ศูนย์-กึ่งสนามเสมือนอันดับบวก

นายบุญเลิศ ศรีหิรัญ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2540

ISBN 974-637-987-9

POSITIVELY ORDERED 0–SKEWSEMIFIELDS

Mr. Boonlert Sreehirun

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Mathematics
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
Academic Year 1997
ISBN 974–637–987–9

Thesis Title	Positively Ordered 0-skewsemifields
By	Mr. Boonlert Sreehirun
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.

Accepted by Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

.... Dean of Graduated School

(Professor Supawat Chutivongse M.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit .... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph. D.)

Sidney S. Mitchell .... Thesis Advisor

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph. D.)

Ajchara Hamchara .... Member

(Assistant Professor Ajchara Harnchoowong Ph. D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

บุญเลิศ ศรีหิรัญ : ศูนย์-กึ่งสนามเสมือนอันดับบวก (POSITIVELY ORDERED 0-SKEWSEMIFIELDS) อ. ที่ปรึกษา : ดร. ซิดนีย์ เอส. มิทเชลล์, 98 หน้า

ISBN 974-637-987-9

เราจะเรียกสิ่งทั้งสามสิ่งที่เป็นอันดับ $(K, +, \bullet)$ ว่า <u>ศูนย์-กึ่งสนามเสมือน</u> ก็ต่อเมื่อ 1) $(K, \bullet)$ เป็นกลุ่มที่มี 0, 2) $(K, +)$ เป็นกึ่งกลุ่ม, 3) สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in K$, $x(y+z) = xy + xz$ และ $(y+z)x = yx + zx$, และ 4) สำหรับทุก ๆ $x \in K$, $x + 0 = 0 = 0 + x$ สำหรับศูนย์-กึ่งสนามเสมือน K เราจะใช้สัญลักษณ์ K^* แทน $K\setminus\{0\}$ เราจะเรียกสิ่งทั้งสี่ที่อันดับ $(K, +, \bullet, \leq)$ ว่า <u>ศูนย์-กึ่งสนามเสมือนอันดับบวก</u> ก็ต่อเมื่อ $(K, +, \bullet)$ เป็นศูนย์-กึ่งสนามเสมือน และ $\leq$ เป็นอันดับบางส่วนบน K ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x, y, z \in K$ 1) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x+z \leq y+z$, $z+x \leq z+y$, $xz \leq yz$ และ $zx \leq zy$ และ 2) $x \geq 0$ จะเรียกสับเซต $P = \{ x \in K / x \geq 1 \}$ ของศูนย์-กึ่งสนามเสมือนอันดับบวก K ว่าเป็นกรวยบวก K

ให้ $\{ K_i / i \in I \}$ เป็นวงศ์ของศูนย์กึ่ง-สนามเสมือนอันดับบวก <u>ผลคูณตรง</u> ของวงศ์ $\{ K_i / i \in I \}$ คือเซตของสมาชิกทั้งหมด $(x_i)_{i \in I}$ ในผลคูณคาร์ทีเซียนของวงศ์ $\{ K_i^* / i \in I \}$ และ 0 เมื่อ $0 = (0_i)_{i \in I}$ กับการดำเนินการตามส่วนประกอบ ให้ L เป็นกึ่งสนามย่อยของผลคูณตรงของ $\{ K_i / i \in I \}$ จะเรียก L ว่า<u>ผลคูณตรงย่อย</u> ของ $\{ K_i / i \in I \}$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $j \in I$, $\Pi_j(L) = K_j$ เมื่อ Π_j เป็นการส่งภาพฉาย จะเรียกศูนย์-กึ่งสนามเสมือนอันดับบวกว่า <u>ปิดอย่างปริพันธ์แบบบริบูรณ์</u> ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $a \in K$, ถ้ามี $b \in K$ ซึ่ง $a^n \leq b$ สำหรับทุก ๆ $n \in Z^+$ แล้วจะได้ว่า $a \leq 1$

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ให้ K เป็นศูนย์-กึ่งสนามเสมือนอันดับบวกและ $P \subseteq K^*$ และ $P^{-1} = \{ x^{-1} / x \in P \}$ สมมติว่า P สอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้ 1) P เป็นกึ่งกลุ่มย่อยปกติภายใต้การคูณของ K^* 2) $P \cap P^{-1} = \{ 1 \}$ 3) สำหรับทุก ๆ $x \in K$, $1 + x, x + 1 \in K$ และ 4) สำหรับทุก ๆ $x, y \in K$ และ $a, b \in K$ ซึ่ง $a + b = 1$ จะได้ว่า $ax + by \in P$ ดังนั้นจะมีอันดับบวกเข้ากันได้บวกได้อย่างเดียวบน K ที่มาจาก P ซึ่ง P เป็นกรวยบวก ยิ่งไปกว่านั้นจะมีไอโซมอร์ฟิซึมที่เป็นอันดับจากเซตของสับเซตทั้งหมดของ K^* ที่สอดคล้องกับ 1) – 4) ไปทั่งถึงเซตของอับดับเข้ากันได้บวกบน K ทั้งหมด

<u>ทฤษฎีบท 2</u> ศูนย์-กึ่งสนามเสมือนแลตทิซบวก K จะถูกฝังในศูนย์-กึ่งสนามเสมือนแลตทิซบวกบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ K ปิดอย่างปริพันธ์แบบบริบูรณ์

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต บุญเลิศ ศรีหิรัญ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ปีการศึกษา 2540 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

C825055 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORD: 0-SKEWSEMIFIELDS/POSITIVELY ORDERED 0-SKEWSEMIFIELDS

BOONLERT SREEHIRUN : POSITIVELY ORDERED 0-SKEWSEMIFIELDS

THESIS ADVISOR : DR. SIDNEY S. MITCHELL, Ph. D. 98 pp.

