใช้สนามที่ระนาบ z_0 และ $z_0+\Delta z$ ในการคำนวณหาสนามที่ระนาบ $z_0+2\Delta z$

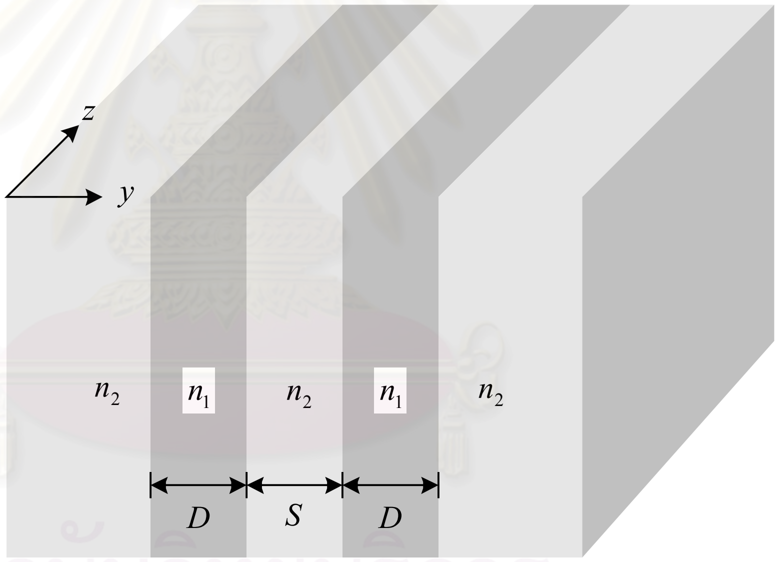
(ข) แบบปาเด-แครงก์นิโคลสัน ใช้สนามที่ระนาบ z_0 ในการคำนวณหาสนามที่ระนาบ $z_0+\Delta z$

2.3 การคำนวณในกรณีตัวอย่าง

ในบทนี้จะกล่าวถึงการคำนวณในกรณีตัวอย่างของท่อนำคลื่นแสง 2 ชนิด คือ ท่อนำคลื่นแสงแบบตัวคู่ควบ และ ท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอส เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ นอกจากนี้ยังเป็นการแสดงผลของการหาค่าสัมประสิทธิ์นิวมาร์ก

2.3.1 ท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ

พิจารณาการแพร่กระจายในท่อนำคลื่นแสงแบบ 2 มิติ แบบคู่ควบซึ่งปรากฏในงานวิจัยของ (Xiang and Yip, 1994) ดังรูปที่ 2.5 กำหนดหน้าต่างการคำนวณให้อยู่ที่ $(-5\mu m, 5\mu m)$ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้เป็นดังนี้ $D = 0.5\mu m$, $S = 1\mu m$, $n_2 = 1.3$, $n_1 = 1.5$ ความยาวคลื่นแสงที่ใช้คือ $\lambda =$ $1.5\mu m$



รูปที่ 2.5 ท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ

การคำนวณด้วยวิธี FE-BPM และอัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก จะใช้สมการ (2.21) โดยในที่นี้ เลือกค่า $\gamma = 0.5, \beta = 0.5$ ตามที่ Hernandez (1994) เสนอ เลือกค่าดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 เท่ากับค่าดัชนีหักเหเปลือก(cladding) ซึ่งเท่ากับ 1.3 เลือกค่าขั้นการแพร่กระจาย $\Delta z =$ $0.25\mu m$ ให้ระยะการแพร่กระจายเป็น $40\mu m$ ใช้อีลีเมนต์เส้นตรงดังรูปที่ 2.3 ความยาวของอีลีเมนต์ = $0.05\mu m$ เลือกใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLโดยค่า s มีค่าดังนี้

$$s = \begin{cases} 1 & non\,PML\,region \\ 1 - j\dfrac{(\alpha+1)}{4\pi n d}\left(\dfrac{\rho}{d}\right)^{\alpha} \ln\left(\dfrac{1}{R}\right) & PML\ region \end{cases} \tag{2.23}$$

โดยที่ α คือ ลักษณะการกระจายตัวของการลดทอนของสนามในชั้นดูดซับ

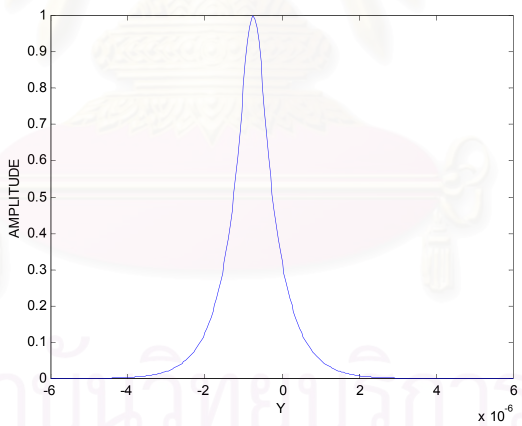
n คือ ดัชนีหักเหของท่อนำคลื่นแสงที่ติดกับชั้นดูดซับ

ρ คือ ระยะห่างจากผิวชั้นดูดซับ

d คือ ความหนาของชั้นดูดซับ

R คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎี

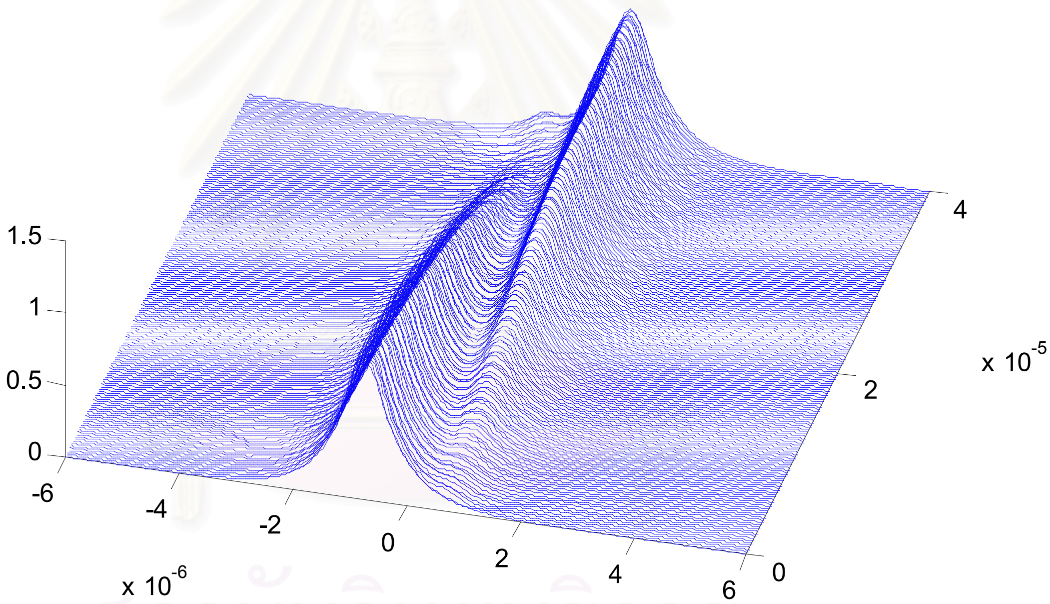
ในงานนี้ได้เลือกค่า α = 2 ซึ่งหมายถึงการกระจายตัวเป็นแบบพาราโบลา ค่าดัชนีหักเห n เท่ากับ 1.3 ความหนาของชั้นดูดซับ d เท่ากับ 1 μm ใช้จำนวนอีลีเมนต์ในชั้นดูดซับทั้งหมด 20 อีลีเมนต์ สังเกตได้ว่าเมื่อแทนสมการ (2.23) ลงในการคำนวณจะไม่สามารถใช้สูตรการอินทิเกรตโดยทั่วไปได้เพราะเทอม s แปรตามระยะทางดังนั้นจึงต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข



รูปที่2.6 สนามไฟฟ้าอินพุตโมด TE^0 ป้อนเข้าไปในแกนทางซ้ายมือของท่อนำคลื่นแสงคู่ควบ

เริ่มทำการคำนวณโดยป้อนสนามไฟฟ้าอินพุตของ TE^0 โมดดังแสดงในรูปที่ 2.6 ที่คำนวณจากวิธีเชิงวิเคราะห์ เข้าที่ระนาบ 0 และ –1 ในสมการ (2.21) ผลการคำนวณเมื่อคำนวณได้เป็นระยะทาง 40 μm แสดงดังรูปที่ 2.7 (ก) ซึ่งก็คือภาพของการกระจายของสนามไฟฟ้าบนแกน y ที่แพร่กระจายในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบมาเป็นระยะทาง 40 μm นับจากตำแหน่งที่ป้อน เมื่อคำนวณด้วยวิธีFE-BPM และอัลกอริทึมนิวมาร์ก ในขณะที่รูป 2.7 (ข) แสดงผลการคำนวณด้วยอัลกอริทึมปาเด จากผลการคำนวณพบว่าสนามในท่อนำคลื่นแสงด้านซ้ายค่อยๆถ่ายโอนพลังงาน

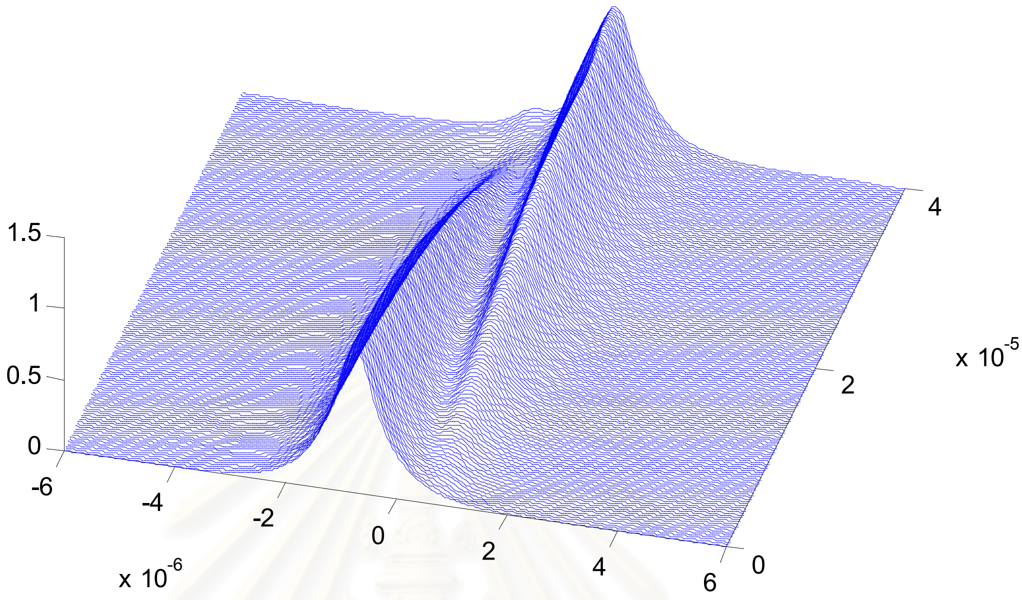
ไปอยู่ในท่อนำคลื่นแสงด้านขวา โดย ณ ตำแหน่งคู่ควบสนามจะถ่ายโอนพลังงานไปหมด สังเกตได้ว่าสนามที่คำนวณด้วยวิธีปาเดมีความราบเรียบกว่าเล็กน้อย ระยะคู่ควบ (coupling length) ที่หาได้ด้วยวิธีนิวมาร์ก $=37.25\mu m$ ในขณะที่ระยะคู่ควบที่หาได้จากวิธีปาเด $=36.5\mu m$ เมื่อหาค่าระยะคู่ควบด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เพื่อนำผลมาเปรียบเทียบ โดยใช้สมการ (2.24) มาคำนวณ(Nishihara, Haruna, and Suhara, 1985)



(ก)

รูปที่ 2.7 สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ

(ก) ใช้อัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก (ข) ใช้อัลกอริทึมแบบปาเด



(ข)

รูปที่ 2.7 (ต่อ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ

(ก) ใช้อัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก (ข) ใช้อัลกอริทึมแบบปาเด

การคำนวณหาระยะคู่ควบด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์หาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$L = \frac{\pi}{\beta_e - \beta_o} \tag{2.24}$$

โดยที่

L คือ ระยะคู่ควบ(coupling length)

β_e คือ ค่าคงที่การแพร่กระจายของโมดคู่ดังรูปที่ 2.8 (ข)

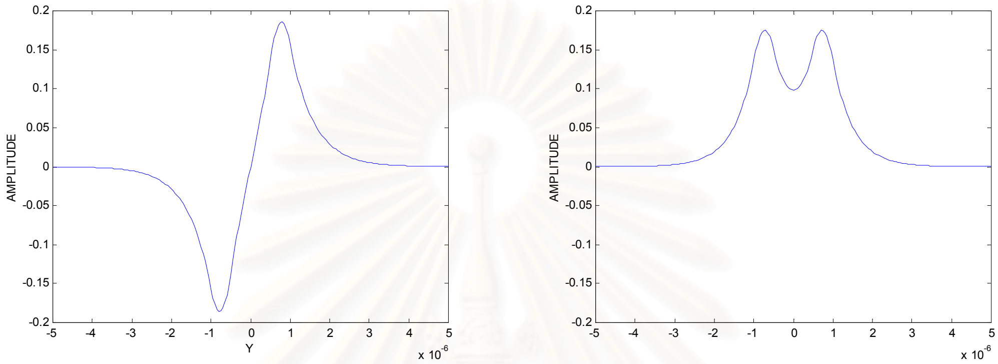
β_o คือ ค่าคงที่การแพร่กระจายของโมดคี่ดังรูปที่ 2.8 (ก)

คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์หาค่าคงที่การแพร่กระจายได้ดังนี้

β_e เท่ากับ5.788182150340998$\times 10^6$,

β_o เท่ากับ5.701546910678580$\times 10^6$

ดังนั้นสามารถคำนวณหาค่าระยะคู่ควบได้คือ 36.2622954104046 μm



() (ข)

รูปที่ 2.8 สนามโมดนำในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบคำนวณด้วยวิธี FEM

(ก) โมดคี่ (ข) โมดคู่

เมื่อเปรียบเทียบค่าระยะคู่ควบพบว่ามีค่าใกล้เคียงกันมากจึงสามารถสรุปได้ว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถใช้งานได้ดีในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงแบบ 2 มิติ อย่างไรก็ดีพบว่าอัลกอริทึมแบบปาเดให้ค่าที่ใกล้เคียงมากกว่าวิธีนิวมาร์ก

ตารางที่ 2.1 การเปรียบค่าพารามิเตอร์นิวมาร์กโดยให้ค่า $\gamma = 0.5$ และเปลี่ยนแปลงค่า β เป็นค่าต่างๆตั้งแต่ 0.4 ถึง 1.0 โดยนำค่าระยะคู่ควบมาพิจารณา

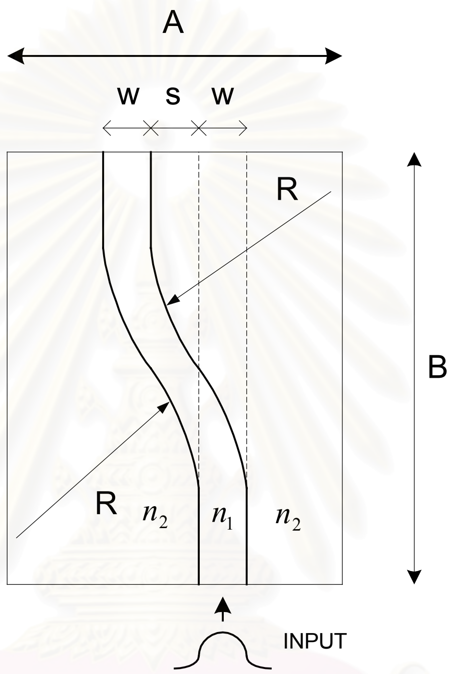
γ	β	ระยะคู่ควบ (μm)
0.5	0.4	37.25
0.5	0.5	37.25
0.5	0.6	36.75
0.5	0.7	36.25
0.5	0.8	36.75
0.5	0.9	36.5
0.5	1.0	36.75

ตามหลักการของนิวมาร์ก การเลือกค่าต่างๆโดยส่วนใหญ่แล้วจะเลือกค่า $\gamma = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ โดยค่า β จะมีค่าระหว่าง 0.25 ถึง 0.5 อย่างไรก็ตามเมื่อทดลองเปลี่ยนค่า β เป็นค่าต่างๆ แล้วนำผลการคำนวณระยะคู่ควบ มาเปรียบเทียบพบว่าค่า β ที่มีค่าน้อยกว่า 0.4 จะให้คำตอบที่ลู่ออก ในขณะที่ค่า $\beta = 0.7$ จะให้ค่าระยะคู่ควบที่ใกล้เคียงกับค่าที่หาได้ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ อย่างไรก็ตามค่าที่คำนวณได้ไม่แตกต่างกันมากนัก เราพบว่าเมื่อเลือกค่า $\gamma = 0.5$ และเลือกค่า $\beta = 0.5$ ทำให้เทอมในสมการ (2.21)บางเทอมหายไปดังนั้นทำให้ช่วยประหยัดหน่วยความจำได้มากกว่าดังนั้นเราจึงเลือกค่า $\gamma = 0.5$ และค่า $\beta = 0.5$ มาใช้ในการคำนวณ

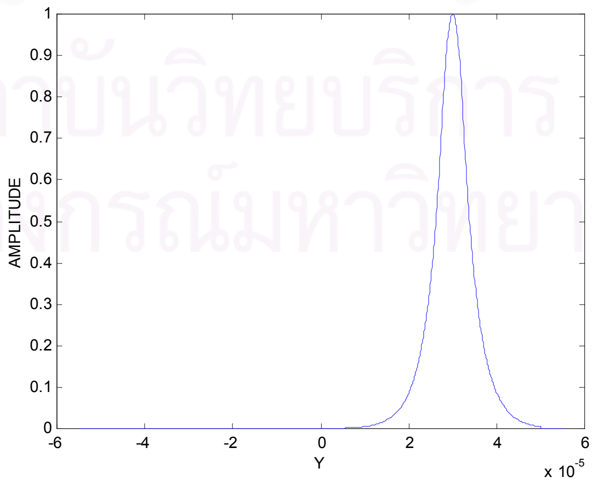
2.3.2 ท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอส

ตัวอย่างการคำนวณต่อไปเป็นการพิจารณาท่อนำคลื่นแสงที่มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนในที่นี้เลือกท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอส (Tsuji and Koshiba, 1996) ดังรูปที่ 2.9โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังนี้ A =100 μm , B = $1000 \mu m$,W = 5 μm , S = 55 μm
ค่ารัศมีความโค้ง(R) = 2679.2 μm , ใช้ความยาวคลื่นแสง λ = 1.55 μm , n_1 = 1.45,

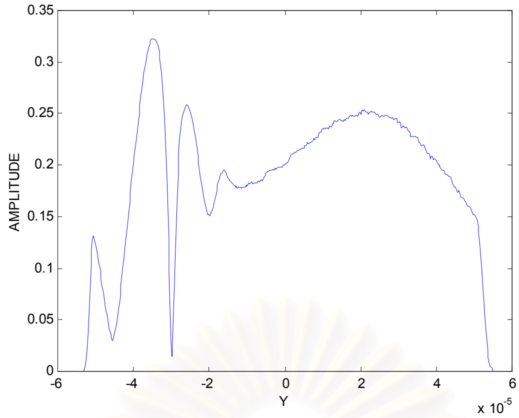
n_2 = 1.44638404 แบ่งอีลีเมนต์ในแกนตัดขวาง $\Delta y = 0.25 \mu m$ เลือกระยะการแพร่กระจายในแต่ละขั้น $\Delta z = 1 \mu m$ ป้อนสนามไฟฟ้าอินพุต TE^0 โมดดังรูปที่ 2.10 โดยให้สนามไฟฟ้าที่ระนาบ 0, -1 เท่ากับ TE^0 โมดใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์ก เลือกค่าดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 เป็น 1.44638404 เลือกพารามิเตอร์นิวมาร์ก $\gamma = 0.5$ พิจารณาหาค่า β ที่เหมาะสมกับวิธีFE-BPM โดยเลือกค่า β =0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 ตามลำดับ โดยพิจารณาสนามที่ตำแหน่ง $z = 1000 \mu m$ มาเปรียบเทียบกัน ได้ผลดังรูปที่2.11



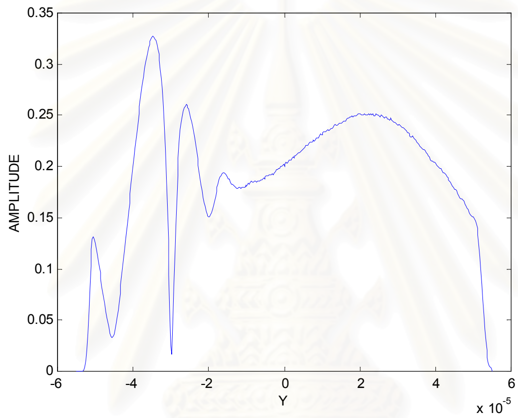
รูปที่ 2.9 ท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอส (S bend optical waveguide)



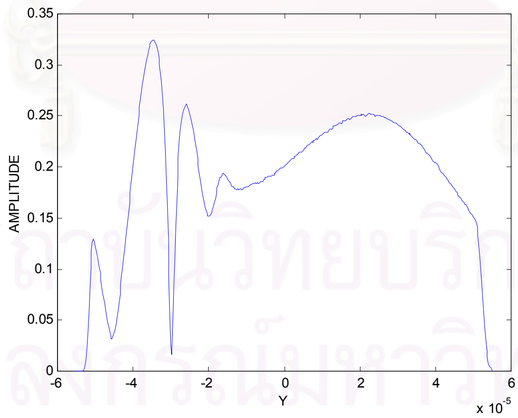
รูปที่ 2.10 สนามไฟฟ้าอินพุต TE^0 โมด



(ก) $\beta = 0.3$

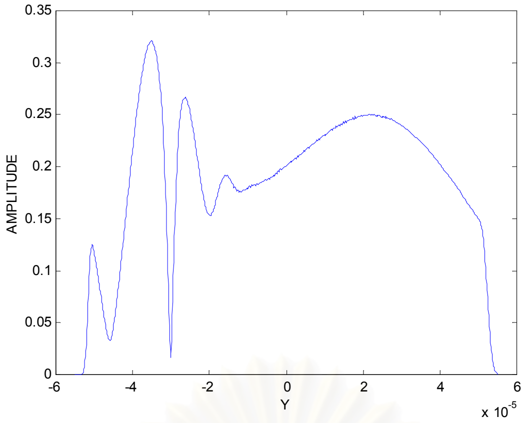


(ข) $\beta = 0.4$

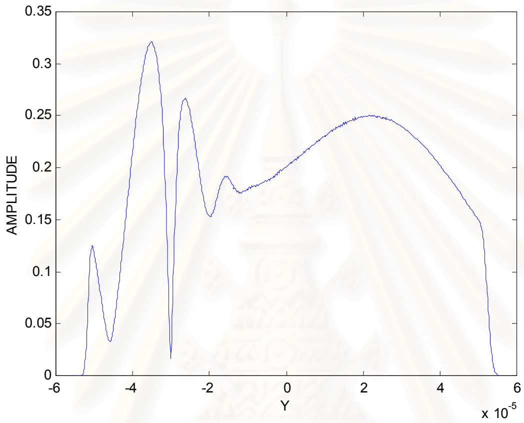


(ค) $\beta = 0.5$

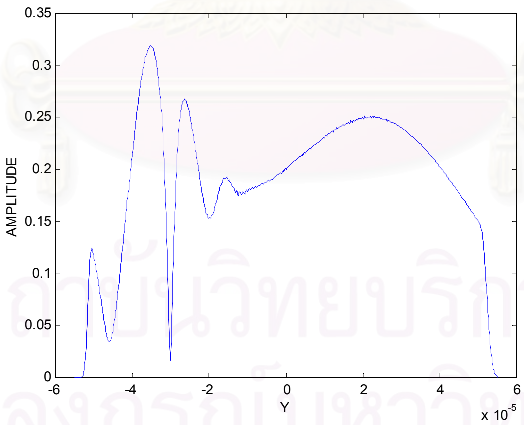
รูปที่ 2.11 สนามไฟฟ้าคำนวณด้วยอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กที่ระยะ $1000\mu m$ โดยใช้ค่าพารามิเตอร์นิวมาร์ก $\gamma = 0.5$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า β ดังนี้ (ก) ค่า $\beta = 0.3$ (ข) $\beta = 0.4$ (ค) $\beta = 0.5$ (ง) $\beta = 0.6$ (จ) $\beta = 0.7$ (ฉ) $\beta = 0.8$ (ช) $\beta = 0.9$ (ซ) $\beta = 1.0$



(ง) $\beta = 0.6$

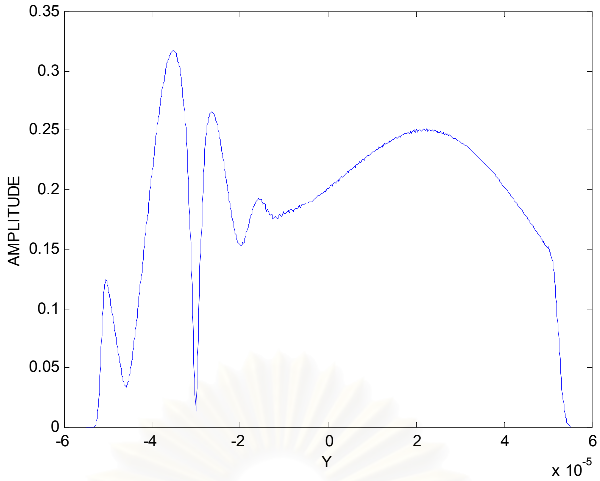


(จ) $\beta = 0.7$

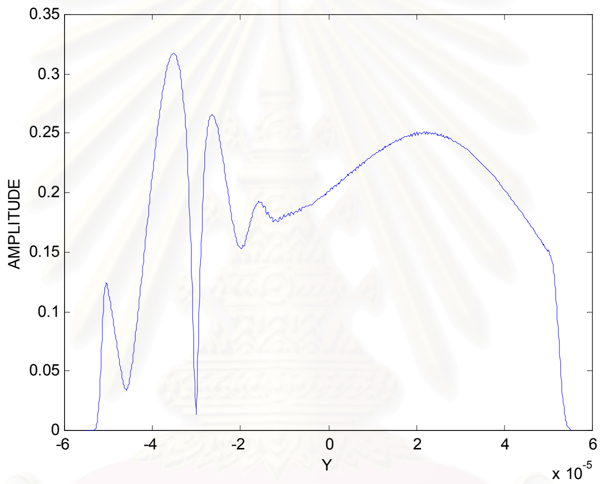


(ฉ) $\beta = 0.8$

รูปที่ 2.11(ต่อ)สนามไฟฟ้าคำนวณด้วยอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กที่ระยะ $1000\mu m$ โดยใช้ค่าพารามิเตอร์นิวมาร์ก $\gamma = 0.5$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า β ดังนี้ (ก) ค่า $\beta = 0.3$ (ข) $\beta = 0.4$ (ค) $\beta = 0.5$ (ง) $\beta = 0.6$ (จ) $\beta = 0.7$ (ฉ) $\beta = 0.8$ (ช) $\beta = 0.9$ (ซ) $\beta = 1.0$



(ซ) $\beta = 0.9$



(ซ) $\beta = 1.0$

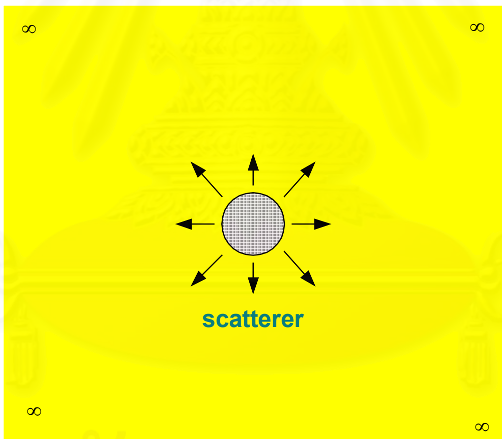
รูปที่ 2.11(ต่อ)สนามไฟฟ้าคำนวณด้วยอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กที่ระยะ $1000\mu m$ โดยใช้ค่าพารามิเตอร์นิวมาร์ก $\gamma = 0.5$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า β ดังนี้ (ก) ค่า $\beta = 0.3$ (ข) $\beta = 0.4$ (ค) $\beta = 0.5$ (ง) $\beta = 0.6$ (จ) $\beta = 0.7$ (ฉ) $\beta = 0.8$ (ช) $\beta = 0.9$ (ซ) $\beta = 1.0$

จากรูปที่ 2.11 พบว่าค่าของสนามที่ระยะ $1000\mu m$ เมื่อใช้ค่าพารามิเตอร์นิวมาร์กต่างกันจะให้ผลการคำนวณต่างกัน ค่า $\beta = 0.3$ ให้ผลการคำนวณที่แม่นยำน้อยที่สุดโดยคลื่นมีการกระเพื่อมขึ้นลงไม่ราบเรียบ เมื่อพิจารณาจากค่าสนามแล้วพบว่าค่า $\beta = 0.6,\ 0.7$ ให้ค่าสนามที่ราบเรียบกว่าค่าพารามิเตอร์อื่นๆ อย่างไรก็ตามคำตอบที่ได้ไม่แตกต่างกันมากนัก เช่นเดียวกับตัวอย่างที่แล้วด้วยเหตุนี้เราจึงเลือกค่า $\beta = 0.5$ เป็นค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ เนื่องจากจะช่วยลดเทอมในการคำนวณลงทำให้ลดหน่วยความจำและเวลาในการคำนวณลง

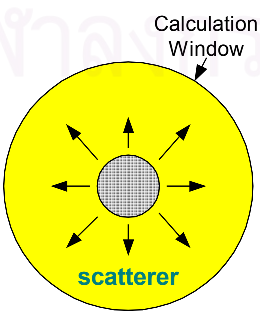
2.4 เงื่อนไขขอบเขตที่ใช้งานร่วมกับอัลกอริทึมนิวมาร์ก

ในหัวข้อนี้เราจะทำการทดสอบเงื่อนไขขอบเขตสองชนิดที่มีการใช้งานมากในการคำนวณด้วยวิธี BPM คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส และ เงื่อนไขขอบเขตแบบPML โดยพิจารณาว่าสามารถใช้งานร่วมกับอัลกอริทึมนิวมาร์กว่ามีประสิทธิภาพดีหรือไม่ แต่ก่อนที่จะทำการพิจารณาเราควรทราบก่อนว่าทำไมจึงต้องใช้เงื่อนไขขอบเขตในการคำนวณด้วยวิธี BPM

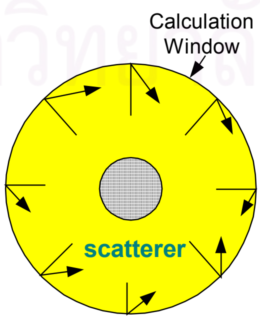
การคำนวณด้วยวิธีบีมพรอพาเกชันนั้นการคำนวณทั้งโมดนำ (guided mode) และ โมดแผ่พลังงาน (radiation mode)เมื่อคำนวณไปพร้อมกัน ทำให้เมื่อคำนวณในขอบเขตแบบเปิดแล้วจะทำให้ สนามแผ่พลังงานแพร่กระจายออกไปในระยะไกล ซึ่งการคำนวณในแบบ FE-BPMนี้จะคำนวณขอบเขตที่มีโดเมนจำกัดเท่านั้น จึงจำเป็นที่จะต้องหาขอบเขตเทียม (artificial boundary) มาป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นไม่ให้แพร่กระจายกลับมากวนกับสนามในหน้าต่างการคำนวณ



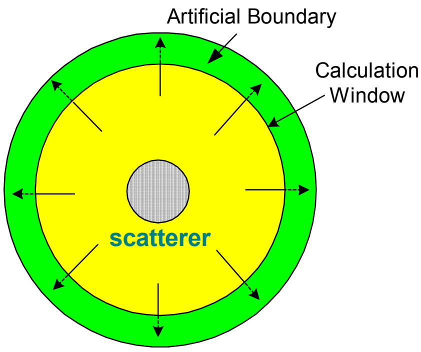
(ก)



(ข)



(ค)



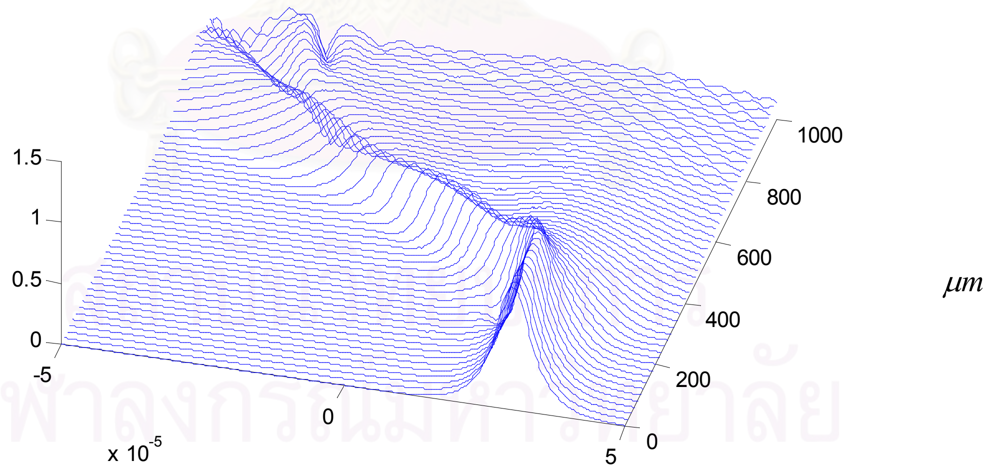
(ง)

รูปที่ 2.12 (ก) การแผ่พลังงานในขอบเขตแบบเปิด (ข) การคำนวณในหน้าต่างการคำนวณที่มีขอบเขตจำกัด (ค) การสะท้อนกลับของคลื่นที่แพร่กระจายไปกระทบขอบหน้าต่างการคำนวณ (ง) เงื่อนไขขอบเขตเทียม (artificial boundary) ป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นที่แพร่กระจายมากระทบขอบหน้าต่างการคำนวณ

โดยสามารถอธิบายการใช้งานของเงื่อนไขขอบเขตเทียมดังรูปที่ 2.12 เริ่มจากท่อนำคลื่นแสงมีขอบเขตแบบเปิดดังเช่นแสดงในรูปที่ 2.12 (ก) ในขณะที่การคำนวณไม่สามารถคำนวณขอบเขตเป็นอนันต์ได้ ดังนั้นจึงเลือกขอบเขตการคำนวณจำกัดดังรูปที่ 2.12 (ข) ซึ่งส่งผลให้คลื่นที่แพร่กระจายออกไปชนกับขอบหน้าต่างการคำนวณแล้วสะท้อนกลับเข้ามารบกวนคลื่นในหน้าต่างการคำนวณอีกดังรูปที่ 2.12 (ค) การป้องกันการสะท้อนกลับทำได้โดยเลือกขอบเขตเทียมมาป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นดังรูปที่ 2.12 (ง) เงื่อนไขขอบเขตที่ใช้งานในวิธี BPM มีมากมายหลายวิธีเช่น เงื่อนไขขอบเขตแบบดูดกลืน (ABC), เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส (TBC) (รายละเอียดในภาคผนวก ค) และ เงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นดูดซับ (PML) เป็นต้น (รายละเอียดในภาคผนวก ง)

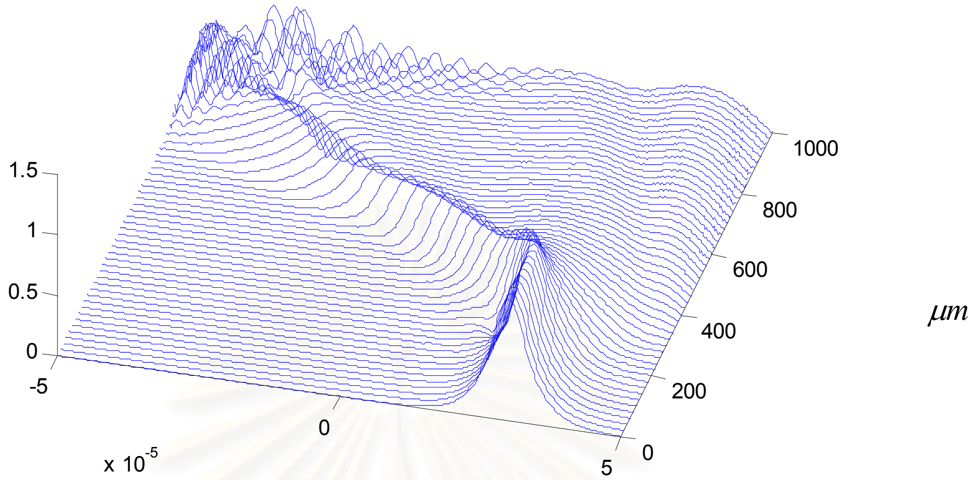
2.4.1 เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสว่าสามารถใช้งานร่วมกับอัลกอริทึมนิวมาร์กได้หรือไม่ เนื่องจากการใช้งานเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสเดิมพิจารณาร่วมกับวิธีแครงก์นิโคลสันกล่าวคือใช้ค่าสนามที่ระนาบ i มาคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ k ของเงื่อนไข-ขอบเขตแบบโปร่งใสเพื่อนำมาคำนวณหาสนามที่ระนาบ $i+1$ แต่วิธีการนิวมาร์กจะใช้สนามทั้งระนาบ i และ $i-1$ มาคำนวณหาสนามบนระนาบ $i+1$ ดังนั้นจะมีความแตกต่างในการใช้งานเมื่อใช้กับอัลกอริทึมนิวมาร์ก เราเลือกท่อนำคลื่นโค้งรูปตัวเอสมาทำการวิเคราะห์ โดยเริ่มจากการใช้สนามบนระนาบ i มาคำนวณหาสัมประสิทธิ์ k ให้ผลการคำนวณดังรูปที่ 2.13 (ก) ซึ่งจะเห็นได้ว่าสนามมีการสะท้อนกลับจากขอบหน้าต่างการคำนวณ ในขณะที่เมื่อนำค่าสนามบนระนาบ $i-1$ มาคำนวณหาสัมประสิทธิ์ k ให้ผลการคำนวณดังรูปที่2.13 (ข) พบว่าสนามยิ่งเกิดการสะท้อนกลับมากขึ้นอีก ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการแก้ไขโดยเสนอให้ใช้ค่าสนามเฉลี่ยระหว่างระนาบ i และระนาบ $i-1$ ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ k พบว่าให้ผลการคำนวณที่ดีกว่าการใช้สนามบนระนาบ i หรือ $i-1$ เพียงตัวใดตัวหนึ่งดังรูปที่ 2.13 (ค)

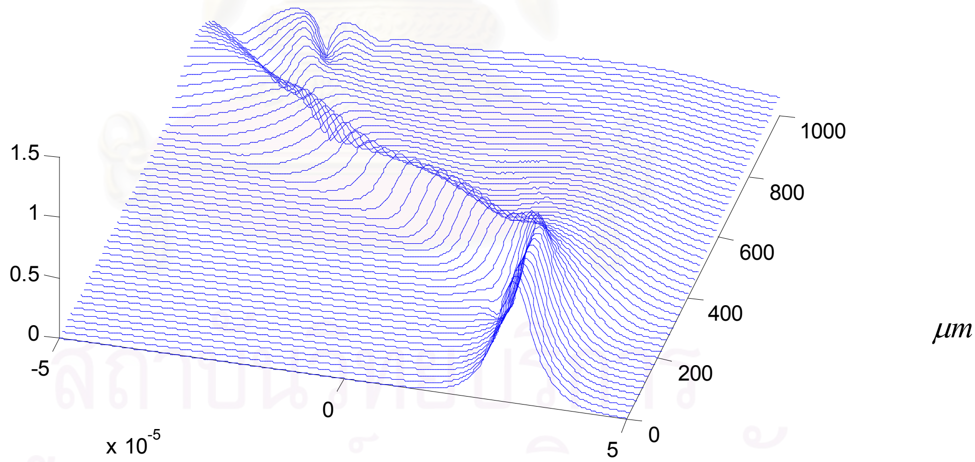


(ก)

รูปที่ 2.13 การแพร่กระจายสนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นโค้งรูปตัวเอส (ก) ใช้ค่าสนามระนาบที่ i มาคำนวณสัมประสิทธิ์TBC (ข) ใช้ค่าสนามระนาบที่ $i-1$ มาคำนวณสัมประสิทธิ์TBC (ค) ใช้ค่าเฉลี่ยระหว่างสนามที่ระนาบ i และ $i-1$ มาคำนวณสัมประสิทธิ์TBC



(ข)



(ค)

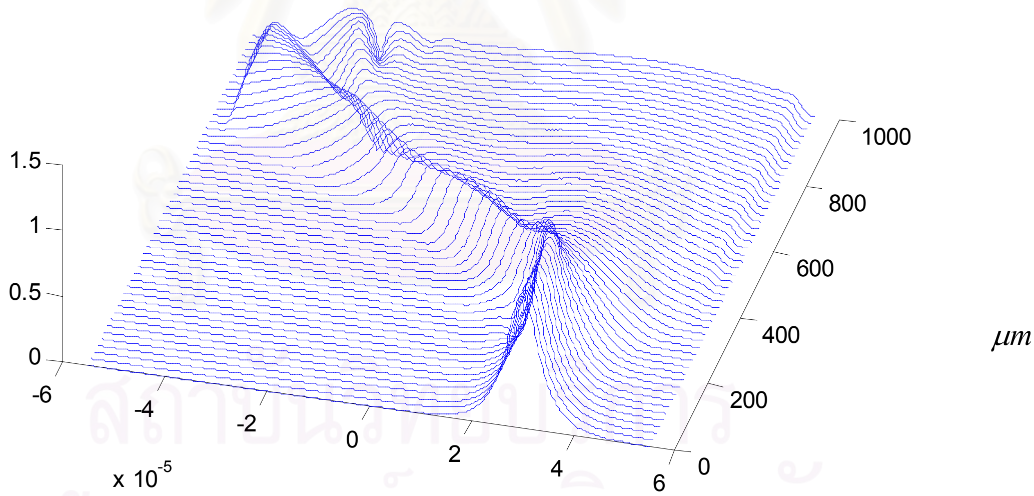
รูปที่ 2.13 (ต่อ) การแพร่กระจายสนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นโค้งรูปตัวเอส (ก) ใช้ค่าสนามระนาบที่ i มาคำนวณสัมประสิทธิ์TBC (ข) ใช้ค่าสนามระนาบที่ $i-1$ มาคำนวณสัมประสิทธิ์TBC (ค) ใช้ค่าเฉลี่ยระหว่างสนามที่ระนาบ i และ $i-1$ มาคำนวณสัมประสิทธิ์TBC

2.4.2 เงื่อนไขขอบเขตแบบPML

เงื่อนไขขอบเขตที่จะนำมาวิเคราะห์ต่อมาคือเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLเมื่อนำมาใช้ร่วมกับอัลกอริทึมนิวมาร์ก พิจารณาสมการ (2.23) เลือกการกระจายตัวการลดทอนในรูปพาราโบล่า $\alpha = 2$ เขียนสมการ (2.23) ได้เป็น

$$s = \begin{cases} 1 & non\ PML\ region \\ 1 - j\dfrac{3\lambda}{4\pi n d}\left(\dfrac{\rho}{d}\right)^2 \ln\left(\dfrac{1}{R_0}\right) & PML\ region \end{cases} \qquad (2.25)$$

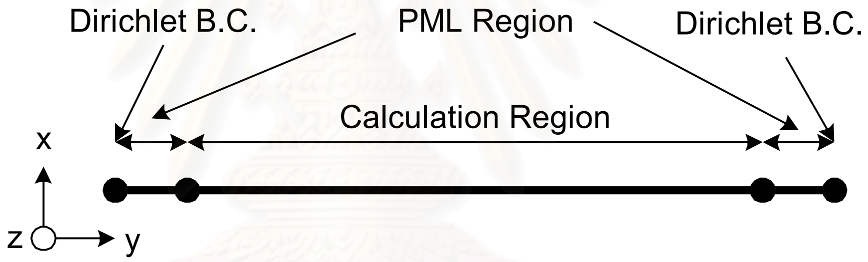
เมื่อนำค่า s ไปคำนวณในสมการ (2.14a) และ (2.14b) พบว่าไม่สามารถ อินทิเกรต ในรูปง่ายได้ต้องทำการอินทิเกรตแบบเชิงตัวเลขเนื่องจากเทอม $\left(\frac{\rho}{d}\right)$ แปรตามทิศทางในหัวข้อนี้ เลือกท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอสมาคำนวณโดยให้ความหนาของชั้นดูดซับ d เท่ากับ $5\mu m$ ใช้ความยาวคลื่นแสง $\lambda = 1.55\mu m$ ค่าดัชนีหักเหของท่อนำคลื่นแสง $n =$ 1.44638404 เลือกสัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎี $R_0 = 10^{-20}$, จำนวนอีลีเมนต์ในชั้นดูดซับ= 20 อีลีเมนต์



