

กิ่งกุ่มการแปลงถดถอยซึ่งปกติในที่สุด

นางสาวเนตรดาว สุณาสารกิตติกุล



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์


บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2541

ISBN 974-639-974-8

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

**EVENTUALLY REGULAR REGRESSIVE TRANSFORMATION  
SEMIGROUPS**



Miss Netdao Sunasaragittigul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science in Mathematics  
Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

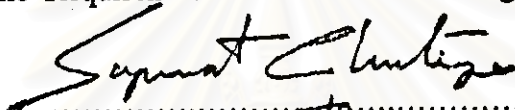
Academic Year 1998

ISBN 974-639-974-8

Thesis Title Eventually Regular Regressive Transformation Semigroups  
By Miss Netdao Sunasaragittigul  
Department Mathematics  
Thesis advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

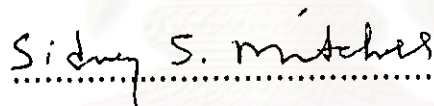
---

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial  
Fulfillment of the Requirements of the Master's Degree.



.....Dean of Graduate School  
(Professor Supawat Chutivongse M.D.)

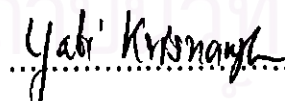
Thesis Committee



.....Chairman  
(Sidney S. Mitchell Ph.D.)



.....Thesis Advisor  
(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)



.....Member  
(Yati Krisnangkura Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสี่เหลี่ยมนี้เพียงแผ่นเดียว

เนตรดาว สุภาสารกิตติกุล : กึ่งกลุ่มการแปลงถดถอยซึ่งปกติในที่สุด

(EVENTUALLY REGULAR REGRESSIVE TRANSFORMATION SEMIGROUPS)

อ. ที่ปรึกษา : รศ. ดร. พุทราภรณ์ เข้มประสิทธิ์, 35 หน้า. ISBN 974-639-974-8

ให้  $S$  เป็นกึ่งกลุ่ม สมาชิก  $a$  ของ  $S$  เป็นสมาชิกปกติ ถ้ามีสมาชิก  $b \in S$  ซึ่ง  $a = aba$  สมาชิก  $a$  ของ  $S$  เป็นปกติในที่สุด ถ้ามีจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่ทำให้  $a^n$  เป็นสมาชิกปกติ ถ้าสมาชิกทุกตัวของ  $S$  เป็นสมาชิกปกติในที่สุด แล้วเราจะเรียก  $S$  ว่าเป็นกึ่งกลุ่มปกติในที่สุด

การแปลงบางส่วน  $\alpha$  ของเซตเป็นการแปลงบางส่วนเกือบเป็นเอกลักษณ์ ถ้าเซตของ  $x$  ในโดเมนของ  $\alpha$  ซึ่ง  $x\alpha \neq x$  เป็นเซตจำกัด

ให้  $X$  เป็นเซตอันดับบางส่วน เรากล่าวว่าการแปลงบางส่วน  $\alpha$  ของ  $X$  ถดถอย ถ้า  $x\alpha \leq x$  ทุก  $x$  ในโดเมนของ  $\alpha$  ให้  $PT_{RE}(X), T_{RE}(X), I_{RE}(X), U_{RE}(X), V_{RE}(X)$  และ  $W_{RE}(X)$  แทนกึ่งกลุ่มการแปลงบางส่วน ถดถอยบน  $X$ , กึ่งกลุ่มการแปลงเต็มถดถอยบน  $X$ , กึ่งกลุ่มการแปลงบางส่วนหนึ่งต่อหนึ่งซึ่งถดถอยบน  $X$ , กึ่งกลุ่มของการแปลงบางส่วนเกือบเป็นเอกลักษณ์ซึ่งถดถอยของ  $X$  ทั้งหมด, กึ่งกลุ่มของการแปลงเกือบเป็นเอกลักษณ์ซึ่งถดถอยของ  $X$  ทั้งหมด และกึ่งกลุ่มของการแปลงบางส่วนหนึ่งต่อหนึ่งเกือบเป็นเอกลักษณ์ซึ่งถดถอยของ  $X$  ทั้งหมด ตามลำดับ

ถ้า  $S$  เป็นกึ่งกลุ่มการแปลงบนเซต และ  $\theta \in S$  แล้ว  $(S, \theta)$  จะแทนกึ่งกลุ่ม  $S$  ซึ่งมีการคูณ \* กำหนดโดย  $\alpha * \beta = \alpha\theta\beta$  ทุก  $\alpha, \beta \in S$

ผลสำคัญของงานวิจัยมีดังนี้

ทฤษฎีบท 1. ให้  $X$  เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้  $S$  เป็น  $PT_{RE}(X), T_{RE}(X)$  หรือ  $I_{RE}(X)$  ดังนั้น  $S$  ปกติในที่สุด ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่ทำให้  $|C| \leq n$  ทุกเซต  $C$  ของ  $X$

ทฤษฎีบท 2. ถ้า  $X$  เป็นเซตอันดับบางส่วน แล้ว  $U_{RE}(X), V_{RE}(X)$  และ  $W_{RE}(X)$  ปกติในที่สุดทั้งหมด

ทฤษฎีบท 3. ให้  $X$  เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้  $S$  เป็น  $PT_{RE}(X), T_{RE}(X)$  หรือ  $I_{RE}(X)$  และ  $\theta \in S$  ดังนั้น  $(S, \theta)$  ปกติในที่สุด ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่ทำให้  $|C| \leq n$  สำหรับทุกเซต  $C$  ของโดเมนของ  $\theta$  ซึ่งมีสมบัติว่าสำหรับ  $x, y \in C$  ถ้า  $x < y$  แล้ว  $x \leq y\theta \leq y$

