

เทคนิคการควบคุมไม่เชิงเส้นสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน



นายอธิป วางขุนทด

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

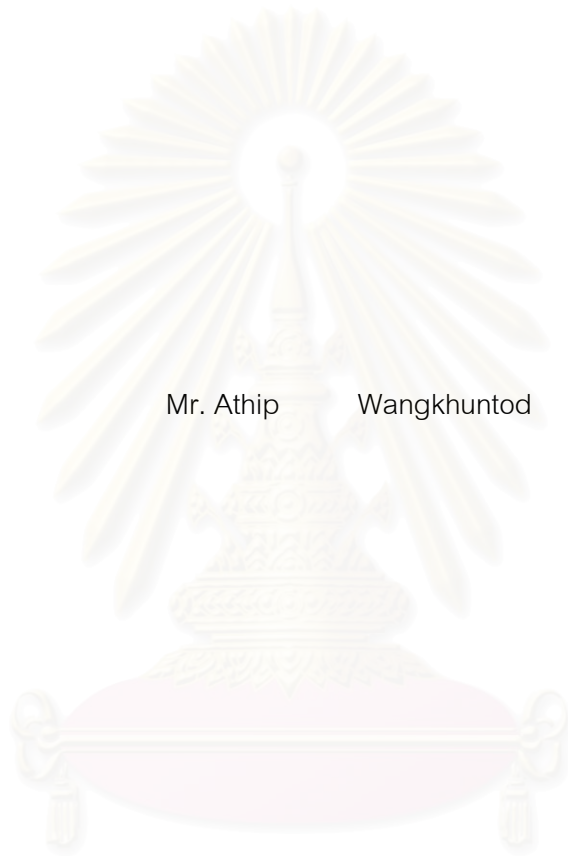
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A NON-LINEAR CONTROL TECHNIQUE FOR A ROTARY INVERTED PENDULUM



Mr. Athip Wangkhuntod

สถาบันวิทยบริการ

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2008

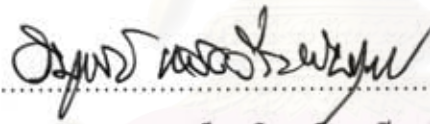
Copyright of Chulalongkorn University


หัวข้อวิทยานิพนธ์ เทคนิคการควบคุมไม่เชิงเส้นสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
โดย นายอธิป วางขุนทด
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร. รัชทิน จันทร์เจริญ


คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นักศึกษานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

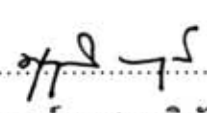

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ)


..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
(รองศาสตราจารย์ ดร.รัชทิน จันทร์เจริญ)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทยา วัฒนสุโขประสิทธิ์)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภวุฒิ จันทธานุวัฒน์)

อธิป วาขุนทด : เทคนิคการควบคุมไม่เชิงเส้นสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน. (A NON-LINEAR CONTROL TECHNIQUE FOR A ROTARY INVERTED PENDULUM), อ.ที่
 ปรักษาวิทยานิพนธ์หลัก: รศ.ดร.รัชทิน จันทรเจริญ, 92 หน้า.

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เสนอตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนซึ่งตัวควบคุมประกอบด้วยตัวควบคุมเพื่อแกว่งเพนดูลัมขึ้นและตัวควบคุมรักษาสมดุล ตัวควบคุมเพื่อแกว่งแกว่งเพนดูลัมขึ้นออกแบบเพื่อแกว่งแกว่งเพนดูลัมให้ขึ้นไปสู่ตำแหน่งตั้งขึ้นซึ่งออกแบบโดยใช้พื้นฐานจากพลังงานของแกว่งเพนดูลัมเนื่องจากระบบมีองศาอิสระเท่ากับสองแต่มีตัวขับเพียงหนึ่งจึงไม่สามารถควบคุมการเคลื่อนที่ของทั้งสององศาอิสระพร้อมๆกันได้ ด้วยเหตุนี้อินพุตจึงถูกออกแบบเพื่อควบคุมพลังงานทั้งหมดในระบบให้เท่ากับพลังงานศักย์ที่ตำแหน่งตั้งตรงด้วยทิศทางที่ถูกต้องเมื่อเพนดูลัมแกว่งผ่านจุดตั้งตรงตัวควบคุมเพื่อรักษาสมดุลจะเข้ามาทำหน้าที่แทน ซึ่งตัวควบคุมที่สองนี้จะทำหน้าที่รักษาเพนดูลัมให้อยู่ในลักษณะตั้งตรงต่อไป การออกแบบตัวควบคุมรักษาสมดุลจะใช้ตัวคุมค่ากำลังสองเชิงเส้นซึ่งเป็นเทคนิคสำหรับระบบเชิงเส้น แต่เพราะที่จุดสมดุลสามารถแปลงระบบเพนดูลัมให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้ ตัวควบคุมเชิงเส้นจึงสามารถนำมาใช้ได้ และในกรณีเพนดูลัมทำมุมกับแนวตั้งตรงเกินกว่า ± 20 องศา ที่ซึ่งแบบจำลองเชิงเส้นที่จุดตั้งขึ้นไม่สามารถพรรณนาระบบได้แม่นยำ จะทำการเปลี่ยนกลับไปสู่ตัวควบคุมเพื่อแกว่งเพนดูลัมขึ้นอีกครั้ง ตัวควบคุมที่ออกแบบไว้ทั้งสองตัวจะถูกติดตั้งบนตัวประมวลผลร่วมระหว่างไมโครโปรเซสเซอร์และเอฟทีซีเอ

จากผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมทั้งสองทั้งในส่วนตัวควบคุมแกว่งเพนดูลัมขึ้นและตัวควบคุมรักษาสมดุลให้ผลการทำงานได้ดีและการสับเปลี่ยนโหมดทำได้อย่างรวดเร็ว

สถาบันวิทยบริการ
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล.....ลายมือชื่อนิสิต.....*Pat Ong*
 สาขาวิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล.....ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
 ปีการศึกษา.....2551.....


4870633621: MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: ROTARY INVERTED PENDULUM/ CONTROL BY ENERGY/ ENERGY
BASED/ LINEAR STATE FEEDBACK/ LINEAR QUADRATIC/

ATHIP WANGKHUNTOD: A NON-LINEAR CONTROL TECHNIC FOR A ROTARY
INVERTED PENDULUM. ADVISOR: ASSOC. PROF. RATCHATIN
CHANCHAROEN, 92 pp.

This thesis proposes a controller for a rotary inverted pendulum. The controller consists of two modes, i.e., swing up and stabilization modes. In swing up mode, the controller is designed to bring the pendulum from stable downward equilibrium to unstable upright equilibrium position. The energy based control technique is used in this mode. This is because an inverted pendulum is under-actuated system, single input but two degrees of freedom, the input cannot control motion of both degrees simultaneously. Thus, the input is design to control the total energy in the system that equal to the potential energy at the upright position and the direction of applied torque. Once the pendulum passes the upright equilibrium, the control switches to stabilization mode. In stabilization mode, the controller is designed to maintain the pendulum at the upright position. The LQR control technique is used in this mode. Since pendulum at the upright position can be accurately linearized, a linear control technique such as LQR can be effectively designed. In case that the pendulum position exceeds ± 20 degrees from the upright position where the linear model at the upright position can not accurately describe the system, the control switches back to swing up mode. The control laws are implemented on microprocessor-FPGA coprocessor.

The experimental result demonstrates that the proposed controller can control the rotary inverted pendulum, both in swing up and stabilization modes. The switching is also smooth.

Department: Mechanical Engineering Student's Signature: 

Field of Study: Mechanical Engineering Advisor's Signature: 

Academic Year: 2008

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างยิ่ง ของรองศาสตราจารย์ ดร.รัชทิน จันทรเจริญ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้ความกรุณา สละเวลาอันมีค่า ให้คำปรึกษาพร้อมทั้งข้อคิดเห็นต่างๆ และช่วยเหลือข้าพเจ้าให้เห็นแนวทางในการทำวิทยานิพนธ์จนสามารถทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

นอกจากนี้ผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณคณาจารย์ผู้ทรงคุณวุฒิ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลที่ถ่ายทอดความรู้ คำแนะนำและให้คำปรึกษาตลอดระยะเวลาที่ศึกษา ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับอุปกรณ์ที่ใช้ในงานวิจัย และขอขอบคุณ MTEC ที่สนับสนุนเครื่อง compact RIO และคอมพิวเตอร์โน้ตบุ๊ก ซึ่งเป็นอุปกรณ์สำคัญสำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ ขอขอบคุณเพื่อนนิสิต รุ่นพี่ รุ่นน้องทุกคนในห้องวิจัยที่ให้คำปรึกษาและเป็นกำลังใจรวมถึงบุคคลใกล้ชิดที่อำนวยความสะดวกให้การสนับสนุนอุปกรณ์สำหรับงานเขียนวิทยานิพนธ์ชิ้นนี้

ท้ายสุดนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้แรงบันดาลใจ และมอบความรักความอบอุ่นแก่ข้าพเจ้าให้ข้าพเจ้ามีความมุ่งมั่น ไม่ย่อมนแพ้ต่ออุปสรรค ทำให้ข้าพเจ้าสามารถศึกษาต่อระดับปริญญาโทได้สำเร็จลุล่วง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญภาพ.....	ฎ
สัญลักษณ์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์.....	ฐ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	2
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์	2
1.4 ขั้นตอนดำเนินงาน.....	3
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ.....	3
1.6 โครงสร้างรายงานวิทยานิพนธ์	3
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
2.1 แนวคิดของเพนดูลัมผกผัน	5
2.2 ชนิดของเพนดูลัมผกผัน	5
2.2.1 เพนดูลัมผกผันบนรถ	5
2.2.2 เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวนอน.....	6
2.2.3 เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวตั้ง.....	7
2.2.4 เพนดูลัมผกผันแบบแท่งสมดุล.....	7
2.2.5 หุ่นยนต์เพนดูลัมผกผันเคลื่อนที่.....	8
2.3 การควบคุมเพนดูลัมผกผัน.....	9
2.3.1 ตัวควบคุมสำหรับแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้น	10
2.3.2 ตัวควบคุมสำหรับรักษาสถิตของแท่งเพนดูลัม	12
บทที่ 3 ระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนที่ใช้ในงานวิจัย.....	18
3.1 ภาพรวมของระบบ.....	18

3.2 รายละเอียดชุดทดลอง	19
3.2.1 คอมพิวเตอร์	19
3.2.2 เครื่อง NI cRIO	19
3.2.3 โปรแกรมที่ใช้ควบคุม	19
3.2.4 เครื่องขยายสัญญาณขับเคลื่อน	20
3.2.5 แหล่งจ่ายพลังงาน	20
3.2.6 มอเตอร์พร้อมเอนโคเดอร์	21
3.2.7 เอนโคเดอร์สำหรับแขนหุ่นยนต์	21
3.2.8 วงจรแปลงสัญญาณ	21
บทที่ 4 แบบจำลองระบบหุ่นยนต์	23
4.1 การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	23
4.1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์	24
4.2 การแปลงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเชิงเส้น	29
4.3 รูปแบบปริภูมิสถานะ	29
4.4 การหาค่าพารามิเตอร์ของระบบ	30
4.4.1 ค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์	30
4.4.2 ค่าอัตราขยายของเครื่องขยายสัญญาณ	30
4.4.3 ค่าพารามิเตอร์ของระบบหุ่นยนต์	30
บทที่ 5 การควบคุมระบบหุ่นยนต์แบบหมุน	34
5.1 การควบคุมหุ่นยนต์	34
5.2 การควบคุมสำหรับแกว่งแกว่งหุ่นยนต์	34
5.3 การควบคุมสำหรับรักษาสมดุลแกว่งหุ่นยนต์	38
5.3.1 การป้องกันการสั่นไหวด้วยการวางตำแหน่งโพล	38
5.3.2 การควบคุมแบบ Linear Quadratic Regulator	42
5.3.3 คุณสมบัติของระบบป้องกันการสั่น LQR	47
5.3.4 อัตราขยายที่ใช้ในการควบคุมระบบหุ่นยนต์แบบหมุน	53
5.4 การสับเปลี่ยนตัวควบคุม	56
5.5 ตัวประมวลผลรวม	57

5.5.1 ไมโครโปรเซสเซอร์.....	57
5.5.2 FPGA.....	59
5.6 ผลการทดลอง.....	59
5.7 สรุปผลการทดลอง.....	64
บทที่ 6 สรุปผลและข้อเสนอแนะ.....	65
6.1 บทสรุป.....	65
6.2 ข้อเสนอแนะ.....	66
รายการอ้างอิง.....	67
ภาคผนวก.....	71
ภาคผนวก ก.....	72
ภาคผนวก ข.....	75
ภาคผนวก ค.....	84
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	92

สารบัญตาราง

หน้า	
ตารางที่ 2-1	สรุปประเภทของเพนดูลัมผกผัน 9
ตารางที่ 4-1	ชนิดของพารามิเตอร์โดยการแบ่งตามวิธีหา..... 30
ตารางที่ 4-2	ค่าพารามิเตอร์ของระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนที่ใช้ในงานวิจัย 31
ตารางที่ 5-1	ส่วนโปรแกรมในแต่ละอุปกรณ์..... 64
ตารางที่ ก-1	ความสัมพันธ์ระหว่าง β และ θ 72
ตารางที่ ค-1	ค่าความต้านทานเฉลี่ยตามครั้งการทดลอง..... 84
ตารางที่ ค-2	แสดงการหาค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ K_b 84
ตารางที่ ค-3	ผลการทดลองหาอัตราขยายเครื่องขยายสัญญาณ 86
ตารางที่ ค-4	ผลการทดลองหาอัตราขยายเครื่องขยายสัญญาณหลังปรับอัตราขยาย 88
ตารางที่ ค-5	ผลการหาพารามิเตอร์ของแท่งเพนดูลัม 89
ตารางที่ ค-6	ผลการหาพารามิเตอร์ทั้งระบบ 91
ตารางที่ ค-7	พารามิเตอร์ที่ได้จากการหาด้วยวิธีต่างๆ..... 91

สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 2-1 เพนดูลัมผกผันบนรถ (Cart and Pole Inverted Pendulum).....	5
รูปที่ 2-2 เพนดูลัมผกผันแบบหมุน (Rotary Inverted Pendulum).....	6
รูปที่ 2-3 เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวตั้ง (Pendubot Inverted Pendulum)	7
รูปที่ 2-4 เพนดูลัมผกผันแบบแท่งสมดุล (Balanced Rod Inverted Pendulum)	8
รูปที่ 2-5 หุ่นยนต์เพนดูลัมผกผันเคลื่อนที่ (Inverted Pendulum Mobile Robot)	8
รูปที่ 2-6 Positive Feedback PID	12
รูปที่ 2-7 Positive Feedback PID with Pulse Control.....	12
รูปที่ 2-8 ตัวควบคุมนิวโร-ฟัซซี่ชนิดกฎอินพุตเดี่ยว	14
รูปที่ 2-9 Self-tuning neuro-PID	14
รูปที่ 3-1 แผนภาพแสดงการติดตั้งชุดทดลอง	18
รูปที่ 3-2 เครื่อง NI cRIO รุ่น 9074.....	19
รูปที่ 3-3 หน้าต่างโปรแกรม Labview	20
รูปที่ 3-4 สัญญาณคลื่นไซน์และคลื่นสี่เหลี่ยม	21
รูปที่ 3-5 สัญญาณพัลส์ปกติและสัญญาณชั่วกลับ	22
รูปที่ 4-1 การตั้งแกนของเพนดูลัม (Co-ordinate system).....	23
รูปที่ 4-2 ค่าตำแหน่งแกนที่ได้จากการทดลองและแบบจำลอง	32
รูปที่ 4-3 ค่าตำแหน่งแท่งเพนดูลัมที่ได้จากการทดลองและแบบจำลอง.....	33
รูปที่ 5-1 แท่งเพนดูลัม	35
รูปที่ 5-2 การแกว่งที่ของแท่งเพนดูลัม.....	37
รูปที่ 5-3 แผนภาพในควิสต์ของระบบป้อนกลับสเตต LQR	50
รูปที่ 5-4 ระบบป้อนกลับสเตตที่มีความไม่แน่นอนที่อินพุตของพลาเน็ต	51
รูปที่ 5-5 การตอบสนองของสัญญาณขึ้น.....	55
รูปที่ 5-6 เงื่อนไขการสับเปลี่ยนตัวควบคุม.....	57
รูปที่ 5-7 โครงสร้าง FPGA.....	58
รูปที่ 5-8 ผลการควบคุมเพนดูลัม	60
รูปที่ 5-9 พลังงานของแท่งเพนดูลัม	61
รูปที่ 5-10 ตำแหน่งแกนเพนดูลัมและแท่งเพนดูลัม	62

รูปที่ 5-11 ตำแหน่งและความเร็วแท่งเพนดูลัม.....	62
รูปที่ 5-12 เวลาในการคำนวณ.....	63
รูปที่ ก-1 การตั้งแกนของเพนดูลัม (Co-ordinate system).....	72
รูปที่ ข-1 วงจรระบบของมอเตอร์.....	75
รูปที่ ข-2 การแกว่งอย่างอิสระของแท่งเพนดูลัม.....	82
รูปที่ ค-1 ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณควบคุมและกระแสโดยให้มอเตอร์หมุน.....	85
รูปที่ ค-2 ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณควบคุมและกระแสโดยหยุดมอเตอร์.....	86
รูปที่ ค-3 ความสัมพันธ์สัญญาณควบคุมและกระแสโดยมอเตอร์หมุนหลังลดอัตราขยาย.....	87
รูปที่ ค-4 ความสัมพันธ์สัญญาณควบคุมและกระแสโดยหยุดมอเตอร์หลังลดอัตราขยาย.....	87
รูปที่ ค-5 การแกว่งอย่างอิสระของแท่งเพนดูลัม.....	88
รูปที่ ค-6 ตำแหน่งของเพนดูลัมและเส้นโค้งยกกำลังแทนค่าแอมพลิจูดสูงสุด.....	89
รูปที่ ค-7 ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณ.....	90

สัญลักษณ์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

สัญลักษณ์	หน่วย	คำอธิบาย
α	เรเดียน (Radian)	มุมของแกนเพนดูลัมในแนวแกน Z
β	เรเดียน (Radian)	มุมของแท่งเพนดูลัมเทียบกับแกน X ที่ตำแหน่งตั้งขึ้น
J_0	$kg - m^2$	ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแกนเพนดูลัมรอบจุดหมุน
J_1	$kg - m^2$	ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งเพนดูลัมรอบจุดหมุน
C_0	$kg - m^2 / s$	สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของแกนเพนดูลัม
C_1	$kg - m^2 / s$	สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของแท่งเพนดูลัม
m_1	kg	มวลของแท่งเพนดูลัม
L_0	m	ระยะจากจุดหมุนของแท่งเพนดูลัมถึงแกนหมุนของแกนเพนดูลัม
l_1	m	ระยะจากจุดหมุนถึงจุดศูนย์กลางมวลของแท่งเพนดูลัม
K_b	$V - s / rad$	ค่าคงที่แรงดันย้อนกลับ (Back EMF Constant)
K_t	Nm / A	ค่าคงที่แรงบิดของมอเตอร์
K_u	A / V	อัตราขยายของเครื่องขยายสัญญาณ
u	V	สัญญาณควบคุม

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในอดีตที่ผ่านมามนุษย์ได้มีความพยายามที่จะควบคุมเครื่องจักรให้มีพฤติกรรมตามที่ต้องการ ระบบควบคุมก็เป็นไปอย่างง่าย ๆ ไม่ซับซ้อน แต่เมื่อเทคโนโลยีพัฒนามากขึ้นการทำงานของเครื่องจักรก็ซับซ้อนขึ้น ระบบควบคุมจึงต้องพัฒนาสามารถรองรับความซับซ้อนเหล่านั้นได้ รวมถึงทฤษฎีที่นำมาใช้ก็ถูกพัฒนาเรื่อยมา

การออกแบบระบบควบคุมในปัจจุบันนิยมออกแบบโดยอยู่บนพื้นฐานของแบบจำลองเชิงเส้น (Linear model) เนื่องจากมีวิธีการออกแบบตัวควบคุมที่เป็นระบบขั้นตอน และมีเครื่องมือที่เอนกประสงค์ในการสังเคราะห์ตัวควบคุม รวมถึงทฤษฎีต่างๆที่ใช้อธิบายระบบเชิงเส้นมีมากมาย และไม่ซับซ้อน ดังนั้นการที่จะควบคุมผลตอบสนองชั่วคราว (Transient response) และค่าความผิดพลาด (Steady state error) สามารถกระทำได้ การวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะก็กระทำได้ง่าย โดยดูจากค่าโพล (Pole) ของระบบหรือสามารถใช้เกณฑ์เสถียรภาพของเรอท์ (Routh's stability criteria) [1] มาวิเคราะห์ได้ ส่วนเครื่องมือที่ใช้ในการออกแบบระบบเชิงเส้นที่ใช้กันแพร่หลายคือแผนภาพ Root locus และ Bode plot [1] ในการใช้แผนภาพ Root locus จะนำมาใช้วิเคราะห์ตำแหน่งโพลที่ต้องการเพื่อให้ได้ผลตอบสนองชั่วคราวเป็นอย่างไรที่ต้องการ และนำไปสู่การออกแบบตัวควบคุมแบบ PID เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ ส่วนการใช้แผนภาพ Bode plot จะใช้ในการดูผลตอบสนองเชิงความถี่เพื่อวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดและเสถียรภาพของระบบ

ในส่วนแบบจำลองไม่เชิงเส้น (Nonlinear model) นั้นสามารถอธิบายคุณสมบัติทางกายภาพของระบบได้ดีกว่า แต่ด้วยความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์ทำให้การออกแบบตัวควบคุมทำได้ยากเนื่องจากไม่มีวิธีการใดวิธีหนึ่งที่เป็นวิธีอเนกประสงค์เพื่อการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบไม่เชิงเส้นใดๆ การแปลงระบบไม่เชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้นนั้นยังเป็นที่นิยมแพร่หลายอยู่ เนื่องจากเครื่องมือในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นนั้นมีความสะดวกและน่าเชื่อถือ การออกแบบตัวควบคุมสมัยใหม่ (Modern control) โดยใช้ปริภูมิสถานะ (State space model) [1] มีความสามารถรองรับระบบที่มีอินพุตและเอาต์พุตหลายค่า (MIMO) ได้สะดวกยิ่งขึ้นจึงเป็นวิธีการออกแบบตัวควบคุมอีกแนวทางหนึ่งที่น่าสนใจ อีกแนวทางหนึ่งที่นำมาใช้เพื่อลดความ

ยุ่งยากของคณิตศาสตร์ของแบบจำลองไม่เชิงเส้นคือการใช้ตัวควบคุมเพื่อแปลงระบบไม่เชิงเส้นเป็นระบบเชิงเส้น (Feedback linearization)

การแปลงระบบไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้นด้วยการป้อนกลับมีอยู่สองวิธีการ

[12] คือ Input State Feedback Linearization และ Input-Output Feedback Linearization ในส่วนของวิธี Input-State Feedback Linearization จะใช้วิธีการเปลี่ยนให้สเตตและอินพุตไปอยู่ในรูปเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา วิธีการนี้จะมีความยุ่งยากที่การเปลี่ยนระบบให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น ส่วนวิธีการ Input-Output Feedback Linearization มีแนวคิดคือหาความสัมพันธ์ที่ตรงและง่ายระหว่างเอาต์พุตของระบบและอินพุตควบคุม ในวิธีการนี้จะมีส่วนที่เรียกว่า พลวัตภายใน (Internal Dynamics) ซึ่งยากในการพิสูจน์เสถียรภาพของระบบ

เพนดูลัมผกผันแบบหมุน (Rotary inverted pendulum) เป็นระบบหนึ่งที่มีความน่าสนใจ ในทางปฏิบัติระบบดังกล่าวเป็นระบบที่มีองศาอิสระ (Degrees of Freedom, DOF) เท่ากับสองในขณะที่มีตัวขับ (Actuator) หนึ่งตัว จึงเป็นระบบที่มีจำนวนอินพุตน้อยกว่า พารามิเตอร์ที่ต้องการควบคุม (Under-actuated) จึงเห็นได้ว่าเป็นระบบไม่มีเสถียรภาพและมีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง เป้าหมายในการควบคุมคือรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัมให้อยู่ในตำแหน่งแนวตั้งในลักษณะกลับทางซึ่งเป็นจุดสมดุลที่ไร้เสถียรภาพ (Unstable equilibrium point)

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

- 1.) เพื่อศึกษาพฤติกรรมของระบบไม่เชิงเส้นโดยใช้เพนดูลัมผกผันเป็นกรณีศึกษา
- 2.) เพื่อออกแบบตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
- 3.) เพื่อพัฒนาการประสิทธิภาพของตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

- 1.) ออกแบบและสร้างเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
- 2.) สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
- 3.) ศึกษาวิธีการควบคุมระบบไม่เชิงเส้น ทั้งในส่วนตัวควบคุมแกว่งเพนดูลัมขึ้นและตัวควบคุมรักษาสมดุล
- 4.) ออกแบบและใช้งานตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมแบบหมุน
- 5.) ทดสอบสมรรถนะตัวควบคุมที่สังเคราะห์ได้กับระบบจำลองและระบบจริง

1.4 ขั้นตอนดำเนินงาน

- 1.) ออกแบบและสร้างชุดทดลองเป็นแบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
- 2.) ศึกษาพฤติกรรมของระบบไม่เชิงเส้น และการแปลงระบบไม่เชิงเส้นเป็นระบบเชิงเส้น (Linearization)
- 3.) ศึกษาวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบไม่เชิงเส้นด้วยวิธีการป้อนกลับด้วยการแปลงระบบไม่เชิงเส้นเป็นระบบเชิงเส้น (Feedback linearization) เนื้อหาที่เกี่ยวข้องคือ เทคนิคการสังเคราะห์ตัวควบคุมแบบต่างๆ การวิเคราะห์เสถียรภาพ และสมรรถนะระบบควบคุม
- 4.) ศึกษาการสังเคราะห์ตัวควบคุมด้วยวิธีการป้อนกลับด้วยการแปลงระบบไม่เชิงเส้นเป็นระบบเชิงเส้น (Feedback linearization) เทคนิคอื่นๆที่เหมาะสม
- 5.) ออกแบบตัวควบคุมการแปลงระบบไม่เชิงเส้นเป็นระบบเชิงเส้น (Feedback linearization) สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน และจำลองการตอบสนองของระบบใช้โปรแกรม MATLAB/Simulink
- 6.) ทดสอบตัวควบคุมที่ออกแบบไว้กับชุดทดลองเพื่อดูการทำงานจริงผ่านโปรแกรม Labview

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ

- 1.) อุปกรณ์ทดลองเพนดูลัม
- 2.) ความเข้าใจในพฤติกรรมของระบบไม่เชิงเส้น
- 3.) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
- 4.) แนวทางการออกแบบควบคุมระบบไม่เชิงเส้นด้วยการแปลงระบบเป็นเชิงเส้น สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

1.6 โครงสร้างรายงานวิทยานิพนธ์

บทที่ 1 กล่าวถึงความสำคัญและที่มาของปัญหา ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ ลำดับขั้นตอนการดำเนินงาน และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

บทที่ 2 กล่าวถึงผลงานวิจัยต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการควบคุมระบบไม่เชิงเส้น การควบคุมระบบเพนดูลัมผกผันแบบต่าง และการออกแบบตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

บทที่ 3 อธิบายภาพรวมระบบของอุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง การติดตั้ง และรายละเอียดเบื้องต้นของอุปกรณ์ที่ใช้

บทที่ 4 แสดงการวิเคราะห์ห้ระบบเพนคูล์มผกผัน การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ปริภูมิสแตต การหาค่าพารามิเตอร์ของระบบ และแบบจำลองที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

บทที่ 5 กล่าวถึงทฤษฎี การออกแบบตัวควบคุมที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ ผลการทดลอง และสรุปผลการทดลอง

บทที่ 6 บทสรุปเนื้อหาของวิทยานิพนธ์ และข้อเสนอแนะ



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แนวคิดของเพนดูลัมผกผัน

เริ่มแรกเพนดูลัมผกผันเป็นอุปกรณ์ทดลองที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ออกแบบและทดสอบระบบควบคุมการปรับสมดุลของจรวดระหว่างการออกตัวจากพื้นดิน เนื่องมาจากว่าขณะที่จรวดถูกปล่อยจะมีแรงขับมหาศาลทางด้านล่างทำให้ไม่อยู่ในสภาพสมดุลจึงต้องมีตัวยิงไอน์สำหรับปรับสมดุลเพื่อให้จรวดตั้งขึ้นตลอดเวลา เช่นเดียวกันเพนดูลัมผกผันที่จะต้องควบคุมให้แท่งเพนดูลัมตั้งขึ้นโดยมีตัวขับ (Actuator) อยู่ทางด้านล่างซึ่งเป็นตำแหน่งที่ไร้เสถียรภาพในวงเปิด ระบบเพนดูลัมผกผันมีความท้าทายที่สำคัญคือเป็นระบบที่มีอินพุตเดียวแต่มีองศาอิสระ (Degrees of Freedom) เท่ากับสอง ดังนั้นการเลือกใช้วิธีการสำหรับควบคุมระบบจะมีความยุ่งยากเนื่องจากต้องควบคุม สเตตถึงสองตัว ด้วยตัวขับเดียว การที่พยายามควบคุมสเตตตัวหนึ่งย่อมมีผลกระทบกับอีกสเตตอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

2.2 ชนิดของเพนดูลัมผกผัน

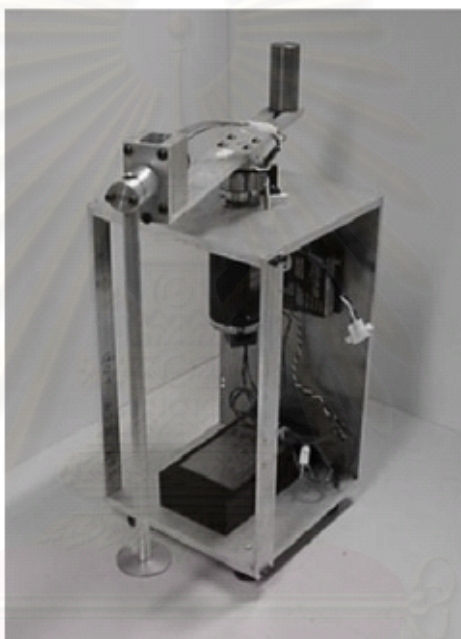
2.2.1 เพนดูลัมผกผันบนรถ (Cart and Pole Inverted Pendulum)



รูปที่ 2-1 เพนดูลัมผกผันบนรถ (Cart and Pole Inverted Pendulum) [23]

ประกอบด้วยแท่งเพนดูลัมติดตั้งอยู่บนรถเคลื่อนที่ได้ในแนวแกนอาศัยการเคลื่อนที่ของรถ ดังรูปที่ 2-1 เพื่อรักษาสมดุลของเพนดูลัม การเคลื่อนที่ของรถเป็นแนวเส้นตรง มีองศาอิสระเท่ากับ 2 เพนดูลัมแบบนี้มีข้อจำกัดในการเคลื่อนที่ของตัวรถ หรือพื้นที่ติดตั้ง จึงได้มีการพัฒนาเป็นเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

2.2.2 เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวอน (Rotary Inverted Pendulum)



รูปที่ 2-2 เพนดูลัมผกผันแบบหมุน (Rotary Inverted Pendulum) [18]

เพนดูลัมผกผันแบบหมุนประกอบด้วยแท่งเพนดูลัมที่ติดตั้งบนปลายจานหมุนอาจมี ลักษณะกลมหรือเป็นแขนดังรูปที่ 2-2 ซึ่งหมุนรอบในแนวแกน แนวแกนหมุนของแท่งเพนดูลัมจะ ตั้งฉากกับแนวการหมุนของแขน การรักษาสมดุลของเพนดูลัมใช้การหมุนของฐาน เพนดูลัมผกผัน มีองศาอิสระเท่ากับ 2

2.2.3 เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวตั้ง (Arm-driven or Pendubot Inverted Pendulum)

เพนดูลัมชนิดนี้จะมีส่วนประกอบเหมือนกับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวนอนต่างกันตรงที่แขนจานหมุนจะหมุนในแนวตั้งและแกนหมุนของเพนดูลัมจะขนานกับแกนหมุนของแขนดังรูปที่ 2-3



รูปที่ 2-3 เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวตั้ง (Pendubot Inverted Pendulum) [22]

2.2.4 เพนดูลัมผกผันแบบแท่งสมดุล (Balanced Rod Inverted Pendulum)

เพนดูลัมผกผันแบบนี้จะคล้ายกับเพนดูลัมผกผันบนรถ ต่างกันตรงที่การรักษาสมดุลของเพนดูลัมจะอาศัยแท่งมวลเคลื่อนที่ตามแนวแกน (Sliding Balance Rod) ที่ติดตั้งด้านบนของเพนดูลัมเพื่อรักษาสมดุลโดยมีมอเตอร์ขับเคลื่อนตั้งอยู่บริเวณด้านล่างของเพนดูลัมส่งแรงขับเคลื่อนผ่านเฟลาตามแนวแท่งเพนดูลัมขึ้นมาตามรูปที่ 2-4 เพนดูลัมผกผันแบบแท่งสมดุลจะมีความพิเศษกว่าเพนดูลัมผกผันแบบอื่นตรงที่สามารถควบคุมเพนดูลัมให้สมดุลได้ถึงแม้ว่าเพนดูลัมไม่ตั้งฉากกับแนวนอน



รูปที่ 2-4 เพนดูลัมผกผันแบบแท่งสมดุล (Balanced Rod Inverted Pendulum)

2.2.5 หุ่นยนต์เพนดูลัมผกผันเคลื่อนที่ (Inverted Pendulum Mobile Robot)



รูปที่ 2-5 หุ่นยนต์เพนดูลัมผกผันเคลื่อนที่ (Inverted Pendulum Mobile Robot) [24]

เป็นหุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อิสระลักษณะคล้าย เพนดูลัมผกผันบนรถ (Cart and Pole Inverted Pendulum) อาศัยการทรงตัวด้วยการหมุนของล้อซึ่งแยกอิสระจากกันซ้าย ขวา เพนดูลัม

แบบนี้พบในการใช้งานจริงเช่น Segway สิ่งที่น่าสนใจคือการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ได้สองแกนดังนั้นตัวควบคุมที่ใช้ต้องมีความเร็วในการประมวลผลระดับหนึ่ง

ตารางที่ 2-1 สรุปประเภทของเพนดูลัมผกผัน

ประเภทของเพนดูลัมผกผัน	องศาอิสระ, ตัวขับ	จุดเด่นในทางวิชาการ	บทความที่เกี่ยวข้อง
เพนดูลัมผกผันบนรถ	2,1	Non-minimum phase Under-actuated	[9],[10],[19],[20],[21],[23]
เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวนอน	2,1	Non-minimum phase Under-actuated	[14],[6],[7],[18],[27],[28],[32],[33],[34],[35],[36]
เพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวตั้ง	2,1	Non-minimum phase Under-actuated	[18],[22]
เพนดูลัมผกผันแบบแท่งสมดุล	2,1	Non-minimum phase Under-actuated	[15],[16]
หุ่นยนต์เพนดูลัมผกผันเคลื่อนที่	4,2 2,1	Non-minimum phase Under-actuated	[24]

2.3 การควบคุมเพนดูลัมผกผัน

ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นว่าระบบเพนดูลัมผกผันเป็นระบบที่มีความไม่เชิงเส้นสูงในการควบคุม เพนดูลัมผกผันเนื่องจากความซับซ้อนของระบบได้ถูกพิสูจน์ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์โดย Y. Yavin [14] ว่าเป็นระบบที่ไม่สามารถควบคุมได้ ดังนั้นโดยปกติแล้วการควบคุมเพนดูลัมผกผันจะใช้วิธีการแยกการออกแบบตัวควบคุมตัวควบคุมออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกก็คือตัวควบคุมสำหรับแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้น และอีกส่วนหนึ่งตัวควบคุมสำหรับรักษาเสถียรภาพ ณ จุดสมดุลที่ตำแหน่งตั้งขึ้น

2.3.1 ตัวควบคุมสำหรับแกว่งแห่งเพนดูลัมขึ้น (Swing up Controller)

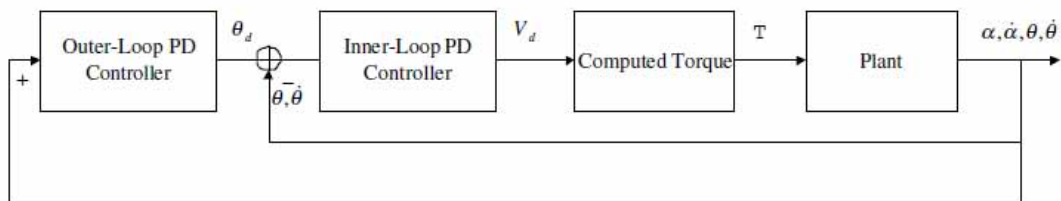
ปกติแล้วเพนดูลัมจะมีจุดสมดุลอยู่สองจุดนั่นคือจุดที่เพนดูลัมมีตำแหน่งลงข้างล่างนั่นคือจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพ และอีกจุดหนึ่งคือที่ตำแหน่งเพนดูลัมตั้งขึ้นซึ่งเป็นจุดสมดุลที่ไม่เสถียรภาพ ณ ตำแหน่งนี้เองที่เพนดูลัมไม่สามารถตั้งขึ้นได้เองจึงต้องมีวิธีการเพื่อให้เพนดูลัมผกผันอยู่ในตำแหน่งที่ ใกล้เคียงตำแหน่งตั้งขึ้นมากที่สุดเพื่อสามารถทดสอบตัวควบคุมสำหรับการรักษาสมดุลของแกว่งเพนดูลัมได้ หนึ่งในวิธีการที่นิยมกันมาก คือใช้พื้นฐานของพลังงานมาสร้างกฎตัวควบคุม S. Awtar และคณะ [18] ได้ทดลองสร้างชุดเพนดูลัมผกผันเพื่อทดสอบระบบควบคุมแกว่งเพนดูลัมขึ้นด้วยวิธีการที่มีพื้นฐานมาจากสมการพลังงานจลน์ของทั้งส่วนแขนเพนดูลัมและแกว่งเพนดูลัม โดยวิธีการคำนวณพลังงานจลน์ของระบบทั้งหมดจะเทียบกับตำแหน่งที่เพนดูลัมตั้งขึ้น ผลต่างพลังงานที่คำนวณได้จะเป็นพลังงานที่ระบบต้องการซึ่งจะนำไปคูณกับอัตราขยายที่เรียกว่า Aggressivity gain แนวคิดนี้คือการพยายามใส่พลังงานเข้าไปในระบบจากตำแหน่งสมดุล (เพนดูลัมลง ข้างล่าง) ไปสู่ตำแหน่งที่เพนดูลัมตั้งขึ้นด้วยแนวคิดนี้การเลือกอัตราขยายมีความสำคัญมากเพราะสามารถสร้างความแตกต่างในจำนวนครั้งการแกว่งได้ถึง 5-50 ครั้ง [28] เสนอวิธีการในการเลือกอัตราขยายสำหรับกฎควบคุมที่มีพื้นฐานจากสมการพลังงาน เช่นกัน โดยใช้ค่าอัตราขยายเท่ากับ บค่าพลังงานจลน์ของระบบ ณ จุดที่เพนดูลัมอยู่ในตำแหน่งสมดุล และอัตราขยายอีกตัวหนึ่งให้เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแกว่งเพนดูลัม

วิธีที่ใช้พื้นฐานพลังงานเพื่อสร้าง กฎควบคุมนี้ถือว่าเป็นวิธีที่สามารถคาดหวังผลลัพธ์ได้ดี Johnny Lam [29] ซึ่งใช้อุปกรณ์ทดลองคือเพนดูลัมผกผันแบบบนรถ (Cart and Pole) ทดสอบตัวควบคุมที่เรียกว่า Heuristic Controller ซึ่งมีพื้นฐานจากการใช้ตรรกะ (Logic-based) แนวคิดของวิธีดังกล่าวเน้นที่การควบคุมทิศทางและจังหวะเวลาการเคลื่อนที่ของตัวรถ (Cart) โดยสนใจแต่เพียงตำแหน่งมุมของแกว่งเพนดูลัมว่าอยู่ที่ตำแหน่งไหน ดังนั้นตัวควบคุมแบบนี้จึงขึ้นกับตำแหน่งของแกว่งเพนดูลัมเพียงอย่างเดียว โดยตัวควบคุมจะทำหน้าที่เปลี่ยนทิศทางเคลื่อนที่ของตัวรถเมื่อแกว่งเพนดูลัมเคลื่อนที่มาถึงตำแหน่งล่างสุด (Downward position) ซึ่งเป็นตำแหน่งเหมาะสมที่สุดที่จะใช้เปลี่ยนทิศทางเนื่องจากตัวควบคุมแบบนี้สนใจแต่เพียงตำแหน่งของแกว่งเพนดูลัม ทิศทางของตัวรถที่จะถูกสั่งให้ เคลื่อนที่ไปจะเป็นทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของความเร็วแกว่งเพนดูลัมจะเห็นได้ว่าวิธีการนี้จะทำให้การเคลื่อนที่ไปและกลับของตัวรถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพ อัตราขยายสำหรับตัวควบคุมแบบนี้หาได้จากการทดลอง ข้อพิจารณาอันหนึ่งที่สำคัญคือตัวควบคุมแบบนี้มิได้สนใจว่าแกว่งเพนดูลัมแกว่งเลยตำแหน่งแวนอนหรือไม่เนื่องจากมิได้สนใจ

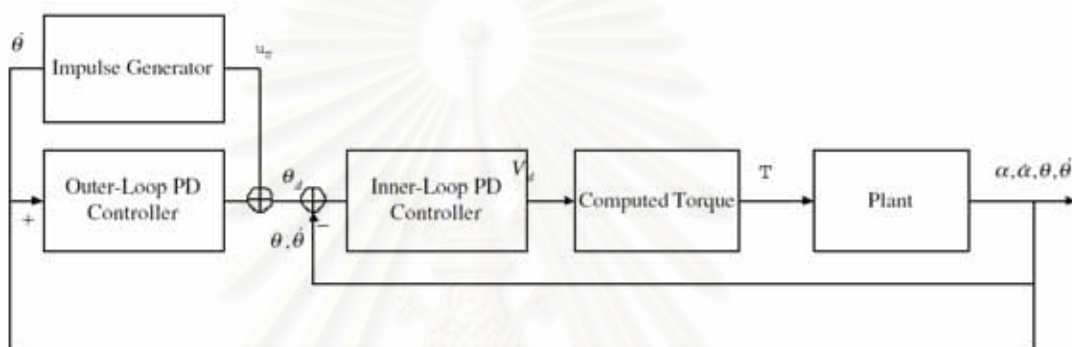
ความเร็วซึ่งจุดนี้เองจึงไม่สามารถบอกได้ว่าจุดไหนที่ควรหยุดใส่พลังงานเข้าไปในระบบถ้าการเคลื่อนที่ของตัวรถยังดำเนินต่อไปนั่นคือการดึงพลังงานออกจากระบบแทนทางผู้วิจัยผลงานชิ้นนี้จึงกำหนดให้สัญญาณควบคุมรถเท่ากับศูนย์เมื่อ ตำแหน่งของเพนดูลัมแกว่งขึ้นไปถึง 135 องศาเทียบกับตำแหน่งต่ำสุดของแท่งเพนดูลัม ดังที่กล่าวไว้แล้วว่าอัตราขยายของตัวควบคุมชนิดนี้หาได้จากการทดลองถ้าให้อัตราขยายมากเกินไปความเร็วของแท่งเพนดูลัมเมื่อแกว่งไปที่ตำแหน่งตั้งขึ้นตัวควบคุมสำหรับรักษาสมดุลแท่งเพนดูลัมจะไม่สามารถทำได้และถ้าน้อยเกินไปก็จะไม่สามารถแกว่งขึ้นได้นอกจากนี้ถ้าเพนดูลัมเคลื่อนที่ไปสุดรางตัวควบคุมก็จะไม่สามารถทำการแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้นไปได้ทางผู้วิจัยผลงานนี้จึงสรุปไว้ว่าการใช้ตัวควบคุมบนพื้นฐานพลังงานให้ผลการทำงานได้ดีกว่า [25] ใช้หลักการของพลังงานเป็นพื้นฐานเช่นกันแต่ในกรณีพิจารณาพลังงานมีการพิจารณาความเร่งเชิงมุมที่จุดหมุนเพนดูลัมมาเพื่อสร้างแรงบิดที่ต้องการสำหรับระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน และเช่นเดียวกับ [27] จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเพนดูลัมผกผันแบบหมุนโดยให้ความเร่งเชิงมุมของแขนเพนดูลัมเป็นสัญญาณอินพุต เมื่อเขียนความสัมพันธ์ออกมา ก็จะทราบความเร่งเชิงมุมที่ต้องการสำหรับแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้นโดยอยู่บนสมมติฐานว่าแท่งเพนดูลัมมีความเบาและใช้ความเร็วไม่มากในการแกว่งขึ้นไปสู่ตำแหน่งตั้งขึ้น

นอกจากนี้ [31] มีแนวคิดที่ว่าถ้าเรามีแหล่งพลังงานมากพอจะสามารถจ่ายพลังงานให้แท่งเพนดูลัมแกว่งขึ้นได้ในการแกว่งเพียงครั้งเดียวโดยการหมุนมอเตอร์ให้ไปในทิศทางหนึ่งด้วยความเร็วสูงสุดและเมื่อแท่งเพนดูลัมแกว่งถึงตำแหน่งในแนวแกนนอนก็จ่ายสัญญาณควบคุมให้มอเตอร์หมุนด้วยความเร็วสูงสุดในอีกด้านหนึ่งทันทีและหยุดจ่ายสัญญาณควบคุมเมื่อตำแหน่งเพนดูลัมเข้าใกล้จุดที่ตั้งขึ้น

Zhongmin Wang [19] เลือกใช้ตัวควบคุมแบบ Positive Feedback PID เป็นพื้นฐานการออกแบบเพื่อทำการแกว่งเพนดูลัมขึ้น ซึ่งเป็นการใช้ตัวควบคุมพีไอดีซ้อนกันสองวง โดยวงในทำการรักษาตำแหน่งของแขนเพนดูลัมให้อยู่ในช่วงจำกัดส่วนวงนอกทำหน้าที่กำหนดเส้นทางเดิน (Trajectory) ให้มีขนาดกว้างขึ้นเรื่อยๆ เพื่อเป็นค่าสำหรับอ้างอิงให้ตัวควบคุมพีไอดีวงใน รูปที่ 2-6 แสดงวงรอบของระบบดังกล่าว นอกจากนี้เพื่อเป็นการลดเวลาในการแกว่งเพนดูลัมขึ้นจึงได้เพิ่มตัวสร้างแรงกระตุ้น (Impulse Generator) และนำสัญญาณที่ได้มาเพิ่มกับตัวควบคุมวงนอกซึ่งค่าสัญญาณแรงกระตุ้นจะมีทิศทางเดียวกับความเร็วแท่งเพนดูลัมในรูปที่ 2-7



รูปที่ 2-6 Positive Feedback PID



รูปที่ 2-7 Positive Feedback PID with Pulse Control

และด้วยเหตุที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเพนดูลัมผกผันเป็นแบบจำลองไม่เชิงเส้น การที่จะใช้แบบจำลองมาออกแบบตัวควบคุมโดยตรงมีความไม่สะดวกอยู่ [10] เลือกใช้ตัวควบคุมแบบตรรกะคลุมเครือ (Fuzzy Logic) ในการควบคุมเพนดูลัมผกผันบนรถ ใช้หลักของเซตที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกและนำไปเป็นค่าสัญญาณควบคุมโดยจะมีกฎฟัซซี่ซึ่งนำตัวแปรอินพุตมาจัดไว้ส่วนของเงื่อนไขเมื่อสัญญาณอินพุตเข้าก็จะทำการเปรียบเทียบว่าตรงกับสมาชิกในเซตใด แล้วจึงส่งสัญญาณควบคุมออกไปตามเงื่อนไขที่ได้กำหนดไว้ผลที่ได้สามารถแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้นได้ในเวลาที่น่าพอใจ ข้อดีของตัวควบคุมแบบฟัซซี่ [9] คือการกำหนดกฎของฟัซซี่ให้เหมาะสมทำได้ยาก

2.3.2 ตัวควบคุมสำหรับรักษาสมดุลแท่งเพนดูลัม (Stabilization Controller)

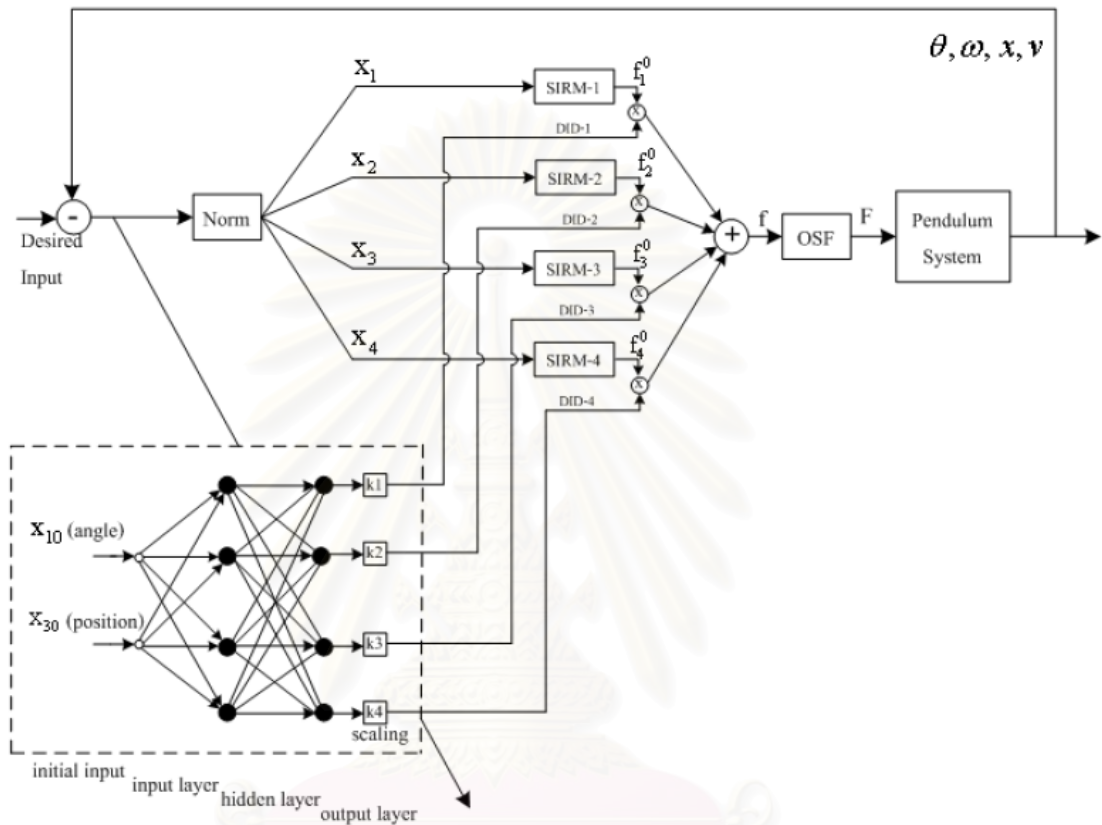
ด้วยลักษณะของระบบเพนดูลัมผกผันที่มีความ ไม่เชิงเส้นสูงการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แม่นยำจึงมีความจำเป็นและมีส่วนช่วยให้การออกแบบระบบควบคุมเป็นไปได้ง่ายมีประสิทธิภาพแต่ในความเป็นจริงแล้วการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แม่นยำนั้นเป็นไปได้ยาก จึงได้มีแนวคิดและวิธีการออกแบบตัวควบคุมเพื่อชดเชยความไม่แม่นยำดังกล่าวดังเช่นใน [10] ได้

นำตรรกะแบบคลุมเครือ (Fuzzy Logic) มาใช้โดยเปรียบเทียบกับการออกแบบด้วยปริภูมิสเตตจากการใช้ตัวควบคุมทั้งสองให้ผลที่ได้ไม่ต่างกันแสดงว่าความสามารถของการใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นมาทำงานรอบๆจุดทำงานที่มีช่วงกว้างคือ ± 30 องศาเทียบกับแกนตั้งทำได้ดีในระดับที่น่าพอใจ [18] ใช้การป้อนกลับทุกสเตต (Full State Feedback Regulator) รอบๆจุดทำงานสำหรับระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนให้แท่งเพนดูลัมอยู่ในตำแหน่งสมดุลง่าย ± 20 องศาเทียบกับแกนตั้ง ผลการใช้ตัวควบคุมดังกล่าวทำได้น่าพอใจคือสามารถรักษาสมดุลได้ทันทีหลังแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้นโดยไม่มีการตอบสนองเกิน (Overshoot Response)

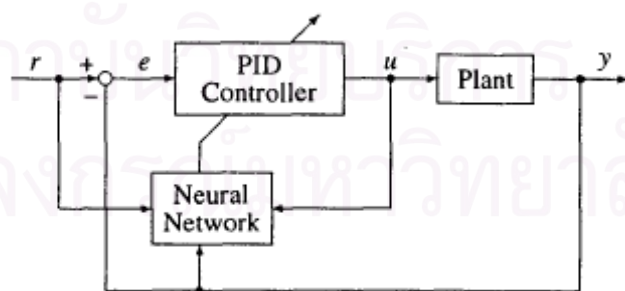
หรือใน [9] มีการนำระบบโครงข่ายประสาทเทียม (Neural Network) ที่มีความสามารถในการเรียนรู้มาใช้ร่วมกับระบบตรรกะแบบคลุมเครือแบบกฎอินพุตเดียว (Single Input Rule Module) ซึ่งทางผู้วิจัยชี้ว่าการใช้วิธีอนุมานกฎฟัซซีแบบดั้งเดิมจะทำให้จำนวนกฎของฟัซซีมีมากเกินไปเพราะจะเพิ่มตามอินพุตที่เพิ่มขึ้นแบบยกกำลัง (Exponential) ซึ่งการใช้ตรรกะแบบคลุมเครือแบบกฎอินพุตเดียวจะพิจารณาเพียงอินพุตตัวเดียวสำหรับกฎหนึ่งกฎใดโดยตัวโครงข่ายประสาทเทียมซึ่งจะทำหน้าที่เรียนรู้ค่าระดับความสำคัญพลวัตที่ใช้บ่งชี้ความสำคัญอินพุตแต่ละตัวของระบบตรรกะแบบคลุมเครือเพื่อให้ระบบเพนดูลัมผกผันเข้าสู่สมดุลได้เร็วยิ่งขึ้นเพราะว่าการที่แรงกระทำกับเพนดูลัมถ้ามีค่ามากหรือน้อยเกินไปจะมีผลกับระบบขาดเสถียรภาพทันที หลังจากได้ผลอนุมานของฟัซซีแล้วจะต้องทำการบ่งชี้ความสำคัญของอินพุตอีกทีซึ่งการใช้โครงข่ายประสาทเทียมในงานวิจัยนี้เป็นแบบแพร่กลับ (Back Propagation) โดยการทดลองบนเพนดูลัมผกผันบนรถพบว่าผลที่ได้ดีกว่าการใช้ตรรกะแบบคลุมเครือแบบกฎอินพุตเดียวเพียงอย่างเดียว

นั่นแสดงให้เห็นว่าการให้ระดับความสัมพันธ์ของอินพุตนั้นมีความสำคัญต่อตัวควบคุมระดับหนึ่ง นอกจากนี้ยังมีการใช้ตรรกะแบบคลุมเครือด้วยโมเดลทาคางิ-ซึเงโนสี่อินพุต (Four Input Takagi-Sugeno Fuzzy Model) [26] มาใช้กับระบบเพนดูลัมผกผันบนรถ อินพุตทั้งสี่ตัวนั้นคือสัญญาณตำแหน่งรถ ตำแหน่งเพนดูลัม ความเร็วของรถที่ได้จากการหาอนุพันธ์ตำแหน่งและความเร็วของแท่งเพนดูลัมที่ได้จากการหาอนุพันธ์ตำแหน่งเช่นกัน เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้ตัวควบคุมแบบพีไอดี (PID Controller) ผลที่ได้คือลดการตอบสนองเกินลงได้ เข้าสู่สภาวะสมดุลได้เร็วกว่า และที่เห็นผลได้ชัดเจนคือเมื่อมวลของแท่งเพนดูลัมเปลี่ยนไปตัวควบคุมแบบฟัซซียังสามารถทำงานได้อยู่ต่างจากตัวควบคุมแบบ PID ที่ไม่สามารถรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัมได้นั้น เพราะตัวควบคุมแบบ PID ออกแบบมาบนพื้นฐานแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เมื่อระบบเปลี่ยนมากเกินไปตัวควบคุมจึงใช้ไม่ได้ [20] ใช้ตัวควบคุมแบบ PID เช่นกันแต่การปรับค่าอัตราขยายจะ

ใช้ตัวโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Network) ช่วยในการปรับตั้ง ค่าอัตราขยายให้เหมาะสมสำหรับอุปกรณ์เพนดูลัมผกผันบนรถที่มีแท่งเพนดูลัมสองแท่งต่อกันแบบอนุกรม



รูปที่ 2-8 ตัวควบคุมนิวโร-ฟัซซี่ชนิดกฎอินพุตเดี่ยว [9]



รูปที่ 2-9 Self-tuning neuro-PID [20]

หรือในกรณีที่ออกแบบระบบควบคุมโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้มีการเสนอวิธีการเปลี่ยนตัวแปรเข้ามาช่วย ใน [6] สร้างแบบจำลองเชิงเส้นโดยการประมาณระบบของเพน

ดูลักษณะแบบพหุนามให้เป็นแบบจำลองเชิงเส้นที่รอบๆจุดสมดุลก่อน จากนั้นโดยการมองแบบจำลองว่าเป็นแบบจำลองเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอน (Linear Parameter Varying system, LPV) หรือแปลงสเตตบางตัวที่เป็นสเตตไม่เชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้นซึ่งจะกลายเป็นแบบจำลองที่แปรตามพารามิเตอร์ซึ่งเรียกว่า ตัวแปรกำหนด ซึ่งเทคนิควิธีที่ใช้กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ที่แปรตามเวลาและระบบที่แปรตามพารามิเตอร์คือรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น จากนั้นใช้ตัวควบคุมแบบตัวควบคุมคงทน (Robust Control) แบบเฮชอินฟินิตี้มาใช้ในการควบคุมโดยให้ระบบมีสมรรถนะและเสถียรภาพตามกำหนดสำหรับทุกความไม่แน่นอน ในผลวิจัยนี้ได้ทำการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ 3 รูปแบบซึ่งแตกต่างกันตอนวางนิยามในการเปลี่ยนรูปแบบเท่านั้นแต่แบบจำลองทั้งหมดสร้างมาจากแบบจำลองของระบบเดียวกันผลการทดลองควบคุมกับระบบเพนดูลัมพหุนามแบบพหุนามที่มีแท่งเพนดูลัมสองแท่งที่ได้จากแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ให้ผลในการควบคุมที่ต่างกันอย่างเห็นได้ชัด การใช้ตัวควบคุมแบบคงทน เขตต์ พิฑูรฆานิตยัผู้วิจัยได้กล่าวว่สิ่งทีสำคัญคือกาเลือกวงเงื่อนไขของสมรรถนะซึ่งเป็นตัวแปรสำคัญในการกำหนดผลลัพธ์ทีได้ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมจึงต้องมีความเข้าใจเป็นอย่างดี

ในลักษณะคล้ายคลึงกัน [7] ได้เลือกใช้การแปลงตัวแปรด้วยวิธีการที่ต่างออกไปคือการใช้การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นล่างด้วยการเปลี่ยนพจน์ไม่เชิงเส้นให้เป็นพจน์เชิงเส้นซึ่งมีข้อจำกัดคือไม่มีการส่งผ่านสัญญาณควบคุมไปยังสัญญาณที่วัดโดยตรงผลของแบบจำลองสามารถทำหน้าที่ได้ดีกว่าการประมาณแบบจำลองไม่เชิงเส้นให้เป็นแบบจำลองเชิงเส้นที่จุดสมดุลนั้นคือทำหน้าที่ได้ใกล้เคียงแบบจำลองไม่เชิงเส้นได้ตั้งแต่ช่วงมุม 0 องศาไปจนถึงช่วงมุม 60 องศา จากผลการวิจัยโดยใช้ตัวควบคุมแบบกำหนดอัตราขยายสามารถรองรับมุมเบี่ยงของแท่งเพนดูลัมได้ถึง 20 องศา

นอกจากนี้มีการแปลงระบบเป็นเชิงเส้นเช่นใน [36] เลือกใช้วิธีการ Input State Linearization เพื่อทำการแปลงแบบจำลองให้เป็นเชิงเส้นทั้งระบบจากนั้นจึงใช้การออกแบบตัวควบคุมด้วยปริภูมิสเตต

ในกรณีที่มีแบบจำลองไม่เชิงเส้นแต่มีจุดกาใช้งานทีไม่กว้างมากนักการแปลงระบบไม่เชิงเส้นให้เป็นระบบเชิงเส้นทีรอบๆจุดทำงานก็เป็นสิ่งทีน่าสนใจด้วยเหตุทีสามารถใช้ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นได้ซึ่งมีเครื่องมือในการออกแบบทีใช้งานได้ดีดังเห็นได้จาก [18] ทีได้กล่าวไปแล้ว [25], [31] ใช้การวางตำแหน่งโพล (Pole Placement) ในการควบคุมแบบจำลองทีรอบๆจุดทำงานของเพนดูลัมพหุนามแบบพหุนามโดยการควบคุมทุกสเตตสามารถกระทำได้ [27] เลือกใช้วิธีการวางตำแหน่งโพลเช่นกันและได้ทดลองวิธีการดังกล่าวกับทั้งแบบจำลองบนเวลาไม่ต่อเนื่อง

และบนเวลาต่อเนื่องผลจากตัวควบคุมบนเวลาไม่ต่อเนื่องรักษาตำแหน่งแขนได้ดีกว่าแต่การรักษาตำแหน่งของแท่งเพนดูลัมต่างกันที่แบบจำลองบนเวลาต่อเนื่องจะไม่มีการเคลื่อนตำแหน่งอยู่บ้าง แต่เป็นแบบไม่แน่นอนและช่วงกว้างกว่าขณะที่แบบจำลองบนเวลาไม่ต่อเนื่องจะมีการสั่นกลับไปมาในมุมแคบสม่ำเสมอ [21] ใช้การวางตำแหน่งโพลเช่นกันแต่ทดสอบกับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนแนวตั้งและได้มีการใช้ Linear Quadratic Regulator (LQR) ด้วย การใช้ LQR จะเป็นการให้นำหนักความสำคัญกับตัวแปรสแตตแต่ละตัวโดยที่ยังคำนึงถึงอินพุตที่ระบบกระทำได้ซึ่งจะทำการกำหนดน้ำหนักความสำคัญว่าต้องการเน้นที่จุดใด [19] ใช้รักษาสมดุระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนให้ผลการควบคุมในเกณฑ์ที่ดีมากเช่นเดียวกันกับ [32] ที่ใช้ LQR รักษาสมดุกับเพนดูลัมผกผันบนรถ นอกจากนี้การใช้ LQR ในการหาอัตราขยายแล้วยังได้นำเอาตัวประมาณค่าสแตต (State Estimator) มาใช้ในการหาสแตตที่ไม่สามารถวัดได้โดยตรงคือความเร็วเชิงมุมของแท่งเพนดูลัมและแท่งเพนดูลัม [28] และความเร็วของตัวรถและแท่งเพนดูลัมใน [29] แทนการใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขคำนวณโดยใช้แบบตัวประมาณค่าแบบเต็มระบบ (Full State Estimator) ที่บริเวณรอบๆ จุดที่แท่งเพนดูลัมตั้งขึ้น สำหรับ [29] ในส่วนตำแหน่งอื่นๆที่ห่างจากจุดเพนดูลัมตั้งขึ้นได้มีการให้สัญญาณผ่านตัวกรองความถี่สูง (Low-pass Filter) ก่อนที่จะนำไปคำนวณความเร็วของตัวรถและแท่งเพนดูลัม ตัวควบคุมโดยใช้ LQR ยังสามารถใช้งานได้ดีกับมอเตอร์เชิงเส้น (Linear Motor) [23] ในการรักษาสมดุแท่งเพนดูลัม [24] ใช้การแทนตำแหน่งโพลเป็นตัวควบคุมสำหรับหุ่นยนต์เพนดูลัมผกผันเคลื่อนที่ซึ่งมีตัวแปรสแตตถึงหกตัวและเป็นหุ่นยนต์ที่เคลื่อนที่ได้ในสองมิติและมีตัวขับเคลื่อนสองตัว นอกจากที่กล่าวมาแล้ว LQR ยังสามารถใช้กับเพนดูลัมผกผันบนรถที่มีเพนดูลัมต่อกันสองแท่งแบบอนุกรม แต่สิ่งที่ต่างจาก [20] นั่นคือข้อต่อระหว่างเพนดูลัมทั้งสองแท่งเป็นแบบยืดหยุ่น (Flexible Joint) เพนดูลัมที่สองถูกรบกวนด้วยแรงคด (Impulse) ก็สามารถกลับสู่จุดสมดุได้เร็ว เทียบกับการใช้ตัวประมาณค่าสแตตประมาณค่ามุมและความเร็วเชิงมุมของแท่งเพนดูลัมที่สองระบบจะตอบสนองได้ช้ากว่า

จะเห็นได้ว่าการแทนตำแหน่งโพลและ LQR เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ออกแบบตัวควบคุมที่ได้ผลดีและง่าย แต่การใช้ตัวควบคุมแบบนี้ต้องทำการแปลงระบบเป็นเชิงเส้นที่รอบจุดทำงานเสียก่อน [15] จึงได้เสนอเทคนิคการควบคุมที่สามารถใช้ร่วมกันกับการวางตำแหน่งโพล และ LQR ซึ่งเรียกว่า Computed Feedback Linearization ในการรักษาสมดุเพนดูลัมผกผันแบบแท่งสมดุ [15] แนวคิดดังกล่าวจะทำการแปลงระบบให้เป็นเชิงเส้นด้วยการป้อนสัญญาณที่ไม่เป็นเชิงเส้นกลับเข้าสู่ระบบในทุกๆรอบของการทำงาน ในกรณีที่จุดการทำงานไม่ใช่จุดสมดุ ด้วยการประมาณแบบจำลองที่จุดสมดุและด้วยการป้อนกลับสัญญาณไม่เชิงเส้นนี้เองก็ยังคงอาศัยการ

ออกแบบตัวควบคุมบนพื้นฐานการวางตำแหน่งโพลและใช้เกณฑ์ LQR ได้ซึ่ง [16] แสดงให้เห็นว่าเทคนิคนี้ช่วยให้การทำงานกว้างขึ้นถึงแม้การออกแบบตัวควบคุมจะกระทำบนพื้นฐานการประมาณระบบเป็นเชิงเส้นที่รอบๆจุดทำงาน



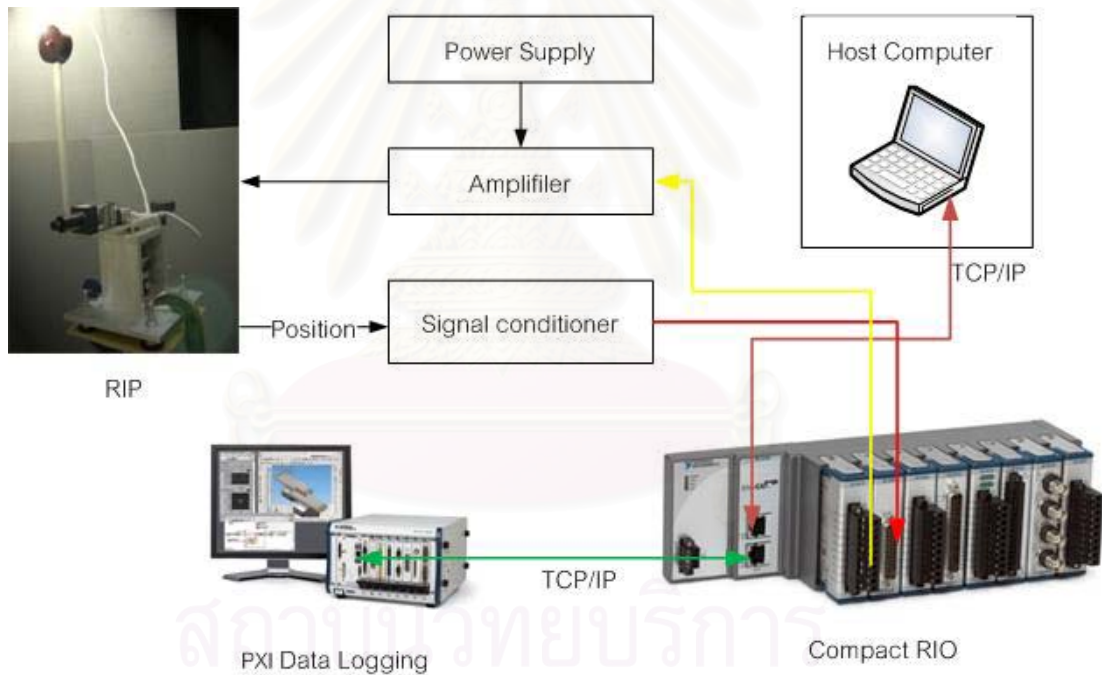
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

ระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนที่ใช้ในงานวิจัย

3.1 ภาพรวมของระบบ

ชุดทดลองที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้เนื่องจากเป็นเครื่องต้นแบบจึงได้มีการแยกเป็นโมดูลต่างๆ เพื่อความสะดวกในการตรวจสอบปัญหาและการทำงานซึ่งมีการเชื่อมต่อสัญญาณต่างๆ ดังรูปที่ 3-1 อธิบายการเชื่อมต่อและทิศทางของสัญญาณ แต่ละโมดูลโดยมีส่วนประกอบดังรายละเอียดด้านล่าง



รูปที่ 3-1 แผนภาพแสดงการติดตั้งชุดทดลอง

- 1.) คอมพิวเตอร์
- 2.) เครื่อง NI cRIO
- 3.) โปรแกรมที่ใช้ควบคุม
- 4.) เครื่องขยายสัญญาณขับเคลื่อนมอเตอร์
- 5.) แหล่งจ่ายพลังงาน

- 6.) มอเตอร์พร้อมเอนโคเดอร์
- 7.) เอนโคเดอร์สำหรับแขนเพนดูลัม
- 8.) วงจรแปลงสัญญาณ

3.2 รายละเอียดชุดทดลอง

3.2.1 คอมพิวเตอร์

ในชุดทดลองนี้จะต้องใช้คอมพิวเตอร์จำนวนสองเครื่องโดยเครื่องที่หนึ่งจะเป็นโฮสต์ (Host) โดยใช้คอมพิวเตอร์ โน้ตบุ๊ก ติดตั้งระบบปฏิบัติการวินโดวส์ เอ็กซ์พี เซอร์วิสแพค 3 (Windows XP Service Pack 3) และโปรแกรม NI Labview มีหน้าที่คือเป็นเครื่องที่ติดต่อกับผู้ใช้งาน (User interface) เพื่อเขียนโปรแกรมควบคุม และใช้ตัวสั่งการเริ่มและหยุด การทำงานโปรแกรมควบคุม

3.2.2 เครื่อง NI cRIO (Compact Reconfigurable Input Output)

เป็นเครื่องที่ผลิตโดยบริษัท National Instrument ใช้สำหรับงานควบคุม มีขนาดเล็กและใช้ไฟไม่เกิน 20 วัตต์ รุ่นที่ใช้คือ 9074 ประกอบด้วยตัวประมวลผลไมโครโปรเซสเซอร์ความเร็ว 400 MHz และวงจร FPGA มีจำนวนเกต (gate) สองล้านเกต หน่วยความจำ 128MB และแบบ Non volatile 256MB เชื่อมต่อด้วยสาย Ethernet 2 ช่อง มีช่องใส่โมดูลให้เลือกตามใช้งาน 8 ช่อง ทำงานร่วมกับโปรแกรม NI Labview

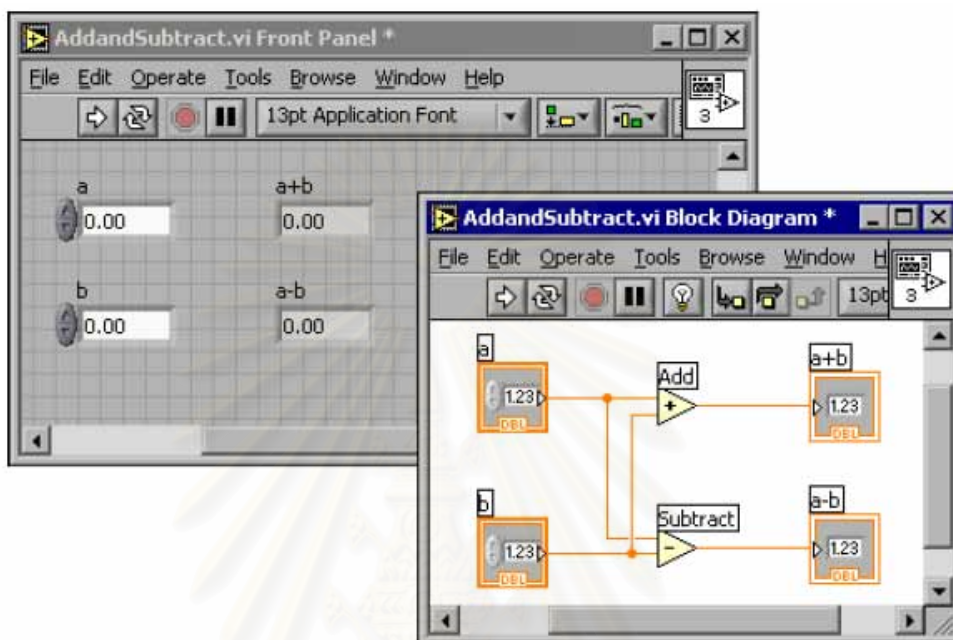


รูปที่ 3-2 เครื่อง NI cRIO รุ่น 9074

3.2.3 โปรแกรมที่ใช้ควบคุม

เป็นโปรแกรมที่พัฒนาโดยบริษัท National Instrument การเขียนโปรแกรมจะมีลักษณะใช้รูปภาพเป็นพื้นฐาน (Graphical-based) ออกแบบให้มีลักษณะเป็นเครื่องมือวัดเสมือน (Virtual instrument) การใช้งานโปรแกรมจะมีสองส่วนคือส่วนที่เป็น front panel ใช้แสดงการทำงานคล้าย

กับเครื่องมือวัด และส่วนที่สำหรับเขียนโปรแกรมโดยใช้การเชื่อมต่อบล็อกต่างๆเข้าด้วยกัน โดยตัวโปรแกรม Labview จะมีโปรแกรมย่อย และโมดูลต่างๆให้สามารถใช้อย่างสะดวก



รูปที่ 3-3 หน้าต่างโปรแกรม Labview

3.2.4 เครื่องขยายสัญญาณขับมอเตอร์

เป็นอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่ขยายกำลัง (Power) แปลงสัญญาณควบคุมที่เป็นแรงดันให้เป็นสัญญาณขาออกในรูปกระแส ใช้ไฟเลี้ยงจากแหล่งจ่ายกระแสตรงอย่างต่ำ 24 โวลต์ ในงานทดลองนี้ใช้ของบริษัทคอปเลย์ (Copley) รุ่น 412

3.2.5 แหล่งจ่ายพลังงาน

ในชุดทดลองนี้ใช้แหล่งจ่ายพลังงาน 2 ตัว ตัวแรกเป็นแบบสวิชชิง (Switching power supply) แบบสองช่องทางโดยแต่ละช่องสามารถจ่ายกระแสตรงได้ 2 แอมแปร์ แรงดันสูงสุด 24 โวลต์ สำหรับจ่ายแรงดันให้ภาคสัญญาณ (-5 โวลต์ และ +5 โวลต์ให้กับเอนโคเดอร์ และ +5 โวลต์ให้กับวงจรถิเลสโคโรนิก) และอีกตัวจ่ายแรงดันได้สูงสุด -40 ถึง +40 โวลต์ และจ่ายกระแสได้ -6 ถึง +6 แอมป์ รับแรงดันย้อนกลับที่เกิดจากมอเตอร์ได้ ใช้สำหรับเป็นแหล่งจ่ายแก่ภาคกำลัง

3.2.6 มอเตอร์พร้อมเอนโคดเดอร์

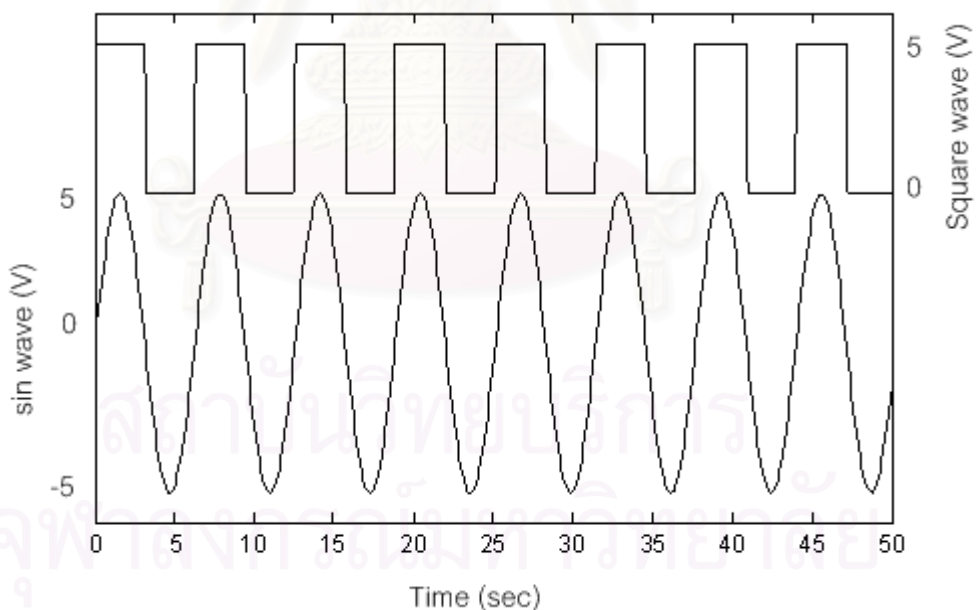
เป็นมอเตอร์กระแสตรงแม่เหล็กถาวรของ Minertia motor รุ่น UGRMEM 02-ssw14 (33W) ไม่มีเฟืองทด มี Optical encoder แบบคลื่นไซน์ (Sine Wave) 3 ช่องทาง (A, B และ Index) ความละเอียด 800 พัลส์สัญญาณต่อหนึ่งรอบการหมุน

3.2.7 เอนโคดเดอร์สำหรับแขนเพนดูลัม

เป็นของ Computer optical encoder รุ่น CP-350 ขนาดเพลลา $\frac{1}{4}$ นิ้ว เป็นแบบ 2 ช่องสัญญาณ คือ A และ B ไม่มีสัญญาณขั้วกลับและ Index มีความละเอียด 4096 พัลส์สัญญาณต่อหนึ่งรอบการหมุน (PPR) ใช้ไฟกระแสตรงเลี้ยง 50 มิลลิแอมแปร์ ที่ +5 โวลต์

3.2.8 วงจรแปลงสัญญาณ

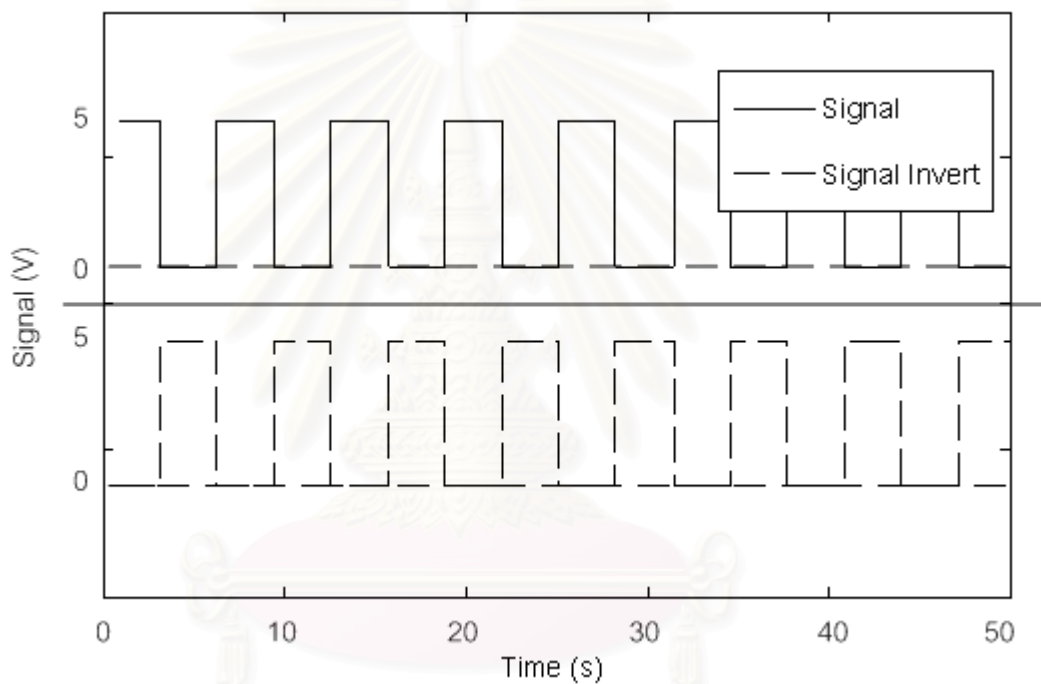
ในชุดทดลองจะมีวงจรแปลงสัญญาณ 2 ชุดแรกสำหรับเอนโคดเดอร์ของมอเตอร์ และอีกชุดสำหรับเอนโคดเดอร์ของเพนดูลัม



รูปที่ 3-4 สัญญาณคลื่นไซน์และคลื่นสี่เหลี่ยม

วงจรสำหรับเอนโคดเดอร์ของมอเตอร์จะมีสองส่วนส่วนแรกเป็นวงจรเพื่อแปลงสัญญาณคลื่นไซน์จากเอนโคดเดอร์ของมอเตอร์ให้เป็นสัญญาณพัลส์ดังรูปที่ 3-4 โดยใช้วงจรเปรียบเทียบ (Comparator Circuit) เมื่อได้สัญญาณพัลส์แล้วต้องทำการแปลงสัญญาณพัลส์ที่เป็นซิงเกิลเอน

(Single End) เป็นดิฟเฟอเรนเชียลเอน (Differential End) คือมีสัญญาณปกติและมีสัญญาณขั้วกลับเพื่อเป็นการอ้างอิงสัญญาณกราวด์เพื่อนำไปต่อเข้า เครื่อง cRIO ให้สามารถนับพัลส์ได้ถูกต้องเพราะมีสัญญาณเปรียบเทียบซึ่งกันและกัน รูปที่ 3-5 แสดงสัญญาณขาออกจากวงจรแปลงสัญญาณที่เป็นดิฟเฟอเรนเชียลเอน ซึ่งวงจรนี้จะใช้สำหรับเอนโคเดอร์ของเพนดูลัม ด้วยอีกหนึ่งชุดเนื่องจาก เอนโคเดอร์จ่ายสัญญาณมาเป็นซิงเกิลเอน (Single End) จึงต้องทำการแปลงให้เป็นดิฟเฟอเรนเชียลเอน (Differential End) เช่นกัน



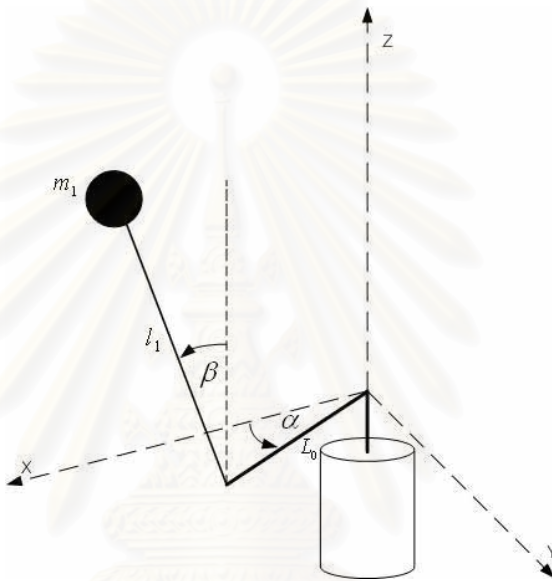
รูปที่ 3-5 สัญญาณพัลส์ปกติและสัญญาณขั้วกลับ

สถาบันนวัตกรรมการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4

แบบจำลองระบบเพนดูลัมผกผัน

4.1 การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์



รูปที่ 4-1 การตั้งแกนของเพนดูลัม (Co-ordinate system)

จากรูปที่ 4-1 แสดงการตั้งแกนสำหรับหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของชุดเพนดูลัมผกผัน ในชุดเพนดูลัมประกอบด้วยสองส่วนหลักคือ ส่วนจานหมุนหรือแขนโรตารีจะถูกขับเคลื่อนโดยมอเตอร์ให้หมุนในแนวราบ และส่วนของเพนดูลัมซึ่งห้อยติดที่ปลายแขนด้านหนึ่งโดยที่แกนหมุนตั้งฉากกับแนวแกนดังรูปที่ 4-1 ค่าตำแหน่งมุมของแขน (α) กำหนดให้มีค่าเพิ่มขึ้นโดยเป็นไปตามกฎมือขวาเมื่อชี้นิ้วโป้งขึ้นตามแนวแกน Z นิ้วที่เหลือจะชี้ในทิศทางที่มุมเพิ่มขึ้น เมื่อเทียบกับแกน X และในลักษณะเดียวกันค่าตำแหน่งมุมของเพนดูลัม (θ, β) จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อหมุนตามเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านหน้า (มุม θ ใช้หาโมเดลสำหรับตำแหน่งเพนดูลัมลงข้างล่าง และมุม β ใช้สำหรับการหาโมเดลที่ตำแหน่งเพนดูลัมตั้งขึ้น)

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะหาด้วยวิธีการลากรางจ์ (Lagrange's method) [12] ดังสมการ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (4.1)$$

โดยที่

T คือพลังงานจลน์ทั้งหมด (Total kinetic energy)

V คือพลังงานศักย์ทั้งหมด (Total potential energy)

q_i คือพิกัดทั่วไป (Generalized coordinate) ในที่นี้คือตำแหน่งมุมของวัตถุที่แกน i

Q_i คือแรงบิดที่กระทำกับวัตถุบนแกน i (Total torque applied at axis i)

กำหนดพิกัดทั่วไป (Generalized coordinate)

$$q_1 = \alpha$$

$$q_2 = \beta$$

เนื่องจากระบบทางกายภาพของจริงมีความซับซ้อนมากเพื่อให้มีความสะดวกในการสร้างแบบจำลองของระบบจึงต้องมีการตั้งเกณฑ์สมมติฐานทางกายภาพของระบบ ดังนี้

- 1.) อนุกรมในการทดลองเป็นวัสดุแข็งเกร็ง (Rigid body)
- 2.) องศาอิสระ (Degrees of freedom) ทั้งหมดเท่ากับสอง
- 3.) แรงเสียดทานที่มีอยู่ในระบบถือว่ามีค่าน้อยมาก ค่าที่ใช้ในการทดลองจะถูกกำหนด โดยประมาณไว้ก่อน (ผลที่แท้จริงหาได้จากการทดลองหาค่าพารามิเตอร์ของระบบ)
- 4.) การตอบสนองทางพลวัตของเอนโคเดเดอร์เร็วจนกระทั่งถือได้ว่าเกิดขึ้นพร้อมๆกับการเคลื่อนที่จริง
- 5.) การตอบสนองทางไฟฟ้าของระบบต่างๆ (เครื่องขยายสัญญาณ การ์ดนับสัญญาณ พัลส์ การ์ดส่งสัญญาณควบคุม) เร็วมาก

4.1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในการตั้งแกนพิกัดจะใช้จากรูปที่ 4-1 การหาแบบจำลองเริ่มต้นด้วยการหาพลังงานจลน์ของแขนโรตารี กำหนดเป็น T_0 และพลังงานศักย์ V_0 ได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} J_0 \dot{\alpha}^2 \\ V_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

จากรูปที่ 4-1 พิจารณาตำแหน่งศูนย์กลางมวลเพนดูลัมสามารถเขียนสมการตำแหน่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
x_1 &= L_0 \cos \alpha + l_1 \sin \alpha \sin \beta \\
y_1 &= L_0 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \sin \beta \quad (\\
z_1 &= l_1 \cos \beta
\end{aligned}
\tag{4.3}$$

สามารถหาความเร็วได้จากกรหาอนุพันธ์

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -L_0 \dot{\alpha} \sin \alpha + l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + l_1 \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta \\
\dot{y}_1 &= L_0 \dot{\alpha} \cos \alpha + l_1 \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta - l_1 \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \quad (\\
\dot{z}_1 &= -l_1 \dot{\beta} \sin \beta
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^2 &= L_0^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + (l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + l_1 \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta)^2 \\
&\quad - 2L_0 \dot{\alpha} \sin \alpha (l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + l_1 \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta) \\
&= L_0^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + l_1^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + l_1^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (\\
&\quad + 2l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - 2L_0 l_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \\
&\quad - 2L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin^2 \alpha \cos \beta
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1^2 &= L_0^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + (l_1 \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta - l_1 \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta)^2 \\
&\quad + 2L_0 \dot{\alpha} \cos \alpha (l_1 \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta - l_1 \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta) \\
&= L_0^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + l_1^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (4.6) \\
&\quad - 2l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + 2L_0 l_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \\
&\quad - 2L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos^2 \alpha \cos \beta
\end{aligned}$$

$$\dot{z}_1^2 = l_1^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta \tag{4.7}$$

เราจะได้ขนาดความเร็วกำลังสองของแท่งเพนดูลัม ดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 &= L_0^2 \dot{\alpha}^2 + l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + l_1^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta \\
&\quad - 2L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta + l_1^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta \quad (4.8) \\
&= L_0^2 \dot{\alpha}^2 + l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + l_1^2 \dot{\beta}^2 - 2L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta
\end{aligned}$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ (T_1) และพลังงานศักย์ (V_1) ของแท่งเพนดูลัม คือ

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) \\
&= \frac{1}{2} J_1 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_1 L_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\beta}^2 - m_1 2L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \quad (4.9) \\
&= \frac{1}{2} m_1 L_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta - m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= m_1 g z_1 \\
&= m_1 g l_1 \cos \beta \quad (4.10)
\end{aligned}$$

จากสมการลากรางจ์ (Lagrange's equation) ที่ (4.1)

$$L = T - V \quad (4.11)$$

$$L = L_0 + L_1 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
L &= T_0 + T_1 - V_0 - V_1 \\
&= \frac{1}{2} J_0 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_1 L_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta \\
&\quad - m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta - m_1 g l_1 \cos \beta \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} (J_0 + m_1 L_0^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta \\
&\quad - m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta - m_1 g l_1 \cos \beta \quad (4.14)
\end{aligned}$$

สำหรับพิกัดทั่วไป $q_1 = \alpha$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = (J_0 + m_1 L_0^2) \dot{\alpha} + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin^2 \beta - m_1 L_0 l_1 \dot{\beta} \cos \beta \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta \\
&\quad - m_1 L_0 l_1 \ddot{\beta} \cos \beta + m_1 L_0 l_1 \dot{\beta}^2 \sin \beta \quad (4.17) \\
&= (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \beta - m_1 L_0 l_1 \ddot{\beta} \cos \beta \\
&\quad + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + m_1 L_0 l_1 \dot{\beta}^2 \sin \beta
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau_\alpha \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \beta - m_1 L_0 l_1 \ddot{\beta} \cos \beta \\ + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + m_1 L_0 l_1 \dot{\beta}^2 \sin \beta = \tau_\alpha \end{aligned} \quad (4.19)$$

พิจารณาแรงบิด (τ_α) ที่กระทำบนแกนในแนวการหมุน α ประกอบด้วยแรงบิดจากมอเตอร์และแรงเสียดทาน

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \tau_m - \tau_{friction} \\ &= \tau_m - C_0 \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \beta - m_1 L_0 l_1 \ddot{\beta} \cos \beta + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta \\ + m_1 L_0 l_1 \dot{\beta}^2 \sin \beta = \tau_m - C_0 \dot{\alpha} \\ (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \beta - m_1 L_0 l_1 \ddot{\beta} \cos \beta + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta \\ + m_1 L_0 l_1 \dot{\beta}^2 \sin \beta + C_0 \dot{\alpha} = \tau_m \end{aligned} \quad (4.21)$$

และในลักษณะเดียวกัน สำหรับพิกัดทั่วไป $q_2 = \beta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + m_1 g l_1 \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta + m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + m_1 g l_1 \sin \beta \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\beta} - m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \cos \beta \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\beta} - m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} \cos \beta + m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = \tau_\beta \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\beta} - m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} \cos \beta + m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta \\ - m_1 L_0 l_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta - m_1 g l_1 \sin \beta = \tau_\beta \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$-m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} \cos \beta + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\beta} - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta - m_1 g l_1 \sin \beta = \tau_\beta$$

พิจารณาแรงบิด (τ_β) ที่กระทำบนแกนในแนวการหมุน β เป็นแรงที่เกิดจากแรงเสียดทานเพียงอย่างเดียว

$$\tau_\beta = C_1 \dot{\beta} \quad (4.27)$$

$$-m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} \cos \beta + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\beta} - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta - m_1 g l_1 \sin \beta = C_1 \dot{\beta}$$

$$-m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} \cos \beta + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\beta} - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta + C_1 \dot{\beta} - m_1 g l_1 \sin \beta = 0 \quad (4.28)$$

จัดรูปสมการที่ (4.21) และ (4.28) เป็นรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta & -m_1 L_0 l_1 \cos \beta \\ -m_1 L_0 l_1 \cos \beta & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\beta} \sin 2\beta & m_1 L_0 l_1 \dot{\beta} \sin \beta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

ในการควบคุมแรงบิดมอเตอร์จะส่งจ่ายสัญญาณแรงดันและผ่าน เครื่องขยายสัญญาณ เพื่อแปลงสัญญาณแรงดันเป็นกระแส ดังนั้นแรงบิดที่เกิดขึ้นที่มอเตอร์สามารถเขียนได้ในรูปแบบ ดังนี้

$$\tau_m = K_t i_a \quad (4.30)$$

$$\tau_m = K_t K_u u \quad (4.31)$$

แทนกลับลงไปนสมการที่ (4.29) เขียนสมการในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta & -m_1 L_0 l_1 \cos \beta \\ -m_1 L_0 l_1 \cos \beta & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\beta} \sin 2\beta & m_1 L_0 l_1 \dot{\beta} \sin \beta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t K_u \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.32)$$

4.2 การแปลงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเชิงเส้น

การแปลงระบบให้เป็นเชิงเส้นที่รอบๆจุดสมดุล

$$\dot{\alpha} = 0 \quad \beta = 0 \quad \dot{\beta} = 0$$

จากสมการที่ (4.32) จะได้

$$\begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 & -m_1 L_0 l_1 \\ -m_1 L_0 l_1 & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_1 g l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t K_u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

4.3 รูปแบบปริภูมิสแตต (State space realization)

กำหนด

$$\begin{aligned} a &= J_0 + m_1 L_0^2 & b &= m_1 l_1^2 & c &= m_1 L_0 l_1 & d &= C_0 \\ e &= K_t K_u & f &= J_1 + m_1 l_1^2 & h &= m_1 g l_1 \end{aligned}$$

จาก (4.33) แทนค่าตัวแปรที่กำหนดและจัดรูป

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{af - c^2} (-cd\dot{\alpha} - aC_1\dot{\beta} + ah\beta) \quad (4.34)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{af - c^2} (-df\dot{\alpha} - cC_1\dot{\beta} + ch\beta + efu) \quad (4.35)$$

จาก (4.34) และ (4.35) จะได้แบบจำลองสำหรับตัวแปรสแตตดังนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{af - c^2} \begin{bmatrix} 0 & af - c^2 & 0 & 0 \\ 0 & -df & ch & -cC_1 \\ 0 & 0 & 0 & af - c^2 \\ 0 & -cd & ah & -aC_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \frac{1}{af - c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ ef \\ 0 \\ ce \end{bmatrix} u \quad (4.36)$$

4.4 การหาค่าพารามิเตอร์ของระบบ

4.4.1 ค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์

พารามิเตอร์ที่สำคัญของมอเตอร์คือค่าคงที่แรงบิด K_t ซึ่งไม่สามารถหาได้โดยตรงจะอุปกรณ์ที่มีอยู่ต้องหาผ่านค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ K_b ซึ่งมีค่าเท่ากัน โดยการหาจะใช้วิธีการหาค่าแรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ E_b ก่อน และจากสมการ (4.37) จะได้ค่า K_b

$$E_b = K_b \omega \quad (4.37)$$

นอกจากนี้การหาค่า E_b จำเป็นต้องทราบค่าความต้านทานขดลวดมอเตอร์โดยการจ่ายกระแสเข้ามอเตอร์และไม่ให้มอเตอร์หมุน จะหา R_a ค่าในมอเตอร์ได้จาก

$$V_s = i_a R_a \quad (4.38)$$

4.4.2 ค่าอัตราขยายของเครื่องขยายสัญญาณ

สัญญาณควบคุม ที่เป็นแรงดันจาก เครื่อง cRIO ถูกแปลงให้เป็นกระแสโดย เครื่องขยายสัญญาณแปลงสัญญาณเพื่อควบคุมแรงบิดของมอเตอร์โดยมีความสัมพันธ์ คือ

$$i_a = K_u u \quad (4.39)$$

การทำโดยการจ่ายสัญญาณควบคุม ค่าต่างๆและวัดค่ากระแสที่ไหลผ่านมอเตอร์ ในการทดลองนี้แบ่งเป็นสองวิธีการคือปล่อยมอเตอร์หมุนอิสระ และอีกวิธีคือหยุดมอเตอร์อยู่กับที่

4.4.3 ค่าพารามิเตอร์ของระบบเพนดูลัม

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อ 4.1.1 สมการที่ (4.32) สามารถแบ่งพารามิเตอร์ได้ 2 ประเภทตามวิธีการหาตามตารางที่ 4-1

ตารางที่ 4-1 ชนิดของพารามิเตอร์โดยการแบ่งตามวิธีหา

พารามิเตอร์ที่หาค่าได้โดยตรง	m_1, L_0, l_1
พารามิเตอร์ที่หาไม่ได้โดยตรง	J_0, C_0, J_1, C_1

ในส่วนพารามิเตอร์ที่หาไม่ได้โดยตรงจะทำการคำนวณคร่าวๆเพื่อประเมินผลการทดลองว่าถูกต้องหรือไม่ การทดลองจะแยกเป็นสองส่วนคือ

- 1.) ส่วนแขนเพนดูลัมทดสอบด้วยการจ่ายสัญญาณอิมพัลส์ เพื่อหาค่า J_0 และ C_0
- 2.) ส่วนแท่งเพนดูลัมด้วยการปล่อยแท่งเพนดูลัมแกว่งอย่างอิสระเพื่อหาค่า J_1, C_1

ตารางที่ 4-2 ค่าพารามิเตอร์ของระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนที่ใช้ในงานวิจัย

สัญลักษณ์	คำอธิบาย	ค่าที่ได้	หน่วย
m_1	มวลของแท่งเพนดูลัม	0.118	kg
L_0	ระยะจากจุดหมุนของแท่งเพนดูลัมถึงแกนหมุนของแขนเพนดูลัม	0.150	m
l_1	ระยะจากจุดหมุนถึงจุดศูนย์กลางมวลของแท่งเพนดูลัม	0.235	m
K_b, K_t	ค่าคงที่แรงดันย้อนกลับ, ค่าคงที่แรงบิดของมอเตอร์	0.150317	V - s / rad , Nm / A
K_u	อัตราขยายของเครื่องขยายสัญญาณ	1.00765	A / V
J_0	ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแขนเพนดูลัมรอบจุดหมุน	0.0069267	kg - m ²
J_1	ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งเพนดูลัมรอบจุดหมุน	0.0069438	kg - m ²
C_0	สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของแขนเพนดูลัม	0.0013647	kg - m ² / s
C_1	สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของแท่งเพนดูลัม	0.0016248	kg - m ² / s

จากสมการที่ (4.33) เมื่อทำการประมาณเป็นเชิงเส้นรอบๆจุดสมดุล

$$\alpha = 0 \quad \dot{\alpha} = 0 \quad \beta = 0 \quad \dot{\beta} = 0$$

จะได้สมการที่ (4.33)

$$\begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 & -m_1 L_0 l_1 \\ -m_1 L_0 l_1 & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_1 g l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t K_u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

แทนค่าพารามิเตอร์ที่หาได้และจัดให้อยู่ในรูปปริภูมิสแตต

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

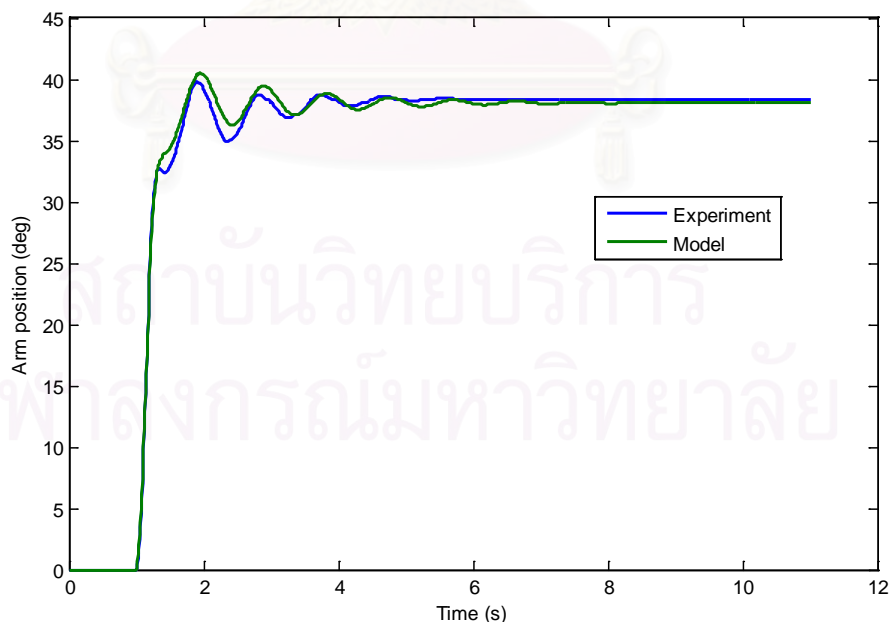
$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1645 & 10.1326 & -0.0605 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0508 & 23.3411 & -0.1394 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 18.2963 \\ 0 \\ 5.6539 \end{bmatrix} u \quad (4.40)$$

ค่าลักษณะเฉพาะของระบบคือ $[0 \ -0.1638 \ -4.9761 \ 4.8035]$ จะเห็นได้ว่า ตำแหน่งโพลของระบบจะมีโพลที่ไม่เสถียรโดยอยู่ฝั่งขวาของระนาบ s ซึ่งมีค่าเป็นบวกคือ 4.8035

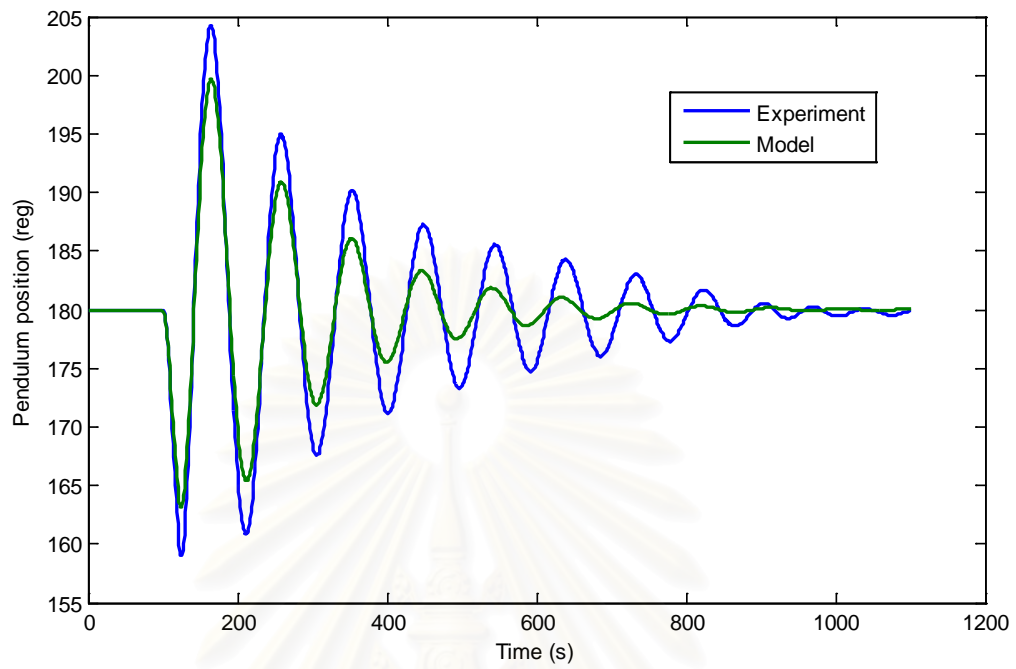
ทำการแปลงระบบให้อยู่ในรูปทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน โดยให้เมตริกซ์สัญญาณขาออก (Output) คือ $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ด้วยโปรแกรม MATLAB ได้ผลดังนี้

$$\frac{\alpha}{u} = \frac{21.55s^2 + 2.601s - 435.5}{s^4 + 0.3365s^3 - 23.87s^2 - 3.916s} \quad (4.41)$$

และทำการหาค่ารากของซีโรของระบบคือ $[-4.5562 \ 4.4355]$ และรากของโพลคือ $[0 \ -4.9757 \ 4.8030 \ -0.1639]$ จาก [38] การที่ระบบเชิงเส้นจะเป็นระบบที่มีมูฟเฟสไม่น้อยที่สุด (Nonminimum phase) นั้นระบบจะมีค่าซีโรที่ไม่เสถียรนั้นคืออยู่ทางด้านขวาของระนาบ s



รูปที่ 4-2 ค่าตำแหน่งแขนที่ได้จากการทดลองและแบบจำลอง



รูปที่ 4-3 ค่าตำแหน่งแ่งเพนดูลัมที่ได้จากการทดลองและแบบจำลอง

บทที่ 5

การควบคุมระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

5.1 การควบคุมเพนดูลัมผกผัน

ระบบเพนดูลัมนั้นจะมีจุดสมดุลอยู่สองจุดนั่นคือ $\beta = \pi$ หรือตำแหน่งที่เพนดูลัมลงข้างล่างซึ่งเป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพ และตำแหน่งที่ $\beta = 0$ หรือตำแหน่งที่เพนดูลัมตั้งขึ้นซึ่งเป็นจุดสมดุลที่ไม่เสถียรภาพ จุดประสงค์ของการควบคุมเพนดูลัมคือการรักษาสมดุลแก่เพนดูลัมให้อยู่ในลักษณะที่ตั้งตรงที่ตำแหน่ง $\beta = 0$ นั่นคือต้องมีการย้ายตำแหน่งแก่เพนดูลัมที่อยู่ในตำแหน่งลงข้างล่างไปสู่ตำแหน่งที่แก่เพนดูลัมตั้งขึ้น

เมื่อพิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วพบว่าระบบมีความไม่เชิงเส้นสูงมาก ในกรณีที่แปลงระบบให้อยู่ในรูปเชิงเส้นที่รอบๆจุดสมดุลหรือ $\beta = 0$ สามารถกระทำได้แต่ตัวควบคุมที่ออกแบบบนแบบจำลองเชิงเส้นนี้ก็จะมีความสามารถในการทำงานที่ช่วงที่ออกแบบไว้เท่านั้น ตัวควบคุมจึงไม่สามารถย้ายตำแหน่งแก่เพนดูลัมจากจุดใดๆไปที่จุดสมดุลได้ในช่วงที่ β มีค่ามาก หรือในกรณีที่ออกแบบบนแบบจำลองไม่เชิงเส้นด้วยความที่ระบบมีความไม่เชิงเส้นสูงถ้าต้องการให้ตัวควบคุมเพียงตัวเดียวทำงานได้ดีในทุกช่วงการทำงานนั้นไม่สามารถกระทำได้เพราะระบบเพนดูลัมผกผันนอกจากมีความไม่เชิงเส้นแล้ว ยังเป็นระบบ Under-actuated เพราะว่ามีตัวขับเคลื่อนเพียงตัวเดียวแต่มีองศาอิสระจำนวนสองตัว นอกจากนี้แก่เพนดูลัมมีได้ต่อกับตัวขับเคลื่อนโดยการควบคุมตำแหน่งแก่เพนดูลัมจึงไปสามารถกระทำได้โดยตรง รวมถึงระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนนี้ยังเป็นระบบที่มีมุมเฟสไม่น้อยที่สุดอีกด้วย ซึ่งเห็นได้จากแบบจำลองว่าระบบมีค่าซีโรเป็นบวกจึงเห็นได้ชัดเจนว่าการควบคุมระบบเพนดูลัมนี้มีความซับซ้อนมากกว่าใช้ตัวควบคุมเพียงตัวเดียวและให้ได้สมรรถนะที่ดีนั้นจึงเป็นไปได้เลย

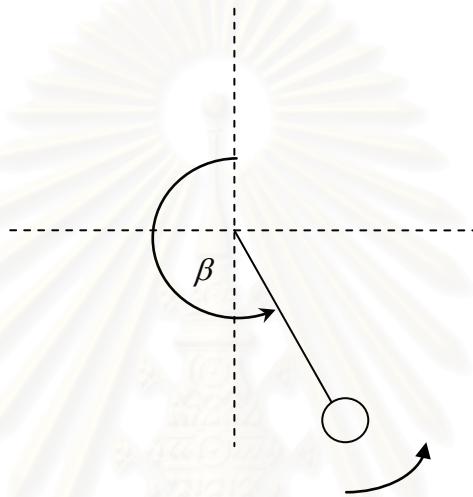
ด้วยลักษณะดังกล่าวของระบบเพนดูลัมผกผันทำให้มีความจำเป็นที่จะต้องใช้ตัวควบคุมสองตัวแยกกันทำงานในแต่ละช่วงคือ ตัวควบคุมตัวแรกทำหน้าที่ย้ายแก่เพนดูลัมจากจุดใดๆไปสู่จุดสมดุลที่ $\beta = 0$ หรือย้ายแก่เพนดูลัมเข้าสู่ช่วงการทำงานของตัวควบคุมรักษาสมดุล และตัวควบคุมอีกตัวคือทำหน้าที่รักษาสมดุลแก่เพนดูลัมไว้ให้แก่เพนดูลัมตั้งอยู่ในลักษณะที่ตั้งขึ้นตลอด

5.2 การควบคุมสำหรับแกว่งแก่เพนดูลัมขึ้น

ในการควบคุมแก่เพนดูลัมไม่สามารถกระทำได้โดยตรงเนื่องจากไม่มีตัวขับเคลื่อนโดยตรงที่แก่เพนดูลัม การควบคุมจึงต้องกระทำผ่านส่วนแขนเท่านั้น ในกรณีที่ต้องการควบคุมตำแหน่งและ

ความเร็วโดยตรงต้องควบคุมผ่านพลวัตที่ซับซ้อนของระบบเพนดูลัมผกผันทั้งระบบ ดังนั้นแนวทางหนึ่งคือการควบคุมการแกว่งของแท่งเพนดูลัมโดยพิจารณาพลังงานของระบบแทน แนวคิดคือตัวควบคุมจะคำนวณระดับพลังงานของแท่งเพนดูลัมคือพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของแท่งเพนดูลัม

พิจารณารูปที่ 5-1 แท่งเพนดูลัม



รูปที่ 5-1 แท่งเพนดูลัม

จะได้สมการพลังงานรวมของแท่งเพนดูลัมดังนี้

$$E = \frac{1}{2} J (\dot{\beta})^2 + mgl (\cos \beta - 1) \quad (5.1)$$

การสร้างกฎควบคุมสำหรับแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้นจะนำพลังงานของระบบมาเทียบกับระดับพลังงานที่ของระบบ ณ จุดสมดุล ความแตกต่างของพลังงานที่มีอยู่ในระบบเทียบกับความระดับพลังงานที่ต้องการในระบบจะเป็นตัวกำหนดการขนาดจ่ายพลังงานเข้าสู่ระบบ โดยจะนำไปคูณกับอัตราขยายอีกครั้ง

นอกจากนี้สิ่งที่จำเป็นในการสร้างกฎควบคุมคือทิศทางของการแกว่ง และระดับของแท่งเพนดูลัม

รูปที่ 5-2 (ก) แสดงการเคลื่อนที่ของของแขนเพนดูลัมไปทางขวามือ และแท่งเพนดูลัมจะแกว่งในลักษณะตามเข็มนาฬิกา ทิศทางความเร็วแท่งเพนดูลัมในแนวนอนจะชี้ไปทางซ้ายมือหรือตรงกันข้ามกับทิศทางของการเคลื่อนที่ของแขนเพนดูลัม หลังจากที่เพนดูลัมแกว่งขึ้นไปจนถึงจุดที่ความเร็วเท่ากับศูนย์เพนดูลัมจะเริ่มตกลงมาทิศทางของความเร็วจะกลับเป็นทวนเข็มนาฬิกา รูปที่

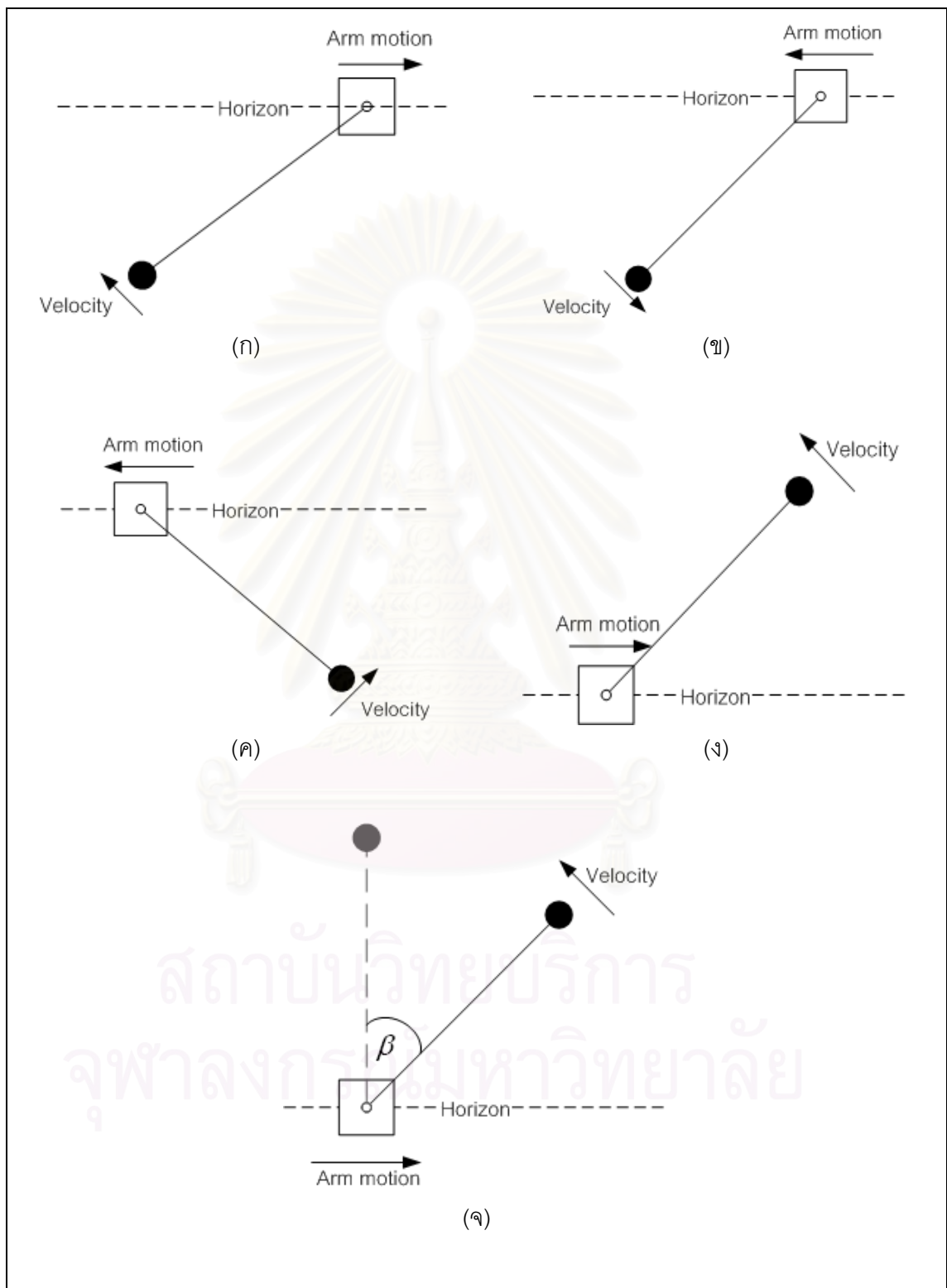
5-2 (ข) จากนั้นแท่งเพนดูลัมจะแกว่งต่อไปและผ่านจุดต่ำสุดกลับไปอีกทาง รูปที่ 5-2 (ค) และเมื่อแท่งเพนดูลัมสามารถแกว่งสูงกว่าระดับแนวนอนทิศทางของความเร็วในระดับแนวนอนจะกลับทิศไปในทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ของแขนเพนดูลัม รูปที่ 5-2(ง) ด้วยหลักการดังกล่าวจะเห็นว่าทิศทางของความเร็วและตำแหน่งเพนดูลัมมีความสำคัญซึ่งสามารถเขียนกฎควบคุมได้ดังนี้

$$u = K(E_{sys} - E_0) \text{sign}(\dot{\beta} \cos \beta) \quad (5.2)$$

กฎการควบคุมที่เขียนขึ้นมาจะประกอบด้วยสองส่วนคือส่วนที่บอกถึงขนาดพลังงานซึ่งบอกโดยสองพจน์แรกนั่นคือค่าอัตราขยายและพลังงานที่ต้องการของระบบ และสองพจน์ที่เหลือคือพจน์ที่ใช้ระบุทิศทางที่จะใส่พลังงานเข้าไป

การเลือกอัตราขยายสำหรับกฎการควบคุมจะสามารถหาได้จากการทดลองซึ่งจะให้ผลแตกต่างกันคือจำนวนครั้งการแกว่งของแท่งเพนดูลัมซึ่งถ้าอัตราขยายยิ่งมีค่ามากจำนวนครั้งการแกว่งก็จะน้อยลงซึ่งค่าที่น้อยที่สุดนั้นขึ้นอยู่กับระบบเพนดูลัมที่ใช้ทดลอง นอกจากนี้การเลือกค่าอัตราขยายจะต้องต้องไม่มากเกินไปเนื่องจากถ้าอัตราขยายมากพลังงานที่เข้าสู่ระบบซึ่งเป็นพลังงานจลน์จะมีค่ามาก นั่นหมายความว่าแท่งเพนดูลัมจะมีความเร็ว ถ้าความเร็วของแท่งเพนดูลัมมีค่ามากเกินไปตัวควบคุมที่ใช้รักษาสมดุลแท่งเพนดูลัมจะไม่สามารถรักษาสมดุลได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 5-2 การแกว่งที่ของแท่งเพนดูลัม

ในส่วนสองพจน์หลังที่ใช้กำหนดทิศทางของของสัญญาณควบคุม พจน์ความเร็วจะเป็นตัวกำหนดการเปลี่ยนทิศทางเมื่อแท่งเพนดูลัมแกว่งไปจนถึงจุดสูงสุด แท่งเพนดูลัมจะหยุดแกว่งและแกว่งเริ่มไปในทิศทางตรงข้าม จากรูปที่ 5-2 (ก), (ข) ส่วนพจน์ค่าโคไซน์ (Cosine) จะมีค่าติดลบเมื่อแท่งเพนดูลัมอยู่ต่ำกว่าระดับแนวนอนใน รูปที่ 5-2 (ก), (ข), (ค) และมีค่าเป็นบวกใน รูปที่ 5-2 (ง) ซึ่งจะช่วยกลับทิศของสัญญาณควบคุมส่งให้แท่งเพนดูลัมอยู่ในตำแหน่งผกผัน

ในการเข้าสู่จุดสมดุลของแท่งเพนดูลัมด้วยการควบคุมพลังงานของแท่งเพนดูลัม ระบบควบคุมจะมีสัญญาณควบคุมเท่ากับศูนย์เมื่อพลังงานจลน์ของแท่งเพนดูลัม (สมการ (5.1)) เท่ากับพลังงานที่ระบบต้องการ (E_0) และจะทำให้แท่งเพนดูลัมจะวิ่งเข้าสู่จุดสมดุล เช่นในรูปที่ 5-2 (จ)

สมการ (5.1) พลังงานของแท่งเพนดูลัมจะไม่ได้คิดพลังงานสูญเสียที่เกิดจากแรงเสียดทาน แรงต้านอากาศ ดังนั้นแล้วพลังงานที่ประเมินจากสมการจะมีค่ามากกว่าความเป็นจริงทำให้สัญญาณควบคุมที่จ่ายออกมาน้อยกว่าความเป็นจริงเล็กน้อยจึงต้องกำหนดให้พลังงานที่ระบบต้องการมีค่ามากกว่าศูนย์เล็กน้อยเพื่อเป็นการชดเชยในส่วนพลังงานที่ไม่ได้นำมาคำนวณ และในลักษณะเดียวกันกับการเลือกอัตราขยายค่าพลังงานที่ต้องการ (E_0) จะต้องมีค่าไม่มากจนเกินไป ซึ่งจะทำให้ตัวควบคุมสำหรับรักษาสมดุลไม่สามารถรักษาสมดุลได้

5.3 การควบคุมสำหรับรักษาสมดุลแท่งเพนดูลัม

5.3.1 การป้อนกลับสเตตด้วยการวางตำแหน่งโพล

หลังจากของการออกแบบโดย วิธีวางตำแหน่งโพล (Pole placement) ก็คือ ตั้งข้อกำหนดสำหรับตำแหน่งโพลทั้งหมดของระบบวงปิด และออกแบบตัวควบคุมที่จะได้ตำแหน่งโพลตามข้อกำหนดเงื่อนไขจำเป็นของ ระบบที่ทำให้สามารถทำการเคลื่อนย้ายโพลทั้งหมดไปยังตำแหน่งที่ต้องการได้คือ ระบบจะต้องสามารถควบคุมได้

ในการออกแบบทั่วไปจะไม่ได้ต้องการให้ระบบมีเสถียรภาพอย่างเดียว แต่จะต้องมีสมรรถนะหรือผลตอบสนองตามต้องการด้วย ดังนั้น การกำหนดตำแหน่งของโพลระบบวงปิดจึงมิใช่เพียงแต่ว่าต้องการอยู่บนด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อนเท่านั้น แต่อาจจะต้องอยู่ในพื้นที่ที่จะให้ผลตอบสนองที่ดีด้วย ตัวอย่างเช่น ถ้าตำแหน่งโพลอยู่ใกล้แกนจินตภาพมากเกินไป ผลตอบสนองจะมีลักษณะแกว่ง จึงอาจกำหนดพื้นที่แรงแสดงในรูปที่ 5.1 ซึ่งระบบวงปิดจะต้องมีโพลทั้งหมดอยู่ในพื้นที่นี้

ในระบบอันดับ n ทั่ว ๆ ไปความสัมพันธ์ผลตอบสนองทางเวลาของระบบกับตำแหน่งของโพลมักมีความซับซ้อน จึงเป็นการยากที่จะกำหนดตำแหน่งของโพลเพื่อให้ได้ผลตอบสนองที่ดี

ดังนั้น วิธีการออกแบบนี้โดยทั่วไปอาศัยหลักการของระบบที่มีลักษณะเด่นเป็นอันดับสอง (second-order dominant system) นั่นคือ โพลที่มีผลกระทบต่อผลตอบสนองมากที่สุดจะเป็นอันดับสอง เหตุผล ของการใช้ ระบบอันดับสอง จะสามารถคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างคุณสมบัติในโดเมนเวลากับตำแหน่งของโพลได้ โดยง่ายโดยใช้สูตรในตำราควบคุมทั่วไป

สามารถอธิบายวิธีการวางโพลอย่างง่าย ๆ ได้ดังนี้ สมมติให้ $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]^T$ เป็นตัวควบคุมป้อนกลับจากสเตตดังในรูปที่ 5.2 โดย $k_i, i = 1, \dots, n$ เป็นค่าอัตราขยายที่ต้องทำการออกแบบ ดังนั้น อินพุตที่ป้อนให้กับ ระบบจะเท่ากับ เป็นค่าอัตราขยายที่ต้องทำการออกแบบ ดังนั้น อินพุตที่ป้อนให้กับระบบจะเท่ากับ

$$u(t) = Kx(t) \quad (5.3)$$

5.3.1.1 สูตรของแอกเคอร์มันน์สำหรับการวางตำแหน่งโพล (Ackermann's Formula for Pole Placement)

เป็นสูตรที่ใช้ในการกำหนดตำแหน่งของโพลของระบบควบคุมแบบปิด พิจารณาระบบของ สามารถเขียนในรูปแบบปริภูมิสเตตได้ ดังนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.4)$$

และกฎของการออกแบบระบบควบคุม (Control law) คือ

$$u = -Kx \quad (5.5)$$

ซึ่งเมื่อเราแทนสมการที่ (5.5) ลงในสมการที่ (5.4) เราสามารถหาสมการลักษณะเฉพาะของระบบ ปิดได้ว่า

$$\alpha_c(s) = \det[sI - (A - BK)] \quad (5.6)$$

สมการที่ (5.6) ด้านซ้ายมือคือ สมการลักษณะเฉพาะของระบบที่เราต้องการหรือที่เรา กำหนดตำแหน่งของโพลไว้ก่อนแล้ว ส่วนทางด้านขวามือคือ สมการลักษณะเฉพาะของระบบที่กำลังออกแบบ ดังนั้น จากสมการนี้เราจึงสามารถคำนวณหาอัตราขยาย K ได้

โดยสมมติให้สัญญาณคำสั่ง $r(t)$ เท่ากับศูนย์เพื่อให้เข้าใจได้ง่าย เมื่อใช้ตัวควบคุมนี้และ คำนวณสมการปริภูมิสเตตของระบบป้อนกลับจะได้เป็น

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (5.7)$$

ซึ่งสามารถคำนวณหาโพลได้จาก

$$\det(sI - A - BK) = 0 \quad (5.8)$$

ในขณะเดียวกัน หากต้องการออกแบบโดยกำหนดโพลของระบบวงปิดที่ตำแหน่ง p_1, p_2, \dots, p_n จะได้สมการลักษณะเฉพาะเท่ากับ

$$\alpha(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \quad (5.9)$$

ดังนั้น สามารถคำนวณหาตัวควบคุม K ได้จากการเปรียบเทียบ (5.8) และ (5.9)

เมื่อใช้รูปแบบบัญญัติของตัวควบคุม (Control canonical form) มาใช้ในการออกแบบตัวควบคุม เมื่อเราคำนวณหาค่าอัตราขยาย K ได้แล้ว เราจำเป็นที่จะต้องทำการแปลงค่าอัตราขยาย K นั้นให้กลับสู่ระบบเดิม

สมมติว่าเราจะทำการแปลงแบบไม่เอกฐาน (Nonsingular transformation) กับตัวเสถียรของระบบของเราดังนี้

$$x = T\bar{x} \quad (5.10)$$

โดยที่ค่า \bar{x} คือค่าเสถียร (State) ตัวใหม่ที่เกิดจากการแปลงตัวเสถียร x ด้วยเมตริกซ์ T (ที่ไม่เอกฐานหรือไม่ใช่ศูนย์) และเราจะได้ว่า

$$\dot{x} = T\dot{\bar{x}} \quad (5.11)$$

$$\dot{x} = T\dot{\bar{x}} = Ax + Bu \quad (5.12)$$

$$x = AT\bar{x} + Bu \quad (5.13)$$

ดังนั้น ถ้าจัดรูปแบบใหม่จะได้ว่า

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}Bu \quad (5.14)$$

หรือ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \quad (5.15)$$

เมตริกซ์ความควบคุมได้ของระบบต้นแบบ คือ

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (5.16)$$

ดังนั้น เมตริกซ์ความควบคุมได้ของระบบที่ทำการแปลงแล้วคือ

$$\bar{C} = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \quad (5.17)$$

ซึ่งเมตริกซ์ความควบคุมได้ทั้งสองสมการนี้มีความสัมพันธ์กันอยู่คือ

$$\bar{C} = [T^{-1}B \quad T^{-1}ATT^{-1}B \quad T^{-1}A^2B \quad \dots \quad T^{-1}A^{n-1}B] \quad (5.18)$$

$$\bar{C} = T^{-1}C \quad (5.19)$$

ดังนั้น เราจึงสามารถคำนวณหาเมตริกซ์การแปลง (Transformation matrix) T ได้คือ

$$T = C\bar{C}^{-1} \quad (5.20)$$

ตัวเมตริกซ์การแปลง T นี้จะใช้สำหรับการแปลงระบบให้ไปอยู่ในรูปแบบบัญญัติของการควบคุม เพื่อให้สะดวกต่อการออกแบบตัวควบคุม แต่อย่างไรก็ตามก่อนที่จะทำการแปลงนั้น

เราควรจะต้องตรวจสอบก่อนว่าระบบของเรามีคุณสมบัติที่สามารถถูกควบคุมได้หรือไม่ และเมื่อเราออกแบบตัวควบคุมแล้วกล่าวคือ ได้ค่าอัตราขยาย K เราจำเป็นต้องทำการแปลงกลับมาอยู่ในตัวแปรสแตตของระบบต้นแบบ ซึ่งก็สามารถทำได้โดยใช้เมตริกซ์การแปลง T นี้ช่วยเช่นกัน

ตัวอย่างเช่น

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เราสามารถหาเมตริกซ์ความควบคุมได้ คือ

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & a_1^2 - a_2 \\ 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าเมตริกซ์ความควบคุมได้นี้มีลักษณะเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) หรือค่าในเมตริกซ์ที่พจน์อยู่ในส่วนของสามเหลี่ยมด้านบนของเมตริกซ์ไม่เป็นศูนย์และพจน์ส่วนด้านล่างของสามเหลี่ยมจะเป็นศูนย์ ซึ่งเราสามารถหาส่วนกลับของเมตริกซ์ (invert) ได้ และนอกจากนั้น จะเห็นว่าบรรทัดสุดท้ายของเมตริกซ์นี้จะมีค่าเป็นศูนย์ทุกตัวยกเว้นตัวสุดท้ายซึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง

รูปแบบบัญญัติของตัวควบคุมสำหรับระบบอันดับสามคือ

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

และ

$$\bar{C} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \quad (5.22)$$

ดังนั้น สำหรับระบบปิดเราจะได้ว่า

$$\bar{A}_{cl} = \bar{A} - \bar{B}K \quad (5.23)$$

$$\bar{A} - \bar{B}K = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & -a_3 - k_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

และสมการลักษณะเฉพาะของสมการที่ (5.24) สามารถหาได้สะดวกและมีค่าเท่ากับ

$$s^3 + (a_1 + k_1)s^2 + (a_2 + k_2)s + (a_3 + k_3) = 0 \quad (5.25)$$

ดังนั้น สำหรับสมการลักษณะเฉพาะของระบบที่เราได้กำหนดตำแหน่งโพลไว้แล้วจะมีรูปแบบดังนี้

$$S^3 + \alpha_1 S^2 + \alpha_2 S + \alpha_3 = 0 \quad (5.26)$$

ดังนั้น ถ้าเทียบสัมประสิทธิ์ระหว่างสมการที่ (5.25) และสมการที่ (5.26) เราจะได้ว่า

$$k_1 = \alpha_1 + a_1; k_2 = -\alpha_2 + a_2; k_3 = -\alpha_3 + a_3 \quad (5.27)$$

หรือถ้าจะเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้ว่า

$$a + K = \alpha \quad (5.28)$$

ซึ่ง a และ α จะเป็นเมตริกซ์แนวนอน (row matrix) ซึ่งประกอบด้วยตัวสัมประสิทธิ์ของสมการลักษณะเฉพาะของระบบเปิดและระบบปิดตามลำดับ

5.3.2 การควบคุมแบบ Linear Quadratic Regulator

การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสแตตโดยวิธีการวางตำแหน่งโพล เป็นเครื่องมือออกแบบที่มีประโยชน์สำหรับระบบที่มีอันดับไม่สูงมาก หรือระบบที่มีลักษณะเด่นเป็นพลวัตอันดับสอง เพราะทราบความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลหรือค่าเจาะจงกับผลตอบสนองของระบบเช่น ช่วงเวลาขึ้น หรือการพุ่งเกิน แต่สำหรับระบบที่มีอันดับสูงความสัมพันธ์ดังกล่าวจะไม่สามารถเห็นได้ชัดเจน ข้อจำกัดอีกประการของวิธีการวางโพลคือ ระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) ของปัญหา ตัวอย่างเช่น สำหรับระบบที่มีจำนวนสแตตเท่ากับ n และจำนวนอินพุตเท่ากับ m เมตริกซ์อัตราขยายป้อนกลับ K จะมีจำนวนอัตราขยาย mn ตัว

แนวคิดที่เป็นประโยชน์ในการแก้ไขปัญหาดังกล่าวคือ การเลือกตัวควบคุมป้อนกลับโดยหาค่าเหมาะที่สุดสำหรับตัววัดคุณภาพของระบบ ตัวอย่างของตัววัดดังกล่าวคือ ผลตอบสนองพลวัต การขจัดสัญญาณรบกวน ความไว หรือความทนทาน เป็นต้น ได้มีความพยายามพัฒนาวิธีการควบคุมเหมาะที่สุดหลายรูปแบบในการที่จะออกแบบระบบควบคุมป้อนกลับเชิงเส้นได้อย่างครบวงจรหรือเรียกว่าครั้งเดียวจบในตัวเอง แต่ทุกวิธีประสบปัญหาในการเลือกฟังก์ชันคณิตศาสตร์ที่จะสามารถบรรยายความซับซ้อนของการออกแบบระบบป้อนกลับได้อย่างสมบูรณ์ ดังนั้น แนวทางในความเป็นจริงคือการใช้การหาค่าเหมาะที่สุดเป็นเพียงเครื่องมือช่วยจนกระทั่งได้ผลลัพธ์ที่น่าพอใจ

ในส่วนนี้จะศึกษาเทคนิคในการเลือกอัตราขยายของตัวป้อนกลับสเตตที่เหมาะสมที่สุด หรือ Linear Quadratic Regulator) หรือ LQR

5.3.2.1 ปัญหา LQR ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

ในการควบคุม LQR อย่างสมบูรณ์จะเริ่มจากปัญหา LQR ที่ทำการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดในช่วงภาวะชั่วคราว หรือเรียกว่า กรณีเส้นแนวนอนจำกัด (finite horizon) หรือการจำกัดช่วงเวลานั้นเอง เพราะ โดยปกติเส้นแนวนอน จะใช้ เป็นแกนของเวลา กรณีจำกัดช่วงเวลาจะได้ค่าอัตราขยายของตัวป้อนกลับสเตตที่แปรตามเวลา ทำให้ไม่สามารถหิมพลิเมนต์ได้ง่าย จึงจะพิจารณาเฉพาะปัญหา LQR ที่ไม่ขึ้นกับเวลา หรือมีชื่ออื่น ๆ เรียกว่า กรณีเส้นแนวนอนไม่จำกัด (infinite horizon) หรือ ปัญหา LQR ในสถานะอยู่ตัว ออกจากทฤษฎีหลักของ LQR คือ

ทฤษฎี 5.1 : (LQR ในสถานะอยู่ตัว) พิจารณาระบบพลวัต

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (5.29)$$

โดย $x(t) \in R^n$ และ $u(t) \in R^m$ นิยามผลรวมเชิงเส้น ของสเตต

$$z(t) = Cx(t) \quad (5.30)$$

โดย $z(t) \in R^p$ และนิยาม ฟังก์ชันค่ากำลังสอง (Quadratic cost functional)

$$J = \int_0^{\infty} [z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (5.31)$$

จะเห็นว่าฟังก์ชันที่ต้องการลดค่าให้น้อยที่สุด J ประกอบด้วยสองพจน์ คือ ตัวแทนขนาดของสเตต $z(t)$ และขนาดของตัวแปรควบคุม $u(t)$ ที่ถูกให้น้ำหนักโดยเมตริกซ์ R ถ้าหากว่าสมมติฐานเหล่านี้เป็นจริง

- 1.) เวกเตอร์สเตต $x(t)$ ทั้งหมดสามารถใช้ในการป้อนกลับ
- 2.) (A, B) สามารถทำให้เสถียรได้ และ (A, C) สามารถตรวจพบได้
- 3.) เมตริกซ์ R เป็นแบบบวกแน่นอน $R = R^T > 0$

จะได้ว่า

- 1.) ตัวควบคุม LQR ที่เป็นได้อย่างเดียวและเหมาะสมที่สุด เขียนได้เป็นการป้อนกลับสเตตทั้งหมด

$$u(t) = -Kx(t) \quad (5.32)$$

โดย $K = R^{-1}B^T P$ ที่จะลดค่าของ J ให้น้อยที่สุด ขึ้นกับเงื่อนไขพลวัตของระบบ (5.29)

- 2.) P คือคำตอบที่เป็นได้โดยตรง สมมาตร และเป็นบวกกึ่งแน่นอน ของสมการพีชคณิตรีคคาติ (Algebraic Riccati Equation) หรือเรียกโดยย่อว่า ARE

$$PA + PA^T + C^T C - PBR^1 B^T P = 0 \quad (5.33)$$

- 3.) พลวัตของระบบวงปิดได้จากการแทนค่าสมการ (5.32) ใน (5.29)

$$\dot{x}(t) = [A - BK]x(t) \quad (5.34)$$

จะรับประกันได้ว่าเสถียรแบบเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically stable)