รูปที่ 2.14 การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นโค้งรูปตัวเอสวิเคราะห์ด้วยวิธี FE-BPM อัลกอริทึมนิวมาร์ก โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPML

ผลการคำนวณให้คำตอบตามรูปที่ 2.14 การคำนวณพบว่าความหนาของชั้นดูดซับมีผลกับการป้องกันการสะท้อนกลับกล่าวคือ เมื่อความหนาน้อยจะไม่สามารถลดทอนคลื่นให้

หมดไปในชั้นดูดซับได้จะทำให้เกิดการสะท้อนกลับ ในขณะที่ความหนาของชั้นดูดซับยิ่งมีความหนามากจะยิ่งป้องกันการสะท้อนกลับได้ดีแต่ทำให้การคำนวณต้องใช้หน่วยความจำมากขึ้นและต้องเสียเวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้น ในขณะที่จำนวนอีลีเมนต์ในชั้นดูดซับก็เช่นเดียวกันกล่าวคือเมื่อมีจำนวนอีลีเมนต์มากจะทำให้ดูดซับได้ดีแต่ก็ต้องสิ้นเปลืองหน่วยความจำและใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้น ส่วนค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎีมีการเสนอใช้งานหลายค่าเช่น $R_0 = 10^{-20}, 10^{-100}, 10^{-200}$ เป็นต้น ถ้าค่า R_0 มีค่าน้อยจะทำให้เทอม $\ln\left(\frac{1}{R_0}\right)$ มีค่ามาก ซึ่งจะทำให้เกิดการลดทอนมาก อย่างไรก็ตามการทำให้เกิดการลดทอนมากๆ เมื่ออยู่ในชั้นดูดซับจะมีผลให้สนามมีการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใดเมื่อแพร่กระจายเข้าไปในชั้นดูดซับซึ่งอาจทำให้เกิดการสะท้อนกลับได้ ดังนั้นจึงควรเลือกค่า R_0 ให้เหมาะสมเพื่อป้องกันการสะท้อนกลับ เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLจะให้ปลายของผนังชั้นดูดซับมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ dirichlet หรือบังคับให้สนามเป็นศูนย์ที่ปลายชั้นดูดซับ ดังรูปที่ 12.15



รูปที่ 2.15 เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLที่บังคับให้สนามที่ปลายผนังชั้นดูดซับเป็นศูนย์

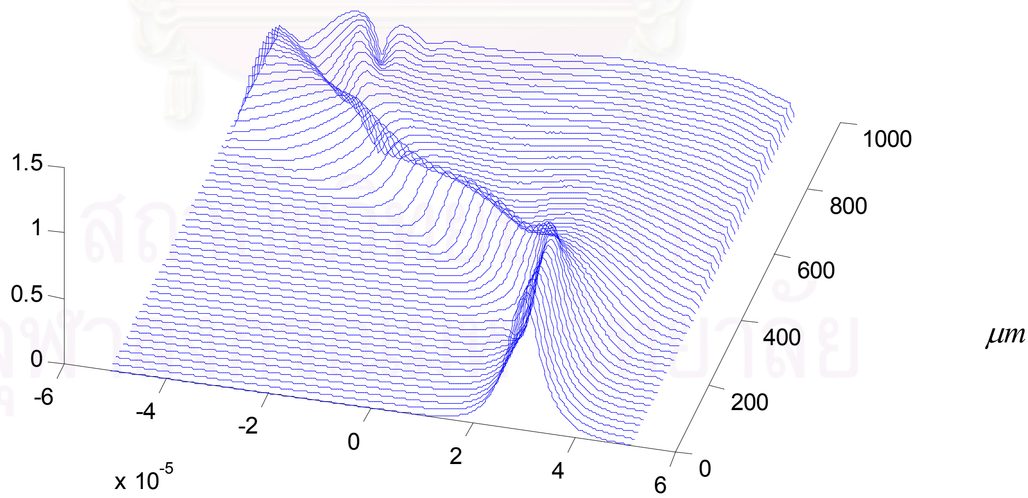
การลดทอนแบบพาราโบล่าที่กล่าวในเบื้องต้นมีข้อดีคือสนามค่อยลดทอนจากน้อยไปมากแต่มีข้อเสียคือต้องทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลขซึ่งมีความยุ่งยากมากกว่าในที่นี้จึงพิจารณาการลดทอนแบบคงที่ $\alpha = 0$ ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการ (2.23) ได้ดังนี้

$$s = \begin{cases} 1 & non\,PML\ \mathrm{Re}gion \\ 1 - j\dfrac{\lambda}{4\pi nd}\ln\left(\dfrac{1}{R_0}\right) & PML\ \ \mathrm{Re}gion \end{cases} \qquad (2.26)$$

ค่า s กลายเป็นค่าคงที่จึงสามารถทำการอินทิเกรตสมการ (2.14a) และ (2.14b) ได้ตามปกติแต่การพิจารณาให้การลดทอนคงที่แบบนี้จะทำให้สนามมีการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใดดังนั้นเทอม $\ln\left(\frac{1}{R_0}\right)$ ควรมีค่าไม่มากนักเพื่อไม่ทำให้สนามมีการสะท้อนกลับ

เมื่อคำนวณด้วยวิธี FE-BPM และ อัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLที่มีการลดทอนคงที่ตามสมการ (2.26) โดยเลือกท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัว เอสมาทำการทดสอบจะสามารถหาการแพร่กระจายของสนามได้ดังรูปที่ 2.16 โดยใช้ความหนาของชั้นดูดซับ= $1\mu m$ มีอีลีเมนต์ในชั้นดูดซับ= 4 อีลีเมนต์ ใช้ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎี $R_0 = 10^{-20}$

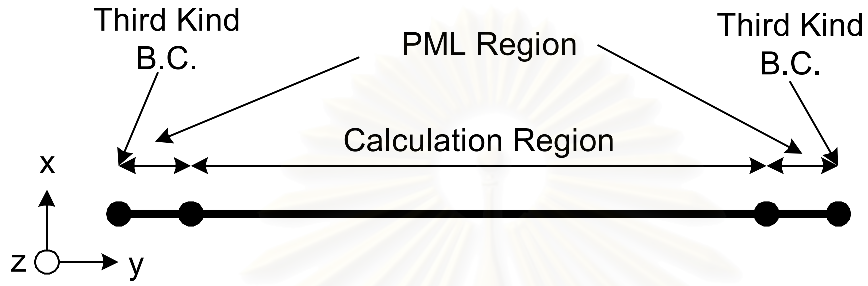
จากผลที่ได้ในรูปที่ 2.16 พบว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLที่มีพารามิเตอร์ s คงที่สามารถป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นแสงได้เช่นเดียวกับค่าพารามิเตอร์ s แปรตามระยะทาง หลักการเลือก s ให้เป็นค่าคงที่นี้มีความสำคัญอย่างมากในวิทยานิพนธ์นี้เนื่องจากช่วยหลีกเลี่ยงการทำอินทิเกรตเชิงตัวเลข ในท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติ และในสมการเวกเตอร์ใน 2 บทถัดไป ซึ่งทำให้การเขียนโปรแกรมทำได้ง่ายขึ้นอย่างมาก



รูปที่ 2.16 การแพร่กระจายของสนามในท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอสที่วิเคราะห์ด้วยวิธี FE-BPM โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLที่มีการลดทอนคงที่

2.5 เงื่อนไขขอบเขตแบบผสม

วิทยานิพนธ์นี้ได้คิดค้นเงื่อนไขขอบเขตแบบผสมขึ้นโดยเป็นการใช้งานร่วมระหว่างเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLกับเงื่อนไขขอบเขตแบบที่สาม เงื่อนไขขอบเขตแบบผสมนี้นำเงื่อนไขขอบเขตแบบที่สามมาใช้งานแทนการบังคับให้สนามเป็นศูนย์ที่ปลายผนังดูดซับดังรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 เงื่อนไขขอบเขตแบบผสมระหว่างเงื่อนไขขอบเขตแบบที่สามกับเงื่อนไขขอบเขตแบบPML

การคำนวณพิจารณาให้สนามในชั้นดูดซับอยู่ในรูปดังนี้(รายละเอียดในภาคผนวก ง)

$$\psi = \psi_0 \exp(-jk_0 n_0 s \cos(\theta) y) \tag{2.27}$$

โดย k_0 คือเลขคลื่นในอวกาศว่าง, n คือดัชนีหักเหของท่อนำคลื่นแสงที่ติดกับชั้นดูดซับ, s คือสัมประสิทธิ์ PML ตามสมการ (2.23), θ คือมุมของสนามตกกระทบในที่นี้เป็น 0 องศา

นิยามเงื่อนไขขอบเขตชนิดที่สามดังนี้

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + j\tilde{k}\psi = 0 \tag{2.28}$$

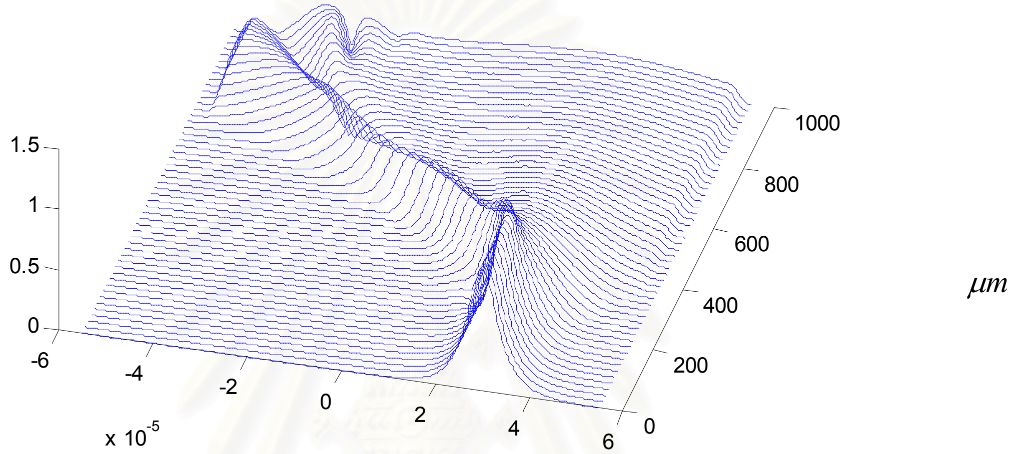
โดยค่า $\tilde{k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าเมื่อแทนสนามในชั้นดูดซับตามสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.27) สามารถหาค่า $\tilde{k}$ ได้ดังนี้

$$\tilde{k} = snk_0 \tag{2.29}$$

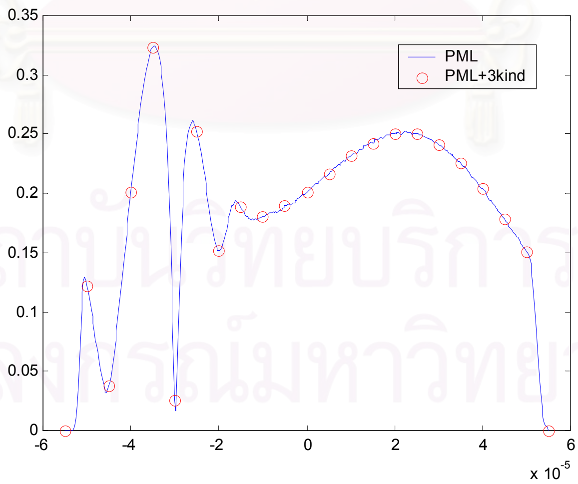
ทำให้สมการ (2.14a) แก้ไขเป็น

$$[K]=\sum_{i=1}^{e}\int k_0^2 q\{N_i\}\{N_i\}^T-\frac{1}{s}p\frac{d\{N_i\}}{dy}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}dy-\frac{1}{s}pj\tilde{k}\,|_{x_0} \qquad (2.30)$$

โดยค่า x_0 เป็นค่าตำแหน่งที่ขอบหน้าต่างของชั้นดูดซับ สังเกตได้ว่าค่า $\tilde{k}$ มีค่าส่วนจริงเป็นบวกเสมอซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสอีกด้วย



รูปที่ 2.18 การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นโค้งรูปตัวเอสโดยวิเคราะห์ด้วย วิธีFE-BPM ที่ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผสม



รูปที่ 2.19 การเปรียบระหว่างสนามที่ระนาบ $1000\,\mu m$ โดยการคำนวณใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLกับเงื่อนไขขอบเขตแบบผสม

เลือกท่อนำคลื่นแสงโค้งรูปตัวเอสในการทดสอบให้ผลการคำนวณดังรูปที่ 2.18 และ 2.19 ซึ่งแสดงสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขตแบบผสมโดยคิดการลดทอนในชั้น

ดูดซับเป็นแบบพาราโบล่าและมีความหนาของชั้นดูดซับ= $5\mu m$ ใช้อีลีเมนต์ในชั้นดูดซับทั้งหมด 20 อีลีเมนต์ ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎี= 10^{-200} ผลการคำนวณพบว่ามีความใกล้เคียงกับเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLปกติแต่มีข้อได้เปรียบคือสนามไม่ต้องถูกบังคับให้เป็นศูนย์ที่ปลายชั้นดูดซับทำให้สนามมีความต่อเนื่องกันตลอดทำให้ลดการสะท้อนลงได้เพิ่มมากขึ้น

2.6 สรุป

ในบทนี้เรานำเสนออัลกอริทึมแบบนิวมาร์กนำมาวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นแสงแบบ 2 มิติโดยทดสอบความแม่นยำของวิธีนิวมาร์กโดยการหาระยะคู่ควบในท่อนำคลื่นแสงตัวคู่ควบพบว่าให้ผลการคำนวณถูกต้องแม่นยำ และทำการทดสอบหาค่าพารามิเตอร์ β และ γ ที่เหมาะสมในท่อนำคลื่นแสงโดยพบว่าค่า $\beta = 0.6,\ 0.7$ และ $\gamma = 0.5$ ให้ผลการคำนวณที่ดี อย่างไรก็ตามเรายังคงเลือกใช้ค่า $\beta = 0.5$ และ $\gamma = 0.5$ ในการคำนวณเพราะผลการคำนวณได้ คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกันแต่สามารถลดเทอมที่ใช้ในการคำนวณลง การทดสอบต่อมาในท่อนำ-คลื่นแสงโค้งรูปตัวเอสพบว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถใช้การได้ดี ในส่วนเงื่อนไขขอบเขตทำการพิจารณาการใช้งานร่วมกับวิธีนิวมาร์กพบว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสเมื่อใช้ค่าเฉลี่ยระหว่างสนามที่ระนาบ i และระนาบ $i-1$ ในการหาค่าพารามิเตอร์ k ของเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสจะให้ผลการคำนวณที่ดีไม่มีการสะท้อนกลับจากขอบหน้าต่าง นอกจากนั้นยังทำการทดสอบการใช้งานระหว่างเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLกับวิธีนิวมาร์ก โดยพบหลักการต่างๆในการใช้งานของเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLโดยพิจารณาข้อจำกัดของเงื่อนไขขอบเขตแบบPML และ ทดสอบการใช้พารามิเตอร์ s ให้มีค่าคงที่ปรากฏว่าสามารถดูดซับคลื่นสะท้อนได้ดีเช่นเดียวกัน สุดท้ายนำเสนอเงื่อนไขขอบเขตแบบผสมระหว่างเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLกับเงื่อนไข- ขอบเขตแบบที่สามโดยทำการคำนวณในท่อนำคลื่นแสงรูปตัวเอสปรากฏว่าให้ผลการคำนวณที่ดีไม่มีคลื่นสะท้อนกลับ จุดเด่นของเงื่อนไขขอบเขตแบบนี้คือสนามมีความต่อเนื่องกันตลอดใน ชั้นดูดซับ(ไม่ถูกบังคับให้เป็นศูนย์ที่ปลายชั้นดูดซับ)ทำให้การดูดซับทำได้ดีขึ้น

บทที่ 3

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก

3.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีวิเคราะห์เพิ่มเติมจากบทที่ 2 ในแง่มุมของการนำ อัลกอริ-ทึมนิวมาร์กมาพิจารณาบนท่อนำคลื่นแสงแบบใดๆโดยใช้สมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในรูป สเกลาร์ เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย หัวข้อ 3.2ซึ่งจะกล่าวถึงสมการและวิธีวิเคราะห์, หัวข้อ 3.3 จะกล่าวถึงตัวอย่างการคำนวณในกรณีของท่อนำคลื่นแสง 3 แบบคือ ท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ, ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ (rib waveguides) และท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย จากนั้นจะพิจารณาความแม่นยำของอัลกอริทึมนิวมาร์ก ด้วยการหาระยะคู่ควบในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ, ทดสอบพารามิเตอร์นิวมาร์กที่เหมาะสมและวิเคราะห์การใช้งานเงื่อนไขขอบเขตกับ อัลกอริทึมนิวมาร์กในกรณีของในท่อนำคลื่นแสงแบบริบ ตัวอย่างสุดท้ายคือท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววายซึ่งนำมาขึ้นมาพิจารณาเพื่อวิเคราะห์ปัญหามุมกว้าง ในหัวข้อ 3.4 จะกล่าวถึงสมการที่ใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิกและ หัวข้อ 3.5 จะแสดงผลการคำนวณในท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแบบแมกนีโตออปติก (magnetooptic isolator)

3.2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันอัลกอริทึมนิวมาร์กสำหรับตัวกลางไอโซทรอปิก

การพิจารณาสนามในท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติ จะไม่มีสนามในทิศทางใดเป็นศูนย์ แต่เพื่อการวิเคราะห์ให้ง่ายขึ้นจะทำการประมาณสนามให้เป็นศูนย์ในบางทิศทางเพื่อจะได้แยกการพิจารณาเป็นแบบไฮบริดโมดได้ เราสามารถแยกโมดในการวิเคราะห์ได้เป็นสองโมดหลัก คือ TE^y และ TM^y โมด โดย TE^y โมดมีสนาม E_y เป็นศูนย์ในขณะที่ TM^y จะมี H_y เป็นศูนย์ สนามเป็นใหญ่ ของโมด TE^y คือ E_x และ H_y ในขณะที่สนามเป็นใหญ่ของโมด TM^y คือ E_y และ H_x

เริ่มวิเคราะห์คลื่นแสงจากสมการคลื่นแบบสเกลาร์ดังนี้

$$p\nabla^2\phi + k_0^2 q\phi = 0 \qquad (3.1)$$

โดย k_0 คือเลขคลื่นในอวกาศว่าง ในโมด TE^y ค่า ϕ คือ องค์ประกอบ E_x, $p=1$, และ $q=n^2$ ในขณะที่ในโมด TM^y ค่า ϕ คือ องค์ประกอบ H_x, $p=1/n^2$, และ $q=1$ ในที่นี้ n คือ ดัชนีหักเหของท่อนำคลื่นแสง

สมการ (3.1) สามารถเขียนได้เป็น

$$p\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+p\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+k_0^2 q\phi \qquad =0 \tag{3.2}$$

เราให้ผลเฉลยของ ϕ แสดงอยู่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชัน 2 ตัวดังนี้

$$\phi=\psi(x,y,z)\exp(-jk_0 n_0 z) \tag{3.3}$$

โดยที่

$\psi(x,y,z)$ คือ ฟังก์ชันที่แปรตามแกน x, y ,และ แกน z

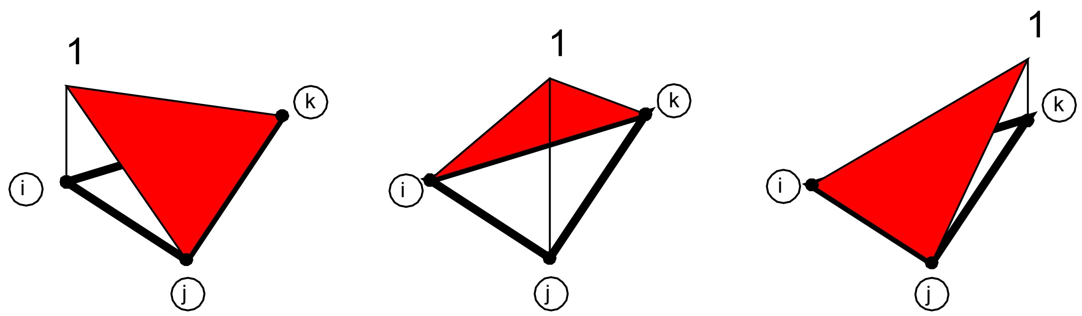
k_0 คือ เลขคลื่นในอวกาศว่าง

n_0 คือ ดัชนีหักเหอ้างอิง

การสร้างสมการจะคล้ายกับการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นแสงสองมิติ เราสามารถกำหนดค่า n_0 ได้หลายค่าดังที่กล่าวในบทที่แล้วเมื่อแทนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.2) ผลที่ได้คือ

$$p\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+p\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-2jk_0 n_0 p\frac{\partial\psi}{\partial z}+\left(k_0^2 q-k_0^2 n_0^2 p\right)\psi=0 \tag{3.4}$$

การหาผลเฉลยของสมการ (3.4) จะใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มาแก้ไขปัญหาในระนาบ (x,y) โดยใช้ฟังก์ชันฐาน 2 มิติดังรูปที่3.1



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันฐานของไฟไนต์อีลีเมนต์ 2 มิติที่มีรูปร่างแบบสามเหลี่ยม (ก) N_i^e (ข) N_j^e (ค) N_k^e

ตามหลักการของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ใน 2 มิติเราสามารถประมาณฟังก์ชัน ψ ให้อยู่ในรูปดังสมการเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\psi^e = \{N^e\}^T \{\varphi^e\} \tag{3.5}$$

โดยที่ $$\{N^e\} = \begin{bmatrix} N_i^e \\ N_i^e \\ N_i^e \end{bmatrix} \qquad \{\varphi^e\} = \begin{Bmatrix} \varphi_i^e \\ \varphi_j^e \\ \varphi_k^e \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

$$N_i^e = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y) \tag{3.7a}$$

$$N_j^e = \frac{1}{2\Delta}(a_j + b_j x + c_j y) \tag{3.7b}$$

$$N_k^e = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \tag{3.7c}$$

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & \quad b_i &= y_j - y_k & \quad c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k & b_j &= y_k - y_i & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i & b_k &= y_i - y_j & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

$x_{i,j,k}$ คือ พิกัดในแกน x ของโนด i, j, k ตามลำดับ

$y_{i,j,k}$ คือ พิกัดในแกน y ของโนด i, j, k ตามลำดับ

$\varphi^e_{i,j,k}$ คือ สนามที่โนด i, j, k ของอีลีเมนต์ e ตามลำดับ

เมื่อแทนฟังก์ชัน ψ ตามสมการ (3.5) ลงในสมการ (3.4) แล้วจัดรูปสมการผลที่ได้คือ

$$p\frac{\partial^2\{N^e\}^T}{\partial x^2}\{\varphi^e\}+p\frac{\partial^2\{N^e\}^T}{\partial y^2}\{\varphi^e\}+p\{N^e\}^T\frac{\partial^2\{\varphi^e\}^T}{\partial z^2}-2jk_0n_0p\{N^e\}^T\frac{\partial\{\varphi^e\}}{\partial z}$$

$$+\left(k_0^2q-k_0^2n_0^2p\right)\{N^e\}^T\{\varphi^e\} = \{0\} \qquad (3.10)$$

ตามหลักการของวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบกาเลอคิน เมื่อหาผลคูณภายในของสมการ (3.10) กับ $\{N^e\}$ และรวมผลของอีลีเมนต์ทุกตัวเข้าด้วยกันแล้วเราจะได้ชุดสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\frac{\partial^2\{N_i\}^T}{\partial x^2}dxdy\{\varphi\}+\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\frac{\partial^2\{N_i\}^T}{\partial y^2}dxdy\{\varphi\}$$

$$+\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\frac{d^2\{\varphi\}}{dz^2}-2jk_0n_0p\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\frac{d\{\varphi\}}{dz}$$

$$+\sum_{i=1}^{e}\iint k_0^2q\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\{\varphi\}-k_0^2n_0^2\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\{\varphi\} = \{0\} \qquad (3.11)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\right)=\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}+\{N\}\frac{\partial^2\{N\}^T}{\partial x^2} \qquad (3.12a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\right)=\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}+\{N\}\frac{\partial^2\{N\}^T}{\partial y^2} \qquad (3.12b)$$

ก็จะเขียนสมการ (3.11)ได้เป็น

$$-\sum_{i=1}^{e}\iint p\frac{\partial\{N_i\}}{\partial x}\frac{\partial\{N_i\}^T}{\partial x}dxdy\{\varphi\}-\sum_{i=1}^{e}\iint p\frac{\partial\{N_i\}}{\partial y}\frac{\partial\{N_i\}^T}{\partial y}dxdy\{\varphi\}$$

$$+\sum_{i=1}^{e}\oint p\{N_i\}\frac{\partial\{N_i\}^T}{\partial n}dl\{\varphi\}+\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\frac{d^2\{\varphi\}}{dz^2}$$

$$-2jk_0n_0\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\frac{d\{\varphi\}}{dz}+\sum_{i=1}^{e}\iint k_0^2q\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\{\varphi\}$$

$$-k_0^2n_0^2\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy\{\varphi\} \quad = \quad \{0\} \tag{3.13}$$

สมการ (3.13) สามารถแสดงในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$[M]\frac{d^2\{\phi\}}{dz^2}-2jk_0n_0[M]\frac{d\{\phi\}}{dz}+([K]-k_0^2n_0^2[M])\{\phi\} \quad = \quad \{0\} \tag{3.14}$$

โดยที่ $[M]$ และ $[K]$ จะแปรตามเงื่อนไขขอบเขต ณ ระยะอนันต์

- ถ้าใช้งานเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสจะเขียนได้ดังนี้

$$[K]=[K]'+[K]_\Gamma \tag{3.15}$$

$$[K]'=\sum_{i=1}^{e}\iint k_0^2q\{N_i\}\{N_i\}^T-p\frac{d\{N_i\}}{dx}\frac{d\{N_i\}^T}{dx}-p\frac{d\{N_i\}}{dy}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}dxdy \tag{3.16}$$

$$[K]_\Gamma=\sum_{i=1}^{e}\int_\Gamma -j\tilde{k}p\{N_i\}_\Gamma\{N_i\}_\Gamma^T ds \tag{3.17}$$

$$[M]=\sum_{i=1}^{e}\iint p\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy \tag{3.18}$$

$\tilde{k}$ เป็นสัมประสิทธิ์TBC เป็นตัวไม่ทราบค่า (รายละเอียดในภาคผนวก ค)

$\{N\}_\Gamma$ เป็นฟังก์ชันฐาน 1 มิติที่ขอบเขตของหน้าต่างการคำนวณ

- ถ้าใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLค่า $[K]$สามารถเขียนได้ดังนี้

$$[K]=\sum_{i=1}^{e}\iint k_0^2 qs\{N_i\}\{N_i\}^T-\frac{s}{s_x^2}p\frac{d\{N_i\}}{dx}\frac{d\{N_i\}^T}{dx}-\frac{s}{s_y^2}p\frac{d\{N_i\}}{dy}\frac{d\{N_i\}^T}{dy}dxdy \quad (3.19)$$

$$[M]=\sum_{i=1}^{e}\iint sp\{N_i\}\{N_i\}^T dxdy \quad (3.20)$$

โดยที่ค่า s นิยามตามสมการ (2.28) ค่า s_x และ s_y นิยามตามตารางที่ ง.2ในภาคผนวก ง

เช่นเดียวกับบทที่2 ในวิทยานิพนธ์นี้เราใช้วิธีนิวมาร์กมาแก้ไขปัญหาในแนวแกนแทนวิธีแบบปาเด ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (3.14) ให้อยู่ในรูปสมการ BPM ได้ดังนี้

$$[A]\{\phi\}_{i+1} = [B]\{\phi\}_i + [C]\{\phi\}_{i-1} \quad (3.21)$$

โดยที่

$$[A]=[M]-2jk_0n_0[M]\gamma\Delta z+([K]-k_0^2n_0^2[M])\beta\Delta z^2 \quad (3.22a)$$

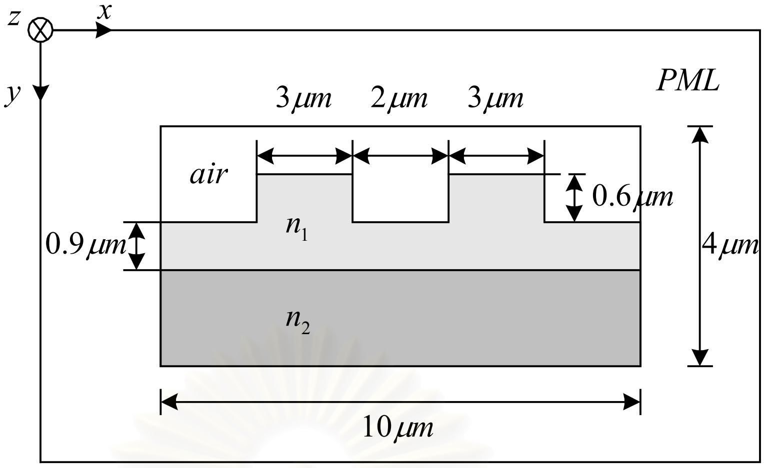
$$[B]=2[M]+2jk_0n_0[M](1-2\gamma)\Delta z-([K]-k_0^2n_0^2[M])(0.5+\gamma-2\beta)\Delta z^2 \quad (3.22b)$$

$$[C]=-[M]+2jk_0n_0[M](-1+\gamma)\Delta z-([K]-k_0^2n_0^2[M])(0.5-\gamma+\beta)\Delta z^2 \quad (3.22c)$$

3.3 การคำนวณในกรณีตัวอย่างในวัสดุไอโซทรอปิก

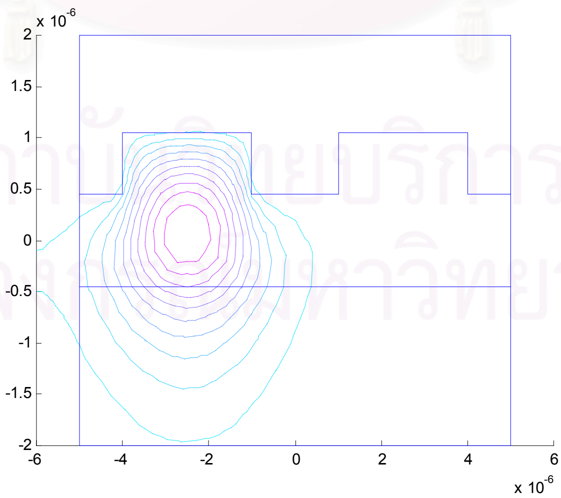
3.3.1 ท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ 3 มิติ

เริ่มจากการพิจารณาท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ 3 มิติซึ่งมีการนำเสนอในงานวิจัย (Obaya, Rahman, and El-Mikati, 2000) ดังรูปที่ 3.2



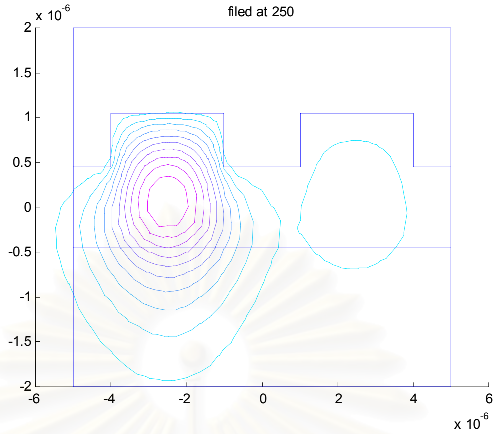
รูปที่ 3.2 ท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ 3 มิติ

ท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ มีดัชนีหักเหของแกน n_1 = 3.44 ดัชนีหักเหของเปลือก n_2 = 3.4 กำหนดให้หน้าต่างการคำนวณเป็น $10\mu m \times 4\mu m$ ความยาวคลื่นที่ใช้งาน $\lambda =$ $1.55\mu m$,ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLโดยมีความหนาของชั้นดูดซับเป็น $1\mu m$ ค่าพารา-มิเตอร์ PML เป็นไปตามสมการ (2.23) ใช้การกระจายตัวการลดทอนเป็นศูนย์ $(\alpha = 0)$สัมประ-สิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎี R_0 เป็น10^{-20} อีลีเมนต์ในชั้นดูดซับเป็นสามเหลี่ยมรูปร่างสม่ำเสมอและมีจำนวน=8อีลีเมนต์ ป้อนอินพุตสนามไฟฟ้า TE_{11}^{y} เข้ามาทางแกนซ้ายมือโดยหาได้จากวิธีไฟไนต์-อีลีเมนต์แบบสเกลาร์ (Koshiba, Saitoh, Eguchi, and Hirayama, 1992) ดังรูปที่3.3

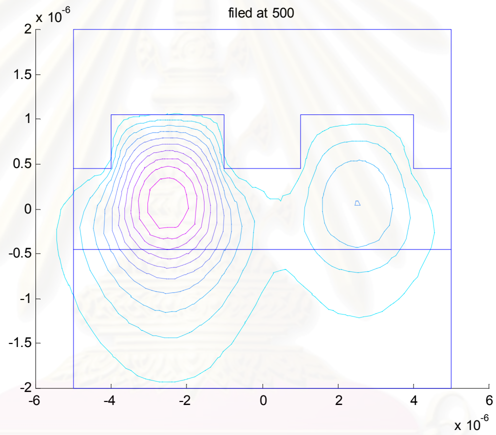


รูปที่ 3.3 สนามไฟฟ้าอินพุตโมด TE_{11}^{y} ที่แกนซ้ายของท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ

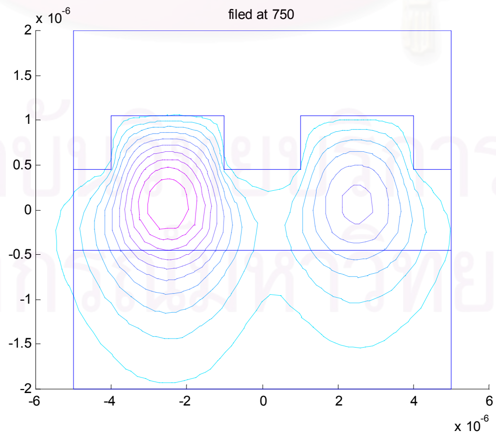
ผลการคำนวณของขนาดสนามไฟฟ้าในโมด TE ณ ระยะต่างๆตามแกน z แสดงได้ดังในภาพที่ 3.3 (ก)-(ฌ)



(ก) $z = 250\mu m$

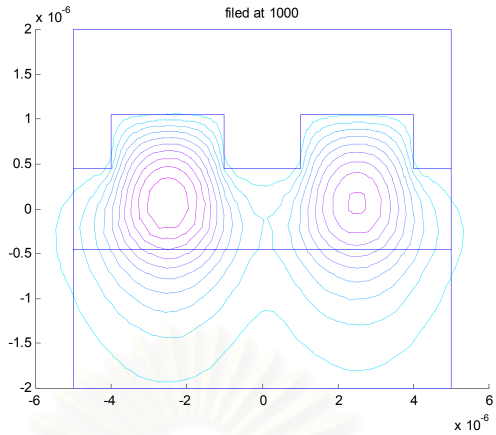


(ข) $z = 500\mu m$

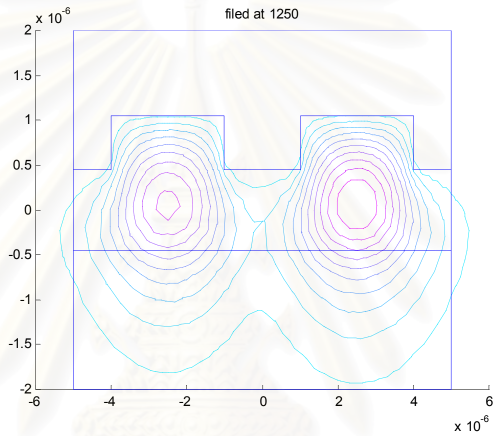


(ค) $z = 750\mu m$

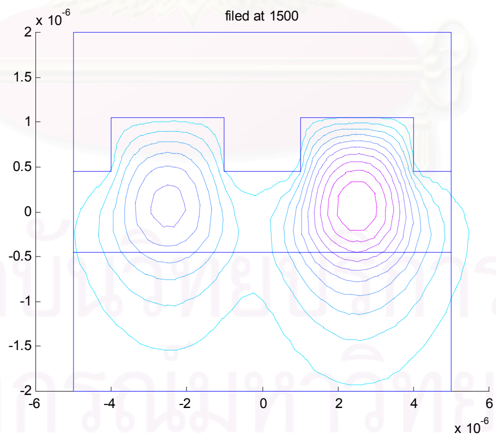
รูปที่ 3.4 (ก)-(ฌ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์ก



(ง) $z = 1000\mu m$

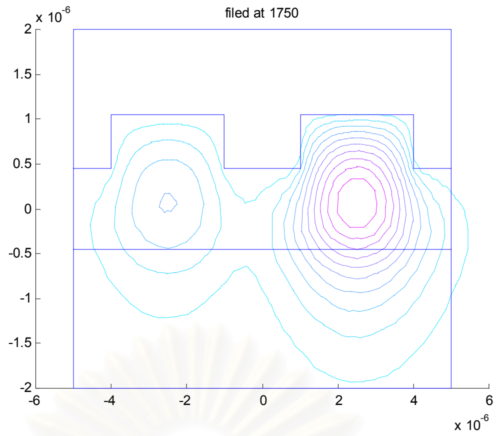


(จ) $z = 1250\mu m$

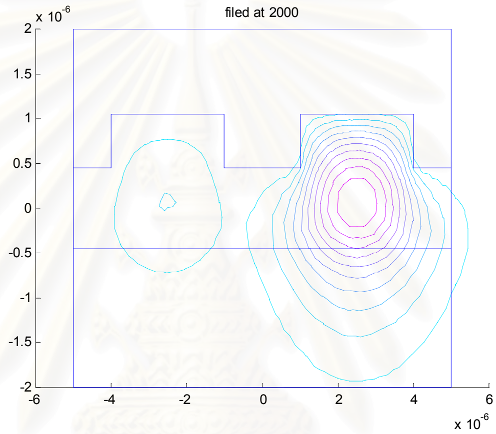


(ฉ) $z = 1500\mu m$

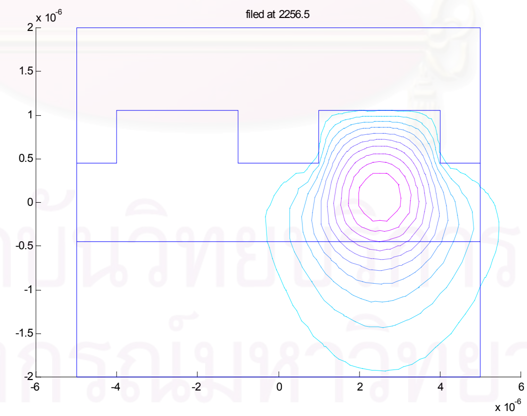
รูปที่ 3.4 (ต่อ) (ก)-(ฌ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์ก



(ช) $z = 1750\mu m$



(ซ) $z = 2000\mu m$

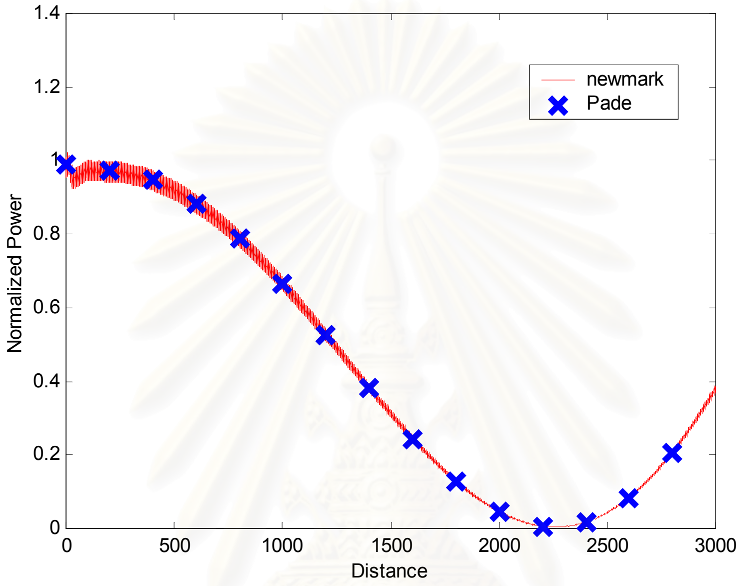


(ฌ) $z = 2256.5\mu m$

รูปที่ 3.4 (ต่อ)(ก)-(ฌ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์ก

จากการวิเคราะห์ระยะคู่ควบ (coupling length) เมื่อทำการคำนวณด้วยวิธี FE-BPM และ อัลกอริทึม นิวมาร์กได้ค่าระยะคู่ควบเป็น $2256.5\mu m$ ในขณะที่เมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยอัลกอริทึมปาเดได้ค่าระยะคู่ควบเป็น 2258 μm และเมื่อพิจารณาด้วยวิธีไฟไนต์อี-ลีเมนต์

สามารถหาค่าคงที่ของการแพร่กระจายโมดคู่เป็น $\beta_e = 1.384088739473894 \times 10^7$ และค่าคงที่ของการแพร่กระจายของโมดคี่เป็น, $\beta_o = 1.38394980606596 \times 10^7$ ดังนั้นเมื่อใช้สูตรตามสมการ (2.24) จะหาค่าระยะคู่ควบด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็น $2261.22 \mu m$ จะเห็นได้ว่าค่าระยะคู่ควบทั้งอัลกอริทึมนิวมาร์กและปาเดต่างก็ใกล้เคียงกับค่าที่หาได้ด้วยวิธี FEM รูปที่ 3.5 แสดงพลังงานในแกนด้านซ้ายของท่อนำคลื่นแสง โดยเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมแบบปาเด



รูปที่ 3.5 การเปรียบเทียบพลังงานในแกนด้านซ้ายของท่อนำคลื่นแสงระหว่างวิธี FE-BPM อัลกอริทึมนิวมาร์ก กับอัลกอริทึมแบบปาเด

การทดสอบต่อมาเราจะคำนวณหาพารามิเตอร์นิวมาร์กที่เหมาะสมโดยการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ไปต่างๆโดยเลือก $\gamma = 0.5$ และเปลี่ยนแปลงค่า $\beta = 0.5$ ถึง 1.0 โดยคำนวณหาค่าระยะคู่ควบมาทำการเปรียบเทียบกัน ในที่นี้เปลี่ยนแปลงค่าระยะขั้นจาก $0.5 \mu m$ เป็น $1 \mu m$ เพื่อลดเวลาในการคำนวณโดยใช้ค่าพารามิเตอร์อื่นๆและเงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกับในหัวข้อที่แล้ว ผลการคำนวณออกมาดังตารางที่ 3.1

จากผลการคำนวณพบว่าค่าพารามิเตอร์ β เท่ากับ 0.5 และ 1 ให้ค่าระยะเชื่อม-ต่อใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในขณะที่ค่าอื่นให้ผลการคำนวณออกมาได้ไม่ดี ดังนั้นการเลือกค่า β จึงควรใช้ค่าใดค่าหนึ่งในค่าทั้งสองนี้ แต่เช่นเดียวกับการคำนวณในท่อนำคลื่นแสง 2 มิติในบทที่แล้วเราพบว่าเมื่อเลือกค่า β เท่ากับ 0.5 จะทำให้ลดเทอมที่ใช้ในการคำนวณลงทำให้ลดจำนวนเมทริกซ์ที่ต้องใช้ในการคำนวณส่งผลให้ลดหน่วยความจำและลดเวลา

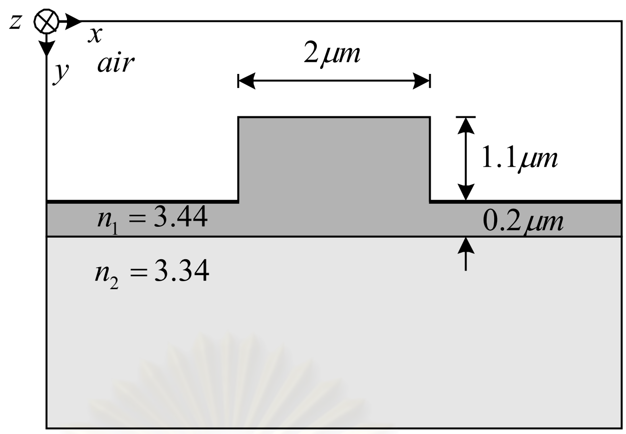
ในการคำนวณลง ดังนั้นในการคำนวณในสมการสเกลาร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัล - กอริทึมนิวมาร์กเราจึงเลือกค่า $\gamma = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ มาใช้ในการคำนวณในบทนี้