บทแทรก 4. ให้  $X$  เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้  $S$  เป็น  $PT_{RE}(X), T_{RE}(X)$  หรือ  $I_{RE}(X)$  และ  $\theta \in S$  ถ้าพิสัยของ  $\theta$  เป็นเซตจำกัด แล้ว  $(S, \theta)$  ปกติในที่สุด

ทฤษฎีบท 5. ให้  $X$  เป็นเซตอันดับบางส่วน ถ้า  $S$  เป็น  $U_{RE}(X), V_{RE}(X)$  หรือ  $W_{RE}(X)$  แล้วสำหรับ  $\theta \in S$  ใดๆ  $(S, \theta)$  ปกติในที่สุด

ภาควิชา ..... คณะศึกษาศาสตร์  
สาขาวิชา ..... คณะศึกษาศาสตร์  
ปีการศึกษา ..... 2541

ลายมือชื่อนิสิต ..... เนตรดาว สุภาสารกิตติกุล  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ..... พุทราภรณ์ เข้มประสิทธิ์  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาพร้อม .....

# # 3970859023 : MAJOR MATHEMATICS  
KEY WORD: EVENTUALLY / REGULAR / REGRESSIVE / TRANSFORMATION / SEMIGROUPS  
NETDAO SUNASARAGITTIGUL : EVENTUALLY REGULAR REGRESSIVE  
TRANSFORMATION SEMIGROUPS. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF. YUPAPORN  
KEMPRASIT, Ph. D. 35 pp. ISBN 974-639-974-8

Let  $S$  be a semigroup. An element  $a$  of  $S$  is said to be regular if  $a = aba$  for some  $b \in S$ . An element  $a$  of  $S$  is said to be eventually regular if  $a^n$  is regular for some positive integer  $n$ . We call  $S$  an eventually regular semigroup if every element of  $S$  is eventually regular.

A partial transformation  $\alpha$  of a set is said to be almost identical if  $x\alpha \neq x$  for at most a finite number of elements  $x$  in the domain of  $\alpha$ .

Let  $X$  be a partially ordered set. A partial transformation  $\alpha$  of  $X$  is said to be regressive if  $x\alpha \leq x$  for all  $x$  in the domain of  $\alpha$ . Let  $PT_{RE}(X)$ ,  $T_{RE}(X)$ ,  $I_{RE}(X)$ ,  $U_{RE}(X)$ ,  $V_{RE}(X)$  and  $W_{RE}(X)$  denote the regressive partial transformation semigroup on  $X$ , the full regressive transformation semigroup on  $X$ , the regressive 1-1 partial transformation semigroup on  $X$ , the semigroup of all regressive almost identical partial transformations of  $X$ , the semigroup of all regressive almost identical transformations of  $X$  and the semigroup of all regressive almost identical 1-1 partial transformations of  $X$ , respectively.

If  $S$  is a transformation semigroup on a set and  $\theta \in S$ , let  $(S, \theta)$  denote the semigroup  $S$  with the product  $*$  defined by  $\alpha * \beta = \alpha\theta\beta$  for all  $\alpha, \beta \in S$ .

The main results of this research are as follows:

**Theorem 1.** Let  $X$  be a partially ordered set and let  $S$  be  $PT_{RE}(X)$ ,  $T_{RE}(X)$  or  $I_{RE}(X)$ . Then  $S$  is eventually regular if and only if there exists a positive integer  $n$  such that for every chain  $C$  of  $X$ ,  $|C| \leq n$ .

**Theorem 2.** If  $X$  is a partially ordered set, then  $U_{RE}(X)$ ,  $V_{RE}(X)$  and  $W_{RE}(X)$  are all eventually regular.

**Theorem 3.** Let  $X$  be a partially ordered set and let  $S$  be  $PT_{RE}(X)$ ,  $T_{RE}(X)$  or  $I_{RE}(X)$  and  $\theta \in S$ . Then  $(S, \theta)$  is an eventually regular semigroup if and only if there exists a positive integer  $n$  such that  $|C| \leq n$  for every chain  $C$  of the domain of  $\theta$  having the property that for  $x, y \in C$ ,  $x < y$  implies  $x \leq y\theta \leq y$ .

**Corollary 4.** Let  $X$  be a partially ordered set and let  $S$  be  $PT_{RE}(X)$ ,  $T_{RE}(X)$  or  $I_{RE}(X)$  and  $\theta \in S$ . If the range of  $\theta$  is finite, then  $(S, \theta)$  is eventually regular.

**Theorem 5.** Let  $X$  be a partially ordered set. If  $S$  is  $U_{RE}(X)$ ,  $V_{RE}(X)$  or  $W_{RE}(X)$ , then for any  $\theta \in S$ ,  $(S, \theta)$  is eventually regular.

ภาควิชา.....คณิตศาสตร์  
สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์  
ปีการศึกษา.....2541

ลายมือชื่อนิสิต.....เนตดาว สุณาสารากิตติกุล  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....ยูปอพร เจริญประสิทธิ์  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....



## ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis advisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. I would like to thank all of the lectures for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my gratitude to my family, teachers and friends for their encouragement throughout my graduate study.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## CONTENTS

	page
ABSTRACT IN THAI.....	iv
ABSTRACT IN ENGLISH.....	v
ACKNOWLEDGEMENT.....	vi
INTRODUCTION.....	1
CHAPTER	
I PRELIMINARIES.....	4
II REGRESSIVE TRANSFORMATION SEMIGROUPS.....	8
III REGRESSIVE GENERALIZED TRANSFORMATION SEMIGROUPS.....	20
REFERENCES.....	34
VITA.....	35

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย