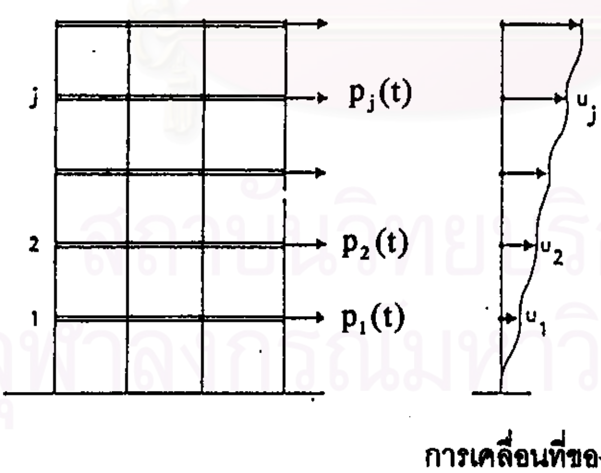
บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษางานวิจัยนี้ พิจารณาโครงสร้างเป็นระบบที่มีหลายดีกรีความอิสระ (Multi-degree of freedom) แล้วใช้หลักการกระจายพลังงาน กระจายพลังงานเข้าสู่โครงสร้างเพื่อหาลักษณะรูปร่างการสั่นไหวที่เหมาะสม จากนั้นจึงคำนวณหาค่าสติฟเนสของโครงสร้างจากลักษณะรูปร่างการสั่นไหวดังกล่าว ดังนั้น ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องประกอบไปด้วย

1. การวิเคราะห์ลักษณะรูปร่างการสั่นไหว (Modal analysis)
2. หลักการกระจายพลังงาน
3. การกำหนดค่าสติฟเนสของโครงสร้างจากลักษณะรูปร่างการสั่นไหว
4. การหาผลตอบสนองของโครงสร้างภายใต้แรงที่แปรผันตามเวลาในสมการการเคลื่อนที่โดยวิธีอินทิเกรททีละขั้น

2.1 <u>การวิเคราะห์ลักษณะรูปร่างการสั่นไหว</u> (Modal Analysis)

ในการวิเคราะห์โครงสร้างเราสามารถจำลองโครงสร้างให้อยู่ในรูปลักษณะของโครงสร้างที่มีหลายดีกรีความอิสระ (Multi-degree of freedom) ได้ดังรูปที่ 2.1ที่แสดงถึง โครงสร้างเมื่อรับแรงภายนอก $p_j(t)$ ทำให้โครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่ u_j



รูปที่ 2.1 องค์อาคารเมื่อรับแรงภายนอก

โครงสร้างข้างต้นจะมีสมการการเคลื่อนที่แบบไม่มีความหน่วงดังนี้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \qquad (2.1)$$

โดยที่ $\mathbf{M}$ = เมทริกซ์ของมวลซึ่งเป็นเมทริกซ์แนวทแยง (Diagonal matrix) ซึ่งสมาชิกคือ ค่ามวลแต่ละชั้นของโครงสร้าง

$\mathbf{K}$ = เมทริกซ์ของสติฟเนสของโครงสร้าง

$\ddot{\mathbf{U}}$ = เวคเตอร์ของความเร่งของโครงสร้าง

$\mathbf{U}$ = เวคเตอร์การเคลื่อนที่ของโครงสร้าง

$\mathbf{0}$ = เวคเตอร์ศูนย์

สมมติให้เวคเตอร์การเคลื่อนที่นี้อยู่ในรูปฮาร์โมนิคอย่างง่ายดังนี้

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \sin(\omega t + \theta) \qquad (2.2)$$

โดยที่ $\hat{\mathbf{U}}$ = ค่าแอมพลิจูด (Amplitude) ของการเคลื่อนที่

ω = ความถี่ของการเคลื่อนที่

t = เวลาในการเคลื่อนที่

θ = ค่าคงที่

เมื่อแทนค่าสมการ (2.2) ลงในสมการ (2.1) จะได้

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \qquad (2.3)$$

เงื่อนไขที่ทำให้สมการ (2.3) เป็นจริง โดยที่ $\hat{\mathbf{U}}$ ไม่เป็นศูนย์

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \mathbf{0} \qquad (2.4)$$

ในการหาค่า ω^2 ในสมการ (2.4) จึงเป็นการแก้ปัญหาของสมการ (2.3) ซึ่งเราเรียกปัญหาในสมการ (2.3) นี้ว่า ปัญหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue problem)

ถ้า $\mathbf{K}$ และ $\mathbf{M}$ เป็นเมทริกซ์มีขนาด n x n ก็จะได้ ω^2 จำนวน n ค่า โดยที่ ω คือค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างในการสั่นไหว และ ω ที่ต่ำสุดเรียกว่า ความถี่ธรรมชาติชั้นพื้นฐาน (Fundamental natural frequency) เมื่อแทนค่า ω^2 แต่ละค่าลงในสมการที่ (2.3) จะได้

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{U}}_r - \omega^2 \mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}_r = \mathbf{0} \qquad : r = 1,2,\ldots,n \qquad (2.5)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (2.5) จะพบว่ามีสมการที่เป็นอิสระต่อกัน เพียง $n-1$ สมการเท่านั้น ดังนั้นเราจึงไม่สามารถหาคำตอบที่แน่นอนได้ แต่เราจะสามารถหาคำตอบโดยนัยได้โดยพิจารณาคำตอบเป็นสัดส่วนของค่าคงที่ เราสามารถเขียนคำตอบของสมการ (2.5) ได้ดังนี้

$$\hat{\mathbf{U}}_r = \phi_r x_r \qquad (2.6)$$

โดยที่

x_r = ค่าคงที่ ที่สัมพันธ์กับ ω_r

ϕ_r = เวคเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) ที่แสดงลักษณะ-รูปร่างการสั่นไหวแบบที่ r ที่สัมพันธ์กับ ω_r

ซึ่ง ω_r และ ϕ_r จะเป็นคุณสมบัติทางการสั่นไหวของโครงสร้างนั้น ๆ

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่โดยทั่วไปที่มีความหน่วงดังสมการ (2.7)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \qquad (2.7)$$

โดย

$\mathbf{C}$ = เมทริกซ์ความหน่วงของโครงสร้างซึ่งเป็นเมทริกซ์แถบ (Band matrix)

$\dot{\mathbf{U}}$ = เวคเตอร์ความเร็วของโครงสร้าง

เราจะสามารถแก้สมการ (2.7) โดยใช้หลักการแยกตัวแปร

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi Y} \qquad (2.8a)$$

เมื่อ $\mathbf{\Phi}$ = เมทริกซ์ของลักษณะรูปร่างการสั่นไหว

(Modal matrix)

เป็นฟังก์ชันกับความสูงของโครงสร้าง

$= [\,\phi_1\,\phi_2 \ldots \phi_n\,]$

$\mathbf{Y}$ = เวคเตอร์ของพิกัดทั่วไป

(Generalized coordinate vector)

เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$= \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = [\,\phi_1\,\phi_2 \ldots\ldots \phi_n\,]\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$= \phi_1\, y_1 + \phi_2\, y_2 + \ldots\ldots + \phi_n\, y_n$$

$$\mathbf{U} = \sum \phi_i\, y_i \qquad (2.8b)$$

แทนค่าสมการ (2.8 b) ใน (2.7) แล้วคูณด้วย ϕ_r^T (Transpose of ϕ_r)

จากคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก (Orthogonality) ซึ่งแสดงในภาคผนวก ก.1

เมื่อ $\mathbf{K, M, C}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะได้

$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_s = 0 \qquad : r \neq s$$
$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_s = 0 \qquad : r \neq s$$
$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_s = 0 \qquad : r \neq s$$

และ

$$\boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_s = k_s^*$$
$$\boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_s = m_s^*$$
$$\boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_s = c_s^*$$

k_s^*, m_s^*, c_s^* คือค่าสติฟเนสทั่วไป ค่ามวลทั่วไป และความหน่วงทั่วไป ของโครงสร้างที่สั่นไหวด้วยลักษณะรูปร่างการสั่นไหวในลักษณะที่ s (Generalized stiffness, mass and damping of the s-th mode)

ซึ่งจากคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก ทำให้เราสามารถแยกสมการ (2.7) ซึ่งเป็นสมการที่เกี่ยวพันกัน n สมการ ให้เป็นสมการที่ไม่เกี่ยวพันกัน n สมการได้

เมื่อเราพิจารณาโครงสร้างที่มีลักษณะการสั่นไหวในลักษณะที่ s เราจะได้สมการการเคลื่อนที่ทั่วไป (Generalized equation of motion)

$$m_s^* \ddot{y}_s + c_s^* \dot{y}_s + k_s^* y_s = p_s^* \qquad (2.9)$$

โดยที่

$m_s^* = \boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_s$ = Generalized mass of s-th mode

$c_s^* = \boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_s$ = Generalized damping of s-th mode

$k_s^* = \boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_s$ = Generalized stiffness of s-th mode

$p_s^* = \boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{P}$ = Generalized force of s-th mode

y_s = Generalized coordinate of s-th mode

$\boldsymbol{\phi}_s$ = Vector of mode shape of the s-th mode

สมการ (2.9) จะเป็นสมการการเคลื่อนที่ของระบบดีกรีอิสระเดี่ยว (Single degree of freedom) ซึ่งคำตอบของสมการ (2.9) แสดงในภาคผนวก ก.2 จะเป็น

$$y_s = \frac{p_s^*}{k_s^*}\frac{\cos(\omega t-\theta)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right]^2}}$$

$$= \frac{p_s^*}{\omega_s^2 m_s^*}\frac{\cos(\omega t-\theta)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right]^2}} \qquad (2.10)$$

จากสมการ (2.10) เราสามารถหาการเคลื่อนที่ของโครงสร้างภายใต้ลักษณะรูปร่างการ-สั่นไหวในลักษณะที่ s ได้ จากนั้นเราพิจารณารวมรูปร่างทุกลักษณะรูปร่างการสั่นไหวดังแสดงในสมการ (2.8b) จะได้การเคลื่อนที่ของโครงสร้างชั้นที่ i ได้

$$U_i = \sum_{s=1}^{n}\frac{p_s^*}{\omega_s^2 m_s^*}\frac{\phi_{i,s}\cos(\omega t-\theta)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right]^2}}$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\phi_{i,s} D_s \cos(\omega t-\theta) \qquad (2.11)$$

โดยที่ $$D_s = \frac{p_s^*}{\omega_s^2 m_s^*}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right]^2}}$$

U_i = การเคลื่อนที่ของโครงสร้างชั้นที่ i

D_s = ค่าการเคลื่อนที่สูงสุดของโครงสร้างในลักษณะ-รูปร่างการสั่นไหวที่ s

ω_s = ความถี่โครงสร้างในลักษณะรูปร่างการสั่นไหวที่ s

ω = ความถี่ของแรงกระทำภายนอก

ξ = อัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio)

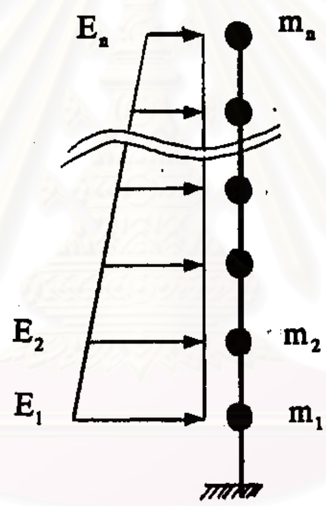
$\phi_{i,s}$ = ลักษณะรูปร่างของอาคารชั้นที่ i ในลักษณะรูปร่าง-การสั่นไหวที่ s

โดยปกติแล้วโครงสร้างมักจะสั่นไหวในลักษณะรูปร่างการสั่นไหวพื้นฐาน (Fundamental mode shape) เท่านั้น ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ เราจึงพิจารณาเฉพาะลักษณะ-รูปร่างการสั่นไหวพื้นฐานเท่านั้น

2.2 หลักการกระจายพลังงาน

รูปที่ 2.2 แสดงถึงโครงสร้างที่มีรูปแบบของมวลเป็นมวลกระจุกตัว โดยที่พลังงานเนื่องจากแรงภายนอกที่กระจายเข้าสู่โครงสร้างชั้นที่ i (E_i) หมายถึง แรงภายนอกที่กระทำต่อโครง-สร้างชั้นที่ i คูณกับระยะทางเคลื่อนที่ของโครงสร้างชั้นที่ i เนื่องจากแรงภายนอกที่มากระทำต่อโครงสร้างชั้นที่ i

ในการใช้หลักการกระจายพลังงานนี้ สามารถทำให้เราควบคุมปริมาณพลังงานเนื่องจากแรงภายนอกได้ตามที่กำหนด เมื่อเรากำหนดรูปแบบพลังงานที่กระจายเข้าสู่โครงสร้างแล้ว เราสามารถหาค่าสติฟเนสของโครงสร้างที่สัมพันธ์กับรูปแบบพลังงานนั้นได้ ซึ่งได้แสดงดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 การกระจายพลังงานเข้าสู่โครงสร้าง

พลังงานที่กระจายเข้าสู่แต่ละชั้นของอาคาร (E_i) เนื่องจากแรงภายนอกตามแนวราบในระยะเวลา 1 คาบของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง

$$E_i = \int_0^T p_i \frac{dU_i}{dt} dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} p_i \cos(\omega t) \dot{U}_i \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} p_i \cos(\omega t) \sum_{s=1}^{n} D_s(-\omega)\sin(\omega t - \theta_s)dt$$

$$= p_i \sum_{s=1}^{n} \phi_{i,s} D_s(-\omega) \int_0^{2\pi/\omega} \cos\omega t \sin(\omega t - \theta_s)dt$$

$$= p_i \sum_{s=1}^{n} \phi_{i,s} D_s(-\omega)(-\frac{\pi \sin\theta_s}{\omega})$$

$$= p_i \pi \sum_{s=1}^{n} \phi_{i,s} D_s \sin\theta_s \qquad (2.12)$$

สมการ (2.12) แสดงถึงพลังงานที่เข้าสู่โครงสร้าง โดยการคำนวณจากทุกลักษณะรูปร่างการสั่นไหวของโครงสร้าง ซึ่งโดยทั่วไปโครงสร้าง จะสั่นไหวในลักษณะรูปร่างการสั่นไหวในลักษณะพื้นฐานเป็นสำคัญ (Fundamental mode shape) ดังนั้นเราจึงพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่ในลักษณะรูปร่างการสั่นไหวในลักษณะพื้นฐาน ในสมการ (2.12) จะได้ว่า

$$E_i = p_i \pi \phi_i D_1 \sin\theta_1 \qquad :i = 1 \qquad (2.13a)$$

$$E_i = p_i \pi (\phi_i - \phi_{i-1}) D_1 \sin\theta_1 \qquad : i = 2,3,..n \qquad (2.13b)$$

จำนวนพลังงานที่เข้าสู่โครงสร้างทั้งหมด E มีค่าเท่ากับ

$$E = \sum E_i$$

$$= p_i \pi \phi_i D_1 \sin\theta_1 + \left[\sum_{i=2}^{n} p_i \pi_i (\phi_i - \phi_{i-1})\right] D_1 \sin\theta_1 \qquad (2.13c)$$

อัตราส่วนของพลังงานที่กระจายสู่โครงสร้างชั้นที่ i ต่อพลังงานทั้งหมด E_i / E มีค่าเท่ากับ

$$\frac{E_i}{E} = \frac{p_1 \phi_1}{p_1\phi_1 + p_2(\phi_2 - \phi_1) + \ldots + p_n(\phi_n - \phi_{n-1})} \qquad :i = 1 \qquad (2.14a)$$

$$\frac{E_i}{E} = \frac{p_i(\phi_i - \phi_{i-1})}{p_1\phi_1 + p_2(\phi_2 - \phi_1) + \ldots + p_n(\phi_n - \phi_{n-1})} \quad : i = 2,3,..n \qquad (2.14b)$$

ถ้าให้ $a_i = \dfrac{p_i}{p_1}$ คืออัตราส่วนแรงที่เข้าสู่โครงสร้างชั้นที่ i ต่อโครงสร้างชั้นที่ 1

$b_i = \dfrac{E_i}{E}$ คืออัตราส่วนพลังงานที่เข้าสู่โครงสร้างชั้นที่ i ต่อพลังงานทั้งหมด

จัดรูปสมการ (2.14a) และ (2.14b) ใหม่ และแทนค่า a_i และ b_i ลงไป จะได้

$$\begin{bmatrix} a_1(1-\frac{1}{b_1})-a_2 & a_2-a_3 & a_3-a_4 & \ldots & a_n \\ a_1-a_2+\frac{a_2}{b_2} & a_2-a_3-\frac{a_2}{b_2} & a_3-a_4 & \ldots & a_n \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_1-a_2 & a_2-a_3 & a_3-a_4 & \ldots & a_n-\frac{a_n}{b_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} = 0 \qquad (2.15)$$

สมการที่ (2.15) เป็นปัญหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue problem) เมื่อเราทราบค่า a_i และ b_i เราสามารถหาค่าของ ϕ_i ได้โดยที่ ϕ_i คือลักษณะรูปร่างของโครงสร้างที่สัมพันธ์กับการกระจายพลังงาน โดยที่ ϕ_i ในสมการ (2.15) ถือเป็นเวคเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) จากนั้นเราสามารถหาค่าสติฟเนสของโครงสร้าง โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\mathbf{K}\,\boldsymbol{\phi} = \omega^2\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\phi} \qquad (2.16)$$

2.3 <u>การกำหนดค่าสติฟเนสของโครงสร้างจากลักษณะรูปร่างการสั่นไหว</u>

พิจารณาสมการ (2.16) หากกำหนดค่าความถี่ ลักษณะรูปร่างสั่นไหว และมวลของโครงสร้างแล้ว เราสามารถที่จะหาค่าสติฟเนสของโครงสร้างได้ดังนี้

สมมติให้สติฟเนสเมทริกซ์ ของโครงสร้างมีขนาด 4 x 4 เมทริกซ์

สมการ (2.16) จะมีรูปร่างของสมการดังนี้

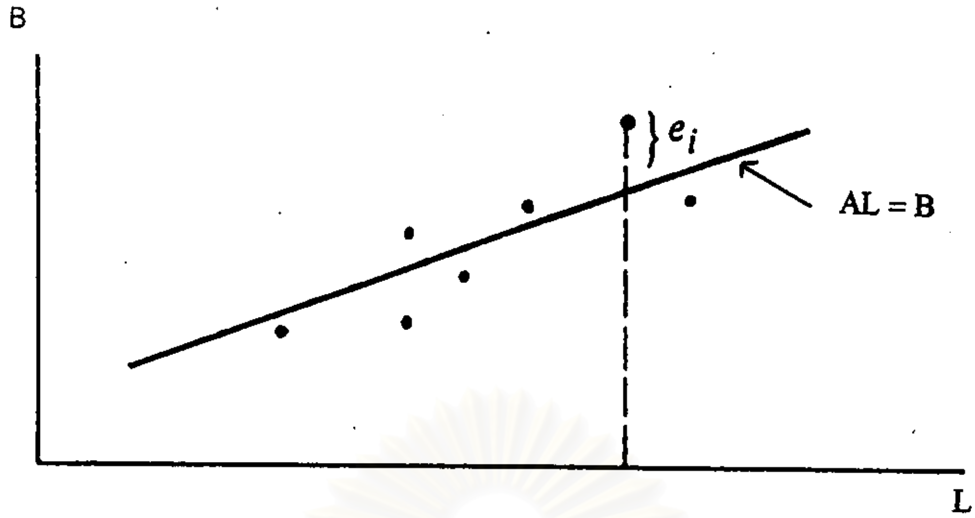
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & \text{sym.} & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega^2 m_1 \phi_1 \\ \omega^2 m_2 \phi_2 \\ \omega^2 m_3 \phi_3 \\ \omega^2 m_4 \phi_4 \end{Bmatrix} \qquad (2.17)$$

ในสมการ (2.17) ถ้าสติฟเนสของโครงสร้าง k_{ij} เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (Unknowns)

จัดรูปสมการ (2.17) ใหม่โดยให้สติฟเนสเมทริกซ์ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (Unknowns)

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & \phi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \\ k_{33} \\ k_{34} \\ k_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega^2 m_1 \phi_1 \\ \omega^2 m_2 \phi_2 \\ \omega^2 m_3 \phi_3 \\ \omega^2 m_4 \phi_4 \end{Bmatrix} \qquad (2.18)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (2.18) มีจำนวนตัวแปร (10 ตัวแปร) มากกว่าจำนวนสมการ (4 สมการ) ดังนั้นเราจึงใช้ วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least squares method) ในการแก้ปัญหาสมการ (2.18)



รูปที่ 2.3 วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least squares method)

สมการ (2.18) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathbf{AL} = \mathbf{B} \qquad (2.19a)$$

โดยที่ $\mathbf{A}$ = เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ซึ่งประกอบไปด้วยลักษณะรูปร่างสั่นไหว

$\mathbf{L}$ = เวคเตอร์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าซึ่งประกอบไปด้วยค่าสติฟเนส

$\mathbf{B}$ = เวคเตอร์ของตัวแปรที่ทราบค่าซึ่งประกอบไปด้วยความถี่ ค่ามวล และ ลักษณะรูปร่างการสั่นไหว

ถ้าให้ $\mathbf{e} = \mathbf{AL} - \mathbf{B}$

โดยที่ $\mathbf{e}$ = เวคเตอร์ของความผิดพลาดที่เกิดขึ้น(ดูรูปที่ 2.3)

และ ค่าความผิดพลาดกำลังสองคือ

$$\mathbf{e}^T\mathbf{e} = (\mathbf{AL} - \mathbf{B})^T(\mathbf{AL} - \mathbf{B}) \qquad (2.19b)$$

ซึ่งเราต้องการที่จะให้ค่าความผิดพลาดยกกำลังสอง $\mathbf{e}^T\mathbf{e}$ มีค่าน้อยที่สุดโดยกำหนดให้

$$\frac{\partial(\mathbf{e}^T\mathbf{e})}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}$$

$$2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{L} - 2\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{L} = \mathbf{A}^T\mathbf{B} \qquad (2.20)$$

โดยที่ $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ = เมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ = เวคเตอร์ของตัวแปรที่รู้ค่า

ในกรณีที่ $\mathbf{K}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4 x 4 ดังแสดงในสมการ (2.17)เมื่อใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด จะได้รูปสมการใหม่ดังสมการ (2.21)

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{10\times10}\ \mathbf{L}_{10\times1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{B})_{10\times1} \qquad (2.21)$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (2.21) จะมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรซึ่งแตกต่างจากสมการ (2.18) ที่จำนวนสมการน้อยกว่าจำนวนตัวแปร แต่เนื่องจากลักษณะรูปร่างการสั่นไหวและ ความถี่ของโครงสร้าง มีด้วยกันหลายค่า ในกรณีสมการ (2.18) จะมีด้วยกัน 4 ค่า จึงต้องทำการแก้ปัญหาในการหาค่าสติฟเนสของโครงสร้าง โดยใช้ค่าลักษณะรูปร่างการสั่นไหวและความถี่ทั้งหมดในการกำหนดค่าสติฟเนส โดยที่ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เวคเตอร์ของตัวแปรที่ทราบ-ค่าและ เวคเตอร์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จะเป็น

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})_{\mathrm{mode1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})_{\mathrm{mode2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})_{\mathrm{mode3}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})_{\mathrm{mode4}} \end{bmatrix} \qquad (2.22a)$$

และ

$$\mathbf{B}^{*} = \left\{ \begin{matrix} (\mathbf{A}^{T}\mathbf{B})_{\mathrm{mode1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\mathbf{A}^{T}\mathbf{B})_{\mathrm{mode2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\mathbf{A}^{T}\mathbf{B})_{\mathrm{mode3}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\mathbf{A}^{T}\mathbf{B})_{\mathrm{mode4}} \end{matrix} \right\} \qquad (2.22b)$$

$$\mathbf{L} = \left\{ \begin{matrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \\ k_{33} \\ k_{34} \\ k_{44} \end{matrix} \right\} \qquad (2.22c)$$

โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้

$$\mathbf{A}^{*}\mathbf{L} = \mathbf{B}^{*} \qquad (2.23a)$$

โดย $\mathbf{A}^{*}$ เป็นเมทริกซ์มีขนาด 40x10

$\mathbf{L}$ เป็นเมทริกซ์มีขนาด 10x1

$\mathbf{B}^{*}$ เป็นเมทริกซ์มีขนาด 40x1

จากนั้นจึงใช้วิธีการกำลังน้อยสุด (Least squares method) แก้ปัญหา ซึ่งจะแปลงรูปสมการ (2.23a) ให้มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรดังสมการ (2.23b)

$$(\mathbf{A}^{*})^{T}\mathbf{A}^{*}\mathbf{L} = (\mathbf{A}^{*})^{T}\mathbf{B}^{*} \qquad (2.23b)$$

โดย $(\mathbf{A}^{*})^{T}\mathbf{A}^{*}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 10x10

$\mathbf{L}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 10x1

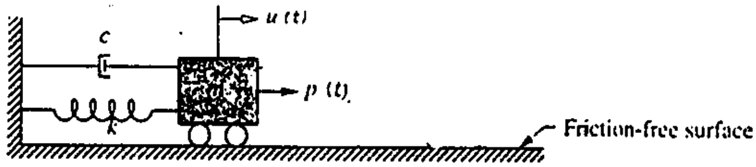
$(\mathbf{A}^{*})^{T}\mathbf{B}^{*}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 10x1