ตารางที่ 3.1 การเปรียบเทียบระยะคู่ควบเมื่อใช้ค่าพารามิเตอร์นิวมาร์กที่แตกต่างกัน

γ	β	ระยะคู่ควบ (μm)
0.5	0.5	2256
0.5	0.6	2277
0.5	0.7	2273
0.5	0.8	2241
0.5	0.9	2254
0.5	1.0	2267

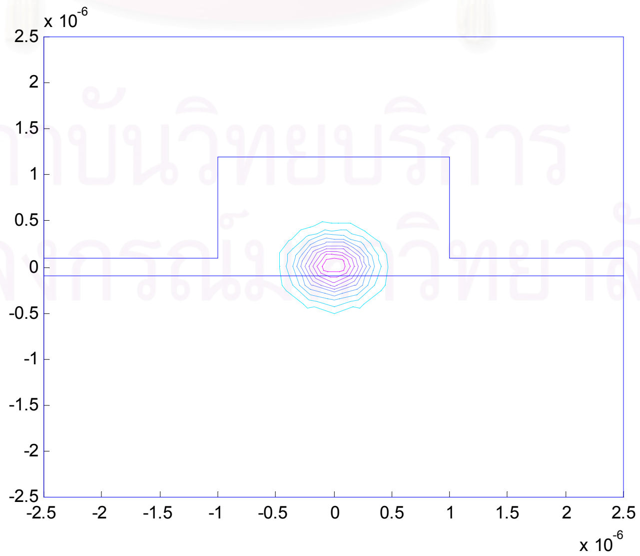
3.3.2 ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ

ตัวอย่างต่อมาที่จะวิเคราะห์การแพร่กระจายสนามไฟฟ้าคือท่อนำคลื่นแสงแบบริบ 3 มิติ ดังที่เคยเสนอในงานวิจัยของ (Tsuji, Koshiba, and Shirashi, 1997) ดังรูปที่ 3.6 ค่าดัชนีหักเหของแกน n_1=3.44, ดัชนีหักเหของเปลือก n_2 = 3.34 ใช้ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55\mu m$ ใช้หน้าต่างการคำนวณขนาด $(5\mu m \times 5\mu m)$ เริ่มทดลองเงื่อนไขขอบเขตระหว่างเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสกับเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLว่าชนิดใดเหมาะที่จะใช้งานร่วมกับ อัลกอริทึมนิวมาร์กมากกว่ากัน

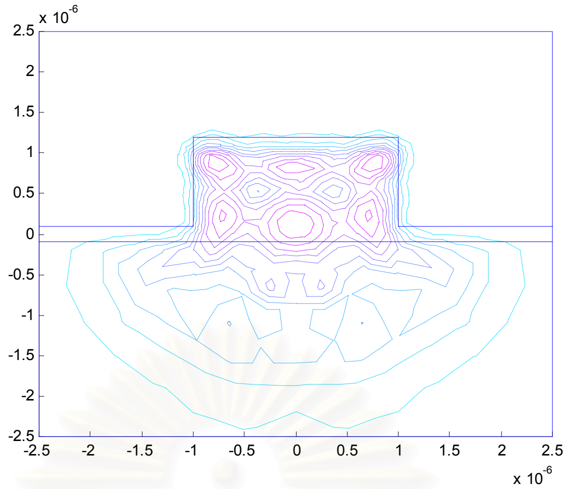


รูปที่ 3.6 ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ 3 มิติ

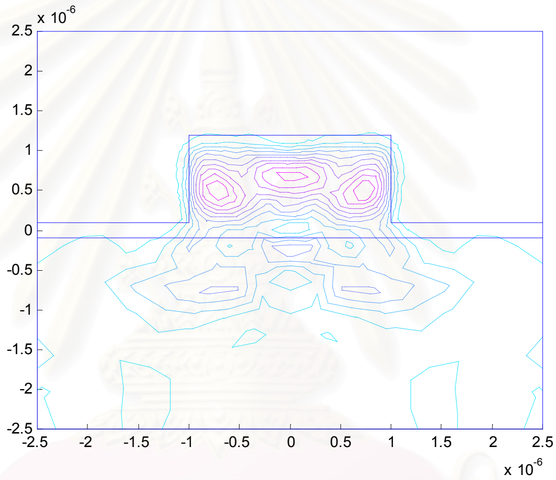
พิจารณาการแพร่กระจายเป็นระยะทาง $100\mu m$ เลือกพารามิเตอร์นิวมาร์กเป็น $\beta = 0.5,\ \gamma = 0.5$ ใช้ระยะห่างระหว่างขั้น $\Delta z = 0.25\mu m$ ป้อนอินพุตที่ขั้นที่ 0 และ –1 เป็นสนามไฟฟ้าที่มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนที่มีขนาดจุด (spot size) เป็น $0.3\mu m$ ดังรูปที่3.7 การคำนวณด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสใช้ความรู้ที่ได้จากการหาสัมประสิทธิ์ในบทที่2 มาคำนวณคือใช้สนามเฉลี่ยระหว่างระนาบ i กับระนาบ $i-1$ มาหาค่าสัมประสิทธิ์ TBC ได้ผลดังรูปที่3.8 ในกรณีที่ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLค่าพารามิเตอร์ s เป็นไปตามสมการ (2.23) ให้การกระจายตัวการลดทอนมีค่าคงที่ $(\alpha = 0)$ เลือกความหนาของชั้นดูดซับเป็น $1\mu m$ อีลีเมนต์ในชั้นดูดซับเป็นแบบสามเหลี่ยมรูปร่างสม่ำเสมอจำนวน 8 อีลีเมนต์ ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนทฤษฎี R_0 เป็น 10^{-20} ได้ผลดังรูปที่ 3.9



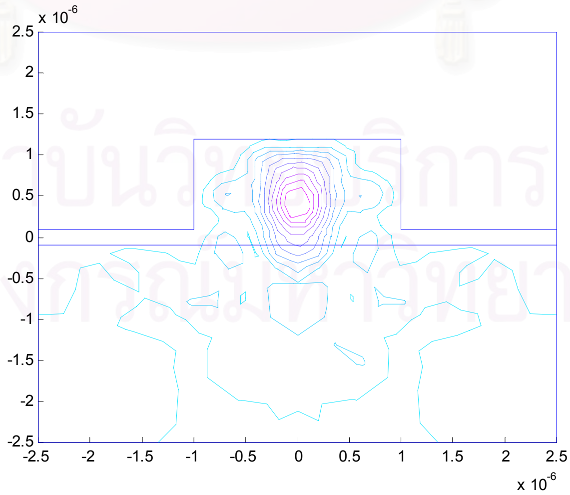
รูปที่ 3.7 สนามไฟฟ้าอินพุตที่มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนที่มีขนาดจุดเป็น $0.3\mu m$



(ก) $z = 3\mu m$

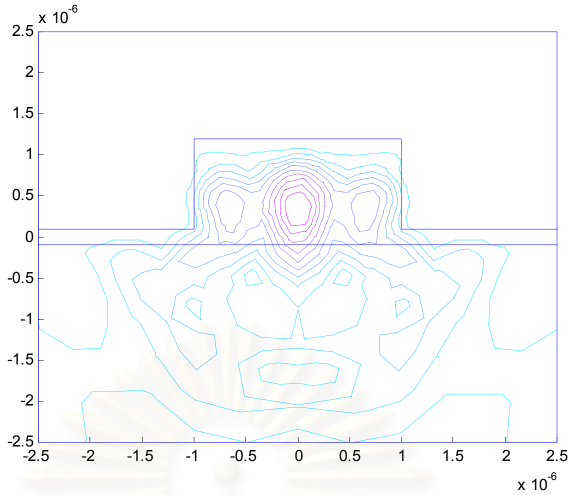


(ข) $z = 6\mu m$

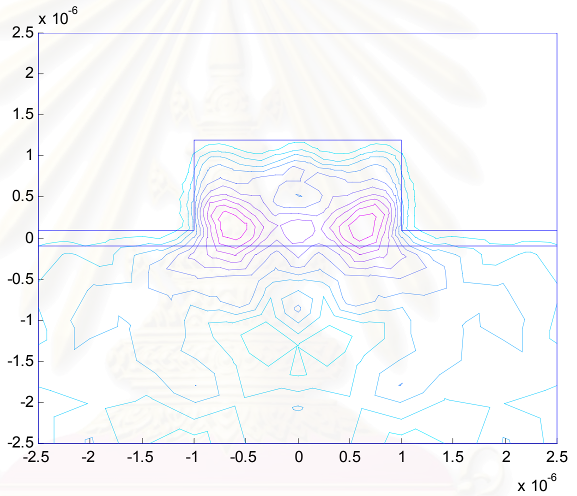


(ค) $z = 9\mu m$

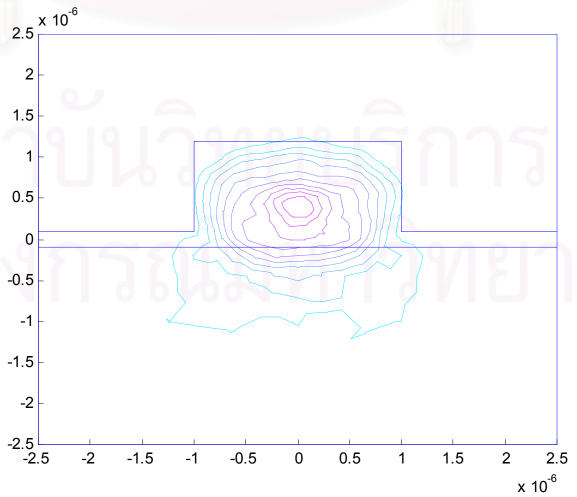
รูปที่ 3.8 (ก)-(ฉ) สนามไฟฟ้าคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส



(ง) $z = 12\mu m$

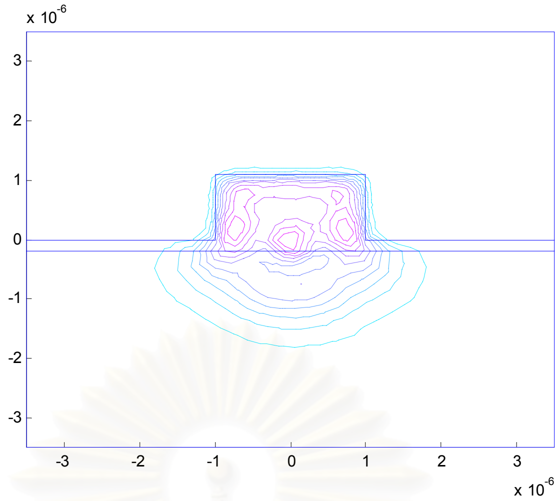


(จ) $z = 15\mu m$

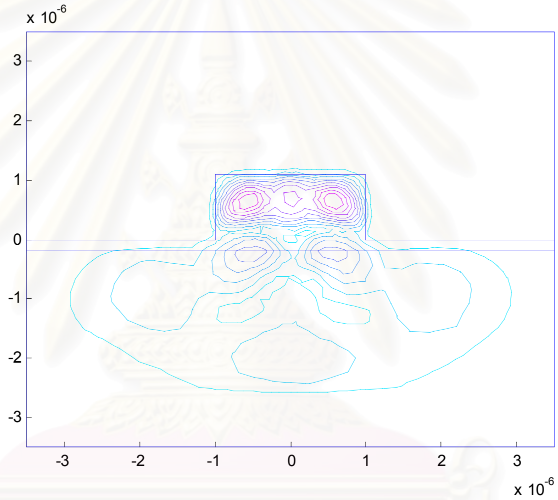


(ฉ) $z = 100\mu m$

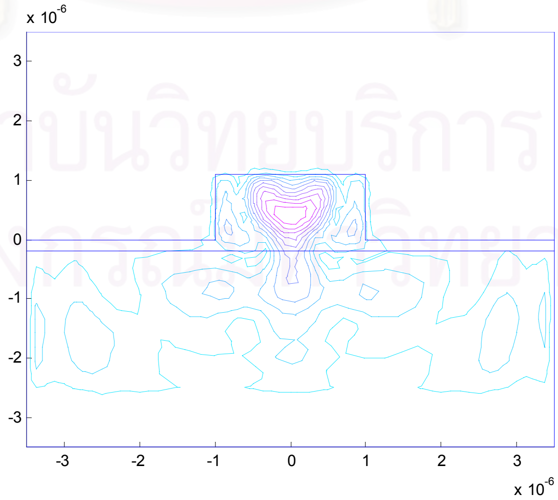
รูปที่ 3.8 (ก)-(ฉ) (ต่อ)สนามไฟฟ้าคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส



(ก) $z = 3\mu m$

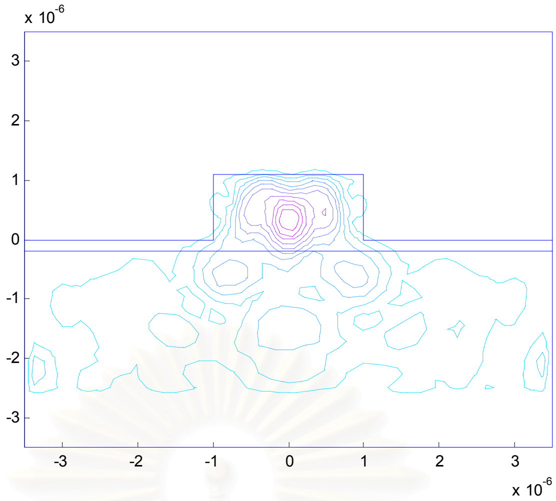


(ข) $z = 6\mu m$

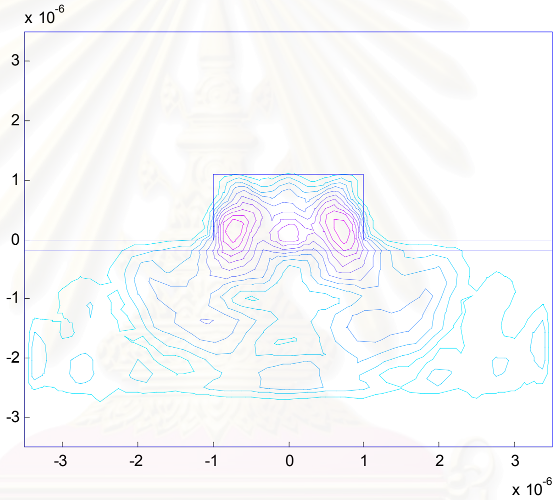


(ค) $z = 9\mu m$

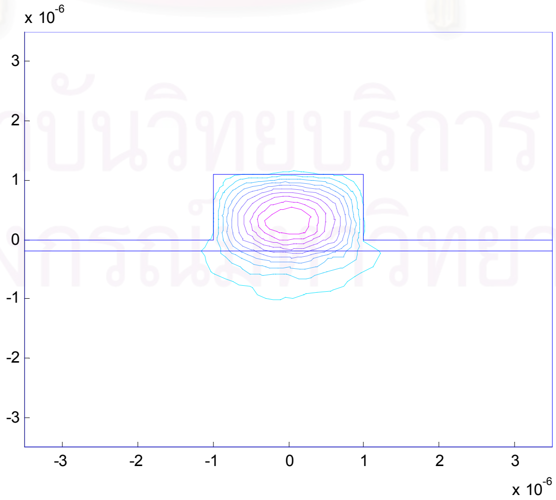
รูปที่3.9 (ก)-(ฉ)สนามไฟฟ้าที่คำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นดูดซับ



(ง) $z = 12\mu m$



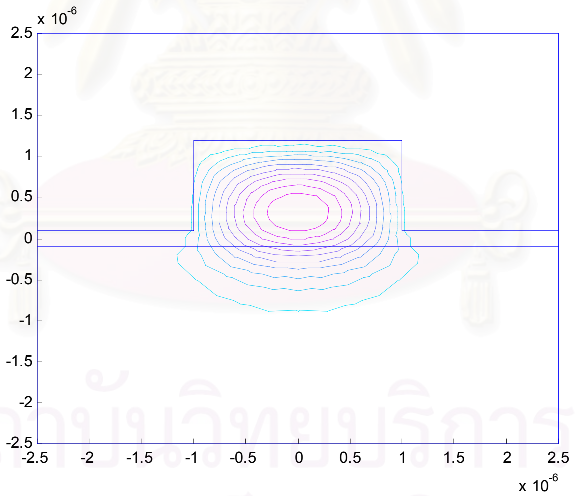
(จ) $z = 15\upsilon m$



(ฉ) $z = 100\mu m$

รูปที่3.9 (ก)-(ฉ) (ต่อ)สนามไฟฟ้าที่คำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นดูดซับ

จากรูปที่ 3.8 และ 3.9 พิจารณาสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง $z = 100\mu m$ โดยนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับสนามไฟฟ้าโมด TE_{11}^{y} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (Koshiba, saitoh, Eguchi, and Hirayama, 1992) ดังรูปที่ 3.10พบว่า สนามไฟฟ้าที่ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสเกิดการสั่นเนื่องจากการสะท้อนกลับจากขอบหน้าต่างการคำนวณ (รูปที่ 3.8 ฉ) ในขณะที่เมื่อคำนวณด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบPML (รูปที่ 3.9 ฉ) ให้คำตอบที่รูปร่างใกล้เคียงกับโมด TE_{11}^{y} (รูปที่ 3.10)มากกว่าเราจึงสามารถสรุปได้ว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLเหมาะสมมากกว่าเงื่อน ไขขอบเขตแบบโปร่งใสเมื่อใช้งานกับFE-BPMอัลกอริทึมนิวมาร์ก สาเหตุที่เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสใช้งานได้ไม่ดีเมื่อใช้กับอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กเนื่องมาจากระยะขั้นการคำนวณของอัล- กอริทึมนิวมาร์กต้องมากกว่าค่าๆหนึ่ง(รายละเอียดในบทที่4)ซึ่งจะทำให้ไม่สามารถแบ่งระยะขั้นการคำนวณที่ละเอียดได้ทำให้สนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งที่ระนาบ i และระนาบ $i-1$ มีความแตกต่างจากระนาบ $i+1$ ค่อนข้างมากทำให้การหาค่าสัมประสิทธิ์ TBC มีความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงสูง

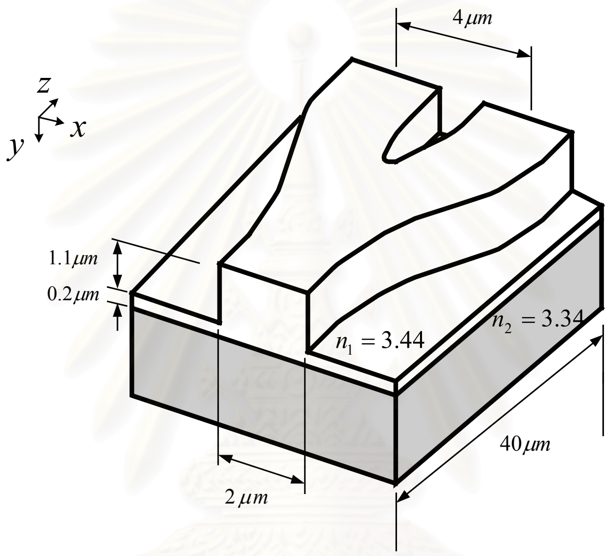


รูปที่3.10 สนามไฟฟ้าโมด TE_{11}^{y} ที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

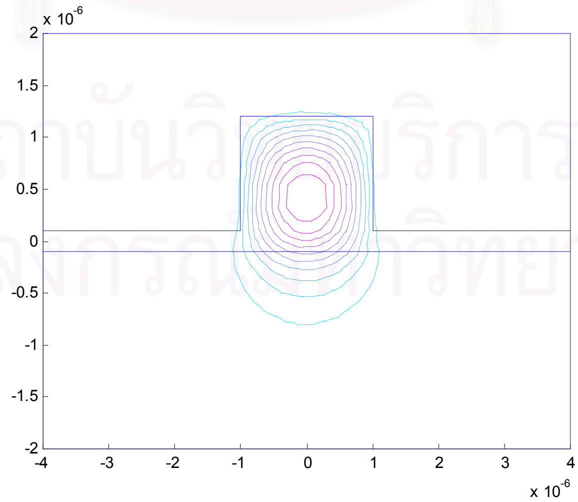
3.3.3 ท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย

ในหัวข้อนี้จะทดสอบอัลกอริทึมนิวมาร์กในท่อนำคลื่นแสงที่มีลักษณะมุมกว้าง โดยท่อนำคลื่นแสงที่นำมาพิจารณาคือท่อนำคลื่นแสงริบรูปตัววาย (Tsuji, Koshiba, and Shiraishi, 1997) ดังรูปที่3.11 โดยมีดัชนีหักเหของแกน= 3.44 และมีดัชนีหักเหของเปลือก= 3.34

แกนของท่อนำคลื่นแสงสามารถอธิบายด้วยสมการเส้นโค้งดังนี้ $\pm\left(1-\cos\left(z\pi/40\mu m\right)\right)$ โดยค่า z เป็นระยะทางในแนวการแพร่กระจายมีหน่วยเป็นไมโครเมตร ตัวแกนมีความกว้างเป็น $2\mu m$ ใช้หน้าต่างการคำนวณเป็น $(4\mu m \times 8\mu m)$ ให้ดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 =3.34ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPML โดยมีความหนาของชั้นดูดซับ=$1\mu m$ มีการลดทอนแบบคงที่ $(\alpha = 0)$ มีสัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎี $R_0 = 10^{-20}$ ความยาวคลื่นที่ใช้เป็น$1.55\mu m$ ระยะขั้นการคำนวณ $\Delta z = 0.25\mu m$ สนามไฟฟ้าอินพุตเป็นTE_{11}^{y} โมด คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (Koshiba, Saitoh, Eguchi, and Hirayama, 1992) ดังรูปที่3.12

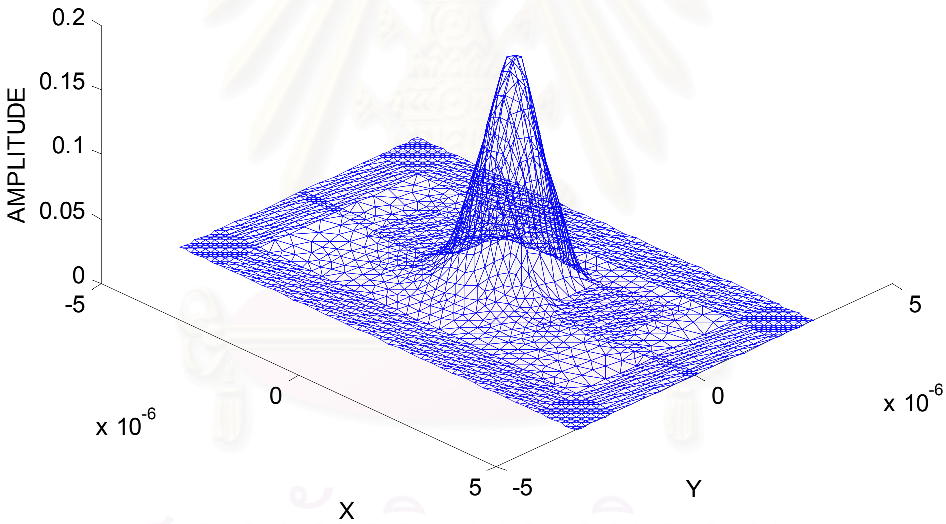


รูปที่3.11 ท่อนำคลื่นแสงริบรูปตัววาย แบบ3มิติ



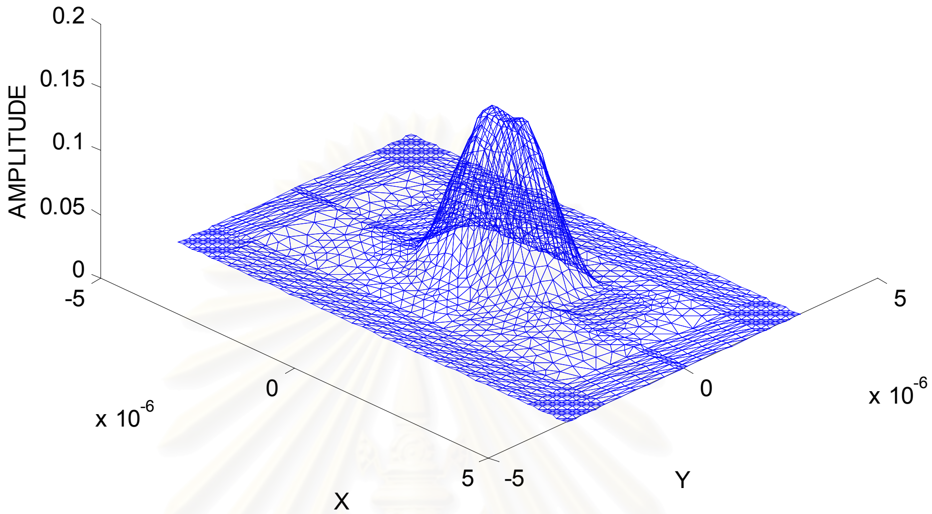
รูปที่3.12 สนามไฟฟ้าอินพุต TE_{11}^{y} โมด

ผลการคำนวณได้ดังรูปที่ 3.13 สนามแพร่กระจายไปตามทิศทาง z โดยสนามถูกแบ่งออกเป็น 2 ทางตามแกนของท่อนำคลื่นแสง แสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถคำนวณบนท่อนำคลื่นที่มีลักษณะมุมกว้างได้ หลังจากนั้นทำการเปรียบเทียบการแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าตามท่อนำคลื่นแสงระยะทาง $40\mu m$ ระหว่างอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กกับอัลกอริทึมแบบปาเดดังรูปที่3.13 (จ) และ 3.14 จากผลการคำนวณพบว่าอัลกอริทึมแบบปาเดมีความแม่นยำกว่าเล็กน้อยโดยสังเกตสนามที่ระยะทาง $40\mu m$ มีความต่อเนื่องมากกว่าสนามที่คำนวณด้วยอัล -กอริทึมแบบนิวมาร์ก

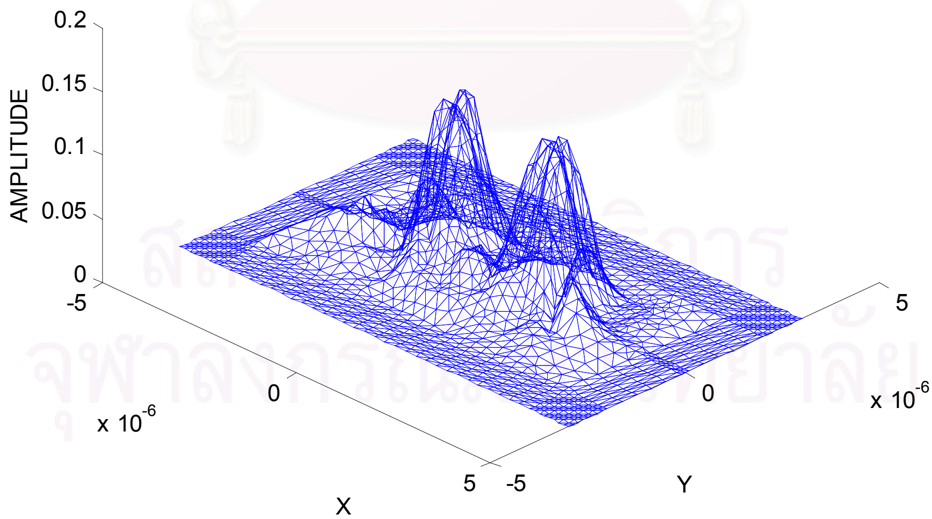


(ก) $z = 8\mu m$

รูปที่ 3.13 (ก)-(จ) สนามไฟฟ้าที่คำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กที่ระยะทาง z ต่างๆ

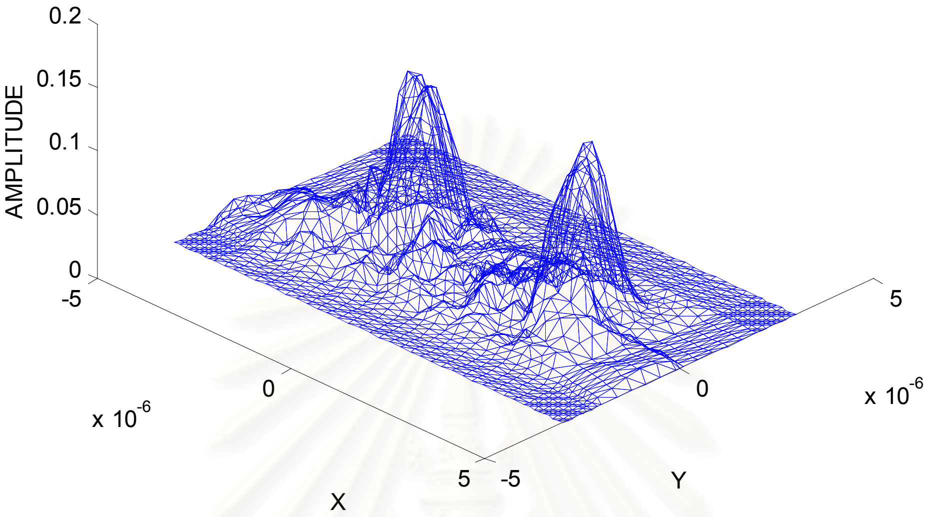


(ข) $z = 16\mu m$

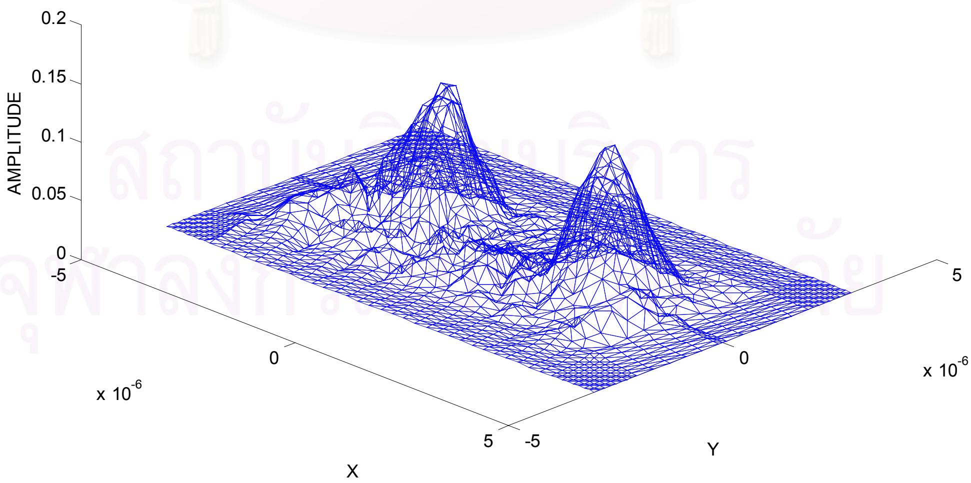


$z = 24\mu m$

รูปที่ 3.13 (ก)-(จ) (ต่อ) สนามไฟฟ้าที่คำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กที่ระยะทาง z ต่างๆ

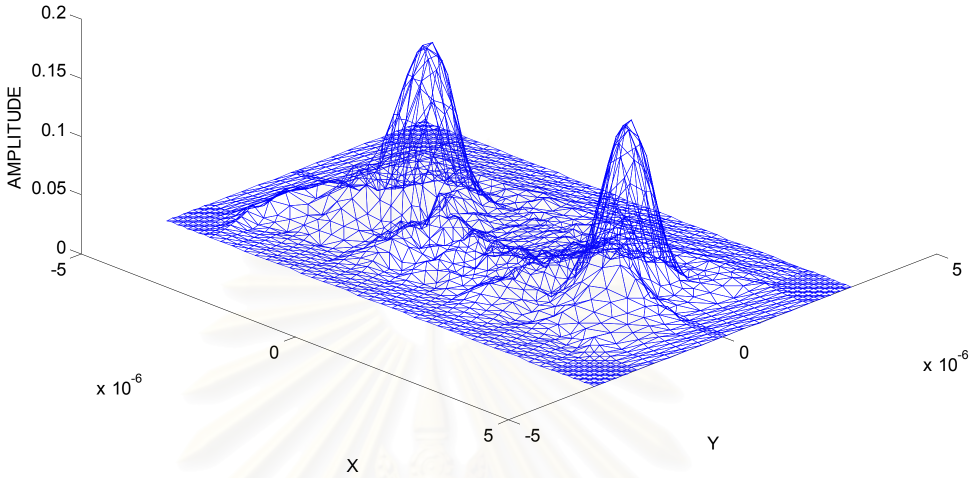


(ง) $z = 32\mu m$



(จ) $z = 40\mu m$

รูปที่ 3.13 (ก)-(จ) (ต่อ) สนามไฟฟ้าที่คำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กที่ระยะทาง z ต่างๆ



รูปที่3.14 สนามไฟฟ้าที่ระยะ $z = 40\,\mu m$ คำนวณด้วยอัลกอริทึมปาเด

3.4 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันอัลกอริทึมนิวมาร์กสำหรับตัวกลางแอนไอโซทรอปิก

การพิจารณาท่อนำคลื่นทั้งสามแบบในเบื้องต้นเป็นการคำนวณในวัสดุไอโซทรอปิกในหัวข้อนี้เราจะวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามในท่อนำคลื่นแสงที่เป็นวัสดุแอนไอโซทรอปิก โดยใช้การประมาณสมการสเกลาร์ (Koshiba, Hayata, and Suzuki, 1984) ดังนี้ (รายละเอียดในภาคผนวก จ)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + k_0^2\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \varepsilon_{xz}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)E_x$$

$$- j\omega\mu_0\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\frac{\partial H_x}{\partial z} + j\omega\mu_0\frac{\sigma_5}{\sigma_1}\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad = \quad 0 \qquad (3.23)$$

$$\frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\sigma_1}\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\varepsilon_{zy}}{\sigma_1}\frac{\partial H_x}{\partial z} + j\omega\varepsilon_0\frac{\sigma_3}{\sigma_1}E_x\right)$$

$$+ k_0^2 H_x + \frac{\varepsilon_{yz}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) - j\omega\varepsilon_0\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad = \quad 0 \qquad (3.24)$$

โดยที่

$$\sigma_1 \quad = \quad \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yz}\varepsilon_{zy} \tag{3.25a}$$

$$\sigma_2 \quad = \quad \varepsilon_{yx}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zx}\varepsilon_{yz} \tag{3.25b}$$

$$\sigma_3 \quad = \quad \varepsilon_{zx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yx}\varepsilon_{zy} \tag{3.25c}$$

$$\sigma_4 \quad = \quad \varepsilon_{xy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy} \tag{3.25d}$$

$$\sigma_5 \quad = \quad \varepsilon_{xz}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz} \tag{3.25e}$$

ให้คำตอบของสมการอยู่ในรูปดังนี้

$$E_x \quad = \quad \phi(x,y,z)\exp(-jk_0 n_0 z) \tag{3.26a}$$

$$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,H_x \quad = \quad \psi(x,y,z)\exp(-jk_0 n_0 z) \tag{3.26b}$$

ในที่นี้ E_x และ H_x เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทาง x ตามลำดับ ϕ เป็นฟังก์ชันขนาดของสนามไฟฟ้า และ ψ เป็นฟังก์ชันขนาดของสนามแม่เหล็ก, n_0 คือดัชนีหักเหอ้างอิง, k_0 คือเลขคลื่นในอวกาศว่าง พิจารณาสมการ (3.23) และ (3.24) เมื่อให้สภาพยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์ ε_{ij} มีการเปลี่ยนแปลงในทิศทางแพร่กระจายน้อยมากกล่าวคือ $\dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial z} \approx 0$ นอกจากนั้นพิจารณาสภาพยอมไฟฟ้าที่ไม่ใช่ในแนวแทยงมุมให้มีค่าน้อยมากเมื่อคูณกับเทอมที่มีการเปลี่ยนแปลงสนามเมื่อเทียบกับแกนการแพร่กระจายหรือ $\varepsilon_{ij}\dfrac{\partial \phi}{\partial z} \approx 0$ และ $\varepsilon_{ij}\dfrac{\partial \psi}{\partial z} \approx 0$ เมื่อใช้การประมาณทั้งสองรวมทั้งแทนคำตอบของสนามสมการ (3.25) ลงในสมการ (3.23) และ (3.24) สามารถจัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2jk_0 n_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} + k_0^2\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \varepsilon_{xz}\frac{\sigma_3}{\sigma_2} - n_0^2\right)\phi + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + jk_0\frac{\sigma_5}{\sigma_1}\frac{\partial \psi}{\partial y} - k_0^2 n_0 \frac{\sigma_4}{\sigma_1}\psi \quad = \quad 0 \tag{3.27}$$

$$\frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2jk_0 n_0 \frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial \psi}{\partial z} + k_0^2\left(1 - \frac{\varepsilon_{zz} n_0^2}{\sigma_1}\right)\psi + \frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - jk_0 n_0 \frac{\varepsilon_{yz}}{\sigma_1}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\sigma_1}\frac{\partial \psi}{\partial y} - jk_0 n_0 \frac{\varepsilon_{zy}}{\sigma_1}\psi + jk_0\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\phi\right) - k_0^2 n_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\phi = \quad 0 \tag{3.28}$$

ใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มาประมาณฟังก์ชันบนระนาบตัดขวาง xy โดยใช้ฟังก์ชันฐานตามสมการ (3.5) และ ถ้าใช้เงื่อนขอบเขตแบบโปร่งใสแล้วก็จะสามารถจัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left[M_{\phi\phi}\right]\frac{d^2\{\phi\}}{dz^2}-2jk_0n_0\left[M_{\phi\phi}\right]\frac{d\{\phi\}}{dz}+\left(\left[\tilde{K}_{\phi\phi}\right]-k_0^2n_0^2\left[M_{\phi\phi}\right]\right)\{\phi\}+\left[K_{\phi\psi}\right]\{\psi\}=\{0\} \quad (3.29)$$

$$\left[M_{\psi\psi}\right]\frac{d^2\{\psi\}}{dz^2}-2jk_0n_0\left[M_{\psi\psi}\right]\frac{d\{\psi\}}{dz}+\left(\left[\tilde{K}_{\psi\psi}\right]-k_0^2n_0^2\left[M_{\psi\psi}\right]\right)\{\psi\}+\left[\tilde{K}_{\psi\phi}\right]\{\phi\}=\{0\} \quad (3.30)$$

โดยที่

$$\left[\tilde{K}_{\phi\phi}\right]=\left[K_{\phi\phi}\right]+\left[K_{\phi\phi}\right]_\Gamma \quad (3.31a)$$

$$\left[\tilde{K}_{\psi\psi}\right]=\left[K_{\psi\psi}\right]+\left[K_{\psi\psi}\right]_\Gamma \quad (3.31b)$$

$$\left[\tilde{K}_{\psi\phi}\right]=\left[K_{\psi\phi}\right]+\left[K_{\psi\phi}\right]_\Gamma \quad (3.31c)$$

$\left[K_{\phi\phi}\right]_\Gamma, \left[K_{\psi\psi}\right]_\Gamma, \left[K_{\psi\phi}\right]_\Gamma$ เป็นเทอมที่ได้จากการคำนวณด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส

$$\left[K_{\phi\phi}\right]=\sum_e\iint_e[k_0^2\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{xy}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\varepsilon_{xz}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)\{N\}\{N\}^T-\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\{N_x\}\{N_x\}^T$$
$$-\{N_y\}\{N_y\}^T]dxdy \quad (3.32)$$

$$\left[K_{\psi\psi}\right]=\sum_e\iint_e[k_0^2\{N\}\{N\}^T-\frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\{N_x\}\{N_x\}^T-\frac{\varepsilon_{yy}}{\sigma_1}\{N_y\}\{N_y\}^T$$
$$-jk_0n_0\left(\frac{\varepsilon_{yz}}{\sigma_1}\{N\}\{N_y\}^T-\frac{\varepsilon_{zy}}{\sigma_1}\{N_y\}\{N\}^T\right)]dxdy \quad (3.33)$$

$$\left[K_{\phi\psi}\right]=\sum_e\iint_e[-k_0^2n_0\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\{N\}\{N\}^T+jk_0\frac{\sigma_5}{\sigma_1}\{N\}\{N\}^T]dxdy \quad (3.34)$$

$$\left[K_{\psi\phi}\right]=\sum_e\iint_e[-k_0^2n_0\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\{N\}\{N\}^T-jk_0\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\{N_y\}\{N\}^T]dxdy \quad (3.35)$$

$$\left[M_{\phi\phi}\right]=\sum_e\iint_e\{N\}\{N\}^T dxdy \quad (3.36)$$

$$\left[M_{\psi\psi}\right]=\sum_e\iint_e\frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\{N\}\{N\}^T dxdy \quad (3.37)$$

$$\left[K_{\phi\phi}\right]_{\Gamma} = \sum_{e}\int_{\Gamma} - j\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}k_{\phi}n_{x} + k_{\phi}n_{y}\right)\{N\}_{\Gamma}\{N\}_{\Gamma}^{T}ds \tag{3.38}$$

$$\left[K_{\psi\psi}\right]_{\Gamma} = \sum\int - j\frac{\varepsilon_{zz}k_{\psi}n_{x} + \left(\varepsilon_{yy}k_{\psi} + \varepsilon_{zy}k_{0}n_{0}\right)n_{y}}{\sigma_{1}}\{N\}_{\Gamma}\{N\}_{\Gamma}^{T}ds \tag{3.39}$$

$$\left[K_{\psi\phi}\right]_{\Gamma} = \sum_{e}\int_{\Gamma} j\frac{\sigma_{3}}{\sigma_{1}}k_{0}n_{y}\{N\}_{\Gamma}\{N\}_{\Gamma}^{T}ds \tag{3.40}$$

โดยที่ $\{N_x\} = \dfrac{\partial\{N\}}{\partial x}$, $\{N_y\} = \dfrac{\partial\{N\}}{\partial y}$ ในขณะที่ $\{N\}_{\Gamma}$ คือฟังก์ชันฐานหนึ่งมิติ n_x, n_y คือเวกเตอร์ทิศทางตั้งฉากกับทิศ x, y ตามลำดับ, k_{ϕ}, k_{ψ} คือสัมประสิทธิ์ TBC ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับ เขียนรวมสมการ (3.29) และ (3.30) รวมเข้าด้วยกันได้เป็น

$$[M]\frac{d^{2}\{X\}}{dz^{2}} - 2jk_{0}n_{0}[M]\frac{d\{X\}}{dz} + \left([K] - k_{0}^{2}n_{0}^{2}[M]\right)\{X\} = \{0\} \tag{3.41}$$

โดยที่ $\{X\} = \begin{bmatrix}\{\phi\}\\ \{\psi\}\end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix}\left[\widetilde{K}_{\phi\phi}\right] & \left[K_{\phi\psi}\right]\\ \left[\widetilde{K}_{\psi\phi}\right] & \left[\widetilde{K}_{\psi\psi}\right]\end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix}\left[M_{\phi\phi}\right] & 0\\ 0 & \left[M_{\psi\psi}\right]\end{bmatrix}$

จากสมการ (3.41) ใช้อัลกอริทึมนิวมาร์กมาแก้ไขปัญหาในแนวแกนแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองได้ผลเป็น

$$[A]\{X\}_{i+1} = [B]\{X\}_{i} + [C]\{X\}_{i-1} \tag{3.42}$$

โดยที่

$$[A] = [M] - 2jk_{0}n_{0}[M]\gamma\Delta z + \left([K] - k_{0}^{2}n_{0}^{2}[M]\right)\beta\Delta z^{2} \tag{3.43a}$$