- 4.) ค่าต่ำสุดของ J ในสมการ (5.31) มีค่าเท่ากับ $J = x_0^T P x_0$

สามารถอธิบายแนวคิดสำหรับการควบคุม LQR ได้ดังนี้ สมมติว่าระบบพลวัตในสมการ (5.29) ถูกกระตุ้น และผลรวมของการกระตุ้นจะสะท้อนออกมาในรูปของเวกเตอร์สเตตเริ่มต้น x_0 โดยเงื่อนไขเริ่มต้น นี้อาจมองได้เป็นการเบี่ยงเบนที่ไม่พึงประสงค์จากตำแหน่งสมดุลของระบบ $x(t) = 0$ ดังนั้น หน้าที่ของตัวควบคุมคือ สร้างเวกเตอร์ควบคุม $u(t)$ ที่จะคุมค่าของเวกเตอร์สเตต $x(t)$ ให้กลับเข้าสู่ตำแหน่งสมดุลโดยเร็วที่สุดเท่าที่จะทำได้ หากระบบ (5.29) สามารถควบคุมได้ $x(t)$ สามารถที่จะถูกขับเข้าสู่ศูนย์เร็วที่สุดอย่างไรก็ได้ แต่อาจต้องการสัญญาณควบคุมที่มีขนาดสูงมาก ซึ่งในแง่ของวิศวกรรมศาสตร์แล้วเป็นสิ่งที่ไม่พึงปรารถนา สัญญาณควบคุมขนาดสูงจะทำให้ตัวขับเคลื่อนตัว และยิ่งต้อง การแบนด์วิธระบบบ่อนกลับสูง ซึ่งอาจไปกระตุ้นระบบพลวัตที่ไม่ได้ถูกโมเดล ดังนั้น จึงมีความต้องการที่จะสร้างสมดุลระหว่างสมรรถนะในการขับสเตตเข้าสู่ศูนย์ กับขนาดของสัญญาณควบคุมในการทำงานดังกล่าว วิธีหนึ่งที่จะช่วยในการสร้างสมดุลคือ การลดค่าของฟังก์ชันค่า (Cost function) กำลังสองในสมการ (5.31) เนื่องจากทั้งสองเทอมใน (5.31) อยู่ในรูปของกำลังสอง

$$z^T(t) z(t) = x^T(t) C^T C x(t) \geq 0, x(t) \neq 0 \quad (5.35)$$

$$u^T(t) R u(t) > 0, u(t) \neq 0 \quad (5.36)$$

ดังนั้น จึงแน่ใจได้ว่าจะไม่มีค่าเป็นลบสำหรับค่า t ใด ๆ นอกจากนั้น เนื่องจากว่าจุดประสงค์ของการควบคุมคือ ต้องการลดค่าของฟังก์ชันค่าให้น้อยที่สุด ดังนั้น ค่าที่มากกว่าจะถูกให้ความสำคัญมากกว่าค่าที่น้อย เช่น พจน์ (5.36) เป็นเสมือนปุ่มควบคุมที่ผู้ใช้สามารถปรับขนาดของสัญญาณควบคุม $u(t)$ โดยผ่านเมตริกซ์ R ยิ่งเลือก R มีค่ามาก จะทำให้ขนาดของ $u(t)$ ลดลง ส่วนพจน์ (5.35) จะให้ความสำคัญกับสเตตในฟังก์ชันค่าเมื่อ $z(t)$ มีค่าแตกต่างไปจากค่าสมดุลคือศูนย์ การเลือกว่าสเตตใดที่ต้องการลดค่ากระทำผ่านเมตริกซ์ C

5.3.2.2 การออกแบบและใช้งาน LQR ในทางปฏิบัติ

1.) การคำนวณหาคำตอบ

โดยปกติแล้วจะไม่สามารถที่จะหาคำตอบของสมการ ARE ได้ง่ายโดยไม่ใช้คอมพิวเตอร์ ช่วยยกเว้นสำหรับเมตริกซ์อันดับต่ำบางกรณี ซอฟต์แวร์เช่น MATLAB จะมีตัวช่วยในการหาคำตอบของ ARE โดยวิธีคำนวณเชิงเลข วิธีการคือแปลงการแก้ปัญหา ARE ที่ไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับเมตริกซ์ P เป็นการแก้ปัญหาเชิงเส้นของโครงสร้างเจาะจง (Eigen structure) ของเมตริกซ์แฮมิลโทเนียน (Hamiltonian) ที่สัมพันธ์กัน

2.) การเลือกค่าน้ำหนัก

ในส่วนของปัญหาของการใช้ตัวออกแบบ LQR คือว่า จะเลือกให้น้ำหนักกับเมตริกซ์ Q และ R อย่างไร โดยปกติแล้วการเลือกน้ำหนักมักจำเป็นต้องอาศัยการคาดเดาค่าเริ่มต้น ประกอบกับการลองผิดลองถูกจนกระทั่งได้ผลที่น่าพอใจ ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติของ LQR เช่น ค่าเผื่อเสถียรภาพความไว และแบนด์วิธ และศึกษาว่าการเลือกค่าน้ำหนักจะส่งผลกระทบต่อคุณสมบัติเหล่านี้ สำหรับขณะนี้จะเสนอเพียงแนวทางที่อาจเป็นประโยชน์ในการเลือกค่าน้ำหนักเริ่มต้น

3.) ค่าเบี่ยงเบนมากที่สุดที่ยอมรับได้

เนื่องจากโมเดลที่ใช้งานอยู่เป็นแบบเชิงเส้น ค่าของ x_i และ u_i จะเป็นค่าที่เบี่ยงเบนไปจากค่าปกติ ค่าเบี่ยงเบนเหล่านี้จะต้องมีขนาดเล็กเพียงพอเพื่อว่าโมเดลจะยังคงความเป็นเชิงเส้นอยู่ได้ ดังนั้น ในการเลือกค่าเริ่มต้นของเมตริกซ์ให้น้ำหนัก อาจพิจารณาค่าเบี่ยงเบนไปจากค่าปกติมากที่สุดเท่าที่ยอมรับได้ของแต่ละตัว สมมติว่าหากต้องการให้ $|x_i(t)| \leq \bar{x}_i$ และ $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$ ดังนั้น อาจนิยาม

$$Q = \text{diag} \left(\frac{1}{\bar{x}_i} \right)^2, R = \text{diag} \left(\frac{1}{\bar{u}_i} \right)^2 \quad (5.37)$$

มีผลทำให้ตัวแปรที่ยอมให้เบี่ยงเบนจากค่าปกติได้น้อยจะถูกให้ความสำคัญในการลดค่ามากที่สุด และในทางกลับกันตัวแปรที่เบี่ยงเบนได้มากจะถูกให้น้ำหนักน้อย

4.) การพิจารณาเชิงกายภาพ

ในงานหลายประเภท โมเดลที่ใช้ในการออกแบบได้มาจากการแปลงสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นที่ได้จากหลักการทางฟิสิกส์ เช่นกฎของนิวตันให้เป็นโมเดลเชิงเส้น ในระบบดังกล่าว ตัวแปรสแตตจะมีความหมายทางกายภาพที่สามารถใช้ประโยชน์ในการเลือกเมตริกซ์ให้น้ำหนัก ตัวอย่างเช่นสมมติว่า ตัวแปรสแตตของระบบทางกลได้แก่ ตำแหน่งและความเร็ว หากให้น้ำหนัก

แก่สแตตที่เป็นตำแหน่งมากกว่าสแตตความเร็ว ก็คาดเดาได้ว่าความเร็วในการตอบสนองของระบบ ควรจะเพิ่มขึ้น ในทางตรงข้ามหากให้น้ำหนักกับสแตตความเร็วมาก หมายความว่าให้ความสำคัญ ในการลดค่าความเร็วมากกว่า ดังนั้น ผลที่ได้คือ ผลตอบสนองระบบควรจะช้าและมีการหน่วงมาก

อย่างไรก็ตาม ไม่สามารถได้โมเดลจากหลักการทางฟิสิกส์เสมอไป ในกรณีดังกล่าว จำเป็นต้องหาโมเดลทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการทางปฏิบัติ เช่น การหาเอกลักษณ์ระบบ ใน ลักษณะนี้สแตตของระบบโดยทั่วไปจะไม่มี ความหมายทางกายภาพแต่อย่างใด แต่ยังคงสามารถ ให้น้ำหนักกับเอาต์พุตที่วัดได้ เช่น $y = Cx$ ที่ใช้ในการสร้างโมเดล กล่าวโดยรวมคือ โมเดลที่ได้ จากหลักการทางฟิสิกส์จะสนับสนุนการออกแบบที่ให้สมรรถนะสูงได้ดีกว่าโมเดลที่ได้จากข้อมูล อินพุตและเอาต์พุต

5.3.2.3 การแปลงการตามรอยเป็นปัญหาการคุมค่า

สมมติว่ามีระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5.38)$$

และต้องการให้เอาต์พุต $y(t)$ ตามรอยเส้นทางที่ต้องการ คือ $y^*(t)$ โดยต้องการคุม ค่าของสัญญาณควบคุมด้วย ปัญหาลักษณะนี้เรียกว่า การตามรอย และสามารถแก้โดยการลดค่า ของฟังก์ชันค่า (Cost function) ดังนี้

$$J = \int_0^{\infty} (y - y^*)^T Q (y - y^*) + u^T R U dt \quad (5.39)$$

นั่นคือ สามารถจะแปลงปัญหาการตามรอยเป็นปัญหาการคุมค่าสแตตและประยุกต์ใช้วิธี ที่กล่าวนี้ได้ โดยสำหรับกรณีทั่วไป การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาตามรอยมีความซับซ้อน จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีพิเศษที่เรียกว่าปัญหาตามรอยค่าตั้ง (Set point) คือ เส้นทางที่ต้องการเป็น เวกเตอร์ของค่าสั่งขั้นบันได $y^*(t) = r_0 \mathbf{1}(t)$ โดย ใช้ร่วมกับการป้อนกลับสแตต เช่น การใช้ตัว ชดเชยล่วงหน้าที่เป็นค่าคงที่ และการใช้ตัวควบคุมอินทิกรัล ซึ่งการตามรอยทั้งสองวิธีนี้สามารถ แปลงเป็นปัญหาการคุมค่าได้ ดังนั้น สามารถใช้วิธี LQR ในการออกแบบตัวป้อนกลับสแตตที่ให้ ความสมดุลระหว่างสแตตและขนาดสัญญาณควบคุม

5.3.3 คุณสมบัติของระบบป้อนกลับ LQR

คุณสมบัติของระบบวงปิดโดยตัวควบคุมป้อนกลับสแตต LQR จะเห็นว่าวิธีการออกแบบ LQR ทำให้สามารถรับประกันคุณสมบัติที่ดีบางประการในแง่ของเสถียรภาพ สมรรถนะ และความทนทาน ซึ่งจะเป็นจริงเฉพาะกรณีการควบคุมป้อนกลับสแตตที่วัดค่าได้จริงทั้งหมดในระบบเท่านั้น ในส่วนการ ใช้การป้อนกลับจากสแตตที่ประมาณค่าโดยตัวสังเกตจะไม่สามารถรับประกันคุณสมบัติเหล่านี้

จะอธิบายคุณสมบัติของการควบคุมป้อนกลับสแตตที่เหมาะสมที่สุด โดยอ้างถึงระบบป้อนกลับ โดยที่ $z \in R^q$ เป็นเวกเตอร์ของเอาต์พุตที่ถูกควบคุม โดยเอาต์พุตเหล่านี้สามารถนิยามได้ดังนี้ สมมติว่า Q มีค่าอันดับเท่ากับ q และแยกตัวประกอบ $Q = C_2^T C_2$ โดยที่ $C_2 \in R^{q \times n}$ ดังนั้น จะได้ว่า $x^T Q x = z^T z$ โดยที่เวกเตอร์ z จะเป็นผลรวมเชิงเส้นของตัวแปร สแตตที่ถูกให้นำหนักใน ฟังก์ชันค่า (Cost function) (5.31) นิยามฟังก์ชันถ่ายโอนจากอินพุตควบคุมไปยังเอาต์พุตที่ถูก ควบคุมเป็น

ดังที่ได้แสดงในทฤษฎี 5.1 ว่าหาก

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = n + q \quad (5.40)$$

ดังนั้น อาจกำหนดค่าให้

$$G = (C_2(-A + BK)^{-1} B)^{-R} \quad (5.41)$$

ที่สามารถทำให้ $r = z$ ในช่วงสถานะอยู่ตัว

5.3.3.1 ผลต่างย้อนกลับ

สมมติว่าต้องการประเมินความทนทานด้านเสถียรภาพของระบบป้อนกลับสแตตที่มีต่อ ความไม่แน่นอนที่อินพุตของระบบ เริ่มต้นโดยการเปิดวงการป้อนกลับออกที่อินพุตของระบบตาม รูปที่ 5.14 และป้อนสัญญาณอินพุต $V_{in}(t)$ ดังนั้น ผลตอบสนองของสัญญาณเอาต์พุต $V_{out}(t)$ ที่ ตำแหน่งดังรูปจะได้เท่ากับ

$$V_{out}(s) = -L_{sf}(s)V_{in}(s) \quad (5.42)$$

โดยที่

$$L_{sf}(s) = K(sI - A)^{-1} B \quad (5.43)$$

คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนวงเปิดของการป้อนกลับสแตต นิยาม ผลต่างย้อนกลับ (Return difference)

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณอินพุต $V_{in}(t)$ ไปยังค่าแตกต่างระหว่างอินพุตกับเอาต์พุต

$V_{out}(t)$

$$V_{in}(s) - V_{out}(s) = (I + L_{sf}(s))V_{in}(s) \quad (5.44)$$

ผลต่างย้อนกลับมีคุณสมบัติที่น่าสนใจหลายประการที่เป็นจริงสำหรับระบบป้อนกลับสแตตโดยไม่สนใจว่าอัตราขยายของตัวป้อนกลับสแตตได้มาอย่างไร

5.3.3.2 พหุนามลักษณะเฉพาะของระบบวงเปิดและวงปิด

นิยามพหุนามลักษณะเฉพาะวงเปิดและวงปิดเป็น

$$\phi_0(s) = \det(sI - A) \quad (5.45)$$

$$\phi_c(s) = \det(sI - A + BK) \quad (5.46)$$

พหุนามทั้งสองมีความสัมพันธ์กันในรูปของผลต่างย้อนกลับดังนี้

จากความสัมพันธ์ของพหุนามตามสมการ (5.45) และ (5.46) สามารถเขียนได้เป็น

$$\det(I + L_{sf}(s)) = \frac{\phi_c(s)}{\phi_0(s)} \quad (5.47)$$

พิสูจน์โดยอาศัยเอกลักษณ์ $\det(I + MN) = \det(I + NM)$ และ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$\begin{aligned} \det(I_m + K(sI_n - A)^{-1}B) &= \det(I_n + (sI_n - A)^{-1}BK) \\ &= \det((sI_n - A)^{-1}(sI_n - A + BK)) \\ &= \frac{\det(sI_n - A + BK)}{\det(sI_n - A)} \end{aligned}$$

5.3.3.3 ภาวะเท่ากันของผลต่างย้อนกลับ

ขั้นต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า ผลต่างย้อนกลับจะสอดคล้องกับเอกลักษณ์ที่เรียกว่า ภาวะเท่ากันของผลต่างย้อนกลับ (The return difference equality) หรือ ภาวะเท่ากันของคาลมาน (Kalman equality) สามารถดูการพิสูจน์ได้ในหนังสืออ้างอิง

สำหรับ K ที่นิยามตามสมการ (5.32) และ (5.33) จะได้ว่า

$$R + P_z^T(-s)P_z(s) = (I + L_{sf}^T(-s))R(I + L_{sf}(s)) \quad (5.48)$$

หากระบบมีเพียงอินพุตเดียว $R = \rho$ และภาวะเท่ากับ (5.48) จะลดเหลือ

$$1 + \left(\frac{1}{\rho}\right) + P_z^T(-s)P_z(s) = (1 + L_{sf}(-s))(1 + L_{sf}(s)) \quad (5.49)$$

จะเห็นว่าด้านซ้ายของสมการ (5.48) ถูกกำหนดโดยพลวัตระบบและเมตริกซ์น้ำหนักเท่านั้น ส่วนทางด้านขวาประกอบด้วยผลต่างย้อนกลับของระบบป้อนกลับสเตตที่เหมาะสมที่สุด สามารถจะใช้หลักความจริงนี้ในการแสดงว่าการเลือกเมตริกซ์น้ำหนักจะมีผลต่อคุณสมบัติระบบป้อนกลับอย่างไร

5.3.3.4 ค่าเผื่อเสถียรภาพที่ได้จาก LQR

ในส่วนนี้จะแสดงให้เห็นว่าระบบป้อนกลับสเตตที่ออกแบบโดยวิธี LQR จะให้ค่าเผื่อเสถียรภาพที่รับประกันได้ต่อความไม่แน่นอนที่อินพุตของระบบ สังเกตว่าค่าเผื่อเสถียรภาพนี้มิได้รับประกันว่าระบบจะเสถียรแบบทนทาน เพราะอาจเป็นไปได้ว่าระบบของความไม่แน่นอนในระบบมีค่ามากกว่าค่าเผื่อที่รับประกัน

1.) ค่าเผื่อเสถียรภาพกรณีอินพุตเดียว

ผลของระบบอินพุตเดียวจะมีรายละเอียดที่ชัดเจนมากกว่าระบบหลายอินพุต

สมมติจำนวนอินพุต $m = 1$ และให้ $R = \rho$ ดังนั้น ฟังก์ชันความไวและเติมเต็มความไวตามสมการ ผิดพลาด! ไม่พบแหล่งอ้างอิง และ ผิดพลาด! ไม่พบแหล่งอ้างอิง จะถูกจำกัดขนาดโดย

$$|S_{sf}(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \quad (5.50)$$

$$|T_{sf}(j\omega)| \leq 2, \forall \omega \quad (5.51)$$

สามารถดูการพิสูจน์ได้ในหนังสืออ้างอิง [5]

สามารถแปลงผลจากสมการ (5.50) เป็นแผนภาพ โนควิสต์ได้ดังรูปที่ 5-3 โดยจะได้ว่าเส้นกราฟโนควิสต์ของระบบป้อนกลับสเตตที่เหมาะสมที่สุดจะต้องอยู่ภายนอกของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลาง ณ จุดวิกฤต คือ -1 หลักความจริงข้อนี้บอกเกี่ยวกับคุณสมบัติค่าเผื่อ

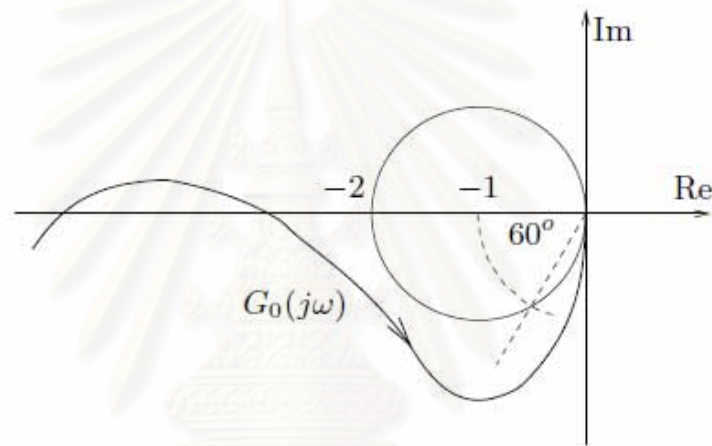
เสถียรภาพของระบบป้อนกลับ ในการพิจารณาค่าเผื่อเฟส สามารถอาศัยหลักความจริงตามสมการ

สำหรับระบบป้อนกลับ SISO ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนความไว $S(s)$ สมมุติว่า

$$\|s\|_{\infty} \leq \alpha, \alpha \geq 1 \quad (5.52)$$

ดังนั้น จะได้ค่าเผื่อเฟสของระบบป้อนกลับ

$$PM \geq 180^\circ - 2 \cos^{-1} \left(\frac{0.5}{\alpha} \right) \quad (5.53)$$

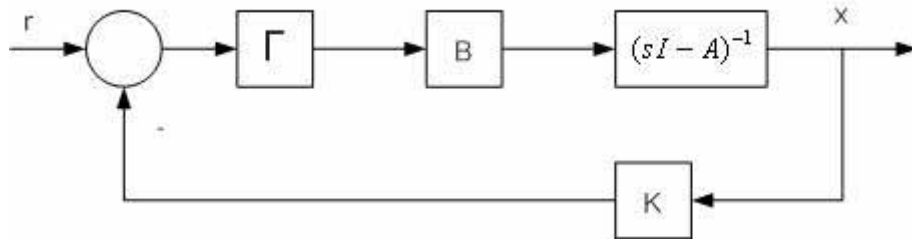


รูปที่ 5-3 แผนภาพไนควิสต์ของระบบป้อนกลับสเตต LQR [37]

สามารถสรุปคุณสมบัติของระบบป้อนกลับสเตตสำหรับกรณี SISO ได้ดังนี้ พิจารณาระบบในรูปที่ 5-4 ที่สมมุติว่ามีความไม่แน่นอนในการโมเดล Γ ที่อินพุตของระบบ ระบบควบคุมที่ออกแบบโดยวิธี LQR จะยังคงความมีเสถียรภาพสำหรับ

- $\Gamma = k$ โดย k เป็นเลขจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง $\frac{1}{2} < k < \infty$
- $\Gamma = e^{j\theta}$ โดยที่ $|\theta| < 60^\circ$
- $\Gamma(s) = 1 + \Delta(s)$ โดย $\Delta(s)$ เสถียร และสอดคล้องกับ

$$|\Delta(j\omega)| < 0.5 \quad (5.54)$$



รูปที่ 5-4 ระบบป้อนกลับสเตตที่มีความไม่แน่นอนที่อินพุตของพลาเน็ต

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ระบบจะมีค่าเผื่ออัตราขยายในทิศทางลดลง (Gain reduction margin) 50% ค่าเผื่ออัตราขยายในทิศทางเพิ่มขึ้น (gain increase margin) เป็นอนันต์ ค่าเผื่อเฟส 60° และสามารถทนต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราขยายและเฟสพร้อมกันได้ตามสมการ (5.54)

สิ่งที่น่าสนใจสำหรับหลักความจริงที่ว่า เส้นกราฟในควิสด์ของ $L_{sf}(s)$ จะต้องหลีกเลี่ยงวงกลมหนึ่งหน่วยดังในรูปที่ 5-3 ก็คือสามารถสรุปได้ว่า

- $L_{sf}(s)$ ไม่สามารถจะมีซีโรแบบเฟสไม่ต่ำสุด มิฉะนั้นแล้วตามหลักของอินทิกรัลความไวบิวซง (Poisson sensitivity integral) จะบังคับว่าขนาดของ $S_{sf}(j\omega)$ จะต้องมากกว่าหนึ่งในบางความถี่ หมายความว่าเส้นกราฟในควิสด์จะต้องเข้าไปในวงกลม

- $L_{sf}(s)$ จะต้องมีความไวบิวซงมากกว่าซีโรเท่ากับหนึ่ง จากหลักของอินทิกรัลความไวโบเด (Bode sensitivity integral)