จากนั้นจึงใช้วิธีการทางตัวเลข (Numerical method) ในการแก้สมการ (2.23b) ต่อไปได้ ซึ่งถ้าขนาดของสติฟเนสเมทริกซ์ของโครงสร้างมีขนาด n x n ก็จะมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเท่ากับ n x (n+1) / 2 ถ้า n มีค่ามาก ความยุ่งยากในการแก้สมการก็จะเพิ่มมากขึ้น

2.4 <u>การหาผลตอบสนองของโครงสร้างภายใต้แรงแปรผันตามเวลาในสมการการเคลื่อนที่ โดยวิธีอินทิเกรททีละขั้น</u>

พิจารณาระบบสมการการเคลื่อนที่มีดีกรีความอิสระเดี่ยว ดังรูปที่ 2.4 ซึ่งมีสมการการเคลื่อนที่ดังสมการ (2.24)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \qquad (2.24)$$

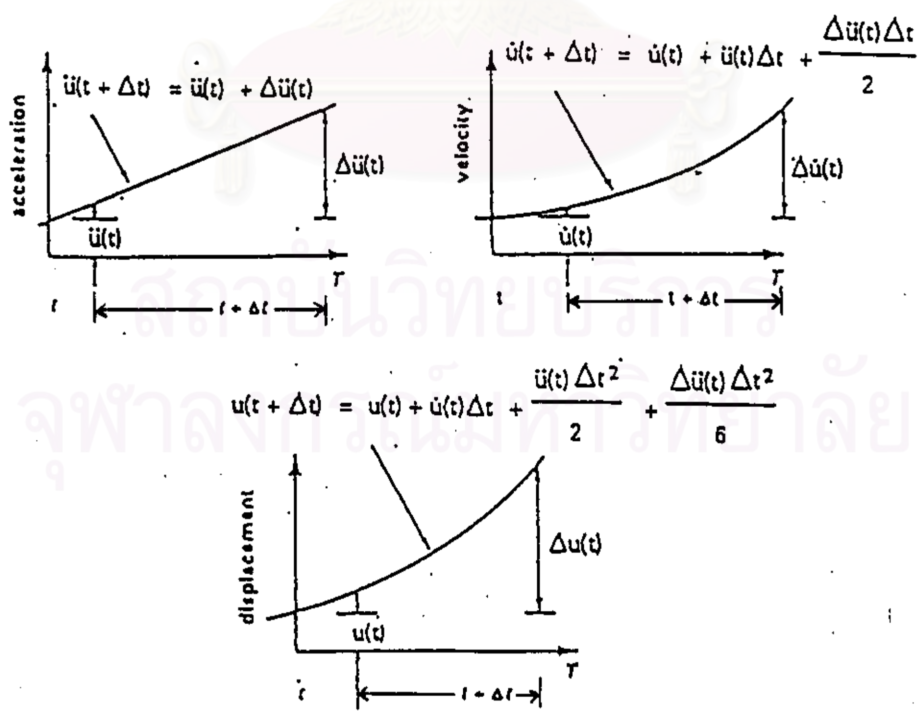


รูปที่ 2.4 ระบบสมการการเคลื่อนที่ที่มีดีกรีความอิสระเดียว

ในช่วงเวลา Δt การเปลี่ยนแปลงของแรงภายนอก $\Delta p(t)$ ที่มากระทำต่อโครงสร้าง ต้องเท่ากับการเพิ่มขึ้นของแรงเฉื่อย แรงหน่วง และแรงในโครงสร้างในเวลา Δt ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$m\Delta\ddot{u}(t) + c\Delta\dot{u}(t) + k\Delta u(t) = \Delta p(t) \qquad (2.25)$$

วิธีอินทิเกรททีละขั้นที่ใช้ในงานวิจัยนี้ มีข้อสมมติฐานว่า อัตราเร่งมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรง (Linear acceleration method) ดังนั้นความเร็วจะมีการเปลี่ยนแปลงเป็นพาราโบลา และการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนแปลงเป็นคิวบิค ดังแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงอัตราเร่ง ความเร็ว และการเคลื่อนที่