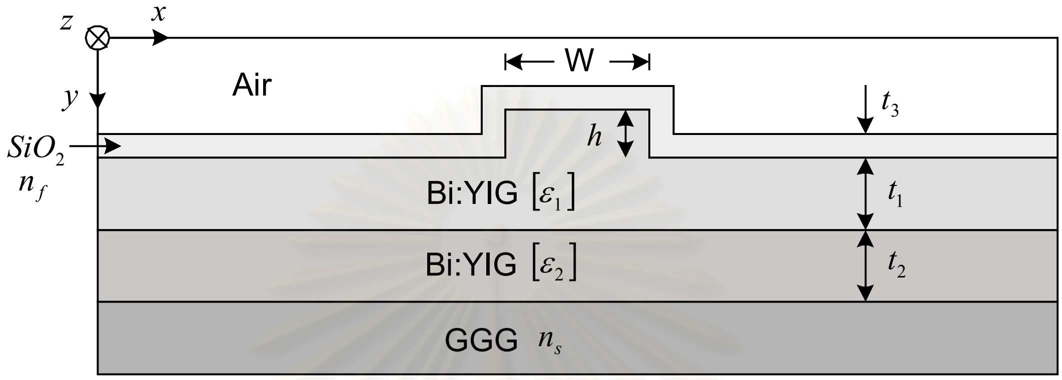
$$[B] = 2[M] + 2jk_{0}n_{0}[M](1 - 2\gamma)\Delta z - \left([K] - k_{0}^{2}n_{0}^{2}[M]\right)(0.5 + \gamma - 2\beta)\Delta z^{2} \tag{3.43b}$$

$$[C] = -[M] + 2jk_{0}n_{0}[M](-1 + \gamma)\Delta z - \left([K] - k_{0}^{2}n_{0}^{2}[M]\right)(0.5 - \gamma + \beta)\Delta z^{2} \tag{3.43c}$$

3.5 การคำนวณในกรณีตัวอย่างในวัสดุแอนไอโซทรอปิก

3.5.1 ท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแบบแมกนีโตออปติก

พิจารณาท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแบบแมกนิโตออปติกดังที่เสนอในงานวิจัย (Tsuji, Koshiba, and Takimoto, 1999) ที่มีหน้าตัดขวางดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 ท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแบบแมกนีโตออปติก

ค่าพารามิเตอร์ของท่อนำคลื่นแสงในรูปที่ 3.15 มีดังนี้ $n_f =$ 1.444, $n_s = 1.94$, $t_1 = 3.1\mu m$, $t_2 = 3.4\mu m$, $t_3 = 0.12\mu m$, W $= 8.0\mu m$, $h =$ $0.5\mu m$ ความยาวคลื่นที่ใช้เป็น $\lambda =$ $1.485\mu m$, หน้าต่างการคำนวณเป็น($50\mu m \times 11\mu m$), เลือกระยะการแพร่กระจาย $\Delta z = 0.5\mu m$ เลือกดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 =2.18 และค่าสภาพยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์ $[\varepsilon_1]$และ$[\varepsilon_2]$แสดงเป็นเทนเซอร์ดังนี้

$$[\varepsilon_1] = \begin{bmatrix} 2.19^2 & j\delta_1 & 0 \\ -j\delta_1 & 2.19^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.19^2 \end{bmatrix} \qquad [\varepsilon_2] = \begin{bmatrix} 2.18^2 & j\delta_2 & 0 \\ -j\delta_2 & 2.18^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.18^2 \end{bmatrix}$$

โดยค่า δ (Erdmann and Hertel, 1995) หาได้จากสมการ

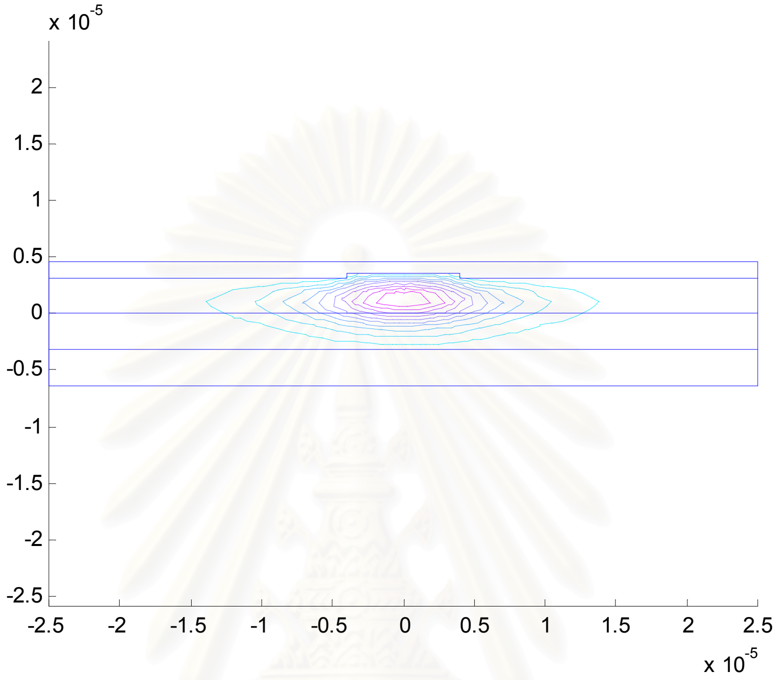
$$\delta = \frac{n\lambda\theta_F}{\pi} \qquad (3.44)$$

n คือดัชนีหักเหของท่อนำคลื่นแสง

λ คือความยาวคลื่นแสง

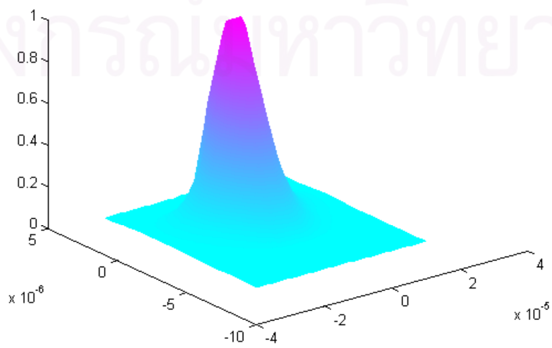
θ_F คือการหมุนของฟาราเดย์

ในที่นี้ให้ θ_F เท่ากับ $133^{\circ}/cm$ ดังนั้นค่า δ_1 เท่ากับ 2.4×10^{-4} และ δ_2 เท่ากับ 2.39×10^{-4} ป้อนสนามไฟฟ้าอินพุตโมด TE_{11}^{y} โมดโดยคำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ให้ $\delta=0$ ดังรูปที่ 3.16

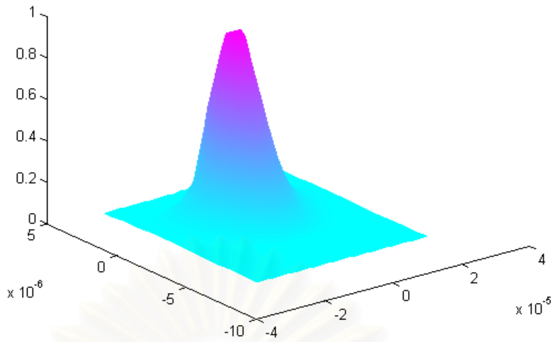


รูปที่ 3.16 สนามไฟฟ้าอินพุตโมด TE_{11}^{y} ที่ $\delta=0$

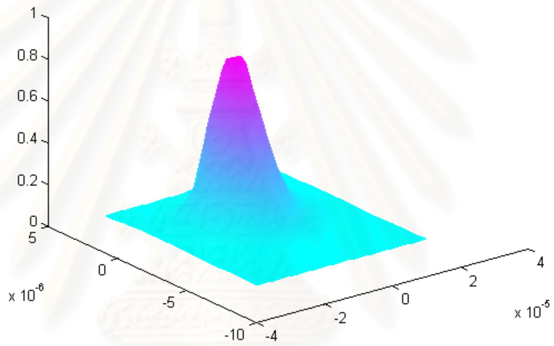
คำนวณสนามโดยใช้สมการ BPM และ อัลกอริทึมนิวมาร์กโดยพิจารณาหาระยะที่สนามไฟฟ้าเปลี่ยนเป็นสนามแม่เหล็กมากที่สุด(mode conversion) โดยพิจารณาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นระยะๆตั้งแต่ $1000\mu m$ จนถึง $7000\mu m$ วิเคราะห์โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส ได้ผลดังรูปที่ 3.17 และ 3.18



(ก) E_x $z=1000\mu m$

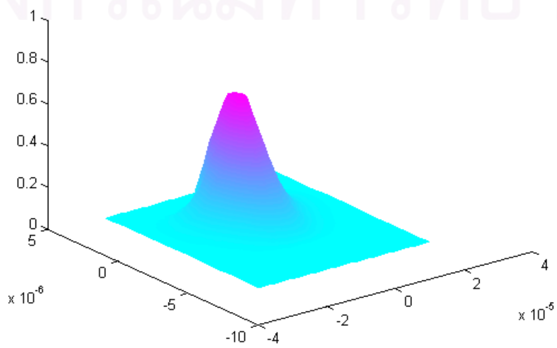


(ข) $E_x \; z = 2000 \mu m$

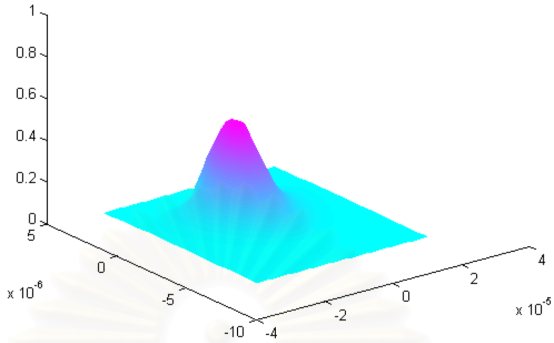


(ค) $E_x \; z = 3000 \mu m$

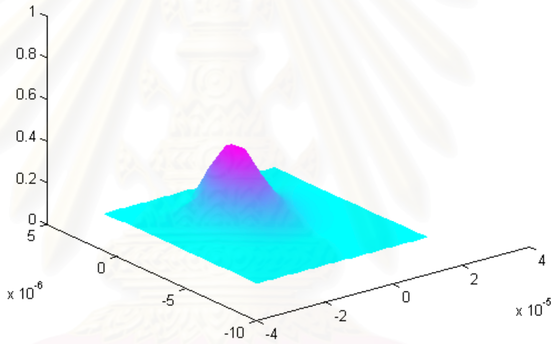
รูปที่3.17(ก)-(ซ)สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแมกนีโตออปติกคำนวณด้วยอัลก-อริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่ระยะทางต่างๆ



(ง) $E_x \; z = 4000 \mu m$

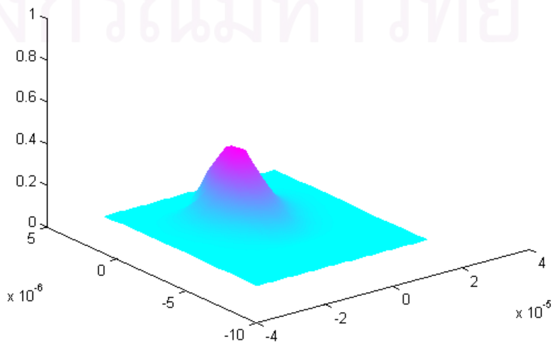


(จ) $E_x \; z = 5000 \mu m$



(ฉ) $E_x \; z = 6000 \mu m$

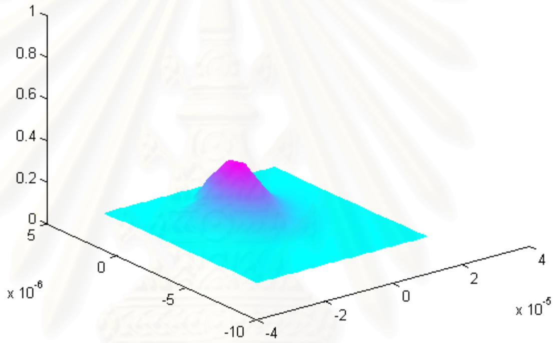
รูปที่3.17(ก)-(ช) (ต่อ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแมกนีโตออปติกคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่ระยะทางต่างๆ



(ช) $E_x \; z = 7000 \mu m$

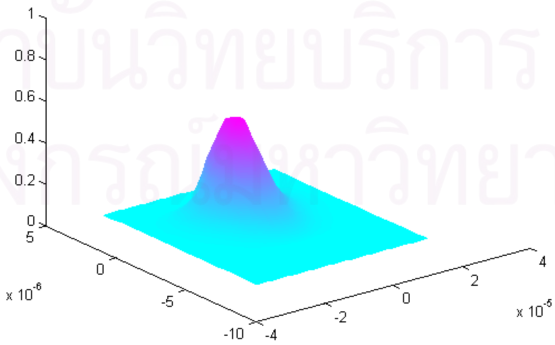
รูปที่3.17(ก)-(ช) (ต่อ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแมกนีโตออปติกคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่ระยะทางต่างๆ

จากรูปที่ 3.17 พบว่าสนามไฟฟ้าค่อยๆลดลงและเปลี่ยนแปลงพลังงานกลายเป็นสนามแม่เหล็กในขณะที่รูปที่ 3.18 สนามแม่เหล็กได้รับการถ่ายโอนพลังงานจากสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นตามระยะทาง จากผลการคำนวณพบว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถคำนวนสนามออกมาได้ดีแม้จะใช้งานร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสทั้งนี้เนื่องมาจากขอบหน้าต่างการคำนวณมีขนาดใหญ่ทำให้คลื่นที่แพร่กระจายไปที่ขอบหน้าต่างมีค่าน้อยทำให้การหาค่าสัมประสิทธิ์ TBC มีค่าถูกต้องแม้ระยะทาง Δz มีค่ามากเพราะสนามที่ระนาบ $i, i-1, i+1$ ที่ขอบหน้าต่างมีค่าต่างกันไม่มาก

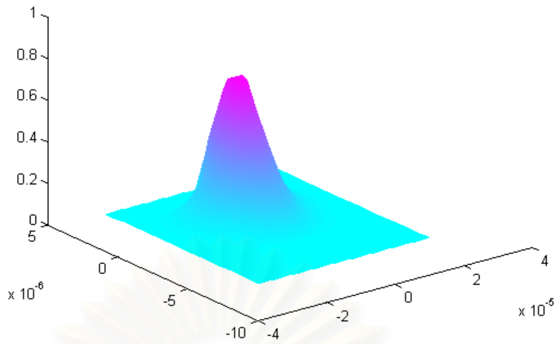


(ก) H_x $z = 1000\mu m$

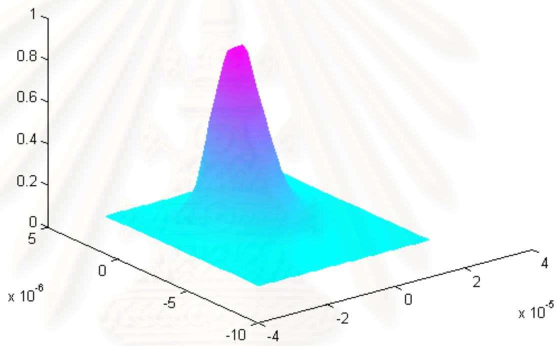
รูปที่3.18(ก)-(ช)สนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแมกนีโตออปติกคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่ระยะทางต่างๆ



(ข) H_x $z = 2000\mu m$

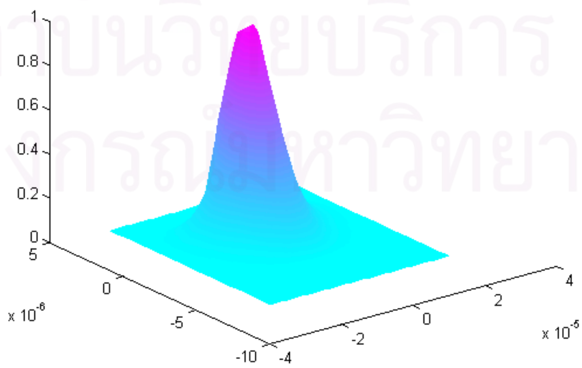


(ค) $H_x \; z = 3000 \mu m$

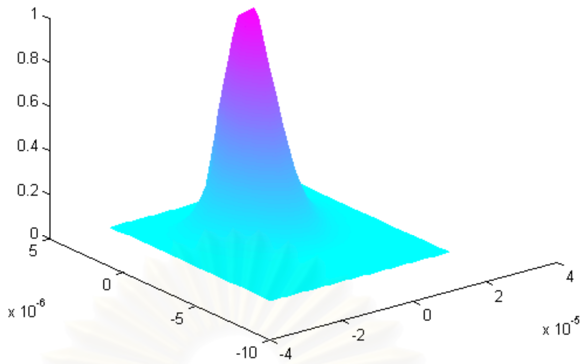


(ง) $H_x \; z = 4000 \mu m$

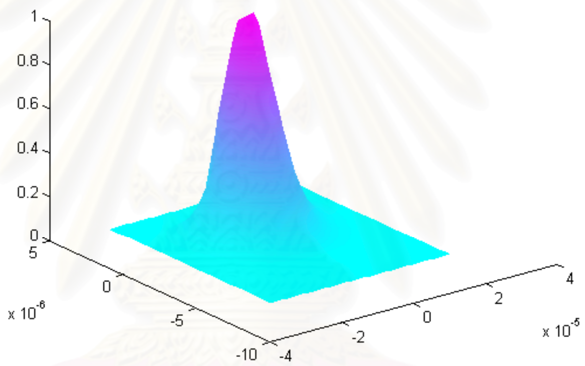
รูปที่3.18(ก)-(ช) (ต่อ) สนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแมกนีโตออปติกคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่ระยะทางต่างๆ



(จ) $H_x \; z = 5000 \mu m$

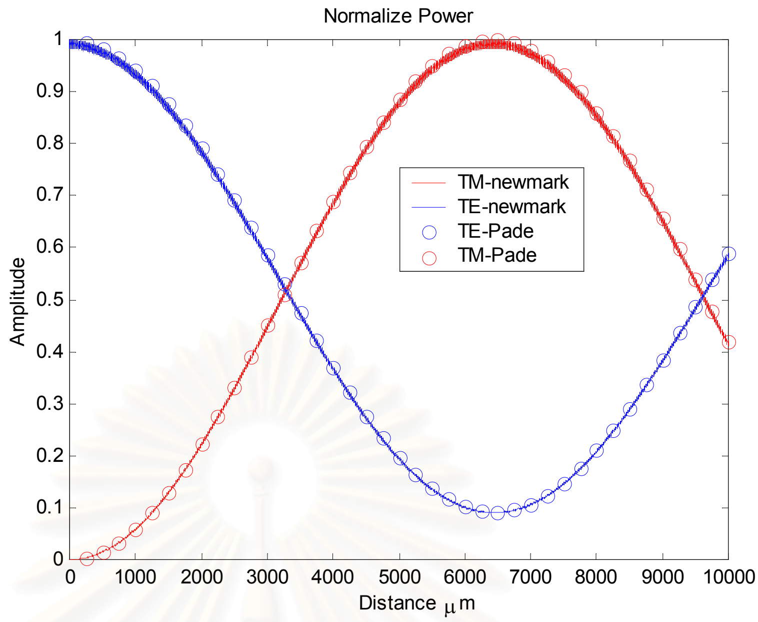


(ฉ) $H_x \; z = 6000\,\mu m$



(ช) $H_x \; z = 7000\,\mu m$

รูปที่3.18(ก)-(ช) (ต่อ) สนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นแสงตัวแยกโดดเดี่ยวแมกนีโตออปติกคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่ระยะทางต่างๆ



รูปที่ 3.19 การเปรียบเทียบพลังงานในท่อนำคลื่นแสงระหว่างการคำนวณด้วยอัลกอริทึมปาเดกับอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส

รูปที่3.19 เป็นการเปรียบเทียบพลังงานของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแกนของท่อนำคลื่นแสงระหว่างการใช้อัลกอริทึมแบบนิวมาร์กและอัลกอริทึมแบบปาเดพบว่าพลังงานที่คำนวณได้ในทั้งสองวิธีการมีค่าสอดคล้องกัน นอกจากนั้นพลังงานที่คำนวณได้ด้วยอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กยังมีการกระเพื่อมสั่นเช่นเดียวกับตอนคำนวณในท่อนำคลื่นไอโซทรอปิกทั้ง 2มิติและ 3 มิติ

3.6 สรุป

ในบทนี้เรานำอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กมาคำนวณในท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติ โดยทดสอบความแม่นยำโดยการหาระยะคู่ควบในท่อนำคลื่นแสงแบบคู่ควบ ผลการคำนวณปรากฏว่ามีความแม่นยำสูง เมื่อทดสอบค่าพารามิเตอร์นิวมาร์กที่เหมาะสมกับท่อนำคลื่นแสง 3 มิติแล้ว พบว่าค่า $\gamma = 0.5$ และค่า $\beta = 0.5$ เป็นค่าที่เหมาะสม การพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตกับอัลกอริทึมนิวมาร์ก ผลที่ได้ปรากฏว่า เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLมีความเหมาะสมกับอัลกอริ-ทึมนิวมาร์กมากกว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส หลังจากนั้นทดลองทำการคำนวณบนท่อนำคลื่นแสงแบบมุมกว้าง ผลการคำนวณพบว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถใช้คำนวณในปัญหามุมกว้างได้ ในตอนท้ายทำการคำนวณบนท่อนำคลื่นแสงวัสดุแอนไอโซทรอปิกพบว่าอัลกอริทึมนิว- มาร์คสามารถใช้ในการคำนวณบนท่อนำคลื่นแสงวัสดุแอนไอโซทรอปิกได้

บทที่ 4

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันอัลกอริทึมนิวมาร์ก ในรูปสมการเวกเตอร์

4.1 ความนำ

ใน 2 บทที่แล้วได้เสนอวิธีวิเคราะห์สนามด้วยสมการสเกลาร์ ในขณะที่ในบทนี้จะเสนอวิธีวิเคราะห์ด้วยสมการเวกเตอร์โดยใช้อัลกอริทึมนิวมาร์กเช่นเดียวกัน สมการเวกเตอร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แบบ คือ สมการเวกเตอร์ที่มีฟังก์ชันฐานเป็นแบบโนด และ สมการเวกเตอร์ที่มีฟังก์ชันฐานแบบขอบ (edge element) ฟังก์ชันฐานแบบโนดมีข้อจำกัดคือคำตอบที่ได้มีส่วนที่เป็นผลเฉลยปลอมเทียม อันเกิดจากความหนาแน่นของฟลักซ์ไม่เป็นไปตามกฎของเกาส์ ในขณะที่ฟังก์ชันฐานแบบขอบสอดคล้องกับกฎของเกาส์ นอกจากนั้นยังทำให้สนามมีความต่อเนื่องในแนวสัมผัส และยังสามารถวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นแสงที่มีมุมหรือเหลี่ยมได้ดีโดยไม่เกิดสภาวะเอกฐาน จากข้อดีนี้เองในวิทยานิพนธ์นี้เลือกฟังก์ชันฐานแบบขอบในการวิเคราะห์สนาม สูตรการคำนวณในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สามารถแบ่งออกได้เป็นสองสูตร คือ แบบนิพจน์แปรผัน กับ แบบกาเลอคิน โดยสูตรแบบนิพจน์แปรผันสามารถใช้ได้กับวัสดุที่ค่าเทนเซอร์สภาพยอมเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิตเตียน เท่านั้น ในขณะที่สูตรแบบกาเลอคินสามารถใช้กับวัสดุทั่วไปได้ ในวิทยานิพนธ์นี้เลือกสูตรแบบกาเลอคินมาใช้ในการคำนวณ เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย หัวข้อ 4.2 จะกล่าวถึงสมการเวกเตอร์บีมพรอพาเกชัน หัวข้อ 4.3 กล่าวถึง การพิจารณาเสถียรภาพของการคำนวณ หัวข้อ 4.4 เสนอผลการคำนวณในกรณีตัวอย่างในท่อนำคลื่นแสง 3 แบบ คือ ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ, ท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย และ ท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐาน นอกจากนั้นยังเสนอผลการคำนวณของใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence และแบบ stress-birefringence ที่ได้รับแรงกดจากภายนอก การวิเคราะห์จะพิจารณาความถูกต้องของคำตอบในท่อนำคลื่นแสงแบบริบ, วิเคราะในปัญหามุมกว้างในท่อนำคลื่นแสงริบรูปตัววาย,วิเคราะห์สนามในวัสดุแอนไอโซทรอปิกโดยพิจารณาในท่อนำคลื่นฝังในแผ่นฐาน วิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence วัสดุแอนไอโซทรอปิก และ วิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence ที่ได้รับแรงกดจากภายนอกทำให้กลายเป็นวัสดุแอนไอโซทรอปิกที่มีสภาพยอมไฟฟ้าที่มีสมาชิกนอกแนวทแยงมุม (off-diagonal)

4.2 สมการเวกเตอร์บีมพรอพาเกชัน

เริ่มการคำนวณโดยพิจารณาสมการคลื่นแบบเวกเตอร์ดังนี้

$$\nabla \times \left([p]\nabla \times \vec{\Phi}\right) - k_0^2[q]\vec{\Phi} = 0 \quad (4.1)$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPML (PML) ในการป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นแสง ถ้า $\vec{\Phi}$ เป็นเวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้าแล้ว

$$[p] = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.2a)$$

$$[q] = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x}\varepsilon_{xx} & s_z\varepsilon_{xy} & s_y\varepsilon_{xz} \\ s_z\varepsilon_{yx} & \frac{s_z s_x}{s_y}\varepsilon_{yy} & s_x\varepsilon_{yz} \\ s_y\varepsilon_{zx} & s_x\varepsilon_{zy} & \frac{s_x s_y}{s_z}\varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.2b)$$

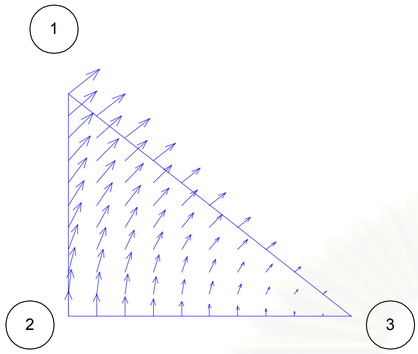
ถ้า $\vec{\Phi}$ เป็นเวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็กแล้ว

$$[p] = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x}\varepsilon_{xx} & s_z\varepsilon_{xy} & s_y\varepsilon_{xz} \\ s_z\varepsilon_{yx} & \frac{s_z s_x}{s_y}\varepsilon_{yy} & s_x\varepsilon_{yz} \\ s_y\varepsilon_{zx} & s_x\varepsilon_{zy} & \frac{s_x s_y}{s_z}\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.2c)$$

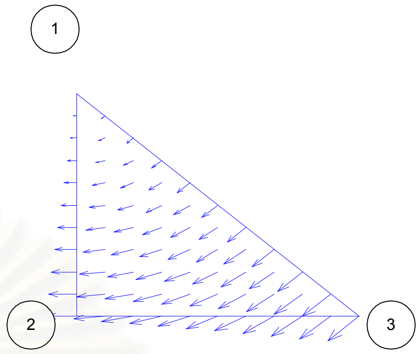
$$[q] = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix} \quad (4.2d)$$

ค่า s_x, s_y, s_z เป็นสัมประสิทธิ์ PML มีค่าขึ้นกับทิศทาง x, y และ ตำแหน่งมุม (ตามตารางที่ ง.2 ในภาคผนวก ง)

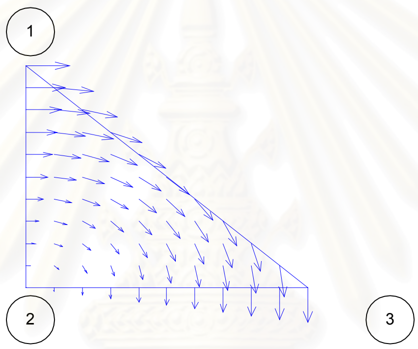
จากสมการ (ฉ.9) ในภาคผนวก ฉ นำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มาแก้ปัญหาในระนาบตัดขวางใช้สูตรการคำนวณแบบกาเลอคินโดยใช้ฟังก์ชันฐานแบบขอบ (Koshiba, Maruyama, and Hirayama, 1994) ดังรูปที่ (4.1)และฟังก์ชันในแนวแกนเป็นแบบโนดดังรูปที่ (3.1)



(ก) W_1^e



(ข) W_2^e



(ค) W_3^e

รูปที่ 4.1 ฟังก์ชันฐานแบบอีลีเมนต์ขอบคงที่ (ก) W_1^e (ข) W_2^e (ค) W_3^e

เราจะเขียนให้คำตอบของเวกเตอร์ $\vec{\Phi}$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}(x,y,z) \quad &= \phi_x(x,y,z)\exp(-jk_0n_0z)\vec{a}_x \\ &+ \phi_y(x,y,z)\exp(-jk_0n_0z)\vec{a}_y \\ &+ \phi_z(x,y,z)\exp(-jk_0n_0z)\vec{a}_z\end{aligned} \tag{4.3}$$

ประมาณให้องค์ประกอบ $\phi_i \left(i = x, y, z\right)$ อยู่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชันฐานแบบขอบและพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{U\}^T \{\varphi_t\} \\ \{V\}^T \{\varphi_t\} \\ j\{N\}^T \{\varphi_z\} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$\{U\}, \{V\}$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างดังนี้

$$\{U\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} l_1(y_3 - y) \\ l_2(y_1 - y) \\ l_3(y_2 - y) \end{bmatrix} \qquad \{V\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} l_1(x - x_3) \\ l_2(x - x_1) \\ l_3(x - x_2) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

โดยที่ x_i , y_i คือพิกัด x, y ของโนดที่ $i = 1,2,3$ A คือขนาดพื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม l_i คือความยาวของด้านที่ $i =$ 1,2,3และเป็นค่าที่กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ให้วิ่งในทิศทางที่เสริมกันโดยมีสูตรการหาดังนี้

$$l_i = \begin{cases} \sqrt{b_k^2 + c_k^2} & for \quad b_k < 0 \ or \ b_k = 0, c_k > 0 \\ -\sqrt{b_k^2 + c_k^2} & for \quad b_k > 0 \ or \ b_k = 0, c_k < 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

ในที่นี้ i, j, k หมุนวนแบบ modulo 3 เมื่อแทนฟังก์ชันฐาน สมการ (4.4) ลงในสมการคลื่นแบบเวกเตอร์ สมการ (4.1) และหาผลคูณภายในตามระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบกาเลอคินแล้วเราก็สามารถจัดรูปสมการได้ดังนี้

$$[M]\frac{d^2\{\varphi\}}{dz^2} + ([L] - 2jk_0 n_0 [M])\frac{d\{\varphi\}}{dz} + ([K] - jk_0 n_0 [L] - k_0^2 n_0^2 [M])\{\varphi\} = \{0\} \tag{4.7}$$

โดยที่

$$\{\varphi\} = \begin{bmatrix} \{\varphi_t\} \\ \{\varphi_z\} \end{bmatrix} \tag{4.8a}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{tt}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8b}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{tt}] & j[L_{tz}] \\ j[L_{zt}] & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8c}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} [K_{tt}] & j[K_{tz}] \\ -j[K_{zt}] & [K_{zz}] \end{bmatrix} \tag{4.8d}$$

$$[K_{tt}]=\sum_e \iint_e [p_{zz}\frac{\partial\{U\}}{\partial y}\frac{\partial\{V\}^T}{\partial x}-p_{zz}\frac{\partial\{U\}}{\partial y}\frac{\partial\{U\}^T}{\partial y}+k_0^2 q_{xx}\{U\}\{U\}^T+k_0^2 q_{xy}\{U\}\{V\}^T$$

$$-p_{zz}\frac{\partial\{V\}}{\partial x}\frac{\partial\{V\}^T}{\partial x}+p_{zz}\frac{\partial\{V\}}{\partial x}\frac{\partial\{U\}^T}{\partial y}+k_0^2 q_{yx}\{V\}\{U\}^T+k_0^2 q_{yy}\{V\}\{V\}^T]dxdy \tag{4.8e}$$

$$[K_{tz}]=\sum_e \iint_e [p_{zx}\frac{\partial\{U\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}-p_{zy}\frac{\partial\{U\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}-p_{zx}\frac{\partial\{V\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}+p_{zy}\frac{\partial\{V\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}$$

$$+k_0^2 q_{xz}\{U\}\{N\}^T+k_0^2 q_{yz}\{V\}\{N\}^T]dxdy \tag{4.8f}$$

$$[K_{zt}]=\sum_e \iint_e [p_{xz}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{U\}^T}{\partial y}-p_{yz}\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{U\}^T}{\partial y}-p_{xz}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{V\}^T}{\partial x}+p_{yz}\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{V\}^T}{\partial x}$$

$$+k_0^2 q_{zx}\{N\}\{U\}^T+k_0^2 q_{zy}\{N\}\{V\}^T]dxdy \tag{4.8g}$$

$$[K_{zz}]=\sum_e \iint_e [p_{yx}\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}-p_{yy}\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}-p_{xx}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}$$

$$+p_{xy}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}+k_0^2 q_{zz}\{N\}\{N\}^T]dxdy \tag{4.8h}$$

$$[L_{tt}]=\sum_e \iint_e [p_{yz}\{U\}\frac{\partial\{V\}^T}{\partial x}-p_{yz}\{U\}\frac{\partial\{U\}^T}{\partial y}-p_{zx}\frac{\partial\{U\}}{\partial y}\{V\}^T+p_{zy}\frac{\partial\{U\}}{\partial y}\{U\}^T$$

$$-p_{xz}\{V\}\frac{\partial\{V\}^T}{\partial x}+p_{xz}\{V\}\frac{\partial\{U\}^T}{\partial y}+p_{zx}\frac{\partial\{V\}}{\partial x}\{V\}^T-p_{zy}\frac{\partial\{V\}}{\partial x}\{U\}^T]dxdy \tag{4.8i}$$

$$[L_{tz}]=\sum_e \iint_e [p_{yx}\{U\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}-p_{yy}\{U\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}-p_{xx}\{V\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}+p_{xy}\{V\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}]dxdy \tag{4.8j}$$

$$[L_{zt}]=\sum_e \iint_e [p_{xy}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{U\}^T-p_{yy}\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\{U\}^T-p_{xx}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{V\}^T+p_{yx}\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\{V\}^T]dxdy \tag{4.8k}$$

$$[M_{tt}]=\sum_e \iint_e [-p_{yx}\{U\}\{V\}^T+p_{yy}\{U\}\{U\}^T+p_{xx}\{V\}\{V\}^T-p_{xy}\{V\}\{U\}^T]dxdy \tag{4.8l}$$

เมื่อนำสมการ (4.7) มาคำนวณด้วยวิธีบีมพรอพาเกชันพบว่าได้คำตอบที่ลู่ออก Schulz et al., 1998 ได้เสนอการแก้ไขปัญหาโดยการแปลงตัวแปรในสมการ (4.3) ดังนี้

$$\phi_z = j\frac{\partial \phi'}{\partial z} \tag{4.9}$$

การแปลงตัวแปรนี้เป็นการเลียนแบบการแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ นอกจากนั้นการแปลงตัวแปรนี้ทำให้สามารถเขียนสมการ (4.3) ด้วยวิธีปาเดได้ง่ายขึ้นและทำให้มีเสถียรภาพในการคำนวณ เมื่อแปลงตัวแปรแล้วสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} [M_{tt}] - [L_{tz}] \\ -[L_{zt}] - [K_{zz}] \end{bmatrix} \frac{\partial^2 \{\phi'\}}{\partial z^2} + \begin{bmatrix} [L_{tt}] & -[K_{tz}] \\ [K_{zt}] & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \{\phi'\}}{\partial z} + \begin{bmatrix} [K_{tt}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{\phi'\} = \{0\} \tag{4.10}$$

Saitoh and Koshiba (2001) เสนอให้ละเลยเทอมที่สองในสมการ (4.10) เนื่องจาก ε_{ij} ที่ $i \neq j$ มีค่าน้อยมากๆ ดังนั้นเขียน (4.10) ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} [M_{tt}] - [L_{tz}] \\ -[L_{zt}] - [K_{zz}] \end{bmatrix} \frac{\partial^2 \{\phi'\}}{\partial z^2} + \begin{bmatrix} [K_{tt}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{\phi'\} = \{0\} \tag{4.11}$$

เมื่อแทนสนามด้วยเทอม $\varphi'(x, y, z)\exp(-jk_0 n_0 z)$ ลงไปเขียนสมการ (4.11) ได้เป็น

$$[M]\frac{d^2\{\varphi'\}}{dz^2} - 2jk_0 n_0 [M]\frac{d\{\varphi'\}}{dz} + \left([K] - k_0^2 n_0^2 [M]\right)\{\varphi'\} = \{0\} \tag{4.12}$$

โดยที่

$$\{\varphi'\} = \begin{bmatrix} \{\varphi_t\} \\ \{\varphi_z'\} \end{bmatrix} \tag{4.13a}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{tt}] - [L_{tz}] \\ -[L_{zt}] - [K_{zz}] \end{bmatrix} \tag{4.13b}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{tt}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.13c}$$

สังเกตได้ว่าสมการ (4.12) เป็นสมการที่พิจารณาเฉพาะค่าสภาพยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์ $[\varepsilon]$ ที่เป็นแอนไอโซทรอปิกในแนวทแยงมุมเท่านั้นโดยสามารถพิจารณาได้ทั้งแบบuniaxial และ แบบ bi-axial

จากสมการ (4.12) เรานำวิธีนิวมาร์กมาแก้ไขปัญหาในแนวแกนโดยแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น

$$[A]\{\varphi'_{i+1}\} = [B]\{\varphi'_i\} + [C]\{\varphi'_{i-1}\} \tag{4.14}$$

โดยที่

$$[A] = [M] - 2jk_0 n_0 [M]\gamma\Delta z + ([K] - k_0^2 n_0^2 [M])\beta\Delta z^2 \tag{4.15a}$$

$$[B] = 2[M] + 2jk_0 n_0 [M](1 - 2\gamma)\Delta z - ([K] - k_0^2 n_0^2 [M])(0.5 + \gamma - 2\beta)\Delta z^2 \tag{4.15b}$$

$$[C] = -[M] + 2jk_0 n_0 [M](-1 + \gamma)\Delta z - ([K] - k_0^2 n_0^2 [M])(0.5 - \gamma + \beta)\Delta z^2 \tag{4.15c}$$

สมการ (4.15) เป็นสมการบีมพรอพาเกชันซึ่งเมื่อเราทราบค่าสนามที่ระนาบ i และระนาบ $i-1$ เราจะสามารถคำนวณหาสนามที่ระนาบ $i+1$ ได้ อัลกอริทึมนิวมาร์กประสบปัญหาการลู่ออกของคำตอบเช่นเดียวกับอัลกอริทึมปาเด การแก้ไขปัญหาพบว่าเราจะต้องปรับแต่งค่า β และ γ ให้เหมาะสม นอกจากนั้นยังพบว่าค่าดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 ,ความยาวคลื่นแสง λ , ระยะขั้นการคำนวณ Δz ล้วนมีผลต่อเสถียรภาพในการคำนวณทั้งสิ้น

4.3 การพิจารณาเสถียรภาพของระบบ

ปัญหาที่พบจากการคำนวณเป็นขั้นๆคือการลู่ออกของคำตอบซึ่งทำให้ระบบไม่เสถียร ในที่นี้จะนำหลักการวิเคราะห์ที่ได้รับการเสนอมากมายมาเป็นเกณฑ์ในการเลือกค่าพารามิเตอร์ต่างๆ

4.3.1 วิเคราะห์โดยใช้ Growth Factor

วิธีวิเคราะห์โดยใช้ค่า Growth Factor (Navsariwala and Gedney, 1995) พิจารณาสมการ (4.14)

$$[A]\{\varphi'_{i+1}\} = [B]\{\varphi'_i\} + [C]\{\varphi'_{i-1}\}$$

กำหนดให้

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|\varphi'_{i+1}\|}{\|\varphi'_i\|} \quad \le \quad 1 \tag{4.16}$$

หรือ spectral radius (ขนาด eigen value ที่มีค่ามากที่สุด) ของสมการ (4.17) เป็น

$$\rho\left([A]^{-1}[B]\right) \quad \leq \quad 1 \tag{4.17}$$

หรือพิจารณาสมการหา eigen value ทั่วไปได้ดังนี้

$$[A]\{x\} - \lambda_1 [B]\{x\} = 0 \tag{4.18}$$

โดยที่ $[A]$ และ $[B]$ พิจารณาตามสมการ (4.15a) และ (4.15b)

$$\lambda_1 = \frac{\left(1 - 2jk_0 n_0 \gamma \Delta z + \left(\alpha\beta\Delta z^2\right)\right)}{\left(2 + 2jk_0 n_0 (1-2\gamma)\Delta z - \alpha(1/2 + \gamma - 2\beta)\Delta z^2\right)} \tag{4.19}$$

โดยที่ α เป็นeigen value ของ $[M]\{x\} = \alpha\left([K] - k_0^2 n_0^2 [M]\right)\{x\}$ ดังนั้นในสมการ (4.19) ต้องทำการปรับค่า k_0, n_0, β, γ และ Δz ให้ค่า $\|\lambda_1\| \leq 1$ ในทุกๆค่า α

4.3.2 วิธีวิเคราะห์โดยอาศัย Z Transform

วิธีการที่สองที่จะนำมาพิจารณาคือการนำ z transformเข้ามาช่วยพิจารณาความเสถียรของระบบ (Lee, Lee, and Cangellaris, 1997) โดยวิธีนี้มีความคล้ายคลึงกับวิธีแรกเพียงแต่เพิ่มการพิจารณาเทอม $i-1$ เข้ามาด้วยเขียนสมการ (4.14) เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
&\left(M_m - 2jk_0 n_0 M_m \gamma\Delta z + \left(K_m - k_0^2 n_0^2 M_m\right)\beta\Delta z^2\right)\phi_m^{i+1} \\
&+ \left(-2M_m - 2jk_0 n_0 M_m (1-2\gamma)\Delta z + \left(K_m - k_0^2 n_0^2 M_m\right)(1/2 + \gamma - 2\beta)\Delta z^2\right)\phi_m^{i} \\
&+ \left(M_m - 2jk_0 n_0 M_m (\gamma - 1)\Delta z + \left(K_m - k_0^2 n_0^2 M_m\right)(1/2 - \gamma + \beta)\Delta z^2\right)\phi_m^{i-1} = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

โดยที่ M_m และ K_m เป็น modal dispersion ของเมทริกซ์ $[M]$ และ $[K]$ ตามลำดับ ให้นิยามค่า g ดังนี้

$$\phi_m^{i+1} = g^2 \phi_m^{i-1} \quad \text{และ} \quad \phi_m^{i} = g\phi_m^{i-1} \tag{4.21}$$

โดยที่ g ต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 เมื่อแทนสมการ (4.21) ลงในสมการ (4.20) แล้วจะได้ว่า

$$\left(M_m - 2jk_0n_0M_m\gamma\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\beta\Delta z^2\right)g^2$$

$$+\left(-2M_m - 2jk_0n_0M_m(1-2\gamma)\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)(1/2+\gamma-2\beta)\Delta z^2\right)g$$

$$+\left(M_m - 2jk_0n_0M_0(\gamma-1)\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)(1/2-\gamma+\beta)\Delta z^2\right) = 0 \qquad (4.22)$$

ใช้ z transform เข้ามาช่วยวิเคราะห์

$$g = \frac{1+z}{1-z} \qquad (4.23)$$

แทนสมการ (4.23) ลงในสมการ (4.22) ได้ผลดังนี้

$$\left(M_m - 2jk_0n_0M_m\gamma\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\beta\Delta z^2\right)(1+z)^2$$

$$+\left(-2M_m - 2jk_0n_0M_m(1-2\gamma)\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)(1/2+\gamma-2\beta)\Delta z^2\right)\left(1-z^2\right)$$

$$+\left(M_m - 2jk_0n_0M_0(\gamma-1)\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)(1/2-\gamma+\beta)\Delta z^2\right)(1-z)^2 = 0 \qquad (4.24)$$

จัดรูปสมการ (4.24) ให้เป็นดังนี้

$$z^2\left(4M_m - 2jk_0n_0M_m(4\gamma-2)\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\Delta z^2(4\beta-2\gamma)\right)$$

$$+2z\left(-2jk_0n_0M_m\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\Delta z^2(\gamma-1/2)\right)$$

$$+\left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\Delta z^2 = 0 \qquad (4.25)$$

ผลเฉลยค่า z ในสมการ (4.25) ที่ทำให้ระบบเสถียรคืออยู่ครึ่งซ้ายมือของ z plane ดังรูปที่4.2

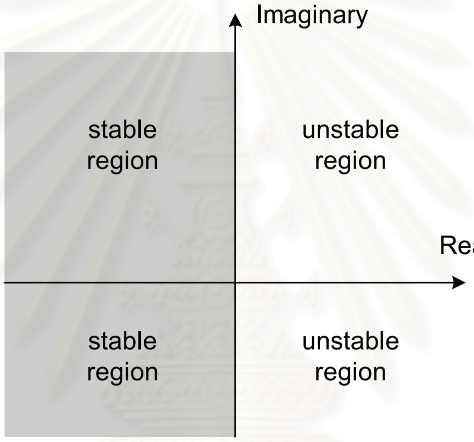
จากสมการ (4.25) ใช้หลักการ Routh-Hurwitz ทำให้พิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบเสถียรและคำตอบของสมการ (4.25) อยู่ฝั่งซ้ายของ z-plane

$$\left(4M_m - 2jk_0n_0M_m(4\gamma - 2)\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\Delta z^2\left(4\beta - 2\gamma\right)\right) \quad > \quad 0 \qquad (4.26a)$$

$$2z\left(-2jk_0n_0M_m\Delta z + \left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\Delta z^2\left(\gamma - 1/2\right)\right) \quad > \quad 0 \qquad (4.26b)$$

$$\left(K_m - k_0^2n_0^2M_m\right)\Delta z^2 \quad > \quad 0 \qquad (4.26c)$$

จากเงื่อนไขในสมการ (4.26) เราทำการปรับแต่งค่า $\gamma,\ \beta,\ \Delta z,\ n_0,\ k_0$ ให้สอดคล้องกับทุกๆค่าของ M_m และ K_m