ISBN 974-637-987-9

A triple (K, +, $\bullet$) is called a <u>0-skewsemifield</u> if 1) (K, $\bullet$) is group with zero 0, (K, +) is a semigroup, 3) for all $x, y, z \in K$, $x(y+z) = xy + xz$ and $(y+z)x = yx + zx$, and 4) for every $x \in K$, $x + 0 = 0 = 0 + x$. For a 0-skewsemifield K, let K^* denote $K\setminus\{0\}$. A quardruple (K,+, $\bullet$, $\leq$) is called a <u>positively</u> ordered <u>0-skewsemifield</u> if and only if (K,+, $\bullet$) is a 0-skewsemifield and $\leq$ is a partial order on K such that for all $x, y, z \in K$ 1) $x \leq y$ implies that $x+z \leq y+z$, $z+x \leq z+y$, $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$ and $x \geq 0$. The subset $P = \{ x \in K / x \geq 1 \}$ of a positively ordered 0-skewsemifield is called the <u>positive cone</u> of K.

Let $\{ K_i / i \in I \}$ be a family of 0-skewsemifields. The <u>direct product</u> of the famil $\{ K_i / i \in I \}$ is the set of all elements $(x_i)_{i \in I}$ in the cartesian product of family $\{ K_i^* / i \in I \}$ and 0 where $0 = (0_i)_{i \in I}$ together with the componentwise operations. Let L be a subskewsemifield of the direct product of $\{ K_i / i \in I \}$. L is said to be a <u>subdirect product</u> of $\{ K_i / i \in I \}$ if and only if for every $j \in I$, $\Pi_j(L) = K_j$, where Π_j is the natural projection map. A positive lattice 0-skewsemifield K is said to <u>completely integrally closed</u> if and only if for every $a \in K$, if there exists a $b \in K$ such that $a^n \leq b$ for all $n \in Z^+$ implies that $a \leq 1$.

<u>Theorem 1.</u> Let K be a 0-skewsemifield, $P \subseteq K^*$, and $P^{-1} = \{ x^{-1} / x \in P \}$. Suppose that P satisfies the following conditions : 1) P is a multiplicative normal semigroup of K^*, 2) $P \cap P^{-1} = \{ 1 \}$, 3) for every $x \in K$ $1 + x, x + 1 \in K$ and 4) for all $x, y \in K$ and $a, b \in K$ such that $a + b = 1$, $ax + by \in P$. Then there exists a unique positive compatible order on K induced by P such that P is the positive cone. Furthermore, there exists an order isomorphism from the set of subsets of K^* which satisfy 1) – 4) onto the set of all positive compatible orders on K.

<u>Theorem 2.</u> A positive lattice 0-skewsemifield K can be embedded into a complete positive lattice 0-skewsemifield if and only if it is completely integrally closed.

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต บุญเลิศ ศรีหิรัญ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ปีการศึกษา 2540 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

ACKNOWLEDGEMENTS

I am greatly indebted to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis advisor, for his helpful supervision during the preparation and completion of this thesis. In addition, I am also grateful to Associate Professor Dr. Yupaporn Kemprasit and Assistant Professor Dr. Ajchara Hamchoowong, who served as the chairman and member of this thesis committee, respectively.

Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

CONTENTS

INTRODUCTION

The theory of partially ordered groups, rings, skewfields and semigroups has been studied for a long time now and many basic theorems have been proven. In [3], C. Namnak has proved many basic theorems of the theory of partially ordered 0-semifields which were similar to theorems in the above mentioned four basic algebraic systems. However, he assumed commutativity of both addition and multiplication. The purpose of this thesis is to extend Namnak's results to partially ordered 0-skewsemifields where we do not assume commutativity of either addition or multiplication.

We were very successful. We were able to extend all of the theorems in [3] except theorem 4.15 which states that every positive lattice ordered semifield is either a positive totally ordered semifield or is subdirectly reducible, and thus we were unable to extend theorem 4.16 which states that a positive lattice ordered semifield is a subdirectly product of positive totally ordered semifields.

It should be noted that we were able to prove some important theorems that not given in [3]. For example, we proved that a positive lattice skewsemifield can be embedded into a complete positive lattice skewsemifield if only if it is completely integrally closed. We also proved (in the appendix) a very deep result about skewrings that does not appear in [3]. It was shown in [3] that every Archimedean totally ordered semifield is embeddable into a complete totally ordered semifeild. We extended this theorem to skewrings and as a corollary we get that every Archimedean totally ordered skewring is additively and multiplicatively commutative.

This thesis studies the main types of partially of ordered skewsemifields. After chapter I which gives preliminary material, we study general positively ordered skewsemifields in Chapter II. In Chapter III we specialize to positive lattice skewsemfields and finally in chapter IV we specialize to totally positively ordered skewsemifields.