ซึ่งจะหาค่าความเปลี่ยนแปลงของความเร็ว การเคลื่อนที่ และความเร่งของโครงสร้างได้ดังนี้

$$\Delta\dot{u}(t) = \ddot{u}(t)\Delta t + \Delta\ddot{u}(t)\Delta t/2 \quad (2.26a)$$

$$\Delta u(t) = \dot{u}(t)\Delta t + \ddot{u}(t)/2 + \Delta\ddot{u}(t)\Delta t^2/6 \quad (2.26b)$$

$$\Delta\ddot{u}(t) = 6\Delta u(t)/\Delta t^2 - 6\dot{u}(t)/\Delta t - 3\ddot{u}(t) \quad (2.26c)$$

แทนค่าสมการ (2.26c) ลงในสมการ (2.26a)

$$\Delta\dot{u}(t) = 3\Delta u(t)/\Delta t - 3\dot{u}(t) - \Delta t\,\ddot{u}(t)/2 \quad (2.27)$$

แทนค่าสมการ (2.26c) และ (2.27) ลงในสมการ (2.25)

$$m[6\Delta u(t)/\Delta t^2 - 6\dot{u}(t)/\Delta t - 3\ddot{u}(t)] + c[3\Delta u(t)/\Delta t - 3\dot{u}(t) - \Delta t\,\ddot{u}(t)/2] + k\Delta u(t) = \Delta p(t) \quad (2.28)$$

จัดรูปสมการ (2.28) ใหม่ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ทางสติฟเนสทางพลศาสตร์ ได้ดังนี้

$$\tilde{K}\,\Delta u(t) = \Delta\tilde{P}(t) \quad (2.29)$$

โดยที่ $\tilde{K} = k + 6m/\Delta t^2 + 3c/\Delta t$ (2.30)

$$\Delta\tilde{P}(t) = \Delta p(t) + m[6\dot{u}(t)/\Delta t + 3\ddot{u}(t)] + c[3\dot{u}(t) + \Delta t\,\ddot{u}(t)/2] \quad (2.31)$$

สมการ (2.30) และ (2.31) เป็นสมการที่ใช้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อนำไปคำนวณหาการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นได้จากสมการ (2.29) จากนั้นนำค่าที่ได้ไปแทนในสมการ (2.27) เพื่อคำนวณหาค่าความเร็วที่เพิ่มขึ้น ค่าการเคลื่อนที่และความเร็วที่เพิ่มขึ้น จะนำไปแทนค่าในสมการ (2.25) เพื่อหาค่าความเร่งที่เพิ่มขึ้น

การสมมติให้มีอัตราเร่งมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรง และการสมมติให้คุณสมบัติของโครงสร้างในทางพลศาสตร์มีค่าคงที่ในการคำนวณแต่ละขั้นนั้น ทำให้ค่าที่ได้เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น และค่าต่าง ๆ ที่ได้อาจไม่สอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่โดยสมบูรณ์ที่ปลายของขั้น ดังนั้นในการคำนวณความเร่งที่จุดเริ่มต้นใหม่ จึงต้องพิจารณาสมการของการเคลื่อนที่ที่จุดเริ่มต้นของขั้นนั้น กล่าวคือ

$$\ddot{u}(t+\Delta t) = [p(t+\Delta t) + c\dot{u}(t+\Delta t) - ku(t+\Delta t)]/m \qquad (2.32)$$

ซึ่งในการคำนวณการเคลื่อนที่ ความเร็ว และความเร่ง ของโครงสร้างในช่วงเวลาต่าง ๆ สามารถเขียนเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้น

   1.1 $a = \frac{6}{\Delta t}m + 3c$ และ $b = 3m + \Delta t(\frac{c}{2})$

2. คำนวณในแต่ละช่วงเวลา

   2.1 $\tilde{K}(t) = k_i(t) + \frac{3c}{\Delta t} + \frac{6}{\Delta t^2}m$

   2.2 $\Delta\tilde{P}(t) = \Delta p(t) + a\dot{u}(t) + b\ddot{u}(t)$

   2.3 หาค่า $\Delta u(t)$ จากสมการ (2.29)

   2.4 หาค่า $\Delta\dot{u}(t)$ จากสมการ (2.27)

   2.5 $\Delta\ddot{u}(t) = \frac{p(t) - c\dot{u}(t) - ku(t)}{m}$

   2.6 $u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta u(t)$ $\quad \dot{u}(t+\Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta\dot{u}(t)$

   $\ddot{u}(t+\Delta t) = \ddot{u}(t) + \Delta\ddot{u}(t)$

3. คำนวณครั้งต่อไปโดยกระทำข้อ 2. ซ้ำอีก สำหรับในช่วงเวลาต่อไป