รูปที่4.2 พื้นที่ที่ทำให้ระบบเสถียรกับพื้นที่ที่ทำให้ระบบไม่เสถียรใน z plane

นอกจากหลักการทั้งสองวิธีในเบื้องต้นเรายังพบว่ามีรายละเอียดปลีกย่อยอีกดังนี้

4.3.3 การเลือกดัชนีหักเหอ้างอิง n_0

ค่าดัชนีหักเหของโมดนำจะมีค่าอยู่ระหว่างดัชนีหักเหของแกนและดัชนีหักเหของเปลือก ทำให้วิธีบีมพรอพาเกชันให้ค่าดัชนีหักเหอ้างอิงมีค่าระหว่างดัชนีหักเหของแกนกับดัชนีหักเหของเปลือก การคำนวณบนสมการสเกลาร์ใน บทที่ 2 และ 3 เราเลือกค่าดัชนีหักเหอ้างอิงมีค่าเท่ากับดัชนีหักเหของเปลือกของท่อนำคลื่นแสง แต่ในกรณีของสมการแบบเวกเตอร์การเลือกค่าดัชนีหักเหอ้างอิงให้มีค่าเท่ากับดัชนีหักเหของเปลือกทำให้คำตอบลู่ออกและระบบไม่เสถียร ดังนั้นในการคำนวณด้วยสมการเวกเตอร์เราจึงเปลี่ยนมาเลือกค่าดัชนีหักเหอ้างอิงให้มีค่าเท่ากับดัชนีหักเหของแกนท่อนำคลื่นแสงแทน ในกรณีวัสดุแบบแอนไอโซทรอปิกยกตัวอย่างเช่น แกนของท่อนำคลื่นแสงมีดัชนีหักเหดังนี้ $n_{xx} = 2.25, n_{yy} = 2.1918, n_{zz} = 2.2308$ เรามักจะเลือกค่ากลางมาใช้

เป็นดัชนีหักเหอ้างอิงคือ 2.2308 เป็นต้น การเลือกดัชนีหักเหอ้างอิงแบบปรับค่าได้เป็นวิธีการที่ให้ผลการคำนวณมีความแม่นยำมากขึ้น อย่างไรก็ตามก็จะทำให้การคำนวณยุ่งยากขึ้น ดังนั้นในการคำนวณนี้จะเลือกดัชนีหักเหอ้างอิงแบบคงที่ ดัชนีหักเหอ้างอิงยังมีความสัมพันธ์กับขั้นของการคำนวณ Δz อีกด้วยโดยจะกล่าวในรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

4.3.4 การเลือกระยะขั้นการคำนวณ Δz

Hernandez (1994) ได้เสนอข้อกำหนดการเลือกค่าระยะขั้นการคำนวณ Δz ในสมการแบบสเกลาร์บีมพรอพาเกชันดังนี้

$$\Delta z \geq \frac{\lambda}{2\pi n_0} \tag{4.27}$$

ซึ่งหลักการนี้ยังสามารถนำมาใช้เป็นเกณฑ์ในการพิจารณาของสมการแบบเวกเตอร์ได้อีกด้วย ค่า λ คือความยาวคลื่นแสงที่ใช้โดยส่วนมากมักถูกกำหนดมาให้ ในขณะที่ค่าดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 ใช้เกณฑ์ในการเลือกตามที่กล่าวไว้แล้วในเบื้องต้น จากสมการ (4.27) พบว่าถ้าเลือกค่า Δz ให้มีค่ามากๆยิ่งดีจะทำให้ระบบมีเสถียรภาพดีขึ้น แต่การเลือกค่า Δz มากๆทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการคำนวณมากขึ้นเพราะระยะขั้นการคำนวณหยาบขึ้น ดังนั้นควรเลือกค่า Δz ที่น้อยที่สุดที่ยังทำให้ระบบเสถียร สังเกตได้ว่าค่า n_0 ที่เลือกมีผลต่อการเลือกค่า Δz ยิ่งค่า n_0 มีค่ามากจะทำให้ระยะขั้น Δz มีค่าได้น้อยๆระบบจะมีการคำนวณที่ละเอียดขึ้น อย่างไรก็ตามค่าดัชนีหักเหอ้างอิงไม่สามารถเลือกเป็นค่าใดๆได้ดังนั้นจึงต้องระมัดระวังการเลือกค่าให้ดี

4.3.5 การเลือกค่า β และ γ

หลักพื้นฐานที่ทำให้ระบบเสถียรในงานไฟไนต์อีลีเมนต์โดเมนเวลาที่พิจารณาด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์ก(Zienkiewiz and Taylor, 1991) คือ

$$2\beta \geq \gamma \geq 0.5 \tag{4.28}$$

แต่จากการทดลองคำนวณพบว่าหลักการเลือกคำตอบสมการ (4.28) เมื่อนำมาใช้กับสมการเวกเตอร์บีมพรอพาเกชันเป็นเพียงหลักการกว้างๆในการเลือกค่าเท่านั้น ในขณะที่ Wood (1990) ได้เสนอหลักการที่จะทำให้ระบบเสถียรเมื่อคำตอบอยู่ในรูปเชิงซ้อนคือ

$$4\beta = (\gamma + 0.5)^2 \tag{4.29}$$

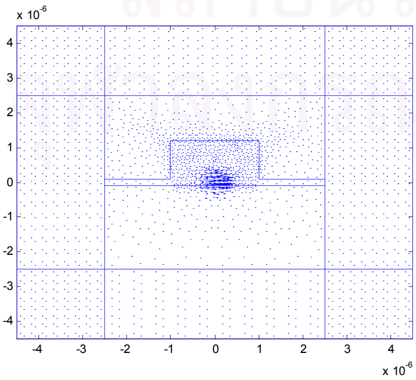
สมการ (4.29) สอดคล้องกับที่มีผู้เสนอ (Zienkiewiz, 1977) ค่า $\beta = 1$ และ $\gamma = 1.5$ เมื่อทำการทดสอบพบว่าคำตอบที่ได้ลู่ออก ดังนั้นจึงพิจารณาปรับแต่งค่า β และ γ เสียใหม่โดยทำการเพิ่มค่า γ ให้มากขึ้นโดยเลือก $\gamma = 2.5$ และ $\beta = 2.25$ ปรากฏว่าระบบมีเสถียรภาพในการคำนวณมากคำตอบที่ได้ลู่เข้า อย่างไรก็ตามเมื่อทำการเพิ่มค่า γ มากขึ้นพบว่าไม่ได้ช่วยให้การลู่เข้าดีขึ้นจึงเลือกค่า $\gamma = 2.5$ และ $\beta = 2.25$ ในการคำนวณ

เท่าที่กล่าวมาในเบื้องต้นทั้งหมดเป็นหลักการเลือกพารามิเตอร์อย่างกว้างๆ สังเกตว่าในสมการ (4.19) และ (4.26) ยังมีพารามิเตอร์อีกตัวหนึ่งนั่นคือค่า α และ M_m, K_m ที่เป็นผลมาจากการแบ่งอีลีเมนต์ในการคำนวณนั่นคือค่าพารามิเตอร์ตัวเดียวกันอาจทำให้ระบบเสถียรในท่อนำคลื่นแบบหนึ่งแต่อาจทำให้เกิดความไม่เสถียรในท่อนำคลื่นอีกแบบหนึ่งดังนั้นจึงต้องนำเข้ามาพิจารณาด้วย อย่างไรก็ตามจากการคำนวณท่อนำคลื่นต่างๆกันและมีการแบ่งอีลีเมนต์ต่างๆกันค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ยังคงมีค่าใกล้เคียงกัน

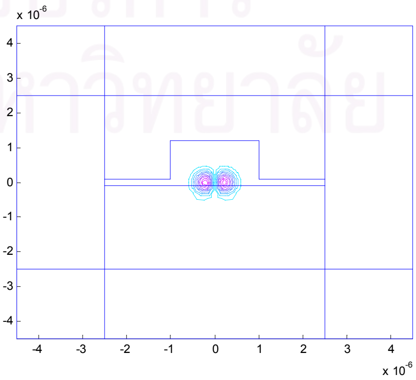
4.4 การคำนวณในกรณีตัวอย่าง

4.4.1 ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ

เริ่มทดสอบวิธีวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นแสงไอโซทรอปิกแบบริบดังรูปที่ 3.6 โดยป้อนสนามอินพุตดังรูปที่ 4.3 กำหนดให้สนามไฟฟ้า E_x อยู่ในรูปเกาส์เซียนมีขนาดจุดเป็น $0.3\mu m$ ให้สนามไฟฟ้า E_y มีค่าเป็นศูนย์ ให้สนามอินพุต E_z หาจากสนาม E_x โดยใช้สมการแมกซ์เวลล์ ความยาวคลื่นแสง $\lambda = 1.55\mu m$, ค่าระยะขั้นการคำนวณ $\Delta z = 1\mu m$, ดัชนีหักเหของแกน = 3.44, ค่าดัชนีหักเหของเปลือก = 3.34, เลือกดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 ให้มีค่าเท่ากับดัชนีหักเหของแกนท่อนำคลื่นแสง = 3.44, เลือกสัมประสิทธิ์นิวมาร์ก β = 2.25 และ γ = 2.5 ผลการคำนวณสนามที่ระยะทางต่างๆแสดงได้ดังรูปที่ 4.4



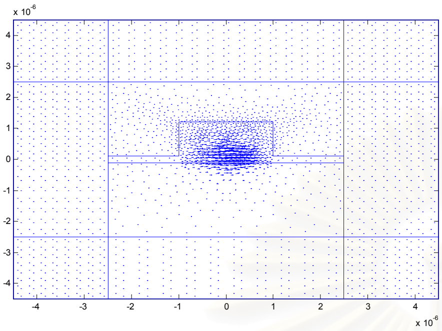
(ก)



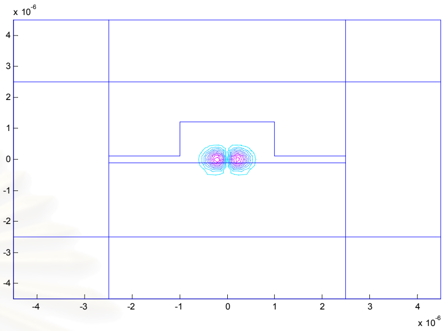
(ข)

รูปที่ 4.3 สนามไฟฟ้าอินพุต E_{11}^x โมด (ก) สนามตามขวาง (ข) สนามตามแนวแกน

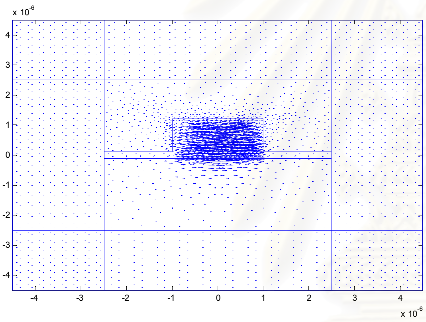
ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLโดยมีความหนาของชั้นดูดซับเป็น $2\mu m$ มีอีลีเมนต์รูปร่างสม่ำเสมอ 8 อีลีเมนต์ในชั้นดูดซับ เลือกค่าสัมประสิทธิ์PMLเท่ากับ $s=1-j$ การเลือกค่าสัมประสิทธิ์PML ให้เป็นแบบคงที่เพื่อหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตเชิงตัวเลขที่มีความซับซ้อนเพิ่มมากขึ้น



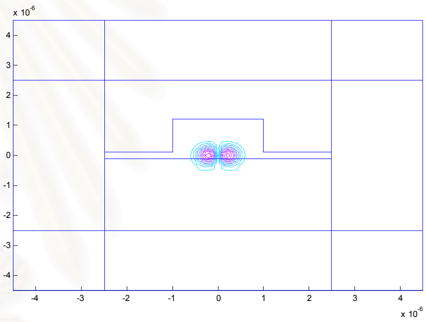
(ก) E_t $z=3\mu m$



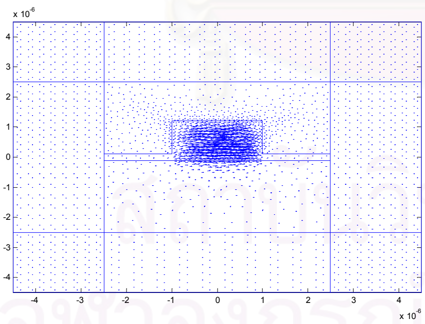
(ข) E_z $z=3\mu m$



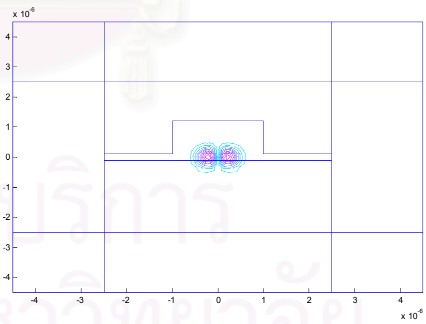
(ค) E_t $z=6\mu m$



(ง) E_z $z=6\mu m$

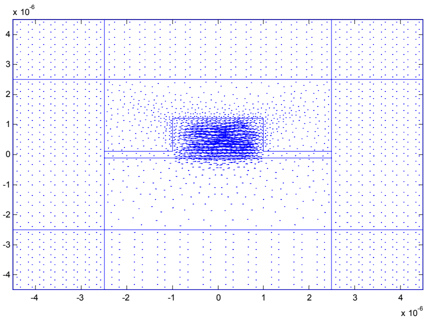


(จ) E_t $z=20\mu m$

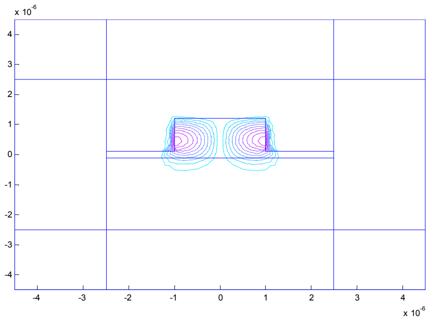


(ฉ) E_z $z=20\mu m$

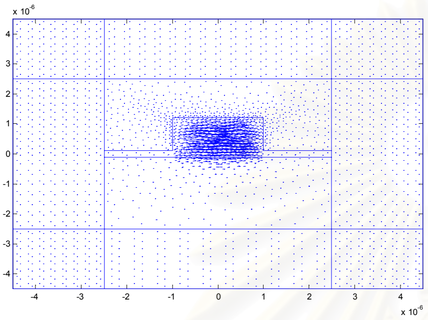
รูปที่4.4 (ก)-(ญ) สนามไฟฟ้าที่แพร่กระจายในท่อนำคลื่นแสงแบบริบโดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก



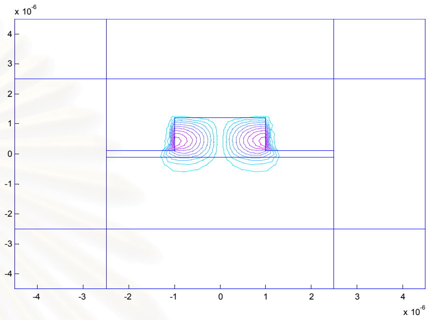
(ช) $E_t \quad z = 40\mu m$



(ซ) $E_z \quad z = 40\mu m$



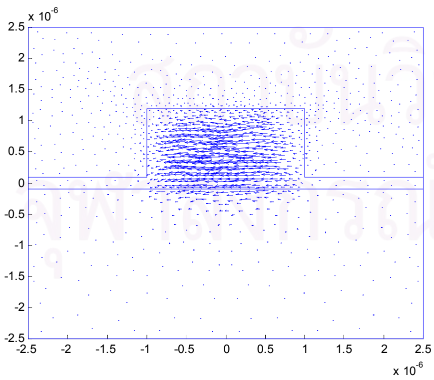
(ฌ) $E_t \quad z = 100\mu m$



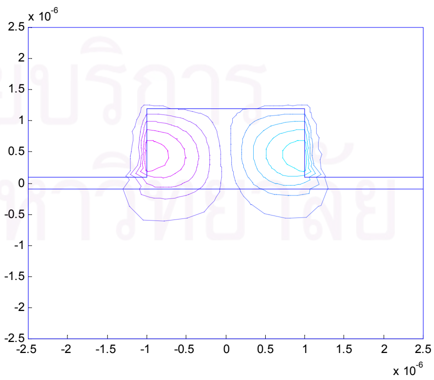
(ญ) $E_z \quad z = 100\mu m$

รูปที่ 4.4 (ก)-(ญ) (ต่อ) สนามไฟฟ้าที่แพร่กระจายในท่อนำคลื่นแสงแบบบริบโดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์ก

การแพร่กระจายของคลื่นแสงลู่เข้าสู่โมดนำ โดย E_t วิ่งเข้าสู่โมดนำที่ระยะทาง $6\mu m$ และ E_z วิ่งเข้าสู่โมดนำที่ระยะทางประมาณ $40\mu m$ หลังจากนั้นคลื่นแสงแพร่กระจายในลักษณะโมดนำตลอด ค่าคำตอบที่ระยะ$100\mu m$ ไม่มีลักษณะการลู่ออก เมื่อนำผลการคำนวณที่ได้ไปเปรียบเทียบกับสนามไฟฟ้าโมด E_{11}^x ที่คำนวณได้ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ดังรูปที่ 4.5 พบว่าสนามมีลักษณะใกล้เคียงกัน



(ก)

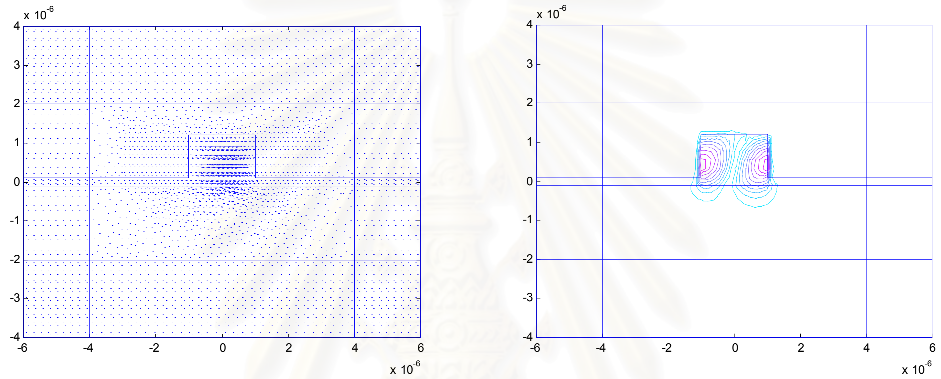


(ข)

รูปที่ 4.5 สนามไฟฟ้า E_{11}^x โมดคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (ก) สนามตามขวาง (ข) สนามตามแนวแกน

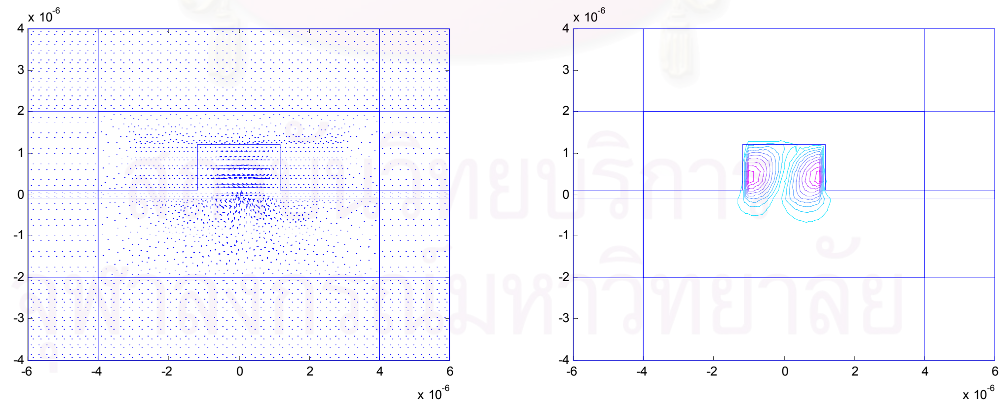
4.4.2 ท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย

ตัวอย่างท่อนำคลื่นแสงที่จะพิจารณาต่อมาคือท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย ดังรูปที่ 3.12 ใช้ความยาวคลื่นแสง $\lambda = 1.55 \mu m$, ดัชนีของแกน = 3.44, ดัชนีหักเหของเปลือก =3.34, ใช้ระยะขั้นการคำนวณ Δz = 1 μm , ใช้ค่าดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 = 3.44, เลือกค่าสัมประ-สิทธิ์นิวมาร์ก β = 2.25, γ = 2.5 ป้อนสนามอินพุตด้วยโมด E_{11}^{x} ดังรูปที่ 4.6 ใช้เงื่อนไขขอบเขต-แบบPML มีความหนาของชั้นดูดซับเป็น 2 μm เลือกสัมประสิทธิ์ PML ให้มีค่าคงที่ $s = 1 - 8j$ จำนวนอีลีเมนต์ในชั้น PML มีรูปร่างสม่ำเสมอมีทั้งสิ้น 8 อีลีเมนต์ผลการคำนวณที่ระยะ z ต่างๆ แสดงอยู่ในรูปที่ 4.7



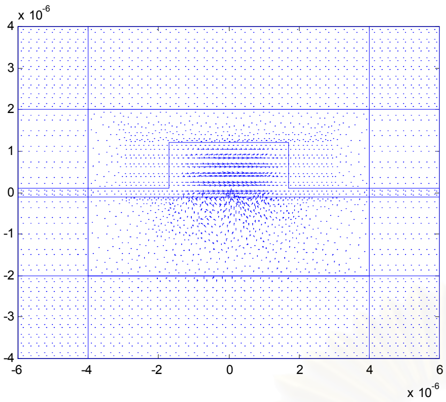
(ก) E_t (ข) E_z

รูปที่ 4.6 สนามไฟฟ้าอินพุตโมด E_{11}^{x} (ก) สนามตามขวาง (ข) สนามตามแนวแกน

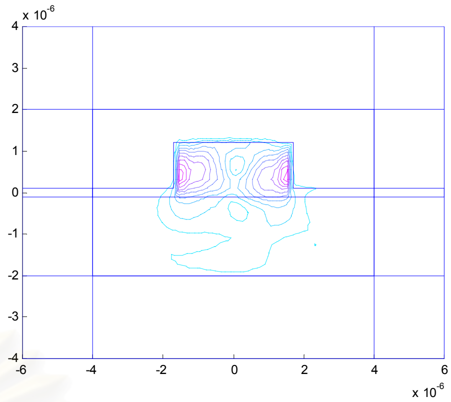


(ก) E_t $z = 8 \mu m$ (ข) E_z $z = 8 \mu m$

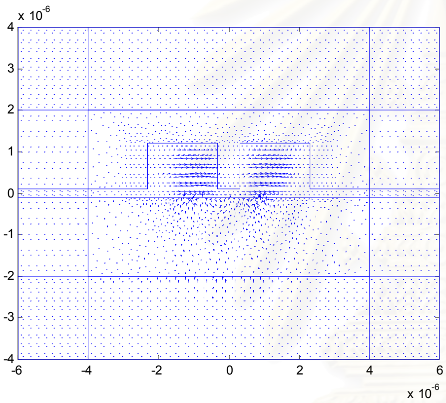
รูปที่ 4.7 (ก)-(ญ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววายคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กโดยใช้สมการแบบเวกเตอร์ที่ระยะต่างๆ



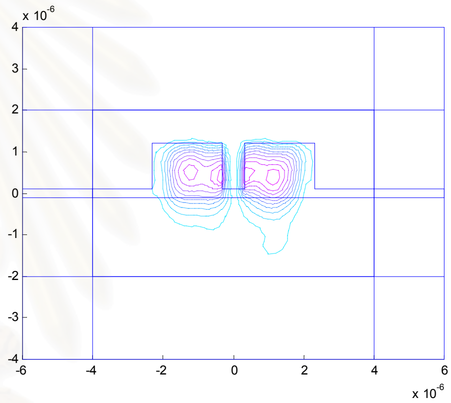
(ค) $E_t \;\; z = 16\mu m$



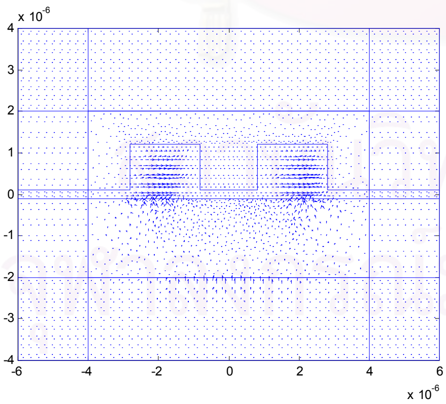
(ง) $E_z \;\; z = 16\mu m$



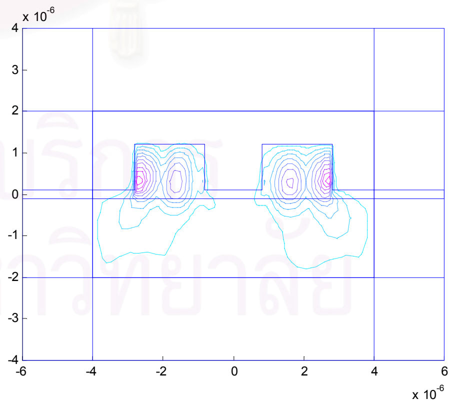
(จ) $E_t \;\; z = 24\mu m$



(ฉ) $E_z \;\; z = 24\mu m$

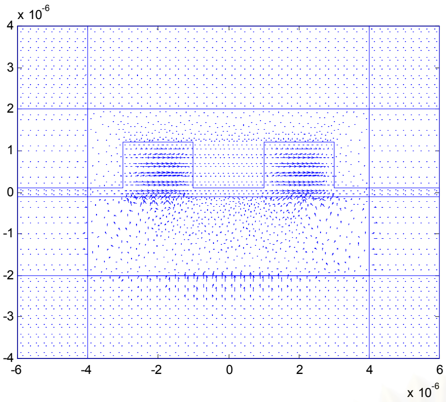


(ช) $E_t \;\; z = 32\mu m$

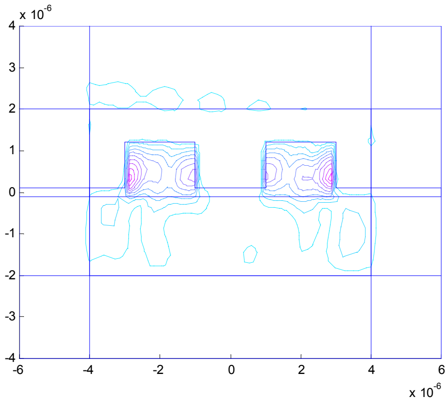


(ซ) $E_z \;\; z = 32\mu m$

รูปที่ 4.7 (ก)-(ญ) (ต่อ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววายคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กโดยใช้สมการแบบเวกเตอร์ที่ระยะต่างๆ



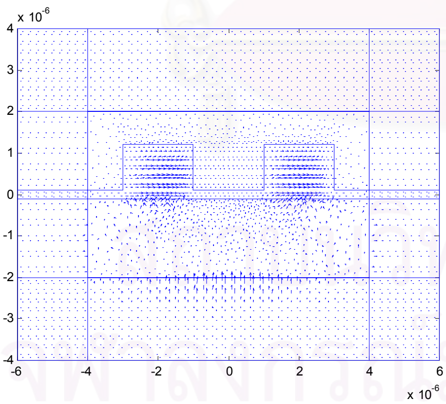
(ฌ) E_t $z = 40\mu m$



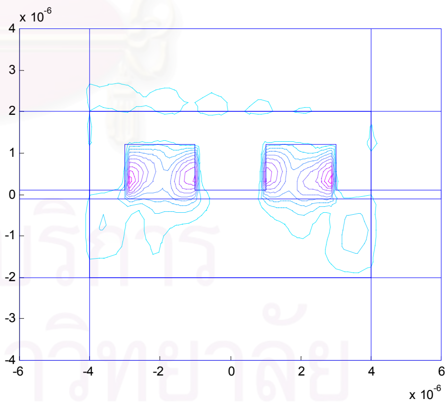
(ญ) E_z $z = 40\mu m$

รูปที่ 4.7 (ก)-(ญ) (ต่อ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววายคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมแบบนิวมาร์กโดยใช้สมการแบบเวกเตอร์ที่ระยะต่างๆ

จากการคำนวณด้วยอัลกอริทึมนิวมาร์กในท่อนำคลื่นแสงแบบมุมกว้างให้ผลการคำนวณที่น่าพอใจค่าคำตอบไม่มีการลู่ออก สนามไฟฟ้าถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนตามแกนของท่อนำคลื่นแสง เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณสนามด้วยอัลกอริทึมปาเดดังรูปที่ 4.8 พบว่าให้คำตอบที่ใกล้เคียงกันมาก เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLที่เลือกมาสามารถดูดกลืนคลื่นสะท้อนไม่ให้แพร่กระจายกลับเข้ามาที่หน้าต่างการคำนวณได้



(ก) E_t $z = 40\mu m$

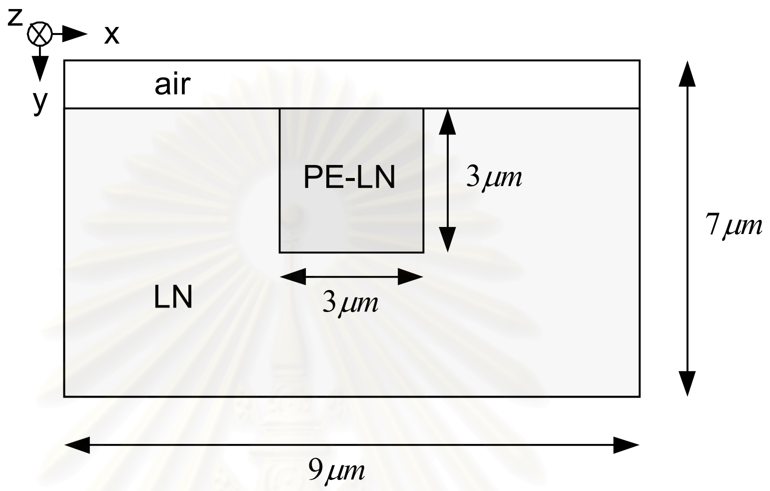


(ข) E_z $z = 40\mu m$

รูปที่ 4.8 สนามไฟฟ้าที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันอัลกอริทึมปาเดที่ระยะ $z = 40\mu m$

4.4.3 ท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐาน

ในสองตัวอย่างก่อนเราได้พิจารณาตัวอย่างท่อนำคลื่นแสงที่เป็นวัสดุแบบไอโซ-ทรอปิกในตัวอย่างนี้เราจะเริ่มพิจารณาท่อนำคลื่นที่เป็นวัสดุแอนไอโซทรอปิกโดยพิจารณาตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบฝังในแผ่นฐาน (Saitoh and Koshiba, 2001) ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 ท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐาน (Embeded Waveguide)

แผ่นฐานสร้างจาก $LiNbO_3$ (LN) และแกนสร้างจากวัสดุ proton-exchanged $LiNbO_3$ (PE-LN) โดยแผ่นฐานมีค่าดัชนีหักเหแบบสามัญ n_o = 2.25 ค่าดัชนีหักเหแบบพิเศษ n_e เป็น 2.172 ในขณะที่แกนของท่อนำคลื่นแสงมีดัชหักเหแบบสามัญ n_o = 2.25 ค่าดัชนีหักเหแบบพิเศษเป็น 2.182 สภาพยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์สามารถเขียนได้ดังสมการ (4.30)

$$\varepsilon_{xx} = n_o^2 \tag{4.30a}$$

$$\varepsilon_{yy} = n_e^2 \cos^2(\theta_c) + n_o^2 \sin^2(\theta_c) \tag{4.30b}$$

$$\varepsilon_{zz} = n_o^2 \cos^2(\theta_c) + n_e^2 \sin^2(\theta_c) \tag{4.30c}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \left(n_o^2 - n_e^2\right)\cos(\theta_c)\sin(\theta_c) \tag{4.30d}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = 0 \tag{4.30e}$$

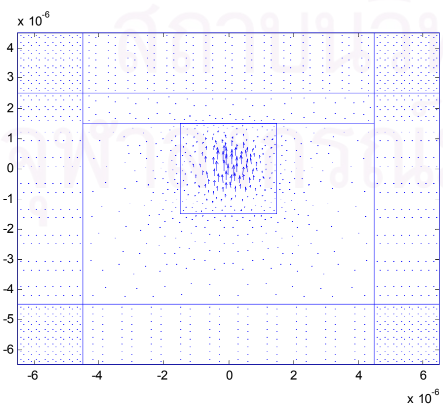
θ_c คือมุมระหว่างแกน crystalline c กับ แกน y ในที่นี้ใช้ค่า $\theta_c = 30^\circ$ ดังนั้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$[\varepsilon_{sub}] = \begin{bmatrix} 5.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8038313 & 0.1493530091 \\ 0 & 0.1493530091 & 4.976271 \end{bmatrix} \quad (4.31a)$$

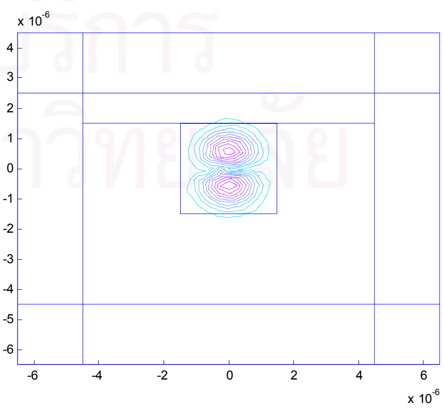
$$[\varepsilon_{core}] = \begin{bmatrix} 5.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 4.836468 & 0.130499636 \\ 0 & 0.130409636 & 4.987156 \end{bmatrix} \quad (4.31b)$$

ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบPML โดยมีความหนาของชั้นดูดซับเป็น $2\mu m$ ใช้อีลี-เมนต์สามเหลี่ยมขนาดสม่ำเสมอในชั้นดูดซับจำนวน 8 อีลีเมนต์ เลือกการลดทอนแบบคงที่ (ไม่แปรตามระยะทาง) เพื่อหลีกเลี่ยงการทำอินทิเกรตเชิงตัวเลข จากการคำนวณพบว่า ค่า PML พารามิเตอร์ s ที่ใช้ในการคำนวณในวัสดุไอโซทรอปิกคือ $s = 1 - j$ กับ $s = 1 - 8j$ ทำให้ระบบเกิดการลู่ออก ในที่นี้จึงนำพารามิเตอร์ที่เสนอโดย Mitchell et al., 1999 ในการคำนวณในโดเมนเวลามาแก้ไข คือ $s = 2 - j$ เมื่อนำมาคำนวณพบว่าทำให้ระบบมีเสถียรภาพ สังเกตได้ว่าการเลือกค่าของเงื่อนไขขอบเขตมีผลต่อเสถียรภาพของระบบเช่นกัน ดังนั้นการพิจารณาเสถียรภาพของระบบต้องนำพารามิเตอร์ในเงื่อนไขขอบเขตมาพิจารณาด้วย

ป้อนสนามไฟฟ้าอินพุตที่ E_x เป็นศูนย์ E_y มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนมีขนาดจุดเป็น 0.8 μm ค่าสนาม E_z อินพุตหาจาก E_y โดยใช้สมการแมกซ์เวลล์ ดังรูปที่ 4.10 เลือกดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 = 2.2113, เลือกระยะขั้นการคำนวณ $\Delta z = 1\mu m$, เลือกสัมประสิทธิ์นิวมาร์ก β = 2.25, γ = 2.5 เมื่อคำนวณเป็นระยะทาง 1000 μm ให้ผลการคำนวณดังรูปที่4.11

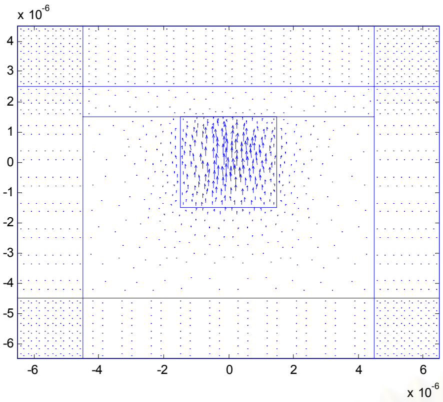


(ก) E_t

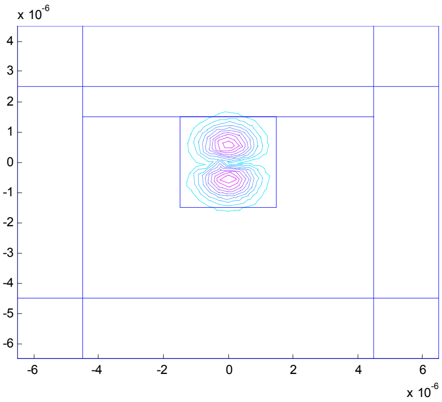


(ข) E_z

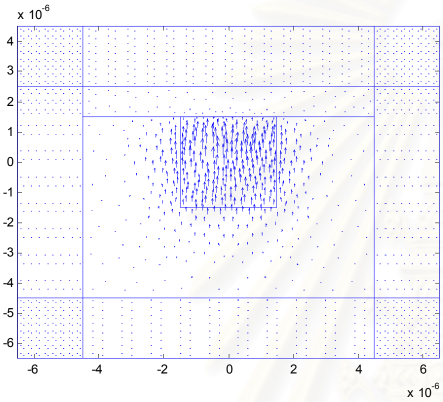
รูปที่ 4.10 สนามไฟฟ้าอินพุต (ก) สนามตามขวาง (ข) สนามตามแนวแกน



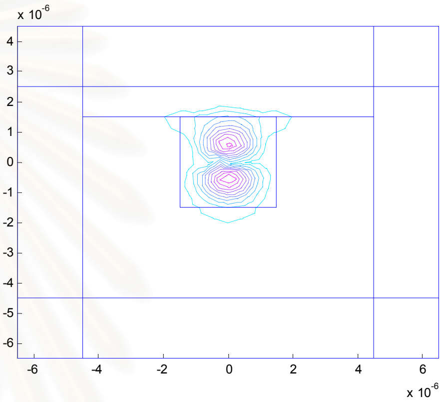
(ก) $E_t \;\; z = 10\mu m$



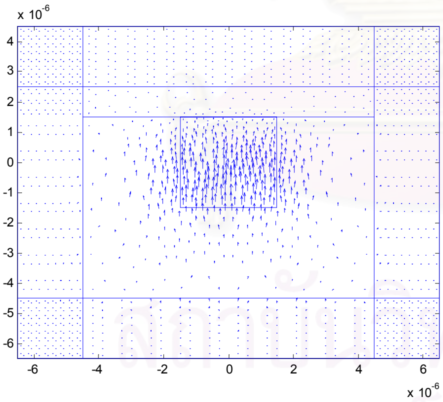
(ข) $E_z \;\; z = 10\mu m$



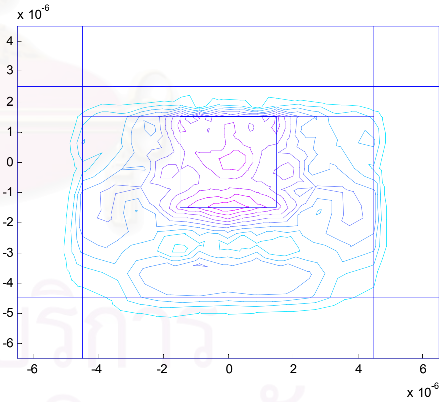
(ค) $E_t \;\; z = 20\mu m$



(ง) $E_z \;\; z = 20\mu m$

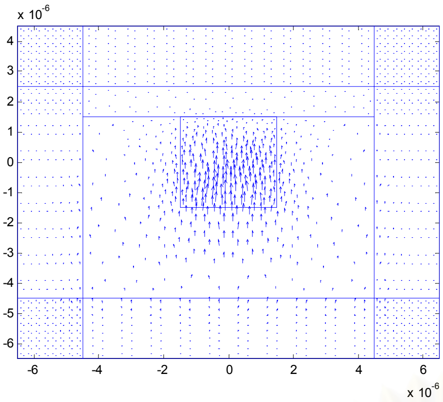


(จ) $E_t \;\; z = 40\mu m$

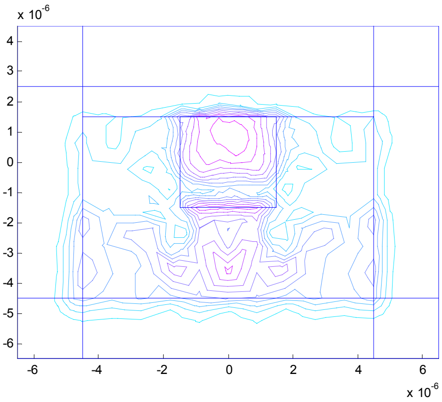


(ฉ) $E_z \;\; z = 40\mu m$

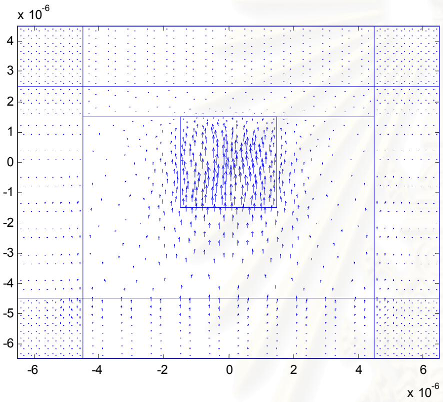
รูปที่ 4.11 (ก)-(ด) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐานโดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กในสมการแบบเวกเตอร์ที่ระยะทางต่างๆ



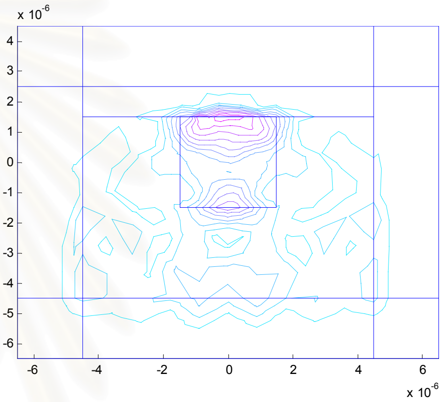
(ช) $E_t \;\; z = 80\mu m$



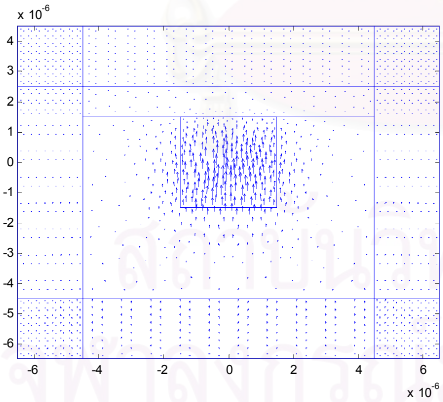
(ซ) $E_z \;\; z = 80\mu m$



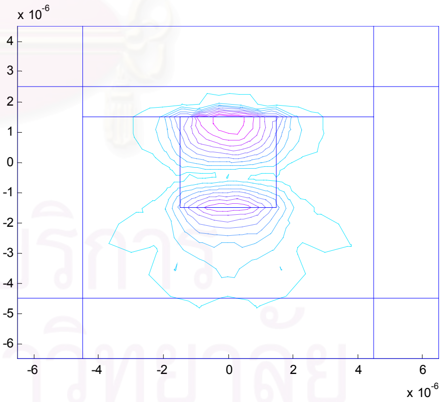
(ฌ) $E_t \;\; z = 100\mu m$



(ญ) $E_z \;\; z = 100\mu m$

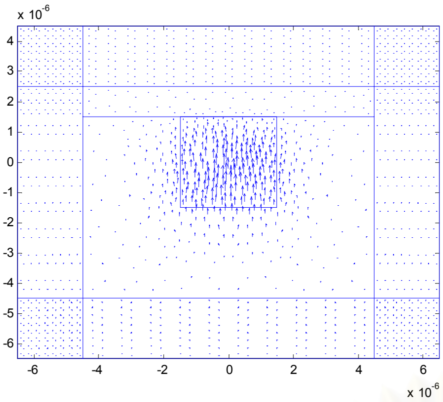


(ฎ) $E_t \;\; z = 200\mu m$

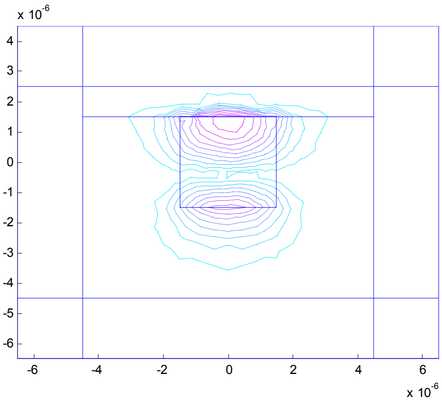


(ฏ) $E_z \;\; z = 200\mu m$

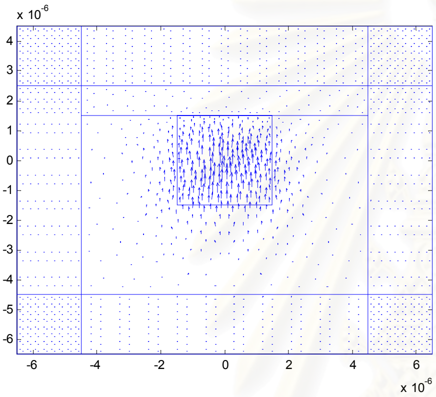
รูปที่ 4.11 (ก)-(ด) (ต่อ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐานโดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กในสมการแบบเวกเตอร์ที่ระยะทางต่างๆ



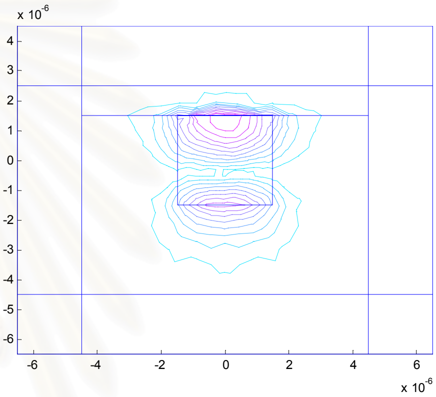
(ฑ) $E_t \quad z = 300\mu m$



(ฒ) $E_z \quad z = 300\mu m$

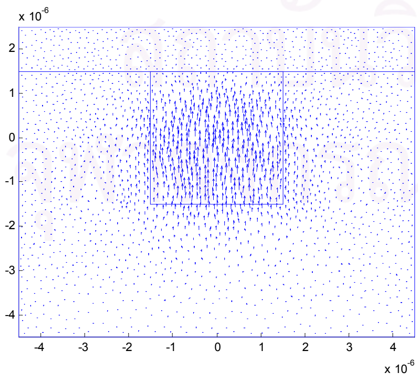


(ณ) $E_t \quad z = 1000\mu m$

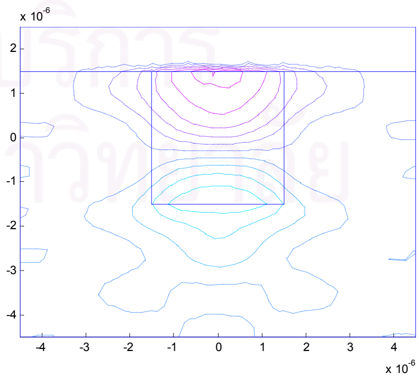


(ด) $E_z \quad z = 1000\mu m$

รูปที่ 4.11 (ก)-(ด) (ต่อ) สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐานโดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กในสมการแบบเวกเตอร์ที่ระยะทางต่างๆ



(ก) E_t



(ข) E_z

รูปที่ 4.12 สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐานโดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (ก) สนามตามขวาง (ข) สนามตามแนวแกน

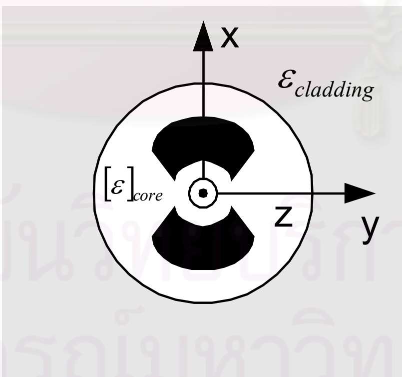
สนามไฟฟ้าที่ไม่ใช่โมดนำแผ่พลังงานออกไปดังรูป E_z ที่ระยะ40, 80 และ 100 μm โดยชั้นดูดซับทำการดูดซับคลื่นแสงไม่ให้เกิดการแพร่กระจายสะท้อนกลับ สนามค่อยๆแพร่กระจายจนอยู่ในรูปโมดนำ เช่นเดียวกับสนามโมดนำที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (สนามที่คำนวณได้ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีการกระเพื่อมเนื่องจากใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบนิวแมนที่ไม่ได้คิดผลการสะท้อนกลับที่ขอบหน้าต่าง) ค่าสนามที่ระยะทาง $1000\mu m$ ไม่เกิดการลู่ออกแสดงให้เห็นว่า อัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถคำนวณบนวัสดุแอนไอโซทรอปิกได้

4.4.4 ใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefrigence

ตัวอย่างต่อมาที่จะพิจารณาคือ ใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence (Pinheiro and Hernandez, 2000) ดังรูปที่ 4.13

วัสดุที่ใส่เข้าไปในใยแก้วนำแสงทำให้คุณสมบัติทางไฟฟ้าของใยแก้วนำแสงเปลี่ยนไปโดยทำให้กลายเป็นวัสดุแอนไอโซทรอปิก โดยค่าสภาพยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์ของแกนเป็นดังนี้

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}2.16 & 0 & 0\\ 0 & 2.162099384 & 0\\ 0 & 0 & 2.162099384\end{bmatrix} \tag{4.32}$$

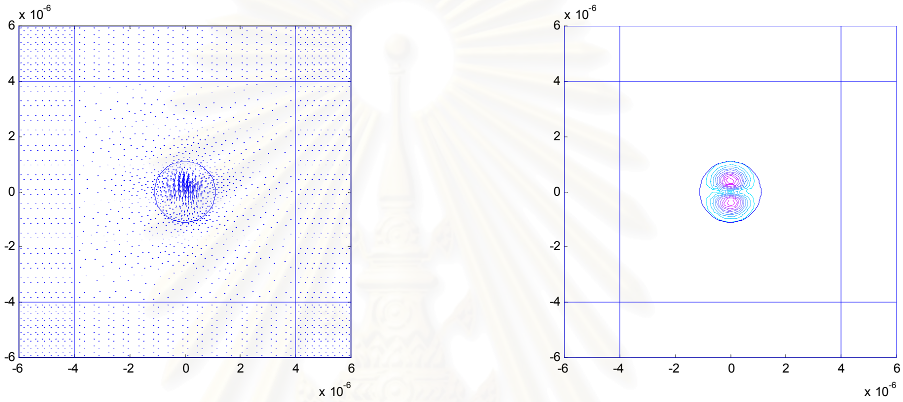


รูปที่ 4.13 ใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence

ในขณะที่สภาพยอมไฟฟ้าของเปลือก ε_1 เป็น 2.1257 รัศมีของแกนเป็น $1.1\mu m$ ใช้หน้าต่างการคำนวณเป็น $(8\mu m \times 8\mu m)$ ป้อนสนามแม่เหล็กอินพุต โดย H_x เป็นศูนย์ H_y มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนโดยมีขนาดจุดเป็น $0.55\mu m$ ค่า H_z หาค่าได้จาก H_y ด้วยสมการแมกซ์เวลล์ สนามอินพุตเป็นดังรูปที่4.14 ใช้ความยาวคลื่นแสง $\lambda = 0.829\mu m$, เลือกดัชนีหักเหอ้างอิง

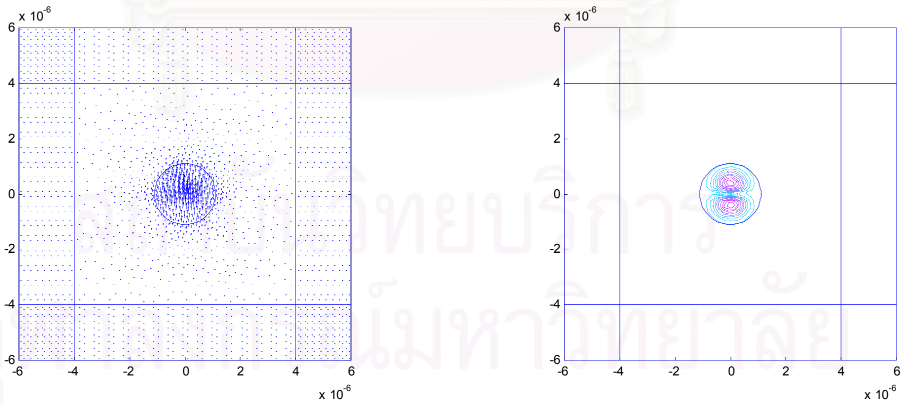
$n_0 =$ 1.458, เลือกระยะขั้นในการคำนวณ $\Delta z = 1\mu m$, สัมประสิทธิ์นิวมาร์ก β =2.25, γ =2.5 คำนวณเป็นระยะทาง $1000\mu m$

เงื่อนไขขอบเขตที่ใช้เป็นแบบPML จากการคำนวณพบว่าแม้วัสดุจะเป็นแบบแอนไอโซทรอปิกแต่เราพบว่าวัสดุที่ติดกับผนังดูดซับเป็นวัสดุไอโซทรอปิกดังนั้นถ้าเลือกค่าพารามิเตอร์ $s = 2 - j$ จะทำให้ระบบไม่เสถียรเกิดการลู่ออก ดังนั้นควรเลือกใช้ค่าพารามิเตอร์สำหรับวัสดุไอโซทรอปิกคือ $s = 1 - j$ หรือ $s = 1 - 8j$ ในที่นี้เลือกพารามิเตอร์ s เป็น $1 - j$ โดยความหนาของชั้นดูดซับเป็น $2\mu m$ ในชั้นดูดซับใช้อีลีเมนต์ที่มีรูปร่างสม่ำเสมอจำนวน 8 อีลีเมนต์



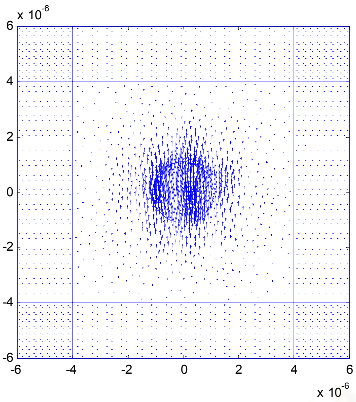
(ก) H_t (ข) H_z

รูปที่ 4.14 สนามแม่เหล็กอินพุต (ก) สนามแม่เหล็กตามขวาง (ข) สนามแม่เหล็กตามแนวแกน

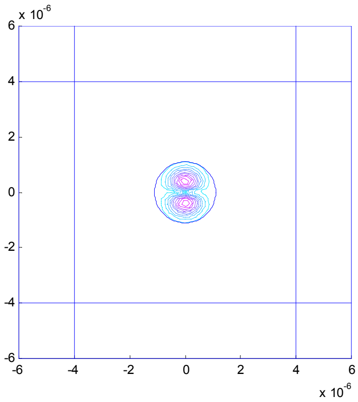


(ก) $H_t \;\; z = 4\mu m$ (ข) $H_z \;\; z = 4\mu m$

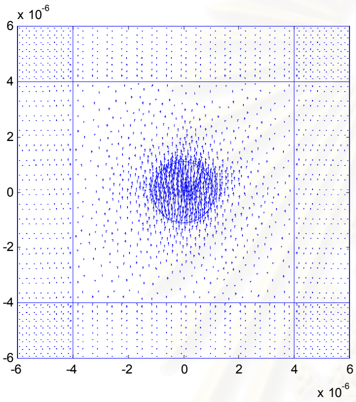
รูปที่ 4.15 (ก)-(ฎ) สนามแม่เหล็กในใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence โดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กในสมการเวกเตอร์ที่ระยะทางต่างๆ



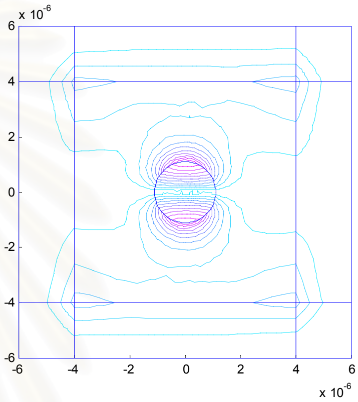
(ค) $H_t \quad z = 10\mu m$



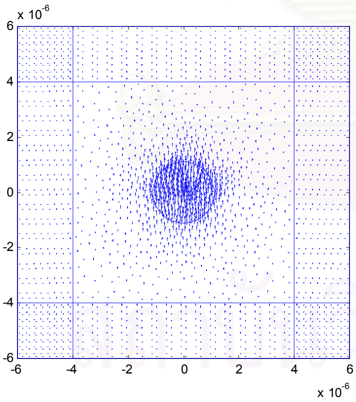
(ง) $H_z \quad z = 10\mu m$



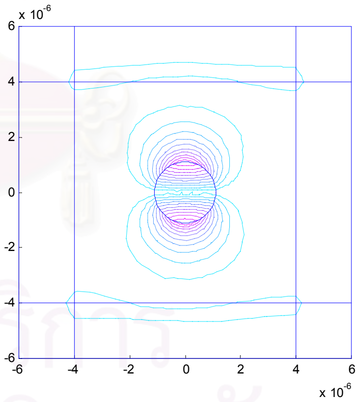
(จ) $H_t \quad z = 40\mu m$



(ฉ) $H_z \quad z = 40\mu m$

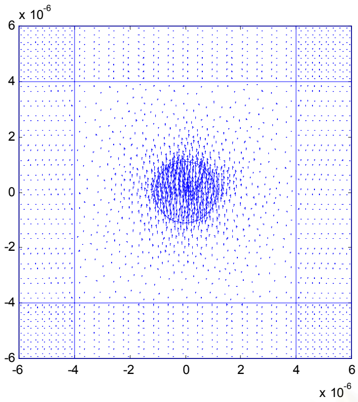


(ช) $H_t \; z = 60\mu m$

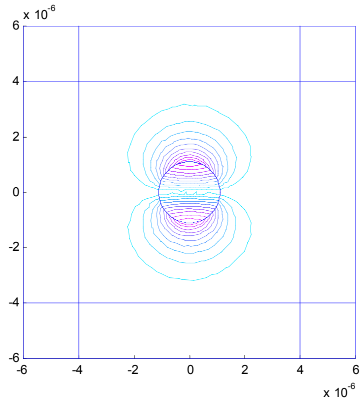


(ซ) $H_z \; z = 60\mu m$

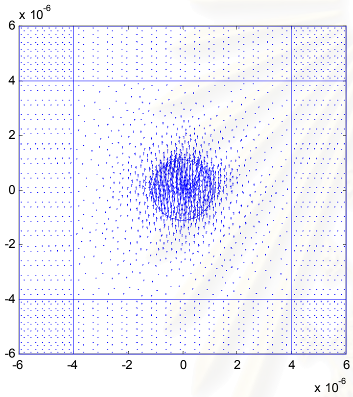
รูปที่4.15 (ก)-(ฎ) (ต่อ) สนามแม่เหล็กในใยแก้วนำแสงแบบ stress birefringence โดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กในสมการเวกเตอร์ที่ระยะทางต่างๆ



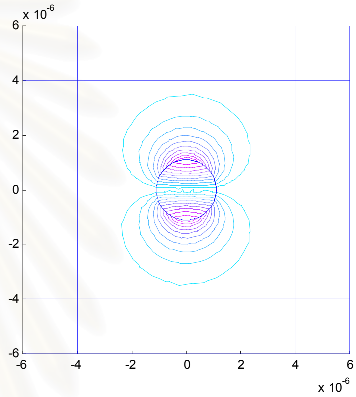
(ฌ) H_t $z = 80\mu m$



(ญ) H_z $z = 80\mu m$

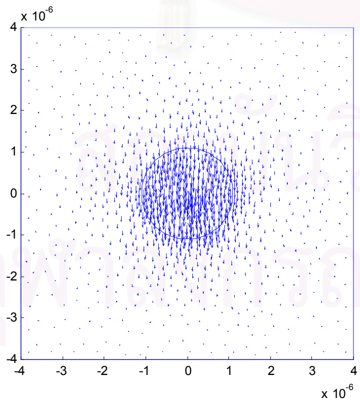


(ฎ) H_t $z = 1000\mu m$

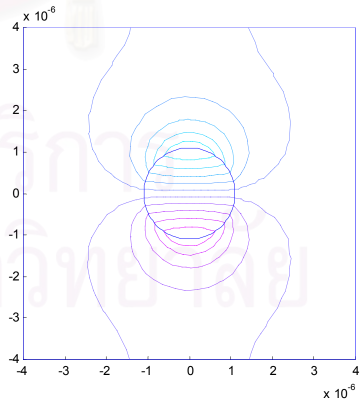


(ฏ) H_z $z = 1000\mu m$

รูปที่ 4.15 (ก)-(ฏ) (ต่อ) สนามแม่เหล็กในใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence โดยคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กในสมการเวกเตอร์ที่ระยะทางต่างๆ



(ก) H_t



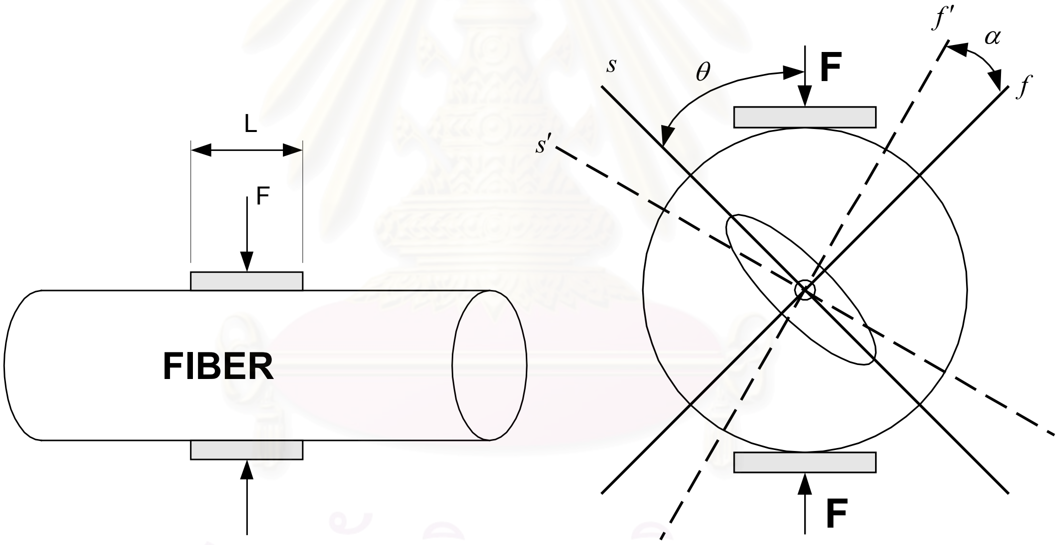
(ข) H_z

รูปที่ 4.16 สนามแม่เหล็กในใยแก้วนำแสงแบบstress-birefringence ที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (ก) สนามตามขวาง (ข) สนามตามแนวแกน

สนามแม่เหล็กที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันอัลกอริทึมนิวมาร์กแสดงดังรูปที่ 4.15 การคำนวณพบว่าสนามแม่เหล็กตามขวางลู่เข้าสู่โมดนำได้เร็วกว่าสนามแม่เหล็กตามยาว นอกจากนั้นเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLสามารถดูดกลืนสนามได้ดีป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นได้ดี คำตอบของสนามที่ระยะ$1000\mu m$ มีรูปร่างใกล้เคียงกับโมดนำในรูปที่ 4.16 ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (สาเหตุที่รูปทั้งสองต่างกันเล็กน้อยมาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ต่างกัน) คำตอบที่ได้มีเสถียรภาพไม่เกิดคำตอบที่ลู่ออก แสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถคำนวณสนามแม่เหล็กได้เช่นเดียวกัน

4.4.5 ใยแก้วนำแสงแบบ stress birefringence ที่ได้รับแรงกดจากภายนอก

ตัวอย่างต่อมาจะทำการวิเคราะห์ใยแก้วนำแสงแบบ stress birefringence ดังรูปที่ 4.17 (Pinheiro, Barbero, and Hernandez, 2000) ซึ่งทำให้ค่ายอมไฟฟ้าสัมพัทธ์มีสมาชิกนอกแนวทแยงมุม



รูปที่ 4.17 ใยแก้วนำแสงแบบ stress birefringence โดยได้รับแรงกดจากภายนอก F ทำมุมกับแกน slowเป็นมุมθ ทำให้เกิดการรบกวนของแกน slow และแกน fast ทำให้เคลื่อนไปเป็นมุมα

เมื่อมีแรง F เป็นแรงกดจากภายนอกทำให้เกิด birefringence ภายนอกส่งผลให้แกนแสงเคลื่อนออกไปเป็นมุมα โดยมีความสัมพันธ์ตามสมการ (4.33)

$$\tan(2\alpha)=\frac{k\sin(2\theta)}{1-k\cos(2\theta)} \tag{4.33}$$

โดยที่ $k = B_{ext} / B_{\text{int}}$ B_{ext} คือ birefringence จากภายนอก และ B_{int} คือ birefringence จากภายใน โดยมีสูตรคือ $B_{\text{int}} = \beta_s - \beta_f$

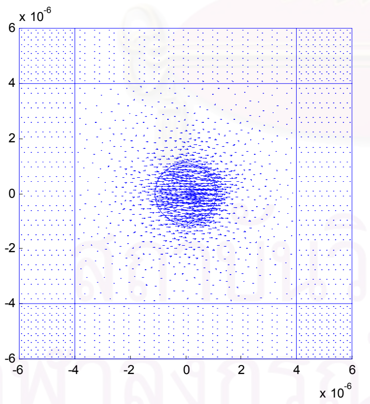
β_s คือค่าคงที่การแพร่กระจายของ slow polarization mode และ β_f คือ ค่าคงที่การแพร่กระจายของ fast polarization mode ในตัวอย่างนี้เราใช้ค่า $k = 0.17$ ใช้ความยาวคลื่น $\lambda = 0.829 \mu m$ โดยดัชนีหักเหของแกนเป็น $\varepsilon_{xx}^0 = 2.16$, $\varepsilon_{yy}^0 = \varepsilon_{zz}^0 = 2.162099384$, ค่าดัชนีหักเหของเปลือกเท่ากับ $\varepsilon_c = 2.1257$, ใช้ระยะขั้นในการคำนวณเท่ากับ $\Delta z = 1 \mu m$, ใช้มุมการให้แรงกดกับแกนslow $\theta = 40^\circ$ โดยใช้สูตรการคำนวณหาค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ดังสมการ (4.34)

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 \cos^2 \alpha + \varepsilon_{yy}^0 \sin^2 \alpha \qquad (4.34a)$$

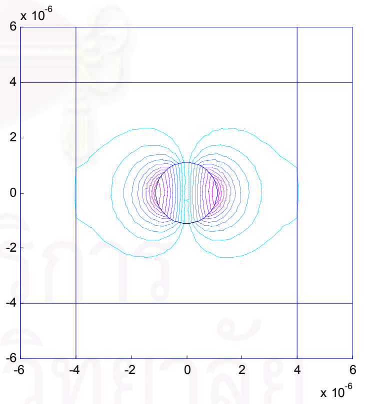
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx}^0 \cos^2 \alpha + \varepsilon_{yy}^0 \cos^2 \alpha \qquad (4.34b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^0, \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \left(\varepsilon_{xx}^0 - \varepsilon_{yy}^0\right) \sin \alpha \cos \alpha \qquad (4.34c)$$

ใช้ค่าดัชนีหักเหอ้างอิง n_0 เป็น1.458, ใช้ค่าพารามิเตอร์นิวมาร์กเป็น $\beta = 2.25$ $\gamma = 2.5$ ใช้ชั้นดูดซับแบบคงที่ $s = 1 - j$, ความหนาของชั้นดูดซับเป็น $2 \mu m$, ในชั้นดูดซับใช้อีลีเมนต์สม่ำเสมอจำนวน 8 อีลีเมนต์ป้อนสนามอินพุตด้วย HE_{11}^x โมดดังรูปที่ 4.18

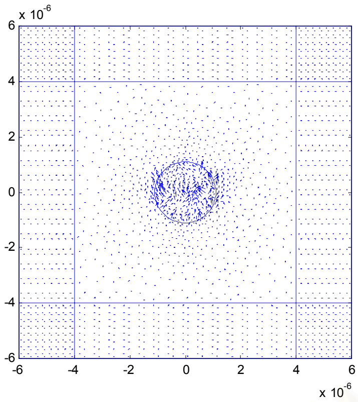


(ก) H_t

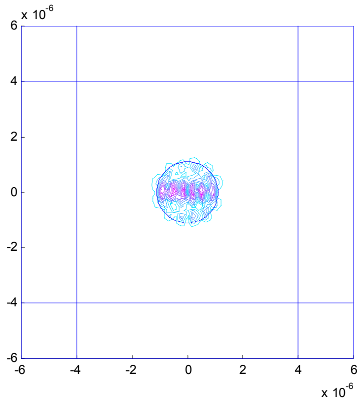


(ข) H_z

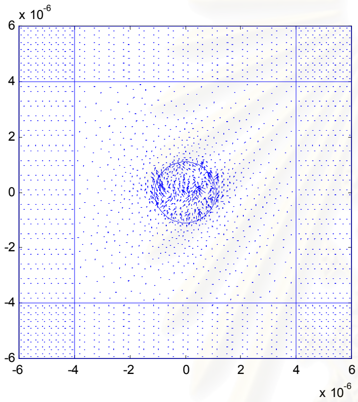
รูปที่ 4.18 สนามอินพุต HE_{11}^x (ก) สนามแม่เหล็กตามขวาง (ข) สนามแม่เหล็กตามยาว



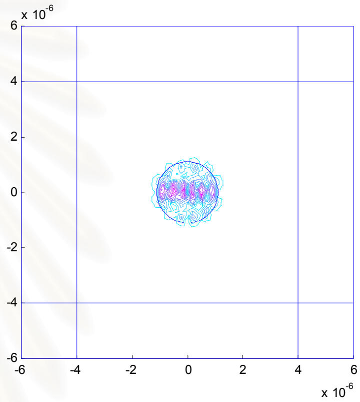
(ก) $H_t\,250\mu m$



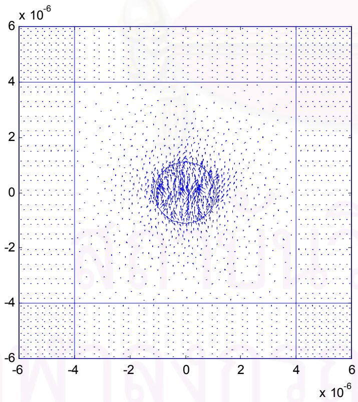
(ข) $H_z\,250\mu m$



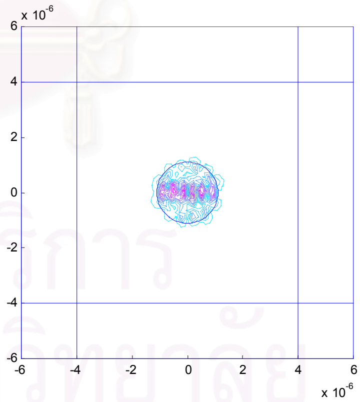
(ค) $H_t\,500\mu m$



(ง) $H_z\,500\mu m$

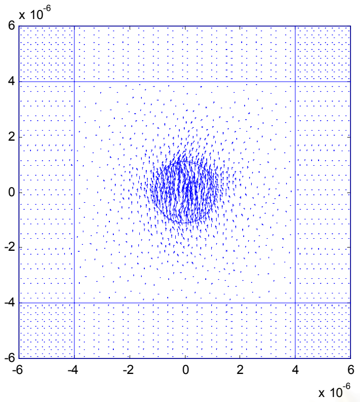


(จ) $H_t\,1000\mu m$

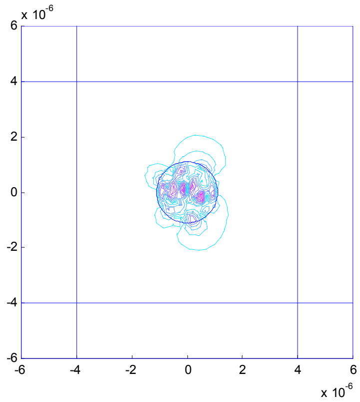


(ฉ) $H_z\,1000\mu m$

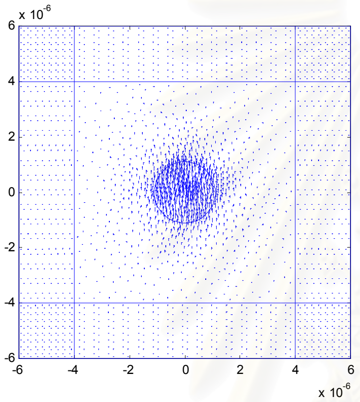
รูปที่ 4.19 สนามแม่เหล็กในใยแก้วนำแสงแบบ stress birefringence ที่โดนแรงบีบจากภายนอกในระยะทางต่างๆ



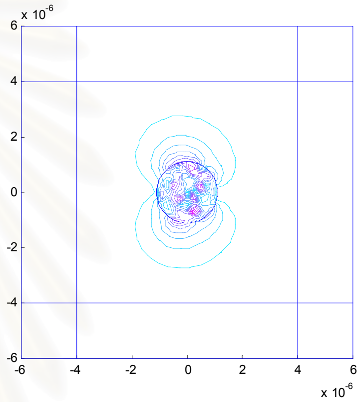
(ช) H_t $1500\mu m$



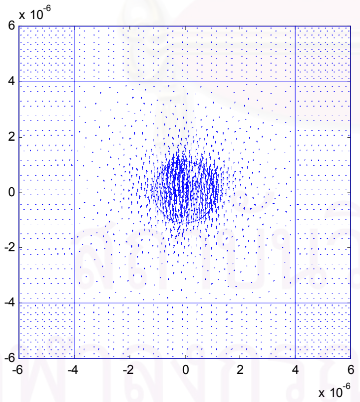
(ซ) H_z $1500\mu m$



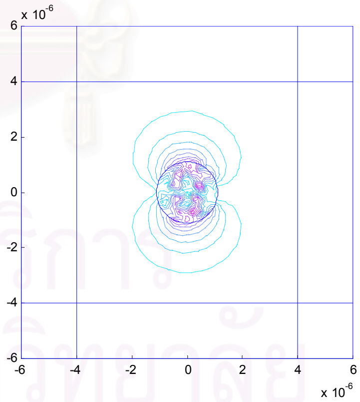
(ฌ) H_t $1750\mu m$



(ญ) H_z $1750\mu m$



(ฎ) H_t $2000\mu m$



(ฏ) H_z $2000\mu m$

รูปที่ 4.19 (ต่อ) สนามแม่เหล็กในใยแก้วนำแสงแบบ stress birefringence ที่โดนแรงบีบจากภายนอกในระยะทางต่างๆ

สนามแม่เหล็กที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันและอัลกอริทึมนิวมาร์กแสดงดังรูปที่ 4.19 การคำนวณพบว่าสนามแม่เหล็กตามขวางเปลี่ยนแปลงจากโมด HE_{11}^{x} ไปเป็นโมด HE_{11}^{y} ได้ที่ระยะทางประมาณ $2000\mu m$ แสดงให้เห็นว่าวิธีนิวมาร์กสามารถนำมาใช้กับวัสดุแอนไอโซทรอปิกที่มีสมาชิกนอกแนวทแยงมุมได้ (off-diagonal) นอกจากนั้นเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLสามารถดูดกลืนสนามได้ดีและป้องกันการสะท้อนกลับของคลื่นได้ดี คำตอบที่ได้มีเสถียรภาพไม่เกิดคำตอบที่ลู่ออก แสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กและเงื่อนไขขอบเขตที่เลือกมามีค่าเหมาะสม

4.5 สรุป

ในบทนี้นำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันอัลกอริทึมนิวมาร์กมาคำนวณในสมการแบบเวกเตอร์โดยใช้ฟังก์ชันแบบอีลีเมนต์ขอบเป็นฟังก์ชันฐานของสนามตามขวางและใช้ฟังก์ชันแบบอีลีเมนต์โนดเป็นฟังก์ชันฐานของสนามตามแนวแกน สูตรที่ใช้ในการคำนวณคือแบบกาเลอคิน การคำนวณได้ทำการทดลองและหาเงื่อนไขของเสถียรภาพของอัลกอริทึมนิวมาร์กโดยการปรับแต่งค่า $\beta,\gamma,\Delta z,n_0,k_0$ เพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพ ค่าพารามิเตอร์นิวมาร์กที่เลือกใช้ในสมการแบบเวกเตอร์คือ $\gamma = 2.5$ และ $\beta = 2.25$ ซึ่งทำให้การคำนวณเสถียรไม่มีการลู่ออก เงื่อน-ไขขอบเขตที่ใช้ในการป้องกันคลื่นสะท้อนกลับคือ เงื่อนไขขอบเขตแบบPMLโดยเลือกค่า พารามิเตอร์ s ให้มีค่าคงที่ไม่แปรตามทิศทางเพื่อหลีกเลี่ยงการทำอินทิเกรตเชิงตัวเลข นอกจากนั้นทำการพิจารณาค่าพารามิเตอร์ s ที่เหมาะสมกับชนิดของวัสดุโดยไม่ทำให้คำตอบเกิดการลู่ออก ในบทนี้เราเลือกค่า $s = 1 - j$ หรือ $s = 1 - 8j$ มาใช้งานในกรณีท่อนำคลื่นแสงที่มีดัชนีหักเหที่ติดกับผนังชั้นดูดซับเป็นแบบไอโซทรอปิก ในขณะที่เลือก $s = 2 - j$ ในกรณีที่ดัชนีหักเหที่ติดกับผนังดูดซับเป็นวัสดุแบบแอนไอโซทรอปิก ตัวอย่างที่นำมาวิเคราะห์ คือ ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ, ท่อนำคลื่นแสงแบบริบรูปตัววาย, ท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในซับเสตท, ใยแก้วนำแสงแบบstress-birefringence และใยแก้วนำแสงแบบ stress-birefringence ที่ได้รับแรงกดจากภายนอก ผลการคำนวณพบว่าเมื่อเลือกค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมและใช้เงื่อนไขขอบที่เหมาะกับชนิดของวัสดุอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถให้ผลการคำนวณที่ดีและมีเสถียรภาพ ทั้งคำนวณแบบสนามไฟฟ้าหรือคำนวณแบบสนามแม่เหล็กนอกจากนั้นยังสามารถใช้งานในสมการเวกเตอร์ในวัสดุแบบไอโซ-ทรอปิกและแอนไอโซทรอปิกอีกด้วย

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์นี้นำอัลกอริทึมนิวมาร์กที่ใช้ในงานไฟไนต์อีลีเมนต์โดเมนเวลามาแก้ไขปัญหาในวิธีบีมพรอพาเกชันแทนวิธีปาเดในแบบเดิม จากผลการคำนวณสามารถสรุปได้ว่าอัลกอริทึมนิวมาร์กสามารถใช้งานได้ในท่อนำคลื่นแสง 2 และ 3 มิติ ทั้งในรูปสมการสเกลาร์และสมการเวกเตอร์ และในวัสดุแอนไอโซทรอปิก รวมทั้งในเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส และ เงื่อนไข-ขอบเขตแบบPML

เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณระหว่างวิธีปาเดและนิวมาร์กพบว่าวิธีการปาเดให้ผลการคำนวณที่ละเอียดแม่นยำกว่าเล็กน้อยอันมีสาเหตุมาจากวิธีปาเดเป็นการประมาณแบบเศษส่วน ในขณะที่วิธีนิวมาร์กเป็นการประมาณแบบโพลีโนเมียล เราพบว่าการประมาณแบบเศษส่วนจะให้ผลการประมาณที่ดีกว่าการประมาณแบบโพลีโนเมียล อย่างไรก็ตามวิธีนิวมาร์กอยู่ในรูปสมการที่ง่ายกว่าวิธีปาเด อีกทั้งมีพารามิเตอร์ในการปรับค่าถึง 2 ตัว คือ β และ γ ทำให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดีกว่า สามารถปรับแต่งได้ง่ายทำให้ในบางกรณีสามารถป้องกันการลู่ออกของคำตอบได้ในขณะที่วิธีปาเดไม่สามารถป้องกันได้ และในบางกรณีสมการในวิธีปาเดไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปง่ายได้

เงื่อนไขขอบเขตที่นำมาใช้ในงานวิทยานิพนธ์นี้มี 2 แบบ คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส และ เงื่อนไขขอบเขตแบบPML จากผลการคำนวณพบว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบPML สามารถดูดกลืนคลื่นได้ดีกว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส โดยเฉพาะในกรณีที่มุมตกกระทบของคลื่นมีค่ากว้างมากๆ อย่างไรก็ตามเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLมีความยุ่งยากในการเลือกค่าพารามิเตอร์มากกว่า โดยต้องคำนึงถึงพารามิเตอร์มากมายเช่น ทิศทางในการดูดซับ, ชนิดของวัสดุ, ความหนาของชั้นดูดซับ, ฟังก์ชันการลดทอน, จำนวนอีลีเมนต์ในชั้นดูดซับ, สัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎี เป็นต้น นอกจากนั้นยังต้องสร้างชั้นดูดซับที่มีความหนาพอสมควรและมีอีลีเมนต์ในชั้นดูดซับพอสมควรถึงจะดูดซับคลื่นตกกระทบได้ จึงทำให้ต้องเพิ่มจำนวนโนดมากขึ้นทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำมากขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งในสมการเวกเตอร์บีมพรอพาเกชัน

สำหรับการวิเคราะห์สมการเวกเตอร์บีมพรอพาเกชันในวัสดุแอนไอโซทรอปิกโดยใช้การประมาณในสมการ (4.11) ทำให้ค่าของ $p_{zx}, p_{zy}, p_{xz}, p_{yz}, q_{xz}, q_{yz}, q_{zx}, q_{zy}$ ไม่ถูกนำมาใช้

ในการคำนวณ เนื่องจากการพิจารณาสมการที่ใช้ค่า p และ q เต็มทุกเทอมพบว่าให้คำตอบที่ลู่ออกอย่างไรก็ตามค่า p และ q ในเทอมที่ละเลยนี้มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับสมาชิกในแนวทแยงมุมดังนั้นจึงสามารถละเลยได้

เสถียรภาพของระบบเป็นปัญหาที่สำคัญในการคำนวณด้วยวิธีบีมพรอพาเกชันโดยใช้การพิจารณาตามบทที่ 4 โดยต้องเลือกค่า $\beta, \gamma, \Delta z, k_0$ และ n_0 ให้เหมาะสมโดยต้องอาศัยการสังเกตและประสบการณ์ในการวิเคราะห์ในการปรับแต่งค่า

จากเงื่อนไขขอบเขตแบบPMLที่กล่าวในเบื้องต้นพบว่าต้องใส่ชั้นดูดซับเพื่อดูดกลืนคลื่นแสงและในชั้นดูดซับต้องมีจำนวนอีลีเมนต์มากพอสมควร ทำให้เพิ่มจำนวนโนดในการคำนวณเพิ่มขึ้น จากตัวอย่างการคำนวณสมการเวกเตอร์ในท่อนำคลื่นแสงหลิบรูปตัววายมีโนดที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมด 7629 โนดนั่นหมายความว่าต้องการหน่วยความจำในการเก็บข้อมูลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนในเมทริกซ์ 7629×7629 ทั้งหมด 931 Mb โดยการคำนวณต้องการทั้งหมด 10 เมทริกซ์ดังนั้นต้องใช้หน่วยความจำทั้งหมด 10 Gb ซึ่งไม่สามารถหาหน่วยความจำในการคำนวณขนาดนี้ได้ แต่เราพบว่าเมทริกซ์ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร้อยละ 99.84 เป็นศูนย์ ถ้าเราใช้หลักการสปาร์ตเมทริกซ์ คือเก็บเฉพาะค่าที่ไม่ใช่ศูนย์จะลดความต้องการหน่วยความจำเหลือเพียง 1.5 Gb เท่านั้น ซึ่งประหยัดหน่วยความจำและช่วยลดเวลาในการคำนวณลง ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำหลักการสปาร์สเมทริกซ์ (sparse matrix) มาใช้

ข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้การคำนวณท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิก(ที่มีการประมาณเทอมเข้ามาช่วย) ในงานวิจัยต่อไปสามารถทำการวิจัยท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิกแบบทั่วไป นอกจากนั้นอาจขยายงานวิจัยไปที่วัสดุที่มีความสูญเสีย, วัสดุไม่เป็นเชิงเส้น, วัสดุที่แปรตามความถี่, วัสดุไบแอนไอโซทรอปิก เป็นต้น

นอกจากที่กล่าวมา งานวิจัยที่น่าสนใจคือการพิจารณาเงื่อนไขขอบแบบโปร่งใสในสมการแบบเวกเตอร์ โดยถึงแม้ว่าเงื่อนไขขอบแบบโปร่งใสจะไม่สามารถดูดกลืนคลื่นที่มีมุมตกกระทบกว้าง แต่เงื่อนไขขอบเขตไม่ต้องมีการปรับแต่งพารามิเตอร์การคำนวณ, ไม่ขึ้นกับชนิดของวัสดุการคำนวณ และไม่ต้องเพิ่มจำนวนตัวแปรในการคำนวณ ทำให้ประหยัดหน่วยความจำและเวลาการคำนวณ

นอกจากนั้นงานในวิทยานิพนธ์นี้ยังไม่ให้ความสำคัญกับการปรับค่า (adaptive) โดยอาจนำการปรับค่าในทุกๆขั้นการแพร่กระจายมาพิจารณา ยกตัวอย่างการปรับแต่งรูปร่างอีลีเมนต์, การปรับแต่งระยะขั้นการคำนวณ การปรับแต่งค่าดัชนีหักเหอ้างอิง เป็นต้น

รายการอ้างอิง

Arai, Y., Maruta, A., and Matsuhara, M. Transparent boundary for the finite-element beam-propagation method. Optics Letters 18, 10 (May 1993): 765-766.

Berenger, J.P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. Journal of Computational Physics 114, 2 (October 1994): 185-200.

Berenger, J.P. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. Journal of Computational Physics 127 (1996): 363-379.

Chew, W.C., and Weedon, W.H. A 3d perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates. Microwave and Optical Technology Letters 7, 13 (September 1994): 599-604.

Chung, Y., and Dagli, N. An assessment of finite difference beam propagation method. IEEE Journal of Quantum Electronics 26, 8 (August 1990): 1335-1339.

Cucinotta, A., Pelosi, G., Selleri, S., Vincetti, L. and Zoboli, M. Perfectly matched anisotropic layers for optical waveguide analysis throught the finite-element beam-propagation method. Microwave and Optical Technology Letters 23, 2 (October 1999): 67-69.

Erdmann, A., and Hertel, P. Beam-propagation in magnetooptic waveguides. IEEE Journal of Quantum Electronics 31, 8 (August 1995): 1510-1516.

Fang, J., and Wu, Z. Generalized perfectly matched layer an extension of berenger's perfectly matched layer boundary condition. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 5, 12 (December 1995): 451-453.

Fang, J., and Wu, Z. Generalized perfectly matched layer for the absorption of propagating and evanescent waves in lossless and lossy media. IEEE Transactions on Microwave Theory and Technique 44, 12 (December 1996): 2216-2222.

Feit, M.D., and Fleck, J.A.Jr. Light propagation in graded-index optical fibers. Applied Optics 17, 24 (December 1978): 3990-3998.

Garcia, S.G., Perez, I.V., Martin, R.G., and Olmendo, B.G. Applicability of the pml absorbing boundary condition to dielectric anisotropic Media. Electronic Letters 32, 14 (July 1996): 1270-1271.

Gedney, S.D., An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of fdtd lattices. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 44, 12 (December 1996): 1630-1639.

Hadley, G.R. Transparent boundary condition for beam propagation. Optics Letters 16, 9 (May 1991): 824-826.

Hadley, G.R. Wide-angle beam propagation using pade' approximant operators. Optics Letters 17, 20 (October 1992): 1426-1428.

Hernandez-Figueroa, H.E. Nonlinear nonparaxial beam-propagation method. Electronic Letters 30, 4 (February 1994): 352-353.

Hernandez-Figueroa, H.E. Simple nonparaxial beam-propagation method for integrated optics. Journal of Lightwave Technology 12, 4 (April 1994): 644-649.

Huang, W.P., Xu, C.L., and Yokoyama, K. The perfectly matched layer (pml) boundary condition for the beam propagation method. IEEE Photonics Technology Letters 8, 5 (May 1996): 649-651.

Katz, D.Z., Thiele, E.T., and Taflove, A. Validation and extension to three dimensions of the berenger pml absorbing boundary condition for fd-td meshes. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 4, 8 (August 1994): 268-270.

Koch, T.B., Davies, J.B., and Wickramasinghe, D. Finite element / finite difference propagation algorithm for integrated optical device. Electronics Letters 25, 8 (April 1989): 514-516.

Koshiba, M., Hayata, K., and Suzuki, M. Approximate scalar finite-element analysis of anisotropic optical waveguides with off-diagonal elements in a permittivity tensor. Transactions on Microwave Theory and Techniques 32, 6 (June 1984): 587-593.

Koshiba, M., Saitoh, H., Eguchi, M., and Hirayama, K. Simple scalar finite element approach to optical rib waveguides. Journal of IEEE Proceeding 139, 2 (April 1992): 166-171.

Koshiba, M., Maruyama, S., and Hirayama, K. A vector finite element method with the high order mixed-interpolation-type triangular elements for optical waveguiding problems. Journal of Lightwave Technology 12, 3 (March 1994): 495-502.

Koshiba, M., and Tsuji, Y. A wide-angle finite element beam propagation method. IEEE Photonics Technology Letters 8, 9 (September 1996): 1208-1210.

Koshiba, M., Tsuji, Y., and Hikari, M. Finite element beam propagation method with perfectly matched layer boundary conditions. IEEE Transactions on Magnetics 35, 3 (May 1999): 1482-1485.

Lee, J.F., Lee, R., and Cangellaris, A. Time-domain finite-element methods. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 45, 3 (March 1997): 430-442.

Maruta, A., Arai, Y., and Matsuhara, M. Transparent boundary for finite element beam-propagation method. Transactions of IEICE J77-C-I (Febuary 1994): 35-40. cited in Tsuji, Y., Koshiba, M., and Shiraishi, T. Finite element beam propagation method for three-dimensional optical waveguide structures. Journal of Lightwave Technology 15, 9 (September 1997): 1728-1734.

Mitchell, A., Aberle, J.T., Kokotoff, D.M., and Austin, M.W. An anisotropic pml for use with biaxial media. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques 47, 3 (March 1999): 374-377.

Mitomi, O., and Kasaya, K. Wide-angle finite-element beam propagation method using pade' approximation. Electronics Letters 33, 17 (August 1997): 1461-1462.

Mitomi, O., and Kasaya, K. An improved semivectorial beam propagation method using a finite-element scheme. IEEE Photonics Technology Letters 10, 12 (December 1998): 1754-1756.

Mitomi, O., et al. analyzing the polarization dependence in optical spot-size converter by using a semivectorial finite-element beam propagation method. Journal of Lightwave Technology 17, 7 (July 1999): 1255-1262.

Montanari, E., Selleri, S., Vincetti, L., and Zoboli, M. Finite-element full-vectorial propagation analysis for three-dimensional z-varying optical waveguides. Journal of Lightwave Technology 16, 4. (April 1998): 703-714.

Nishihara, H., Haruna, M., and Suhara, T. Optical integrated circuits. New York:

McGraw-Hill, 1985.

Navsariwala, U., and Gedney S.D. An implicit finite element time domain method with unconditional stability [CD-ROM]. Abstract from: IEEE File:0-7803-2719-5/95/$4.00©1995IEEE.

Nolting, H.P., and Marz, R. Results of benchmark tests for different numerical bpm algorithms. Journal of Lightwave Technology 13, 2 (February 1995): 216-224.

Niiyama, A., and Koshiba, M. Three-dimensional beam propagation analysis of nonlinear optical fibers and optical logic gates. Journal of Lightwave Technology 16, 1 (January 1998): 162-168.

Obayya, S.S.A., Rahman, B.M.A., and El, Mikati, H.A. New full-vectorial numerically efficient propagation algorithm based on the finite element method. Journal Lightwave Technology 18, 3 (March 2000): 409-415.

Pekel, U., and Mittra, R. An application of the perfectly matched layer (pml) concept to the finite element method frequency domain analysis of scattering problems. IEEE Microwave And Guided Wave Letters 5, 8 (August 1995): 258-260.

Perez, I.V., Garcia, S.G., Martin, R.G., and Olmedo, B.G. Extension of berenger's absorbing boundary conditions to match dielectric anisotropic media. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 7, 9 (September 1997): 302-304.

Pinheiro, H.F., and Hernandez-Figueroa, H.E. Novel finite-element formulation for vectorial beam propagation analysis in anisotropic medium. IEEE Photonics Technology Letters 12, 2 (February 2000): 155-157.

Pinheiro, H.F., Barbero, A.P.L., and Hernandez-Figueros, H.E. Full-vectorial fe-bpm approach for the analysis of anisotropic mwdium with off-diagonal permittivity terms. Microwave and Optical Technology Letters 25, 1(April 2000): 12-14.

Polycarpou, A.C., Lyons, M.R. and Balanis, C.A. A two-dimensional finite element formulation of the perfectly matched layer. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 6, 9 (September 1996): 338-340.

Ralson, A. A First course in numerical analysis. Tokyo: McGrawhill, 1965.

Rappaport, C.M. Perfectly matched absorbing boundary conditions based on anisotropic lossy mapping of space. IEEEE Microwave and Guided Wave Letters 5, 3 (March 1995): 90-92.

Sacks, Z.C., Kingsland, D.M., Lee, R., and Lee, J.F. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 43, 12 (December 1995): 1460-1463.

Saitoh, K., Koshiba, M., and Tsyji, Y. Numerical analysis of integrated acoustooptic tunable filters with weighted coupling. Journal of Lightwave Technology 17, 2 (February 1999): 249-254.

Saitoh, K., Koshiba, M., and Tsuiji, Y. Stress analysis method considering piezoelectric effects and its application to static strain optic devices. Journal of Lightwave Techonlolgy 17, 9 (September 1999): 1626-1633.

Saitoh, K., and Koshiba, M. Full-vectorial finite element beam propagation method with perfectly matched layers for anisotropic optical waveguides. Journal of Lightwave Technology 19, 3 (March 2001): 405-413.

Saitoh, K., and Koshiba, M. Approximation scalar finite-element beam-propagation method with perfectly matched layers for anisotropic optical waveguides. Journal of Lightwave Technology 19, 5 (May 2001): 786-792.

Schmidt, F. An adaptive approach to the numerical solution of fresnel's wave equation. Journal of Lightwave Technology 11, 9. (September 1993): 1425-1434.

Schulz, D., Glingener, C., Bludszuweit, M., and Voges, E. Mixed finite element beam propagation method. Journal of Lightwave Technology 16, 7 (July 1998): 1336-1342.

Selleri, S., Vincetti, L., and Zoboli, M. Full-vector finite-element beam propagation method for anisotropic optical device analysis. IEEE Journal on Quantum Electronics 36, 12 (December 2000): 1392-1401.

Tamir, T., ed. Guided-Wave Optoelectronics. 2 nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

Teixeira, F.L., and Chew, W.C. A general approach to extend berenger's absorbing boundary condition to anisotropic and dispersive media. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 46, 9 (September 1998): 1386-1387.

Teixeira, F.L., and Chew, W.C. General closed-form pml constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media. IEEE Microwave and Guided wave Letters 8, 6 (June 1998): 223-225.

Tsuji, Y., and Koshiba, M. A finite element beam propagation method for strongly guiding and longitudinally varying optical waveguides. Journal of Lightwave Technology 14, 2 (February 1996): 217-222.

Tsuji, Y., Koshiba, M., and Tanabe, T. A wide-angle beam propagation method based on a finite element scheme. IEEE Transactions on Magnetics 33, 2 (March 1997): 1544-1547.

Tsuji, Y., Koshiba, M., and Shiraishi, T. Finite element beam propagation method for three-dimensional optical waveguide structure. Journal of Lightwave Technology 15, 9 (September 1997): 1728-1734.

Tsuji, Y., Koshiba, M., and Takimoto, N. Finite element beam propagation method for anisotropic optical waveguides. Journal of Lightwave Technology 17, 4 (April 1999): 723-728.

Tsuji, Y., and Koshiba, M. Adaptive mesh generation for full-vectorial guided-mode and beam-propagation solutions. IEEE Journal of Selected Topics in Quatum Electronics 6, 1 (January 2000): 163-169.

Tsuji, Y., and Koshiba, M. Guided-mode and leaky-mode analysis by imaginary distance beam propagation method based on finite element scheme. Journal of Lightwave Technology 18, 4 (April 2000): 618-623.

Volakis, J.L., Chatterjee, A., and Kempel, L.C. Finite Element Method For Electromagnetics. IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory. New York: IEEE PRESS, 1998.

Wood, W.L. Practical time-stepping schemes. New York: Clarendon Press Oxford, 1990.

Wu, J.Y., Kingsland, D.M., LEE, J.F., and Lee, R. A comparison of anisotropic pml to berenger's pml and its application to the finite-element method for em scattering. IEEE Transction on Antennas and Propagation 45, 1 (January 1997): 40-50.

Xiang, F., and Yip, G.L. An explicit and stable finite difference 2-d vector beam propagation method. IEEE Photonics Technology Letters 6, 10 (October 1994): 1248-1250.

Yasui, T., Koshiba, M., and Tsuji, Y. A wide-angle finite element beam propagation method with perfectly matched layers for nonlinear optical waveguides. Journal of Lightwave Technology 17, 10 (October 1999): 1909-1915.

Yoneta, S., Koshuba, M., and Tsuji, Y. Combination of beam propagation method and finite element method for optical beam propagation. Journal of Lightwave Technology 17, 11 (November 1999): 2398-2404.

Youssry, Y.B., and Volakis, J.L. Perfectly matched layer termination for finite-element meshes: implementation and application. Microwave and Optical Technology Letters 23, 3, (November 1999): 166-172.

Zhao, A.P., Juntunen, J., and Raisanen, A.V. Material independent pml absorbers for arbitrary anisotropic dielectric media. Electronic Letters 33, 18 (August 1997): 1535-1536.

Zhao, A.P., and Raisanen, A.V. Extension of berenger's pml absorbing boundary conditions to arbitrary anisotropic magnetic media. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 8, 1 (January 1998): 15-17.

Zienkiewicz, O.C. A new look at the newmark, houbolt and other time stepping formulas. a weighted residual approach. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 5 (1977): 413-418.

Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L. The finite element method. Volume 2. 4 ed. Solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity. London: McGraw-Hill, 1991.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การประมาณแบบปาเด (Pade Approximation)

ก.1 การประมาณแบบปาเด

การประมาณฟังก์ชันเป็นสิ่งที่จำเป็นในการคำนวณเนื่องจากเราไม่สามารถคำนวณเทอมเป็นอนันต์ได้ หลักการสำคัญของการประมาณฟังก์ชันคือ 1.ความผิดพลาดต้องพยายามให้มีค่าต่ำที่สุด 2. เวลาในการคำนวณต้องมีความรวดเร็ว การประมาณแบบปาเดเป็นหนึ่งในการประมาณที่มีประสิทธิภาพ โดยการประมาณแบบปาเด (Ralson, 1965) คือการประมาณฟังก์ชันให้อยู่ในรูปเศษส่วน โดยมีนิยามการกระจายเทอมดังสมการ (ก.1)

$$f(x) \quad = \quad \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} \tag{ก.1}$$

โดยที่

$$P_m(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \quad = \quad a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \tag{ก.2.1}$$

$$Q_k(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{k} b_j x^j \quad , b_0 = 1 \tag{ก.2.2}$$

$$= \quad 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k$$

การหาค่าสัมประสิทธิ์ a_j และ b_j สามารถหาได้ดังนี้ โดยสมการ (ก.3) เป็นฟังก์ชันที่ต้องการทำการประมาณ

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.. \tag{ก.3}$$

เราสามารถใช้การประมาณแบบปาเดมาประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ จากสมการ (ก.1) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(x) - \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} \quad = \quad 0 \tag{ก.4}$$

$$\frac{f(x)Q_k(x) - P_m(x)}{Q_k(x)} \quad = \quad 0 \tag{ก.5}$$

$$\frac{\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \bullet \sum_{j=0}^{k} b_j x^j - \sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{j=0}^{k} b_j x^j} \quad = \quad 0 \qquad \text{(ก.6)}$$

หรือ

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k) \qquad \text{(ก.7)}$$

$$-\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m\right) = 0$$

สังเกตว่าการประมาณแบบปาเดจะให้ $b_0 = 1$ นั่นคือแม้ว่า $x = 0$ หมด ค่าเศษส่วนก็ยังมีค่าไม่ได้หารด้วยศูนย์ เมื่อคูณกระจายเทอมแรกในสมการ (ก.7) แล้วนำมาเทียบส.ป.ส กับเทอมที่สอง เราก็จะสามารถหาค่า a_i และ b_i ได้ทั้งหมด

ก.2 การประยุกต์ใช้งานกับวิธี BPM

Hadley, 1992 ใช้การประมาณแบบปาเดในการแก้ปัญหา wide angle หรือปัญหาที่ท่อนำคลื่นแสงมีรูปร่างเปลี่ยนแปลงมากๆตามแกนการแพร่กระจาย โดย Hadley ใช้การประมาณแบบปาเดในการลดอนุพันธ์อันดับสองให้เหลือเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เริ่มคำนวณจากสมการคลื่นที่อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสองดังนี้

$$-\frac{i}{2k}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{iP}{2k}H \quad = \quad 0 \qquad \text{(ก.8)}$$

โดยที่

$$P = k_0^2[\frac{\varepsilon(\overline{x})}{\varepsilon_0} - \overline{n}^2] + \nabla_\perp^2 \qquad \text{(ก.9)}$$

จากสมการ (ก.8) สามารถแก้สมการหาคำตอบของสมการอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial H}{\partial z} = i(\sqrt{P + k^2} - k)H \qquad \text{(ก.10)}$$

นำการประมาณแบบปาเดมาแก้ปัญหาโดยมองสมการ (ก.10) ในรูปเศษส่วนดังนี้

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{iN}{D} H \qquad \text{(ก.11)}$$

N และ D เป็นโพลิโนเมียลในรูปของ P

โดยสามารถใช้อนุกรมเทเลอร์กระจายเทอมออกมาได้ดังนี้

$$f(P) = f(0) + f'(0)P + \frac{f''(0)}{2!}P^2 + \frac{f'''(0)}{3!}P^3 + \frac{f''''(0)}{4!}P^4 + \frac{f'''''(0)}{5!}P^5 + \frac{f''''''(0)}{6!}P^6 \qquad \text{(ก.12)}$$

ในที่นี้ทำการกระจายเทอมทางขวามือของสมการ (ก.10) โดยกระจายแค่ 7 เทอม

โดยที่

$$f(P) = \sqrt{P^2 + k^2} - k \qquad f''''(P) = -\frac{15}{6}(P + k^2)^{-\frac{7}{2}} \qquad \text{(ก.13)}$$

$$f'(P) = \frac{1}{2}(P + k^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'''''(P) = \frac{105}{32}(P + k^2)^{-\frac{9}{2}}$$

$$f''(P) = -\frac{1}{4}(P + k^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''''''(P) = -\frac{945}{64}(P + k^2)^{-\frac{11}{2}}$$

$$f'''(P) = \frac{3}{8}(P + k^2)^{-\frac{5}{2}}$$

ที่จุด $P = 0$

$$f(0) = 0 \qquad f''''(0) = -\frac{15}{16}k^{-7} \qquad \text{(ก.14)}$$

$$f'(0) = \frac{k^{-1}}{2} \qquad f'''''(0) = \frac{105}{32}k^{-9}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{4}k^{-3} \qquad f''''''(0) = -\frac{945}{64}k^{-11}$$

$$f'''(0) = \frac{3}{8}k^{-5}$$

ดังนั้นสามารถกระจายอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันทางขวามือของสมการ (ก.10) ออกมา 7 เทอมได้ดังนี้

$$f(P) = \frac{P}{2k} - \frac{P^2}{8k^3} + \frac{P^3}{16k^5} - \frac{15P^4}{384k^7} + \frac{7P^5}{256k^9} - \frac{21P^6}{1024k^{11}}$$

(ก.15)

ในที่นี้จะประมาณฟังก์ชันในสมการ (ก.15) ด้วยการประมาณแบบปาเด (3,3) ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันได้เป็น

$$f(P) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3} \qquad \text{(ก.16)}$$

จากสมการ (ก.16) และ (ก.6) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{f(P)(1 + b_1 P + b_2 P^2 + b_3 P^3) - (a_0 + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3)}{(1 + b_1 P + b_2 P^2 + b_3 P^3)} = 0 \qquad \text{(ก.17)}$$

กระจายเทอมแรกและเทียบค่าสัมประสิทธิ์กับเทอมที่สองได้ดังนี้

$$0 = a_0 \qquad \text{(ก.18.1)}$$

$$\frac{1}{2k} = a_1 \qquad \text{(ก.18.2)}$$

$$\left[-\frac{1}{8k^3} + \frac{b_1}{2k} \right] = a_2 \qquad \text{(ก.18.3)}$$

$$\left[\frac{1}{16k^5} - \frac{b_1}{8k^3} + \frac{b_2}{2k} \right] = a_3 \qquad \text{(ก.18.4)}$$

$$\left[-\frac{15}{128k^7} + \frac{b_1}{16k^5} - \frac{b_2}{8k^3} + \frac{b_3}{2k} \right] = 0 \qquad \text{(ก.18.5)}$$

$$\left[\frac{7}{256k^9} - \frac{5b_1}{128k^7} + \frac{b_2}{16k^5} - \frac{b_3}{8k^3} \right] = 0 \qquad \text{(ก.18.6)}$$

$$\left[-\frac{21}{1024k^{11}} + \frac{7b_1}{256k^9} - \frac{5b_2}{128k^7} + \frac{b_3}{16k^5} \right] = 0 \qquad \text{(ก.18.7)}$$

พิจารณาสมการ (ก.18.5)-(ก.18.7) หาค่า b_1, b_2, b_3 ได้ดังนี้ $\frac{5}{4k^2}$ $\frac{3}{8k^4}$ $\frac{1}{64k^6}$ ตามลำดับ เมื่อได้ค่าทั้งสามนำกลับไปแทนหาค่า a_0, a_1, a_2, a_3 ได้ดังนี้ 0 $\frac{1}{2k}$ $\frac{1}{2k^3}$ $\frac{3}{32k^5}$ ตามลำดับดังนั้นสามารถประมาณแบบปาเด(3,3) $f(P) = \dfrac{\frac{1}{2k}P + \frac{1}{2k^3}P^2 + \frac{3}{32k^5}P^3}{1 + \frac{5}{4k^2}P + \frac{3}{8k^4}P^2 + \frac{1}{64k^6}P^3}$

อย่างไรก็ตาม Hadley ได้เสนอการหาการประมาณแบบปาเดโดยหาในอีกวิธีการหนึ่งโดยเขียนสมการ (ก.8)ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ดังนี้

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\frac{iP}{2k}}{1 - \frac{i}{2k}\frac{\partial}{\partial z}} H \qquad \text{(ก.19)}$$

Hadley แนะนำรูปเวียนบังเกิดดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big|_n = \frac{\frac{iP}{2k}}{1 - \frac{i}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{n-1}} \qquad \text{โดย } \frac{\partial}{\partial z}\Big|_0 = 0 \qquad \text{(ก.20)}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big|_1 = \frac{iP}{2k} \qquad \text{(ก.21.1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big|_2 = \frac{\frac{iP}{2k}}{1 - \frac{i}{2k}\left(\frac{iP}{2k}\right)} = \frac{\frac{iP}{2k}}{1 + \frac{P}{4k^2}} \qquad \text{(ก.21.2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big|_3 = \frac{i\left(\frac{P}{2k} + \frac{P}{8k^3}\right)}{1 + \frac{P}{2k^2}} \qquad \text{(ก.21.3)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}|_4 = \frac{i\left(\frac{P}{2k}+\frac{P}{4k^3}\right)}{1+\frac{3P}{4k^2}+\frac{P^2}{16k^4}} \qquad (ก.21.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}|_5 = \frac{i\left(\frac{P}{2k}+\frac{3P}{8k^3}+\frac{P^3}{32k^5}\right)}{1+\frac{P}{k^2}+\frac{3P^2}{16k^4}} \qquad (ก.21.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}|_6 = \frac{i\left(\frac{P}{2k}+\frac{P^2}{2k^3}+\frac{3P^3}{32k^5}\right)}{1+\frac{5P}{4k^2}+\frac{3P^2}{8k^4}+\frac{P^3}{34k^6}} \qquad (ก.21.6)$$

จากสมการ (ก.21.6) พบว่ามีค่าสอดคล้องกับการประมาณแบบปาเด (3,3) ที่คำนวณได้

วิธีการประมาณแบบปาเด(3,3) มีข้อผิดพลาดเท่ากับการกระจายโพลิโนเมียลถึง 15เทอม นอกจากนั้นจากการศึกษาพบว่าถ้าเลือกอันดับของตัวเศษและตัวส่วนให้มีค่าเท่ากันจะให้ข้อผิดพลาดน้อยกว่าการเลือกค่าใดๆและในกรณีที่เลือกอันดับเทอมมากๆจะทำให้การประมาณมีความผิดพลาดลดลง

ภาคผนวก ข

การพิสูจน์วิธีนิวมาร์ก (Newmark Method)

การพิสูจน์วิธีนิวมาร์กมีสองวิธี คือ วิธีที่ 1 กระจายสมการ (2.15) ,(2.17a), (2.17b) ให้มีทั้งหมด 7 สมการแล้วทำการตัดเทอม $x'_{n+1}, x'_n, x'_{n-1}, x''_{n+1}, x''_n, x''_{n-1}$ ให้เหลือเพียง x_{n+1}, x_n, x_{n-1} เท่านั้น วิธีที่2 คือใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเสนอโดย Zienkiewicz, 1977 โดยในที่นี้จะพิสูจน์ตาม Zienkeiwicz ดังนี้

สมการ (ข.1) คือสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 เทียบกับเวลาโดย $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $x' = \dfrac{dx}{dt}$ ในขณะที่ M, C, K, f เป็นค่าคงที่ใดๆ

$$Mx'' + Cx' + Kx + f = 0 \qquad (ข.1)$$

พิสูจน์ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted Residual)

$$\int_0^{2\Delta t} W\left(Mx'' + Cx' + Kx + f\right)dt = 0 \qquad (ข.2)$$

โดย W เป็นฟังก์ชันทดสอบหรือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก

ทำการแปลงตัวแปรเป็น $\varepsilon = \dfrac{t}{\Delta t}$ และเปลี่ยนช่วงการอินทิเกรตเป็น $-1 < \varepsilon = \dfrac{t}{\Delta t} < 1$ แทนฟังก์ชันฐานลงไปในสมการ (ข.2)

$$\int_{-1}^{1} W\left[M\sum_i N''_i x_i + C\sum_i N'_i x_i + K\sum_i N_i x_i + \sum_i N_i f\right]d\varepsilon = 0 \qquad (ข.3)$$

ฟังก์ชันฐานเป็นฟังก์ชัน1มิติอันดับสอง

$$N_{i+1} = \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2}, \quad N'_{i+1} = (\frac{1}{2}+\varepsilon)\frac{1}{\Delta t}, \quad N''_{i+1} = \frac{1}{\Delta t^2} \qquad (ข.4)$$

$$N_i = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon), \quad N'_i = -2\varepsilon\frac{1}{\Delta t}, \quad N''_i = -\frac{2}{\Delta t^2}$$

$$N_{i-1} = -\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}, \quad N'_{i-1} = (-\frac{1}{2}+\varepsilon)\frac{1}{\Delta t}, \quad N''_{i-1} = \frac{1}{\Delta t^2}$$

ให้

$$\gamma = \left[\int_{-1}^{1} W\varepsilon d\varepsilon \Big/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon \right] + 1/2 \qquad \text{(ข.5.1)}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} W\varepsilon(1+\varepsilon)d\varepsilon \Big/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon \qquad \text{(ข.5.2)}$$

ดังนั้นจากสมการ (ข.3) เมื่อเราหารด้วย $\int_{-1}^{1} W d\varepsilon$ ตลอดจะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\int_{-1}^{1} W\left[M\sum_i N_i'' x_i + C\sum_i N_i' x_i + K\sum_i N_i x_i + \sum_i N_i f_i \right] d\varepsilon \Big/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon = 0 \quad \text{(ข.6)}$$

พิจารณาเทอมที่ 1 ของสมการ (ข.6)

$$\frac{1}{\Delta t^2}\int_{-1}^{1} W[M[1 \quad -2 \quad 1]\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix}] d\varepsilon \Big/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon = \frac{1}{\Delta t^2}[x_{i+1} \quad -2x_i \quad x_{i-1}]M \quad \text{(ข.7)}$$

พิจารณาเทอมที่ 2 ของสมการ (ข.6)

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{-1}^{1} WC[(\frac{1}{2}+\varepsilon) \quad -2\varepsilon \quad -\frac{1}{2}+\varepsilon]\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} d\varepsilon \Big/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon$$

$$= [\frac{1}{\Delta t}[\int_{-1}^{1} W(\frac{1}{2}+\varepsilon)x_{i+1} d\varepsilon + \int_{-1}^{1} W(-2\varepsilon)x_i d\varepsilon + \int_{-1}^{1} W(-\frac{1}{2}+\varepsilon)x_{i-1} d\varepsilon] \Big/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon]C \qquad \text{(ข.8)}$$

จากความสัมพันธ์ของสมการ (ข.5.1) เราสามารถเขียน (ข.9) ได้ดังนี้

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{-1}^{1} WC[(\frac{1}{2}+\varepsilon) \quad -2\varepsilon \quad -\frac{1}{2}+\varepsilon]\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} d\varepsilon \Big/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon = \frac{1}{\Delta t}[\gamma x_{i+1} \; (1-2\gamma)x_i \; (-1+\gamma)x_{i-1}]C \quad \text{(ข.9)}$$

พิจารณาเทอมที่ 3 ของสมการ (ข.6)

$$\int_{-1}^{1} W[\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2} \quad (1-\varepsilon)(1+\varepsilon) \quad \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}]\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} d\varepsilon K / \int_{-1}^{1} W d\varepsilon$$

$$= K\,[\int_{-1}^{1} W \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2} d\varepsilon x_{i+1} + \int_{-1}^{1} W(1-\varepsilon)(1+\varepsilon) d\varepsilon x_i + \int_{-1}^{1} W \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2} d\varepsilon x_{i-1}] / \int_{-1}^{1} W d\varepsilon \qquad (ข.10)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการ (ข.5.1) และ (ข.5.2) สามารถเขียน (ข.10) เป็น

$$[K][\beta x_{i+1} \quad (\frac{1}{2}+\gamma-2\beta)x_i \quad (\frac{1}{2}-\gamma+\beta)x_{i-1}] \qquad (ข.11)$$

พิจารณาเทอมที่ 4 ของสมการ (ข.6)

$$\int_{-1}^{1} W[\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2} \quad (1-\varepsilon)(1+\varepsilon) \quad \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}]\begin{bmatrix} f_{i+1} \\ f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} d\varepsilon \,/ \int_{-1}^{1} W d\varepsilon$$

$$= [\int_{-1}^{1} W[\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2} f_{i+1} + (1+\varepsilon)(1-\varepsilon) f_i + \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2} f_{i-1}] d\varepsilon] / \int_{-1}^{1} W d\varepsilon \qquad (ข.12)$$

เช่นเดียวกับสมการ (ข.11) เราสามารถเขียนสมการ (ข.12) ได้ดังนี้

$$f_{i+1}\beta \;+ (\frac{1}{2}+\gamma-2\beta) f_i \;\; + (\frac{1}{2}-\gamma+2\beta) f_{i-1} \qquad (ข.13)$$

จากสมการ (ข.7), (ข.9), (ข.11), (ข.13) สามารถเขียนสมการ (ข.6) ออกมาได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t^2}[M][x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}] + \frac{1}{\Delta t}[C][\gamma x_{i+1} + (1-2\gamma)x_i + (-1+\gamma)x_{i-1}] \\ &+ [K][\beta x_{i+1} + (\frac{1}{2}+\gamma-2\beta)x_i + (\frac{1}{2}-\gamma+\beta)x_{i-1}] \qquad (ข.14) \\ &+ \beta f_{i+1} + (\frac{1}{2}+\gamma-2\beta) f_i + (\frac{1}{2}-\gamma+\beta) f_{i-1} \qquad = \; 0 \end{aligned}$$

จากสมการ (ข.14) ถ้าให้ $\gamma = \frac{1}{2}$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t^2}[M][x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}] + \frac{1}{\Delta t}[C][\frac{1}{2}x_{i+1} - \frac{1}{2}x_{i-1}] \\
&+ [K][\beta x_{i+1} + (1-2\beta)x_i + \beta x_{i-1}] \qquad \text{(ข.15)} \\
&+ \beta f_{i+1} + (1-2\beta)f_i + \beta f_{i-1} \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

สังเกตว่าสมการ (ข.15) ขึ้นกับค่าตัวแปร β เท่านั้นทำให้สามารถเรียกสมการ (ข.15) ว่าวิธี Newmark-Beta ได้

ภาคผนวก ค

เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส (Transparent Boundary Condition)

ค.1 หลักการของเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใส

เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสได้รับการนำเสนอโดย Hadley, 1991 มีหลักการในการวิเคราะห์คือยอมให้พลังงานของคลื่นแสงแพร่กระจายออกไปนอกหน้าต่างการคำนวณได้ และบังคับคลื่นแสงไม่ให้มีการแพร่กระจายสะท้อนกลับจากขอบหน้าต่างเข้ามาในหน้าต่างการคำนวณ

เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสสร้างขึ้นมาเพื่อใช้งานร่วมกับวิธี BPM โดยเฉพาะซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้ โดยพิจารณาการคำนวณด้วยวิธี BPM ในท่อนำคลื่นแสง 2 มิติ เริ่มจากสมการเฟรสเนลตามสมการ (ค.1) โดยแกนยาว คือ แกน z และ แกนตัดขวาง คือ แกน x

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{j}{2k}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \qquad \text{(ค.1)}$$

พิจารณาพลังงานของสนามในหน้าต่างการคำนวณโดยทำการคูณด้วยคู่สังยุค และ อินทิเกรต

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_a^b |E|^2\, dx = \frac{j}{2k}\left(E^*\frac{\partial E}{\partial x} - E\frac{\partial E^*}{\partial x}\right)\Big|_a^b \equiv -F_b + F_a \qquad \text{(ค.2)}$$

โดยที่

F_b คือ พลังงานที่พุ่งออกจากหน้าต่างการคำนวณ

F_a คือ พลังงานที่พุ่งเข้าสู่หน้าต่างการคำนวณ

การพิจารณาค่า F_b และ F_a สามารถพิจารณาหาค่าได้ด้วยวิธีการเดียวกันดังนั้นในที่นี้จึงพิจารณาเฉพาะค่า F_b โดยสมมติสนามที่แพร่กระจายไปที่ขอบของหน้าต่างมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบและให้สนามเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$E = E_0 \exp(jk_x x) \qquad \text{(ค.3)}$$

โดยค่า E_0 และ ค่า k_x เป็นค่าเชิงซ้อน เมื่อแทนค่าสนามในสมการ (ค.3) ลงในสมการ (ค.2) สามารถหา F_b ได้ดังนี้

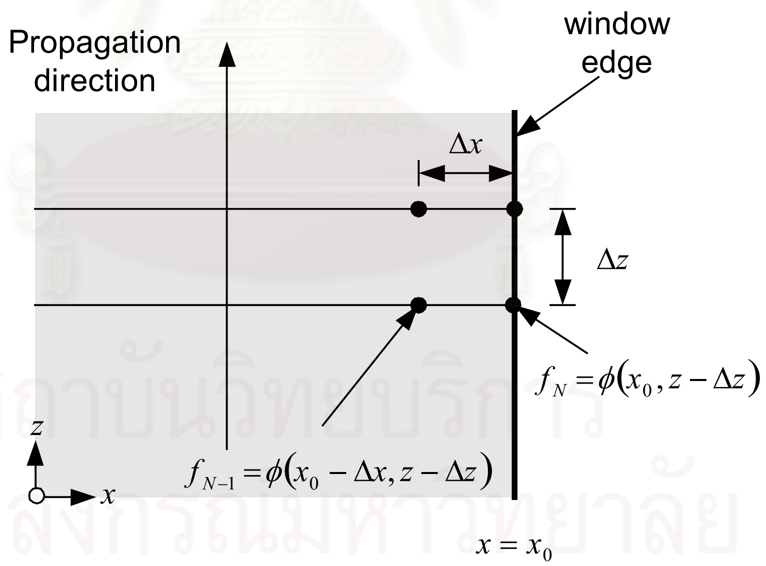
$$F_b = \frac{\mathrm{Re}(k_x)\,|\,E(b)\,|^2}{k} \tag{ค.4}$$

โดยที่ $\mathrm{Re}(k_x)$ คือ ส่วนจริงของ k_x

จากสมการ (ค.4) พิจารณาค่า k_x พบว่า ถ้าค่าส่วนจริงของ k_x มีค่าเป็นบวกจะทำให้ค่า F_b มีค่าเป็นบวกและพลังงานจะแพร่กระจายออกจากขอบหน้าต่างอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้นถ้าบังคับค่าส่วนจริงของ k_x เป็นบวกก็สามารถแก้ไขการแพร่กระจายสะท้อนกลับจากขอบ-หน้าต่างได้ นี่คือหลักการสำคัญของเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่ Hadley ได้เสนอไว้ในงาน FDBPM

ค.2 เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสใน FE-BPM บนท่อนำคลื่นแสง 2 มิติ

Arai, Maruta and Matsuhara., 1993 นำเงื่อนไขขอบเขตที่ Hadley เสนอมาประยุกต์ใช้ในงาน FEBPM โดยพิจารณาบนท่อนำคลื่นแบบ 2 มิติ



รูปที่ ค.1 ตำแหน่งโนดที่นำมาใช้คำนวณเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสในท่อนำคลื่น 2 มิติในแกนตัดขวาง x และมีการแพร่กระจายในทิศทาง z

นิยามให้สนามสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + jk_x\phi\right)_{x_0} = 0 \tag{ค.5}$$

โดยที่ x_0 คือ ตำแหน่งที่ขอบของหน้าต่างการคำนวณ, k_x เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการโดยมีการปรับค่าทุกครั้งในการแพร่กระจาย j เท่ากับ $\sqrt{-1}$

สมมติให้คลื่นที่แพร่กระจายไปที่ขอบต่างมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบดังนี้

$$\phi(x,z) = a\exp(-jk_x x - \beta z) \qquad \text{(ค.6)}$$

เมื่อแทนสมการ (ค.6) ลงในสมการ (ค.5) พบว่าสมการ (ค.6) เป็นคำตอบของสมการ (ค.5) เมื่อเราคำนวณสนามที่ระนาบ z เราจะหาค่าสัมประสิทธ์ k_x จากค่าสนาม ที่ตำแหน่งก่อนหน้านั้นหนึ่งขั้น คือสนามที่ตำแหน่ง $z-\Delta z$ (ที่เราทราบค่า)

จากสมการ (ค.6) ให้

$$\phi(x_0, z-\Delta z) = f_N = a\exp(-jk_x x_0 - \beta(z-z_0)) \qquad \text{(ค.7.1)}$$

f_N คือ สนามที่ ตำแหน่ง x_0 และ $z-\Delta z$

$$\phi(x_0-\Delta x, z-\Delta z) = f_{N-1} = a\exp(-jk_x(x_0-\Delta x) - \beta(z-z_0)) \qquad \text{(ค.7.2)}$$

f_{N-1} คือ สนามที่ ตำแหน่ง $x_0-\Delta x$ และ $z-\Delta z$

จากสมการ (ค.7.1) และ (ค.7.2) สามารถหาค่า k_x ได้ดังนี้

$$k_x = \frac{j}{\Delta x}\ln\left(\frac{f_N}{f_{N-1}}\right) \qquad \text{(ค.8)}$$

จากสมการ (ค.8) เราสามารถหาค่า k_x เมื่อทราบค่าสนามที่ตำแหน่ง $(x_0, z-\Delta z)$ และ $(x_0-\Delta x, z-\Delta z)$ พิจารณาค่า k_x จากสมการ (ค.8) ตามหลักการของเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสที่พิสูจน์ดังสมการ (ค.4) บังคับให้ค่าส่วนจริงของ $k_x > 0$ เพื่อให้พลังงานของสนามวิ่งออกจากหน้าต่างการคำนวณเท่านั้นโดยไม่มีการสะท้อนกลับจากขอบหน้าต่าง

ค.3 เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสใน FE-BPM บนท่อนำคลื่นแสง 3 มิติ

Maruta, Arai and Matsuhara (1994) cited in Tsuji, Koshiba, and Shiraishi, (1997) นำเสนอเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสในท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติโดยนิยามสนามที่แพร่กระจายมาที่ขอบหน้าต่างมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบและสามารถเขียนให้อยู่ในรูปได้ดังนี้

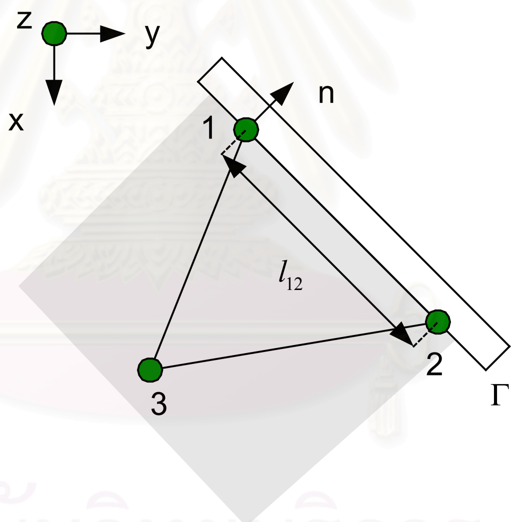
$$\Phi(x,y) = \phi_\Gamma(x,y)\exp(-jk(x,y)n) \qquad \text{(ค.9)}$$

โดยที่

n คือ เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับขอบหน้าต่างดังรูปที่ ค.2

นิยามเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสสอดคล้องกับสมการ (ค.10) ดังนี้

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} + jk(x,y)\phi = 0 \qquad \text{(ค.10)}$$



รูปที่ค.2ตำแหน่งโนดบนอีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่ขอบหน้าต่างการคำนวณในระนาบตัดขวาง xy และมีการแพร่กระจายในทิศทาง z

โดยมีสูตรการคำนวณค่า $k(x,y)$ ดังนี้

$$k(x,y) = -j\frac{l_{12}^2\log(\phi_3) - m_1\log(\phi_2) - m_2\log(\phi_1)}{2S_e l_{12}} \qquad \text{(ค.11)}$$

บังคับให้ $\mathrm{Re}[k(x,y)] > 0$

โดยที่

$$m_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)$$

$$m_2 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_3)$$

ϕ_j (j = 1,2,3) คือ ค่าสนามที่ตำแหน่งโนด 1,2,3 ตามลำดับ

(x_i, y_i) คือ ตำแหน่งพิกัดของโนด 1,2,3 ตามลำดับ

S_e คือ พื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม

l_{12} คือ ความยาวระหว่างโนดที่ขอบหน้าต่าง

การบังคับส่วนจริงของ $k(x,y)$ หรือ k_x ตามที่เสนอมานั้นสามารถทำได้ดังนี้ยกตัวอย่างเช่น ถ้าค่า k ที่คำนวณได้มีค่าเท่ากับ $-4-3j$ เราก็จะทำการแก้ให้ค่า k กลายเป็น $4-3j$ แล้วจึงแทนกลับลงไปในการคำนวณ เป็นต้น

เงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสมีข้อดีคือ 1.ไม่ขึ้นกับรูปร่างและชนิดวัสดุของท่อนำคลื่น 2. ไม่ต้องมีช่องว่างระยะห่างจากตัวกระเจิงเหมือนในเงื่อนไขขอบเขตดูดซับ หรือ ต้องมีชั้นดูดซับเหมือนเงื่อนไขขอบเขตแบบ PML จึงทำให้ไม่ต้องมีจำนวนโนดที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มขึ้น ดังนั้นจึงใช้หน่วยความจำในการคำนวณน้อยกว่า เงื่อนไขขอบเขตทั้งสอง 3.ไม่ต้องทำการปรับแต่งค่าพารามิเตอร์จึงใช้งานได้ง่ายกว่า 4.ใช้งานได้ในทุกความถี่ อย่างไรก็ตามเงื่อนไขขอบเขตแบบโปร่งใสมีข้อเสียคือการคำนวณต้องใช้สนามในขั้นก่อนมาใช้งาน ดังนั้นในกรณีที่สนามมีการเปลี่ยนแปลงมากๆในแต่ละขั้นจะทำให้ไม่สามารถกันการสะท้อนได้มากนัก เช่นในกรณีมุมตกกระทบของคลื่นกระเจิงมีค่ามากๆ เป็นต้น

ภาคผนวก ง

เงื่อนไขขอบเขตแบบPML

ง.1 เงื่อนไขขอบเขตแบบPML

เงื่อนไขขอบเขตแบบPML (Perfectly Matched Layer) คือการสร้างชั้นดูดซับที่มีคุณสมบัติเข้าคู่ (matched condition) กับขอบเขตการคำนวณเพื่อทำการดูดกลืนคลื่น โดยชั้นดูดซับมีคุณสมบัติลดทอนขนาดของสนามที่แพร่กระจายผ่านเข้ามาแต่ไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟสของคลื่น คลื่นที่แพร่กระจายผ่านเข้ามาจะถูกลดทอนจนหมดไปในชั้นดูดซับ เงื่อนไขขอบเขตแบบ PML สามารถใช้ได้ทุกความถี่และทุกมุมตกกระทบ นอกจากนั้นยังมีการสะท้อนกลับน้อยกว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ ABC ขอบชั้นดูดซับยังสามารถวางใกล้กับตัวกระเจิงได้มากกว่าแบบ ABC อีกทั้งยังไม่จำเป็นต้องทราบค่า k_0 ก่อนการคำนวณอีกด้วย

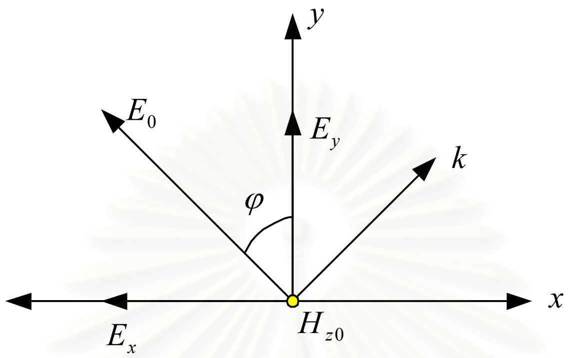
Berenger, 1994 ได้เสนอเงื่อนไขขอบเขตแบบPML ในการวิเคราะห์แบบ FDTD ในตัวกลางแบบไอโซทรอปิก ที่มีรูปร่างแบบ 2 มิติ งานของ Berenger ได้สร้างความแตกตื่นในเงื่อนไขขอบเขตแบบ PML มาก โดย Chew and Weedom, 1994 และ Katz, Thiele and Taflove,1994 ได้นำงานของ Berenger มาดัดแปลงและพิจารณาบนวัสดุที่มีรูปร่างแบบ 3 มิติ โดยตีพิมพ์ออกมาก่อนที่งานของ Berenger จะถูกตีพิมพ์เสียอีก ในช่วงนั้นได้มีการดัดแปลงแก้ไขเงื่อนไขขอบเขตแบบ PML อีกมากมาย จนสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 พวกใหญ่ๆ คือ 1. PML แบบ splited field 2. PML แบบแปลงตัวแปร (Streched coordinate) 3. PML แบบวัสดุดูด-ซับแอนไอโซทรอปิก (anisotropic absorber)

ง.1.1 เงื่อนไขขอบเขต PML แบบแยกสนาม (Splited field)

เงื่อนไขขอบเขตแบบแยกสนามเป็นแบบที่ Berenger เสนอในการพิจารณางาน FDTD โดยหลักการคือการแยกสนามออกเป็น2 แกน คือ H_z แยกเป็น $H_{zx} + H_{zy}$ การทำเช่นนี้เพื่อที่จะสะดวกในการแก้สมการ โดยมีเงื่อนไขเข้าคู่ (matched condition)ดังนี้

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \tag{ง.1}$$

Berenger ทำการวิเคราะห์การแผ่รังสีของคลื่นในอวกาศว่าง (free space)ของคลื่นโดยมีชั้นดูดซับที่มีคุณสมบัติสอดคล้องกับสมการ (ง.1)โดย σ คือสภาพนำไฟฟ้า และσ^* คือสภาพนำแม่เหล็ก



รูปที่ ง.1. สนามตกกระทบโมด TE

Berenger พิจารณา โมด TE ในงาน FDTD สามารถเขียนสมการสนามได้ดังนี้

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad (ง.2.1)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad (ง.2.2)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad (ง.2.3)$$

แยกสนาม H_z ออกเป็น $H_{zx} + H_{zy}$ สามารถเขียนสมการ (ง.2.1)-(ง.2.3) ได้ดังนี้

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \qquad (ง.3.1)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_x = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \qquad (ง.3.2)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad (ง.3.3)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \qquad (ง.3.4)$$

จากรูปที่ ง.1 เขียนสมการสนามออกมาได้ดังนี้

$$E_x = -E_0 \sin(\varphi) e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \tag{ง.4.1}$$

$$E_y = E_0 \sin(\varphi) e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \tag{ง.4.2}$$

$$H_{zx} = H_{zx0} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \tag{ง.4.3}$$

$$H_{zy} = H_{zy0} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \tag{ง.4.4}$$

โดยที่ $\alpha, \beta, H_{zx0}, H_{zy0}$ เป็นตัวไม่ทราบค่าแทนสมการ (ง.4) ลง (ง.3) แก้สมการหา α, β ได้ดังนี้

$$\alpha = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{G}\left(1 - j\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0 \omega}\right)\cos(\varphi) \tag{ง.5.1}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{G}\left(1 - j\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0 \omega}\right)\sin(\varphi) \tag{ง.5.2}$$

โดยที่

$$G = \sqrt{w_x \cos^2(\varphi) + w_y \sin^2(\varphi)} \tag{ง.6.1}$$

$$w_x = \frac{1 - j(\sigma_x / \varepsilon_0 \omega)}{1 - j(\sigma_x^* / \mu_0 \omega)} \tag{ง.6.2}$$

$$w_y = \frac{1 - j(\sigma_y / \varepsilon_0 \omega)}{1 - j(\sigma_y^* / \mu_0 \omega)} \tag{ง.6.3}$$

ดังนั้นสามารถเขียนสนามในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\psi = \psi_0 e^{j\omega(t-(x\cos(\gamma)+y\sin(\gamma)))} e^{-(\sigma_x \cos(\gamma)/\varepsilon_0 cG)x} e^{-(\sigma_y \sin(\gamma)/\varepsilon_0 cG)y} \tag{ง.7}$$

และ

$$H_{zx0} = E_0 \sqrt{(\varepsilon_0/\mu_0)} \frac{1}{G} w_x \cos^2(\varphi) \tag{ง.8.1}$$

$$H_{zy0} = E_0 \sqrt{(\varepsilon_0/\mu_0)} \frac{1}{G} w_y \sin^2(\varphi) \tag{ง.8.2}$$

หรือ

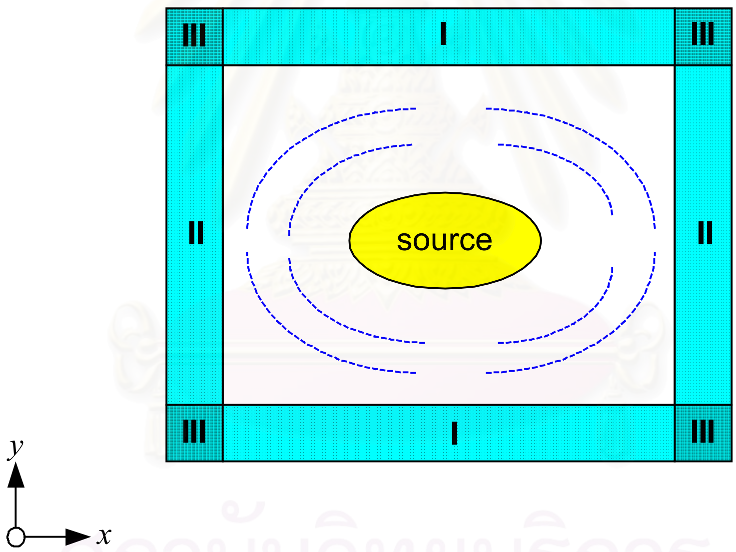
$$H_0 = E_0\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,G \qquad (ง.9.1)$$

$$Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\frac{1}{G} \qquad (ง.9.2)$$

จากเงื่อนไขการเข้าคู่สมการ (ง.1) ทำให้ $w_x = w_y = 1$ และ $G = 1$ เขียนสมการ (ง.7) และ (ง.9) ได้ดังนี้

$$\psi = \psi_0 e^{j\omega(t-(x\cos(\varphi)+y\sin(\varphi))/c)} e^{-(\sigma_x \cos(\varphi)/\varepsilon_0 c)x} e^{-(\sigma_y \sin(\varphi)/\varepsilon_0 c)y} \qquad (ง.10.1)$$

$$Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \qquad (ง.10.2)$$



รูปที่ ง.2. พื้นที่ของชั้นดูดซับในทิศทาง x, y และตำแหน่งมุมโดยพิจารณาแบบ 2 มิติ

ชั้นดูดซับที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเข้าคู่จะสามารถป้องกันการสะท้อนในทุกความถี่ และ ทุกมุมตกกระทบ นอกจากนั้น Berenger ก็ยังบอกถึงการเลือกค่า σ_x และ σ_y ที่เหมาะสม ตามตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ ง.1 แสดงค่า σ_x และ σ_y ในทิศทางต่างๆตามรูปที่ ง.2 เสนอโดย Bereneger

ค่า σ	I	II	III
σ_x	0	σ_x	σ_x
σ_x^*	0	σ_x^*	σ_x^*
σ_y	σ_y	0	σ_y
σ_y^*	σ_y^*	0	σ_y^*

นั่นคือ ในทิศทาง x ค่า σ_x, σ_x^* มีค่า ในทิศทาง y ค่า σ_y, σ_y^* มีค่า และที่ตำแหน่งมุม $\sigma_x, \sigma_x^*, \sigma_y, \sigma_y^*$ มีค่า

ง.1.1.1 การเลือกค่า σ

ก่อนทำการคำนวณเราควรจะทราบค่า σ ว่าควรจะมีค่าเท่าไหร่ Berenger ได้เสนอหลักการเลือกค่า σ ดังนี้จากสมการ (ง.10.1) พิจารณาสนามในชั้น PML สามารถเขียนขนาดสนามในทิศทาง x และ y เป็น ρ และจากสมการ (ง.10.1) สามารถเขียนขนาดของสนามได้ดังนี้

$$\psi(\rho) = \psi(0)e^{-(\sigma\cos(\theta)/\varepsilon_0 c)\rho} \qquad (ง.11)$$

โดย ρ คือระยะห่างจากผิว PML จากสมการ (ง.11) เราสามารถหาสปส การสะท้อนได้ดังนี้

$$R(\theta) = e^{-2(\cos(\theta)/\varepsilon_0 c)\sigma\delta} \qquad (ง.12)$$

ตัวแปรในสมการ (ง.12) คือ $\sigma\delta$ ซึ่งสิ่งที่ต้องการคือให้ค่า σ มีค่าน้อยที่จุดเริ่มของผนัง PML และค่อยเพิ่มขึ้นจนมากที่สุดที่ปลายผนัง PML ดังนั้นเขียนสมการ (ง.12) เสียใหม่ให้เทอม $\sigma\delta$ แปรตามระยะทางในผนัง PML

$$R(\theta) = e^{-2(\cos(\theta)/\varepsilon_0 c)\int_0^{\rho}\sigma(\rho)d\rho} \qquad (ง.13)$$

โดยให้การกระจายตัวของ σ แทนได้ดังนี้

$$\sigma(\rho) = \sigma_m\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n \qquad (ง.14)$$

σ_m คือ ค่าสภาพนำที่มากที่สุด n คือเลขการกระจายตัวของสภาพนำโดยมีค่าเป็น 0, 1, 2 ตามลำดับแทน สมการ (ง.14) ลงในสมการ (ง.13)

$$R(\theta) = e^{-(2/(n+1))(\sigma_m \delta / \varepsilon_0 c)\cos(\theta)} \quad \text{(ง.15)}$$

จาก (ง.15) พบว่าสามารถเลือกค่า σ_m จากค่า $n, \varepsilon_0, c, \cos(\theta), R$ ดังนี้

$$\sigma_m = \frac{(n+1)}{2}\frac{\varepsilon_0 c}{\delta}\ln\left(\frac{1}{R}\right) \quad \text{(ง.16)}$$

PML แบบแยกสนามเหมาะสำหรับการวิเคราะห์แบบ FDTD โดยมีงานวิจัยออกมามากมายดังนี้ Katz et al., 1994 และ Berenger, 1996 วิเคราะห์บนท่อนำคลื่นแบบ 3 มิติ, Garcia et al., 1996 นำมาใช้ในวัสดุแอนไอโซทรอปิก, Zhao, Juntunen and Raisanen., 1997 นำมาพิจารณาในวัสดุแอนไอโซทรอปิก เช่นกันแต่พิจารณา D กับ H แทน E กับ H เรียกวิธีนี้ว่า MIPML (Material Independent PML), Perez et al., 1997 นำงานของ Garcia มาปรับปรุงให้สามารถพิจารณาวัสดุแอนไอโซทรอปิกแบบเต็มเมทริกซ์, Zhao and Raisanen, 1998 ขยายงานของ Zhao ให้พิจารณาวัสดุแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กโดยพิจารณา B กับ E แทนการคำนวณ H กับ E

การพิจารณาแบบPML แยกสนามมีข้อด้อย คือ 1. การคำนวณไม่อยู่ในรูปแมกซ์-เวลล์จึงไม่เหมาะกับวิธี FEM หรือ FETD 2.ในการพิจารณาแบบ MIPML การพิจารณาไม่อยู่ในรูป E กับ H และต้องใช้หน่วยความจำเพิ่มในการเก็บค่า B กับ D

ง.1.2 เงื่อนไขขอบเขต PML แบบแปลงตัวแปร (Streched Coordinate)

วิธีการแปลงตัวแปรนำเสนอโดย Chew and Weedon, 1994 โดยอาศัยการแปลงตัวแปรในทิศทางที่ต้องการให้เกิดการลดทอน

$$u' = (1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0})u \quad \text{(ง.17)}$$

โดยที่ u คือทิศทาง x, y, z ที่ต้องการลดทอน นอกจากนั้นสามารถเขียนตัว ∇ ได้ดังนี้

$$\tilde{\nabla} = \vec{a}_x \frac{1}{s_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{1}{s_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{1}{s_z}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{(ง.18)}$$

s_x, s_y, s_z คือ PML parameter ที่ได้จากหลักการแปลงตัวแปรโดยมีหลักการในการเลือกทิศทางการลดทอนคล้ายคลึงกับแบบแยกสนามดังตารางที่ ง.2 (ในกรณีหน้าตัด $x-y$ และมีทิศทางการแพร่กระจายในแกน z)

$$s = \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right) \qquad (ง.19)$$

เช่นกันกับวิธีการแยกสนาม s_x จะลดทอนเมื่อคลื่นแพร่กระจายในทิศทาง x และ s_y จะลดทอนเมื่อคลื่นแพร่กระจายในทิศทาง y ในขณะที่ตำแหน่งมุมค่า s_x และ s_y จะลดทอนทั้งในทิศ x และ y ดังตารางที่ ง.2

ตารางที่ ง.2 ค่า s ในตำแหน่งต่างๆตามรูปที่ง.2 เสนอโดยChew and Weedon, 1994

ค่า s	I	II	III
s_x	1	s	s
s_y	s	1	s
s_z	1	1	1

วิธีแปลงตัวแปรนี้สามารถใช้ในวิธี FEM หรือ FETD ได้เป็นอย่างดีเพราะไม่ต้องแก้ไขสมการมากนัก วิธีการแปลงตัวแปรนี้มีการค้นคว้าวิจัยดังนี้ Rappaport, 1995 นำวิธีแปลงตัวแปรมาใช้ในงาน FDTD, Pekel and Mittara, 1995 นำวิธีแปลงตัวแปรมาใช้ร่วมกับวิธี ABC ในปัญหา 3 มิติ โดยใช้กับ edge element ในการแก้ปัญหา, Fang and Wu, 1995, 1996 เสนอ GPML ที่สามารถใช้งานบนวัสดุที่มีการสูญเสีย (lossy media), Huang, Xu and Yokoyama. , 1996 นำวิธีแปลงตัวแปรมาใช้กับงาน FD-BPM, Teixeira and Chew, 1998 นำการแปลงตัวแปรทำบนวัสดุ bianisotropic, dispersive, anisotropic media โดยเขียนอยู่ในรูปทั่วไปในกรณี FDTD และ FEM ดังสมการ (ง.20.1-5)

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{PML} = \left(\det\bar{\bar{s}}\right)^{-1}\left[\bar{\bar{s}}\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}(\omega)\cdot\bar{\bar{s}}\right] \qquad (ง.20.1)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{PML} = \left(\det\bar{\bar{s}}\right)^{-1}\left[\bar{\bar{s}}\cdot\bar{\bar{\mu}}(\omega)\cdot\bar{\bar{s}}\right] \qquad (ง.20.2)$$

$$\bar{\bar{\varsigma}}_{PML} = \left(\det\bar{\bar{s}}\right)^{-1}\left[\bar{\bar{s}}\cdot\bar{\bar{\varsigma}}(\omega)\cdot\bar{\bar{s}}\right] \qquad (ง.20.3)$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{PML} = \left(\det\bar{\bar{s}}\right)^{-1}\left[\bar{\bar{s}}\cdot\bar{\bar{\xi}}(\omega)\cdot\bar{\bar{s}}\right] \qquad (ง.20.4)$$

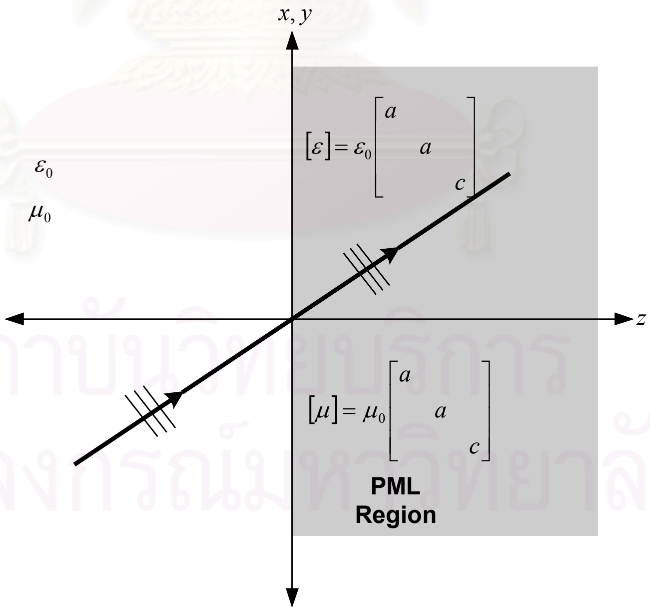
โดยที่

$$\bar{\bar{s}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} \end{bmatrix} \qquad (ง.20.5)$$

การใช้งานเงื่อนไขขอบเขตPML แบบแปลงตัวแปรนี้ยังมีการใช้งานอีกมากมายดังนี้ Koshiba, Tsuji and Hikari., 1999 นำมาใช้งานกับ FEBPM ในท่อนำคลื่นแบบ 2 มิติ, Tsuji and Koshiba, 2000 นำมาใช้ในท่อนำคลื่นแสงแบบ 3 มิติ, Saitoh and Koshiba, 2001 นำงานของ Teixeira and Chew มาประยุกต์ใช้ในงานเวกเตอร์ FEBPM

ง.1.3 เงื่อนไขขอบเขต PML แบบวัสดุดูดซับแบบแอนไอโซทรอปิก

นอกจากสองวิธีที่กล่าวในเบื้องต้นแล้วยังมีการมอง PML เป็นชั้นดูดซับแบบแอน-ไอโซทรอปิกสำหรับดูดกลืนคลื่น Sack et al., 1995 ได้เสนอวัสดุดูดซับแบบแอนไอโซทรอปิกใน 2 มิติ (ระนาบ xz) ดังรูปที่ ง.3



รูปที่ ง.3 ชั้นดูดซับแบบวัสดุแอนไอโซทรอปิกโดยพิจารณาบนระนาบ 2 มิติ มีการลดทอนในทิศทาง z (1มิติ) เสนอโดย Sack et al., 1995

Sack et al. พิจารณาการแพร่กระจายในระนาบ 2 มิติในอวกาศว่างจะเห็นว่า Sack ให้ชั้น PML เป็นแบบ uniaxial anisotropic $[\varepsilon],[\mu]$ ในการดูดซับโดย Sack ให้ a เป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในรูป $a=\alpha - j\beta$ และให้ $c=\dfrac{1}{a}$ โดยที่ α, β เป็นค่าใดๆ

Polycarpou, Lyons and Balanis., 1996 นำงานของ Sack มาพัฒนาโดยใช้ในงาน FEM ในวัสดุ 2 มิติ โดยแก้ไขการเลือกค่า a ให้เลือกตามแบบ Berenger ในวิธีPML แบบแยกสนาม $a=1-j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}=1-j\dfrac{\sigma^*}{\omega\mu_0}$ โดยใช้การเลือกค่า σ ตามงานของ Berenger ดัง สมการ (ง.21)

$$\sigma = \frac{(n+1)\varepsilon_0\varepsilon_r c}{2d}\ln\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\rho}{d}\right)^n \qquad (ง.21.1)$$

$$\sigma^* = \frac{(n+1)\mu_0\mu_r c}{2d}\ln\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\rho}{d}\right)^n \qquad (ง.21.2)$$

งานของ Sack กับงานของ Polycarpou ไม่ได้อธิบายการลดทอนในตำแหน่งมุม ทำให้Gedney, 1996 เสนอการใช้วิธีPMLแบบวัสดุดูดซับแอนไอโซทรอปิกที่มีรูปร่างทั่วไปที่สามารถหาค่าณ.ตำแหน่งมุมได้ดังนี้

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} \dfrac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix} \qquad (ง.22)$$

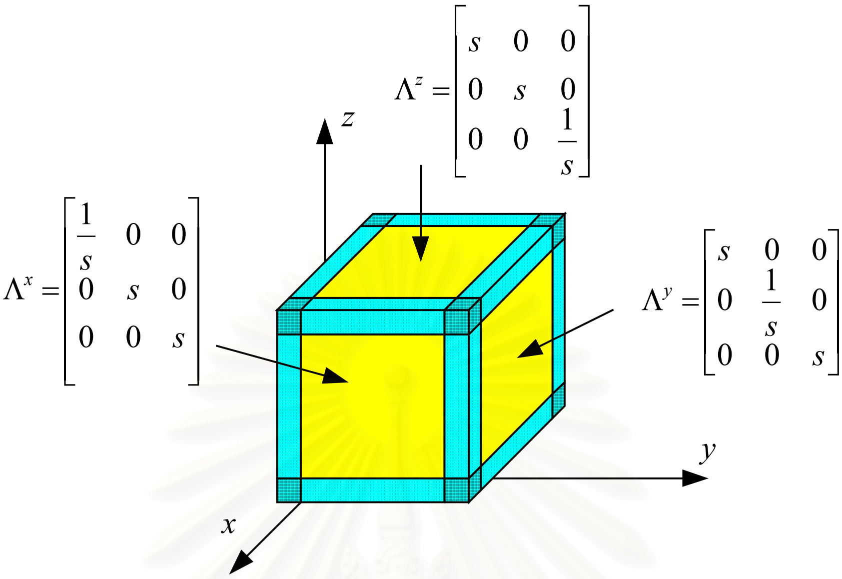
โดยที่ $$s_x = 1+\frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon_0} \qquad (ง.23.1)$$

$$s_y = 1+\frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon_0} \qquad (ง.23.2)$$

$$s_z = 1+\frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon_0} \qquad (ง.32.3)$$

ค่า $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ มีค่าเช่นเดียวกับที่ Berenegr เสนอ

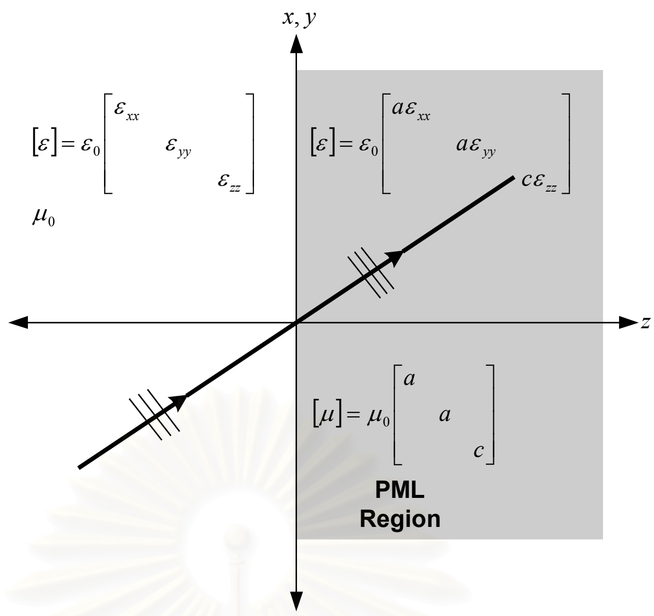
Wu et al., 1997 ดัดแปลงงานของ Sack พิจารณาในวัสดุ 3 มิติ โดยมีความคล้ายคลึงกับ Gedney $[\varepsilon]_{PML} = [\Lambda]\varepsilon$, $[\mu]_{PML} = [\Lambda]\mu$



รูปที่ ง.4 ชั้นดูดซับPML แบบวัสดุแอนไอโซทรอปิกโดยมีค่าสัมประสิทธิ์ดังรูปเสนอโดย Wu et al., 1997 มีการดูดซับในทิศทาง x, y, z (3มิติ)

โดย $s = \alpha - j\beta$ ค่าดูดซับที่ตำแหน่งมุมสามารถหาได้จากผลคูณของค่าดูดซับสองด้านที่ติดกันยกตัวอย่างเช่นตำแหน่ง $\Lambda_{xz} = \Lambda_x \cdot \Lambda_z$ เป็นต้น งานของ Wu et al. คล้ายคลึงกับงานของ Gedney มากโดยสังเกตว่าค่าที่ออกมาตรงกันจะแตกต่างตรงที่ Gedney ให้ $s = 1 + \dfrac{\sigma}{j\omega\varepsilon}$ แต่ Wu et al.ให้ $s = \alpha - j\beta$

Mitchell et al., 1999 นำ PML แบบวัสดุดูดซับแอนไอโซทรอปิกมาใช้กับวัสดุแอนไอโซทรอปิกโดยเสนอวัสดุดูดซับเป็นแบบ biaxial anisotropic absorber ซึ่งMitchell ทำการคำนวณบนวัสดุแบบ 2 มิติและใช้วิธี FEM



รูปที่ ง.5.วัสดุดูดซับแบบแอนไอโซทรอปิกนำมาใช้กับวัสดุแอนไอโซทรอปิกที่มีลักษณะ 2 มิติมีการลดทอนในทิศทาง z (1มิติ) นำเสนอโดย Mitchell et al., 1999

Mitchell ให้ค่า a, c มีค่าเช่นเดียวกับที่ Sack เสนอคือ $a = \alpha - j\beta$ และ $c = \dfrac{1}{a}$

Cucinotta et al., 1999 นำ PML แบบวัสดุดูดซับแบบแอนไอโซทรอปิกของ Wu มาใช้ในงาน Full vetor FEBPM, Selleri, Vincetti and Zoboli., 2000 นำงานของ Mitchell มาขยายต่อในวัสดุแอนไอโซทรอปิกแบบ 3 มิติโดยใช้ในงาน Full Vector FEBPM วัสดุแอนไอโซทรอปิก และใช้หลักการเดียวกับที่ Wu เสนอในการขยายงานจากวัสดุ 2 มิติเป็น 3มิติ

ง.2 สรุป

จากที่ได้นำเสนองาน PML ทั้ง 3 แบบ พบว่าวิธีที่สามารถนำมาใช้ได้ดีกับวิธี FEBPM คือ วิธีแปลงตัวแปร กับ วิธีวัสดุดูดซับแบบแอนไอโซทรอปิก นอกจากนั้นถ้าสังเกตให้ดีพบว่าวิธีทั้งสองนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก โดยพิจารณางานของ Teixeira and Chew, 1998 ในรูปทั่วไปจะสอดคล้องกับวิธีของMitchell et al., 1999 เมื่อพิจารณาบนวัสดุแอนไอโซทรอปิกที่มีเฉพาะแกนกลาง (diagonal) พบว่าจะได้สูตรของ PML เป็นสูตรเดียวกัน ในงานวิทยานิพนธ์นี้ใช้ทั้งแบบแปลงตัวแปรและแบบวัสดุดูดซับแอนไอโซทรอปิก โดยเลือกค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่เสนอในงานต่างๆนำมาใช้งาน

ภาคผนวก จ

การพิสูจน์สมการสเกลาร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันในวัสดุแอนไอโซทรอปิก

Koshiba, Hayata, and Suzuki., 1984 เสนอการใช้การประมาณสมการสเกลาร์ในการวิเคราะห์สนามในวัสดุแอนไอโซทรอปิก โดย Koshiba et al. อาศัยการพิจารณาสนามไฟฟ้า E และ สนามแม่เหล็ก H คำนวณไปพร้อมกัน ทำให้สามารถหาคำตอบที่ปราศจากผลเฉลยปลอมเทียมได้ Tsuji, Koshiba, and Takimoto, 1999 นำสมการที่ Koshiba et al. เสนอมาใช้ในการคำนวณในงาน บีมพรอพาเกชันในวัสดุแอนไอโซทรอปิก ภาคผนวกนี้จะทำการพิสูจน์ที่มาของสมการสเกลาร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันโดยพิจารณาในท่อนำคลื่นแสงที่มีสภาพยอมไฟฟ้าแปรตามทิศทาง $\varepsilon = [\varepsilon]$ และสภาพซาบซึมได้คงที่ $\mu = \mu_0$ เริ่มการคำนวณโดยกระจายสมการแมกซ์เวลล์ในรูป x, y, z

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \tag{จ.1.1}$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \tag{จ.1.2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \tag{จ.1.3}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega D_x \tag{จ.1.4}$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega D_y \tag{จ.1.5}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega D_z \tag{จ.1.6}$$

$$H_z = \frac{1}{j\beta}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) \tag{จ.1.7}$$

$$D_z = \frac{1}{j\beta}\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y}\right) \tag{จ.1.8}$$

โดย $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$

$$D_x = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \right) \qquad (จ.2.1)$$

$$D_y = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z \right) \qquad (จ.2.2)$$

$$D_z = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z \right) \qquad (จ.2.3)$$

การประมาณจะพิจารณาสภาพยอมไฟฟ้าที่ไม่อยู่ในแนวแทยงมุมคูณกับเทอมที่อนุพันธ์เทียบกับ x ให้เป็นศูนย์

$$\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \approx 0 \qquad \text{ถ้า } i \neq j \qquad (จ.3)$$

หาค่า H_y โดยพิจารณาสมการ (จ.1.2) เขียนได้ดังนี้

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(j\beta E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \qquad (จ.4)$$

แทน E_z ด้วยสมการ (จ.2.3) ลงในสมการ (จ.4) โดยใช้การประมาณตามสมการ (จ.3) ทำให้เขียนได้เป็น

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(j\beta E_x + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{zz}} \frac{\partial D_z}{\partial x} \right) \qquad (จ.5)$$

แทน D_z จากสมการ (จ.1.8) ลงในสมการ (จ.5) เขียน H_y ได้เป็น

$$H_y = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left(j\beta E_x + \frac{1}{j\beta \varepsilon_{zz}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \right) \qquad (จ.6)$$

หาค่า H_z โดยพิจารณาสมการ (จ.1.3) เขียนได้ดังนี้

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \qquad (จ.7)$$

หาค่า E_y โดยพิจารณาสมการ (จ.1.5)-(จ.1.6) โดยกำจัดเทอมที่มี E_z ออกเขียนได้ดังนี้

$$E_y = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{1}{\sigma_1}\left(j\beta\varepsilon_{zz}H_x + \varepsilon_{zz}\frac{\partial H_z}{\partial x} - \varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_x \qquad (\text{จ.8})$$

ค่า $\sigma_1 - \sigma_5$ นิยามตามสมการ (3.25)

แทน H_z จากสมการ (จ.1.7) ลงไปในสมการ (จ.8) ดังนั้น E_y เขียนได้ดังนี้

$$E_y = -\frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_1}\left[j\beta\varepsilon_{zz}H_x + \frac{\varepsilon_{zz}}{j\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) - \varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right] - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_x \qquad (\text{จ.9})$$

หาค่า E_z โดยพิจารณาสมการ (จ.1.5)-(จ.1.6) โดยกำจัดเทอมที่มี E_y ออกเขียนได้ดังนี้

$$E_z = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_x}{\partial y} - \varepsilon_{yy}\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\beta\varepsilon_{zy}H_x\right) - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}E_x \qquad (\text{จ.10})$$

นำค่า H_y, H_z, E_y, E_z ที่หาได้จากสมการ (จ.6), (จ.7), (จ.9), (จ.10)แทนลงในสมการ (จ.1.4) เขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z\right) \qquad (\text{จ.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\right) + j\beta\left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(j\beta E_x + \frac{1}{j\beta\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_{xx}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_{yy}\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\right)\right)$$

$$= j\omega\varepsilon_0\{\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}\left[-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(j\beta\varepsilon_{zz}H_x + \frac{\varepsilon_{zz}}{j\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) - \varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_x\right]$$

$$+ \varepsilon_{xz}\left[-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_x}{\partial y} - \varepsilon_{yy}\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\beta\varepsilon_{zy}H_x\right) - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}E_x\right]\} \qquad (\text{จ.12})$$

ประเทอมที่เป็น $\varepsilon_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x}\approx 0$ เมื่อ $i\neq j$ เขียนสมการ (จ.12) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\right)+j\beta\left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(j\beta E_x+\frac{1}{j\beta\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_{xx}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\varepsilon_{yy}\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\right)\right)$$

$$=j\omega\varepsilon_0\{\varepsilon_{xx}E_x+\varepsilon_{xy}\left[-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(j\beta\varepsilon_{zz}H_x-\varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_x\right]$$

$$+\varepsilon_{xz}\left[-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_x}{\partial y}-j\beta\varepsilon_{zy}H_x\right)-\frac{\sigma_3}{\sigma_1}E_x\right]\} \qquad (จ.13)$$

เมื่อเป็น TE โมด สนามหลักคือ E_x และ H_y ดังนั้นประมาณ E_y เป็นศูนย์เขียนสมการ (จ.13) เป็น

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\right)+j\beta\left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(j\beta E_x+\frac{1}{j\beta\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_{xx}\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)\right)\right)$$

$$=j\omega\varepsilon_0\{\varepsilon_{xx}E_x+\varepsilon_{xy}\left[-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(j\beta H_x-\varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)-\frac{\sigma_2 E_x}{\sigma_1}\right]$$

$$+\varepsilon_{xz}\left[-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_x}{\partial y}-j\beta\varepsilon_{zy}H_x\right)-\frac{\sigma_3}{\sigma_1}E_x\right]\} \qquad (จ.14)$$

คูณ $j\omega\mu_0$ เข้าไปในสมการ (จ.14) ตลอด และ $\omega^2\mu_0\varepsilon_0=k_0^2$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)-\beta^2E_x$$

$$=-k_0^2\varepsilon_{xx}E_x+\frac{\varepsilon_{xy}}{\sigma_1}\varepsilon_{zz}\beta\omega\mu_0H_x+j\frac{\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}}{\sigma_1}\omega\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial y}+\varepsilon_{xy}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}k_0^2E_x \qquad (จ.15)$$

$$-j\frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yy}}{\sigma_1}\omega\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy}\beta\omega\mu_0}{\sigma_1}H_x+\frac{\varepsilon_{xz}\sigma_3k_0^2}{\sigma_1}E_x$$

จัดรูปสมการ (จ.15) ได้เป็น

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)+\left(k_0^2\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{xy}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\varepsilon_{xz}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)-\beta^2\right)E_x$$

$$-\beta\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\omega\mu_0 H_x+j\frac{\sigma_5}{\sigma_1}\omega\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad = \quad 0 \qquad (\text{จ.16})$$

สมการ (จ.16) เป็นสมการของ TE โมด โดยมีสนามหลักคือ E_x

เราจะเริ่มทำการพิจารณา TM โมดบ้างโดยการแทนสมการ (จ.1.1) ด้วย E_z ที่หาได้จากสมการ (จ.10) E_y ที่หาได้จากสมการ (จ.9) ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_x}{\partial y}-\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_y}{\partial x}-j\beta\varepsilon_{zy}H_x\right)-\frac{\sigma_3}{\sigma_1}E_x\right)$$

$$+j\beta\left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(j\beta\varepsilon_{zz}H_x+\frac{\varepsilon_{zz}}{j\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}\right)-\varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_x\right)$$

$$= \quad -j\omega\mu_0 H_x \qquad (\text{จ.17})$$

เมื่อเป็น TM โมดดังนั้นสนามหลักคือ H_x และ E_y ดังนั้น $H_y = 0$ เขียนสมการ (จ.17) ได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_x}{\partial y}-j\beta\varepsilon_{zy}H_x\right)-\frac{\sigma_3}{\sigma_1}E_x\right)$$

$$+j\beta\left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\sigma_1}\left(j\beta\varepsilon_{zz}H_x+\frac{\varepsilon_{zz}}{j\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right)-\varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_x\right)$$

$$= \quad -j\omega\mu_0 H_x \qquad (\text{จ.18})$$

คูณ $j\omega\varepsilon_0$ ในสมการ (จ.18) ตลอด และจาก $\omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k_0^2$ ดังนั้นเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right)+\frac{\varepsilon_{yy}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)-\frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\beta^2 H_x+k_0^2 H_x-j\beta\frac{\varepsilon_{zy}}{\sigma_1}\frac{\partial H_x}{\partial y}-j\beta\frac{\varepsilon_{yz}}{\sigma_1}\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$-\omega\varepsilon_0\beta\frac{\sigma_2}{\sigma_1}E_x+j\omega\varepsilon_0\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\frac{\partial E_x}{\partial y} \quad = \quad 0 \qquad (\text{จ.19})$$

สมการ (จ.19) เป็นโมด TM โมด

สมการ (จ.16) และ (จ.19) เป็น สมการในท่อนำคลื่น2 มิติเท่านั้นในขณะที่เมื่อต้องการพิจารณาท่อนำคลื่น 3 มิติเราสามารถแปลงสมการดังนี้ $-j\beta = \frac{\partial}{\partial z}$ และ $-\beta^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ดังนั้น(จ.16)เขียนได้เป็นสมการ (จ.20) และ สมการ (จ.19) เขียนได้เป็นสมการ (จ.21)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right) + \left(k_0^2\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \varepsilon_{xz}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)\right)E_x$$

$$-j\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\omega\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial z} + j\frac{\sigma_5}{\sigma_1}\omega\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \qquad (\text{จ.20})$$

$$\frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right) + \frac{\varepsilon_{yy}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) + k_0^2 H_x + \frac{\varepsilon_{zy}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_z}{\partial z}\right) + \frac{\varepsilon_{yz}}{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$-j\omega\varepsilon_0\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\partial E_x}{\partial z} + j\omega\varepsilon_0\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \qquad (\text{จ.21})$$

สมการ (จ.20) และ (จ.21) คือสมการสเกลาร์ของโมด TE และ TM ในการพิจารณาท่อนำคลื่น 3 มิติตามลำดับ โดยเราจะใช้สมการทั้งสองนี้ในการคำนวณด้วยวิธีสเกลาร์บีมพรอพาเกชันในบทที่3 ต่อไป

ภาคผนวก ฉ

การพิสูจน์สมการเวกเตอร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันในท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิก

ภาคผนวกนี้จะทำการวิเคราะห์สมการคลื่นที่มีสภาพยอมไฟฟ้าแปรตามทิศทาง $\varepsilon = [\varepsilon]$ และสภาพซาบซึมได้แปรตามทิศทาง $\mu = [\mu]$ เริ่มจากสมการคลื่นแบบเวกเตอร์

$$\nabla \times \left([p]\nabla \times \Phi\right) - k_0^2 [q]\Phi \quad = \quad 0 \tag{ฉ.1}$$

ถ้า $\Phi = E$

$$[p] = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix}^{-1} \tag{ฉ.2.1}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x}\varepsilon_{xx} & s_z \varepsilon_{xy} & s_y \varepsilon_{xz} \\ s_z \varepsilon_{yx} & \frac{s_z s_x}{s_y}\varepsilon_{yy} & s_x \varepsilon_{yz} \\ s_y \varepsilon_{zx} & s_x \varepsilon_{zy} & \frac{s_x s_y}{s_z}\varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{ฉ.2.2}$$

ถ้า $\Phi = H$

$$[p] = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x}\varepsilon_{xx} & s_z \varepsilon_{xy} & s_y \varepsilon_{xz} \\ s_z \varepsilon_{yx} & \frac{s_z s_x}{s_y}\varepsilon_{yy} & s_x \varepsilon_{yz} \\ s_y \varepsilon_{zx} & s_x \varepsilon_{zy} & \frac{s_x s_y}{s_z}\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \tag{ฉ.2.3}$$

$$[q]=\begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.2.4)}$$

โดย s_x, s_y, s_z คือสัมประสิทธิ์ PML

พิจารณา $\nabla \times \Phi$

$$\nabla \times \Phi = \left[\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}\right]\vec{a}_x + \left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}\right]\vec{a}_y + \left[\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right]\vec{a}_z \quad \text{(ฉ.3)}$$

$$([p]\nabla \times \Phi)$$

$$= \left(p_{xx}\left[\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}\right] + p_{xy}\left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}\right] + p_{xz}\left[\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right]\right)\vec{a}_x$$

$$+ \left(p_{yx}\left[\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}\right] + p_{yy}\left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}\right] + p_{yz}\left[\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right]\right)\vec{a}_y$$

$$+ \left(p_{zx}\left[\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}\right] + p_{zy}\left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}\right] + p_{zz}\left[\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right]\right)\vec{a}_z \quad \text{(ฉ.4)}$$

$$\nabla \times ([p]\nabla \times \Phi) =$$

$$\left(p_{zx}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - p_{zx}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + p_{zy}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - p_{zy}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi_z}{\partial x} + p_{zz}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - p_{zz}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right)\vec{a}_x$$
$$-\left[p_{yx}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - p_{yx}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + p_{yy}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - p_{yy}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_z}{\partial x} + p_{yz}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - p_{yz}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right]\vec{a}_x$$

$$\left(p_{xx}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - p_{xx}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + p_{xy}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - p_{xy}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_z}{\partial x} + p_{xz}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - p_{xz}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right)\vec{a}_y$$
$$-\left[p_{zx}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - p_{zx}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + p_{zy}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - p_{zy}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi_z}{\partial x} + p_{zz}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - p_{zz}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\right]\vec{a}_y$$

$$\left(p_{yx}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi_z}{\partial y}-p_{yx}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi_y}{\partial z}+p_{yy}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi_x}{\partial z}-p_{yy}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi_z}{\partial x}+p_{yz}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi_y}{\partial x}-p_{yz}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi_x}{\partial y}\right)\vec{a}_z$$
$$-\left[p_{xx}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi_z}{\partial y}-p_{xx}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi_y}{\partial z}+p_{xy}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi_x}{\partial z}-p_{xy}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi_z}{\partial x}+p_{xz}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi_y}{\partial x}-p_{xz}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi_x}{\partial y}\right]\vec{a}_z$$

(ฉ.5)

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[A]\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+[B_x]\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+[B_y]\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{[C_x]\frac{\partial}{\partial z}+[D_x]\frac{\partial}{\partial x}+[E_x]\frac{\partial}{\partial y}\right\}\Phi$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{[C_y]\frac{\partial}{\partial z}+[E_y]\frac{\partial}{\partial x}+[D_y]\frac{\partial}{\partial y}\right\}\Phi+k_0^2[q]\Phi=0 \quad \text{(ฉ.6)}$$

$$\Phi=\left[\Phi_x\ \Phi_y\ \Phi_z\right]^T$$

$$[A]=\begin{bmatrix}-p_{yy} & p_{yx} & 0\\ p_{xy} & -p_{xx} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.1)} \qquad [D_x]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -p_{zz} & p_{zy}\\ 0 & p_{yz} & -p_{yy}\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.6)}$$

$$[B_x]=\begin{bmatrix}0 & -p_{yz} & p_{yy}\\ 0 & p_{xz} & -p_{xy}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.2)} \qquad [D_y]=\begin{bmatrix}-p_{zz} & 0 & p_{zx}\\ 0 & 0 & 0\\ p_{xz} & 0 & -p_{xx}\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.7)}$$

$$[B_y]=\begin{bmatrix}p_{yz} & 0 & -p_{yx}\\ -p_{xz} & 0 & p_{xx}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.3)} \qquad [E_x]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ p_{zz} & 0 & -p_{zx}\\ -p_{yz} & 0 & p_{yx}\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.8)}$$

$$[C_x]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{zy} & p_{zx} & 0\\ p_{yy} & -p_{yx} & 0\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.4)} \qquad [E_y]=\begin{bmatrix}0 & p_{zz} & -p_{zy}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -p_{xz} & p_{xy}\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.9)}$$

$$[C_y]=\begin{bmatrix}p_{zy} & -p_{zx} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -p_{xy} & p_{xx} & 0\end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.7.5)}$$

ให้คำตอบของสมการอยู่ในรูปดังนี้

$$\Phi(x,y,z)=\phi_x(x,y,z)\exp(-jk_0n_0z)\vec{a}_x \quad (ฉ.8)$$

$$+\phi_y(x,y,z)\exp(-jk_0n_0z)\vec{a}_y$$

$$+\phi_z(x,y,z)\exp(-jk_0n_0z)\vec{a}_z$$

แทนสมการ (ฉ.8) ลงในสมการ (ฉ.6) จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$[A]\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2jk_0n_0\frac{\partial}{\partial z}-k_0^2n_0^2\right)\phi$$

$$+[B_x]\left(\frac{\partial}{\partial z}-jk_0n_0\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}+[B_y]\left(\frac{\partial}{\partial z}-jk_0n_0\right)\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left\{[C_x]\left(\frac{\partial}{\partial z}-jk_0n_0\right)+[D_x]\frac{\partial}{\partial x}+[E_x]\frac{\partial}{\partial y}\right\}\phi$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{[C_y]\left(\frac{\partial}{\partial z}-jk_0n_0\right)+[E_y]\frac{\partial}{\partial x}+[D_y]\frac{\partial}{\partial y}\right\}\phi+k_0^2[q]\phi \quad =0 \quad (ฉ.9)$$

สมการ (ฉ.9) เป็นสมการคลื่นในรูปเวกเตอร์โดยสามารถนำไปใช้ในการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันต่อไป

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย สุรพัชร์ เจริญยิ่ง เกิดวันที่ 6 กรกฎาคม พ.ศ. 2515 จ.กรุงเทพ สำเร็จการศึกษา ปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัย ธรรมศาสตร์ ในปีการศึกษา 2536 โดยฝึกงานภาคฤดูร้อน ที่ บริษัท สามารถคอร์ปอเรชั่น จากนั้นเข้าทำงานใน บริษัท ไทยเทเลโฟนแอนด์เทเลคอมมิวนิเคชั่น จำกัด (มหาชน) ตำแหน่ง วิศวกร สายงาน office of Vice President ฝ่าย Implementation ปี พ.ศ. 2537 ระหว่างนั้นได้รับการอบรมระบบ O&M Transmission จากบริษัท NEC ประเทศ ญี่ปุ่น เป็นระยะเวลา 2 เดือน ระหว่างโครงการโทรศัพท์ เฟส 2 500,000 เลขหมาย ได้รับผิดชอบหน่วยงาน Project Control Office คอยควบคุมและประสานงานในพื้นที่เขต 9 จังหวัด สระบุรี ในปี พ.ศ. 2540 ได้เข้าร่วมงานกับ บ. สามารถคอมมิวนิเคชั่น เซอร์วิส จำกัด ในตำแหน่ง วิศวกร ในโครงการณ์โทรศัพท์สาธารณะทางไกลชนบทผ่านดาวเทียม ฝ่าย Project Management โดยได้รับผิดชอบในส่วน Network Management System เข้าศึกษาต่อในหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ ปี พ.ศ. 2541 ระหว่างนั้นในปี พ.ศ. 2544 ได้เดินทางไปนำเสนอผลงานเรื่อง Analysis of 3-Dimensional Optical Waveguides by the FE-BPM Based on Newmark Scheme and PML ในการประชุมทางวิชาการ AP-RASC'01 ที่มหาลัย ซูโอ ณ.ประเทศ ญี่ปุ่น