จำเป็นต้องกล่าวเตือนอีกครั้งหนึ่งว่า ค่าเผื่อของเสถียรภาพที่รับประกันได้นี้ อาจไม่มีประโยชน์ในทางปฏิบัติหากแบนด์วิธของระบบมีค่าสูงมากเกินไป โดยทั่วไปแล้วค่าเฟสของระบบจะมีความไม่แน่นอนในย่านความถี่สูง ดังนั้น ค่าเผื่อเฟส 60° ไม่เพียงพอที่จะรับประกันความทนทานของระบบ

2.) ค่าเผื่อเสถียรภาพกรณีหลายอินพุต

เราสามารถขยายผลของเสถียรภาพสำหรับระบบอินพุตเดียวไปยังระบบที่มีหลายอินพุต

สมมุติว่า $m \geq 1$ และให้ $R = \rho I$ ดังนั้น ฟังก์ชันความไวและฟังก์ชันเติมเต็มความไวจะถูกจำกัดขนาดโดย

$$\bar{\sigma}(S_{sf}(j\omega)) \leq 1, \forall \omega \quad (5.55)$$

$$\bar{\sigma}(T_{sf}(j\omega)) \leq 2, \forall \omega \quad (5.56)$$

สมมุติว่าระบบป้อนกลับได้รับผลจากความไม่แน่นอนที่อินพุตดังเช่นในรูปที่ 5.16 จะได้จาก (5.79) ว่าระบบป้อนกลับจะยังคงเสถียรสำหรับความไม่แน่นอนเชิงผลคูณที่อินพุต $\Gamma(s) = (I + \Delta(s))$ โดยที่ $\Delta(s)$ เสถียรและสอดคล้องกับ $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 0.5, \forall \omega$

นอกจากนั้นยังสามารถจะขยายผลค่าเพื่ออัตราขยายและเฟสจากระบบอินพุตเดียวมายังระบบหลายอินพุตได้ สมมุติว่า R เป็นเมตริกซ์ทแยงมุม ดังนั้น สามารถแสดงได้ว่าระบบป้อนกลับในรูปที่ 5.16 จะเสถียรแบบทนทานสำหรับ

- $\Gamma(s) = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ โดยที่แต่ละ k_i เป็นจำนวนจริงในช่วง $\frac{1}{2} < k_i < \infty$
- $\Gamma(s) = \text{diag}(e^{j\theta_1}, e^{j\theta_2}, \dots, e^{j\theta_m})$ โดยที่แต่ละ $|\theta_i| < 60^\circ$

การพิสูจน์ผลสำหรับระบบหลายอินพุตนั้นยากกว่าระบบอินพุตเดียวมาก จึงไม่ขอกล่าวถึง และสังเกตว่าผลที่ได้นี้ไม่ได้รับประกันความทนทานกรณีที่อัตราขยายและเฟสมีการเปลี่ยนแปลงพร้อมกัน หรือกรณีที่ความไม่แน่นอนมีการเชื่อมต่อกันระหว่างป้อนกลับ

5.3.3.5 คุณสมบัติเชิงเส้นกำกับของตัวควบคุม LQR (Asymptotic behavior)

มาถึงขั้นนี้ให้เห็นชัดเจนแล้วว่าโพลของระบบวงปิดในการออกแบบ LQR จะขึ้นอยู่กับการเลือกพารามิเตอร์ในการออกแบบ $z(t)$ และ R ซึ่งสำหรับปัญหาโดยทั่วไปจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอรืเข้าช่วย โดยเฉพาะการหาค่าตอบสมการ ARE (5.33) อย่างไรก็ตาม สามารถจะคาดเดาพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับ (asymptotic behavior) ของโพลระบบวงปิด LQR เมื่อแปรค่าของอัตราขยายตัวควบคุมโดยไม่จำเป็นต้องแก้สมการ ARE เพื่อให้ได้อัตราขยาย และคำนวณหาโพลของระบบวงปิด

ตั้งสมมุติฐานสำหรับการศึกษาคู่สมมติเชิงเส้นกำกับของ LQR ดังนี้

- 1.) ตัวแปรที่ต้องการควบคุมค่ามีจำนวนเท่ากับตัวแปรควบคุม กล่าวคือ $\dim[z(t)] = \dim[u(t)] = m$
- 2.) ค่านำหนักของตัวแปรควบคุมจะกำหนดโดย $R = \rho \tilde{R}$ โดยที่ ρ เป็นค่าสเกลาร์บวก และ $\tilde{R} = \tilde{R}^T > 0$
- 3.) $P_z(s)$ นิยามดังสมการ (5.54) คือเป็นเมตริกซ์จตุรัสของฟังก์ชันถ่ายโอนระหว่างตัวแปรที่ต้องการควบคุมค่ากับตัวแปรควบคุมขณะที่วงป้อนกลับถูกเปิดให้ q เป็นจำนวนของทรานสมิชชันซีโร (transmission zero) ของ $P_z(s)$

การปรับค่า ρ จะมีผลโดยตรงกับอัตราขยายของตัวป้อนกลับสเตต เมื่อ $\rho \rightarrow \infty$ กล่าวได้ว่าตัวควบคุม LQR จะมีอัตราขยายต่ำ เนื่องจากภายใต้สมมติฐานที่ 2 จะได้ว่า

$$u(t) = -\frac{1}{\rho} \tilde{R}^{-1} B^T P x(t) \rightarrow 0 \quad (5.57)$$

เมื่อ $\rho \rightarrow \infty$ กรณีนี้มักนิยมเรียกว่า กรณี ตัวแปรควบคุมราคาสูง (expensive control) จึงต้องการคุมค่าตัวแปรควบคุมให้มีค่าเล็ก ๆ ในกรณีตรงข้าม คือเมื่อ $\rho \rightarrow 0$ ตัวควบคุม LQR จะมีอัตราขยายสูง เพราะจะเห็นได้ชัดว่า $u(t)$ จะมีค่าสูง นิยมเรียกกรณีนี้ว่า ตัวแปรควบคุมราคาถูก (cheap control)

สามารถสรุปคุณสมบัติเชิงเส้นกำกับของโพลวงปิด LQR เมื่อแปรค่าจาก $0 < \rho < \infty$ ภายใต้สมมติฐานดังกล่าวได้ดังนี้

กรณีอัตราขยายต่ำ : เมื่อ $\rho \rightarrow \infty$ โพลจะเริ่มตั้งที่ตำแหน่งดังนี้

- โพลที่เสถียรของ $P_z(s)$
- ภาพสะท้อน (Mirror image) ระหว่างแกนจินตภาพ ของโพลที่ไม่เสถียรของ $P_z(s)$
- หาก $P_z(s)$ มีโพลที่อยู่บนแกนจินตภาพพอดี โพลระบบวงปิดจะเริ่มตั้งที่ทางด้านซ้ายของโพลนี้

กรณีอัตราขยายสูง : เมื่อ $\rho \rightarrow 0$ โพลจะเข้าสู่ตำแหน่งดังนี้

- ไปยังตำแหน่งซีโรเฟสต่ำสุดของ $P_z(s)$
- ไปยังภาพสะท้อนระหว่างแกนจินตภาพของซีโรเฟสไม่ต่ำสุดของ $P_z(s)$
- โพลที่เหลือจะเข้าสู่อนันต์ในรูปแบบของบัตเตอร์เวิร์ทที่เสถียร (stable Butterworth patterns)

จะเห็นว่าถึงแม้กฎเหล่านี้จะไม่เพียงพอในการสร้างทางเดินของรากสำหรับโพลวงปิด แต่ก็ช่วยให้มองเห็นพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับของตัวควบคุม LQR ตัวอย่างเช่นกรณีอัตราขยายสูงจะแสดงให้เห็นถึงผลการเลือก $z(t)$ ว่ามีผลกับพฤติกรรมระบบวงปิดอย่างไร เพราะ $z(t)$ เป็นตัวกำหนดซีโรของ $P_z(s)$

5.3.4 อัตราขยายที่ใช้ในการควบคุมระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

จากสมการที่ (4.40) แบบจำลองเพนดูลัมผกผันแบบหมุนคือ

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1645 & 10.1326 & -0.0605 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0508 & 23.3411 & -0.1394 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 18.2963 \\ 0 \\ 5.6539 \end{bmatrix} u \quad (5.58)$$

มีโพลของระบบอยู่ที่ $[0 \quad -0.1638 \quad -4.9761 \quad 4.8035]^T$

และเมื่อกำหนดเมตริกซ์ความควบคุมได้ คือ

$$Ctl = \begin{bmatrix} 0 & 21.5503 & -4.6501 & 80.5389 \\ 21.5503 & -4.6501 & 80.5389 & -53.7351 \\ 0 & 6.6595 & -2.2408 & 159.7457 \\ 6.6595 & -2.2408 & 159.7457 & -81.1751 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

และหาค่าลำดับชั้น (Rank) ของเมตริกซ์ (5.59) เท่ากับ 4 เท่ากับอันดับของระบบที่ต้องการควบคุมหรือลำดับชั้นเต็ม (Full rank) ซึ่งแสดงว่าระบบจะมีสัญญาณควบคุมแบบต่อเนื่อง และสามารถกำหนดลักษณะเฉพาะโดยการวางตำแหน่งโพลที่ใดๆในระนาบ S

ใช้หลักการของตัวควบคุมกำลังสองเชิงเส้น (LQR) ในการหาค่าอัตราขยายที่เหมาะสมที่สุด โดยให้ฟังก์ชันค่า (Cost function) ตามสมการที่ (5.60) มีค่าน้อยที่สุด

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (5.60)$$

โดยที่เมตริกซ์ Q และ R เป็นค่าถ่วงน้ำหนักของสเตตและสัญญาณควบคุมซึ่งมีค่าเป็นบวก

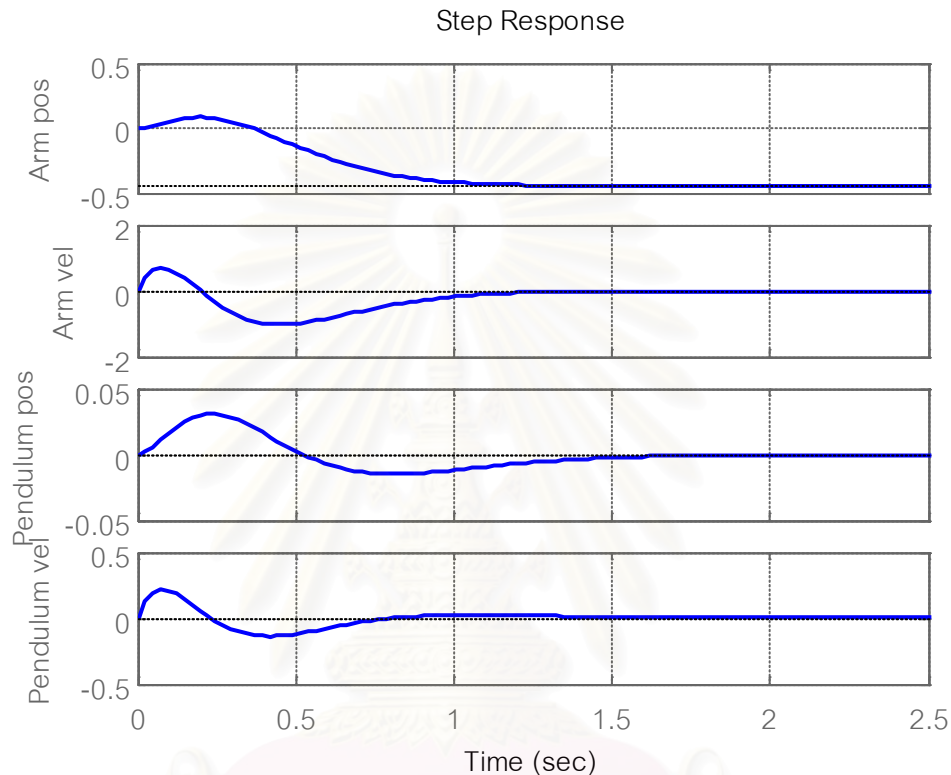
เลือกค่าเมตริกซ์

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

และ $R = 20$

ผลของการหาอัตราขยายที่เหมาะสมที่สุดคือ $K = [-2.2361 \quad -1.5325 \quad 36.7998 \quad 7.9542]$ หาค่าโพลของระบบจากเมตริกซ์ของระบบ $(A - BK)$ คือ $K = [-5.5079 + 3.9051i \quad -$

5.5079 - 3.9051i -4.9485 -4.3171] และทดลองจ่ายสัญญาณขั้นในแบบจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB ได้ผลดังรูปที่ 5-5



รูปที่ 5-5 การตอบสนองของสัญญาณขั้น

จากสัญญาณขั้นจะเห็นว่าระบบจะเข้าสู่สมดุได้ในเวลาต่ำกว่า 2 วินาที แต่จะมีส่วนของแซนเพนดูลัมที่จะมีความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัว

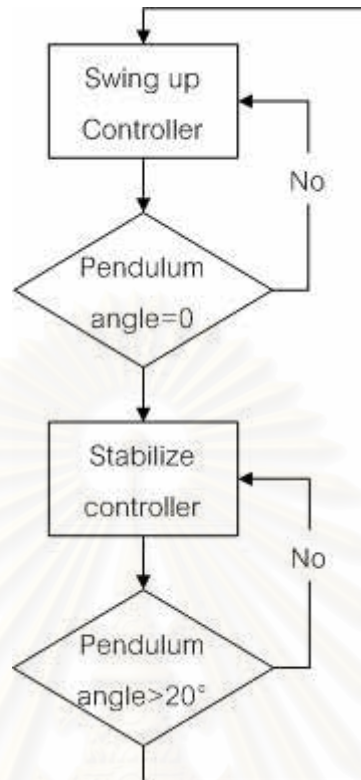
ในการใช้งานตัวควบคุมบนเครื่อง NI cRIO ต้องทำการแปลงหน่วยของค่าอัตราขยายที่ได้จากการออกแบบด้วยมุมเรเดียนให้เป็นหน่วยพัลส์ของเอนโคดเดอร์ และจากหน่วยโวลต์ ± 10 โวลต์ เป็น ± 32767 ด้วยการคูณ 6.43437 สำหรับสเตต $\alpha, \dot{\alpha}$ (ส่วนแซนเพนดูลัม) และ คูณด้วย 1.25671 สำหรับสเตต $\beta, \dot{\beta}$ (ส่วนแท่งเพนดูลัม) ซึ่งจะได้อัตราขยายสำหรับ $K = [-14.4877 \quad -9.8607 \quad 46.2468 \quad 9.9962]$ สำหรับแต่ละสเตต

5.4 การสับเปลี่ยนตัวควบคุม

จากที่กล่าวมาข้างต้นว่าการควบคุมเพนดูลัมผกผันแบบหมุนจำเป็นจะต้องใช้ตัวควบคุมสองชนิดเพื่อจุดประสงค์ในการทำงานต่างกัน ผลการควบคุมจะสามารถทำงานได้ดีเพียงไรนอกจากจะประสิทธิภาพของตัวคุมแต่ละตัวที่สามารถทำงานได้ดีแล้วยังต้องมีการเป็นการทำงานระหว่างตัวควบคุมทั้งสองให้ราบรื่นและต้องมีประสิทธิภาพด้วย

การสับเปลี่ยนตัวควบคุมสามารถทำได้หลายวิธีอาจใช้เฉพาะตำแหน่งของเพนดูลัมอย่างเดียวการเช่นเปลี่ยนตัวควบคุมเป็นตัวควบคุมเพื่อรักษาสมดุลหรือนำความเร็วมาพิจารณาร่วมด้วย นอกจากนี้ดูจากพลังงานของระบบ

ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้หลักการดูจากตำแหน่งมุมของแท่งเพนดูลัมซึ่งเงื่อนไขของการสับเปลี่ยนตัวควบคุมจะมีสองเงื่อนไขคือ จากตัวควบคุมแกว่งแท่งเพนดูลัมขึ้นไปสู่ตัวควบคุมเพื่อรักษาสมดุลจะเปลี่ยนที่จุดสมดุลพอดี ($\beta = 0$) เนื่องจากแบบจำลองที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมมาจากการแปลงเป็นเชิงเส้นรอบๆจุดสมดุล ในหลักการแล้วตัวควบคุมมีสมรรถนะที่ดีที่สุดที่ตำแหน่งดังกล่าว ในทางกลับกันขณะที่แท่งเพนดูลัมอยู่ในจุดสมดุลอยู่แล้วและตัวควบคุมเพื่อรักษาสมดุลกำลังทำงานอยู่จำเป็นต้องเปลี่ยนเงื่อนไขการสับเปลี่ยนโดยจะมีการสับเปลี่ยนไปสู่ตัวควบคุมสำหรับแกว่งแท่งเพนดูลัมเมื่อแท่งเพนดูลัมทำมุมเกิน 20 องศากับแนวตั้งฉาก



รูปที่ 5-6 เงื่อนไขการสับเปลี่ยนตัวควบคุม

ด้วยเงื่อนไขการสับเปลี่ยนตัวควบคุมดังกล่าวจะสามารถแสดงลักษณะและสมรรถนะของตัวควบคุมได้ชัดเจน ในส่วนตัวควบคุมการแกว่งขึ้น ถ้าตัวควบคุมมีการแกว่งแท่งเพนดูลัมได้ไม่ดีพอแท่งเพนดูลัมจะไม่สามารถไปถึงจุดที่จะสับเปลี่ยนการทำงานได้ หรือถ้ามีการแกว่งมากเกินไป ความเร็วที่ผ่านจุดตั้งขึ้นจะมากจนกระทั่งไม่สามารถเลี้ยงเพนดูลัมได้ ส่วนตัวควบคุมรักษาสมดุลถ้ารักษาสมดุลได้ไม่ดีเมื่อเราใส่แรงรบกวนแท่งเพนดูลัม เพนดูลัมก็จะตกลงมาได้ง่าย

เทคนิคการสับเปลี่ยนตัวควบคุมนี้เนื่องจากการเปลี่ยนตัวควบคุมที่ตำแหน่งเพนดูลัมตั้งขึ้นอุปกรณ์ที่ใช้ควบคุมจึงต้องมีความเร็วมากพอที่จะสับเปลี่ยนชนิดตัวควบคุมได้ทันที

5.5 ตัวประมวลผลรวม

5.5.1 ไมโครโปรเซสเซอร์

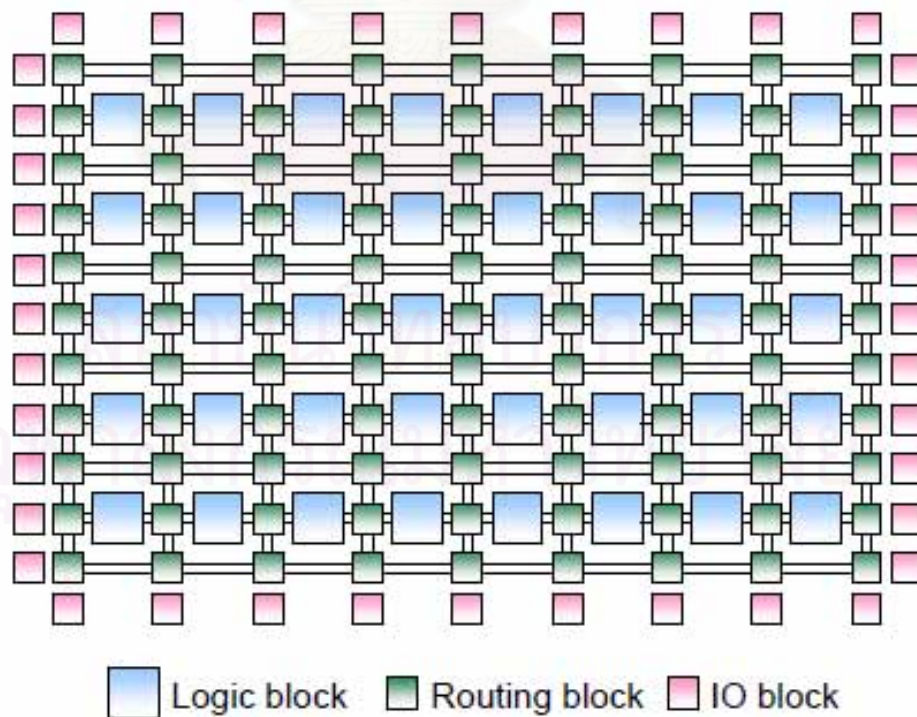
หน่วยประมวลผลกลางหรือซีพียู มีส่วนประกอบหลักคือ

- 1.) หน่วยคำนวณและตรรกะ (Arithmetic & Logical Unit : ALU)

ทำหน้าที่เหมือนกับเครื่องคำนวณอยู่ในเครื่องคอมพิวเตอร์โดยทำงานเกี่ยวข้องกับ การคำนวณทางคณิตศาสตร์ เช่น บวก ลบ คูณ หาร และตรรกศาสตร์

- 2.) หน่วยควบคุม (Control Unit)

หน่วยควบคุมทำหน้าที่ ควบคุมลำดับขั้นตอนการประมวลผลและการทำงานของ อุปกรณ์ต่างๆ ภายใน หน่วยประมวลผลกลาง และรวมไปถึงการประสานงานในการทำงานร่วมกัน ระหว่างหน่วยประมวลผลกลาง กับอุปกรณ์นำเข้าข้อมูล อุปกรณ์แสดงผล และหน่วยความจำ สำรองด้วย เมื่อผู้ใช้ต้องการประมวลผล ตามชุดคำสั่งใด ผู้ใช้จะต้องส่งข้อมูลและชุดคำสั่งนั้น ๆ เข้าสู่ระบบ คอมพิวเตอร์เสียก่อน โดยข้อมูล และชุดคำสั่งดังกล่าวจะถูกนำไปเก็บไว้ใน หน่วยความจำหลักก่อน จากนั้นหน่วยควบคุมจะดึงคำสั่งจาก ชุดคำสั่งที่มีอยู่ในหน่วยความจำ หลักออกมาทีละคำสั่งเพื่อทำการแปล ความหมายว่าคำสั่งดังกล่าวสั่งให้ ฮาร์ดแวร์ส่วนใด ทำงาน อะไรกับข้อมูลตัวใด เมื่อทราบความหมายของ คำสั่งนั้นแล้ว หน่วยควบคุมก็จะส่ง สัญญาณคำสั่ง ไปยังฮาร์ดแวร์ ส่วนที่ทำหน้าที่ ในการประมวลผลดังกล่าว ให้ทำตามคำสั่งนั้น ๆ เช่น ถ้าคำสั่ง ที่ เข้ามานั้นเป็นคำสั่งเกี่ยวกับการคำนวณ หน่วยควบคุมจะส่งสัญญาณ คำสั่งไปยังหน่วยคำนวณ และตรรกะ ให้ทำงาน หน่วยคำนวณและตรรกะก็จะไปทำการดึงข้อมูลจาก หน่วยความจำหลักเข้า มาประมวลผล ตามคำสั่งแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปแสดงยังอุปกรณ์แสดงผล หน่วย ควบคุมจึงจะส่ง สัญญาณคำสั่งไปยัง อุปกรณ์แสดงผลผลลัพธ์ ที่กำหนดให้ดึงข้อมูลจากหน่วยความจำหลัก ออกไป แสดงให้เห็นผลลัพธ์ดังกล่าว อีกต่อหนึ่ง



รูปที่ 5-7 โครงสร้าง FPGA

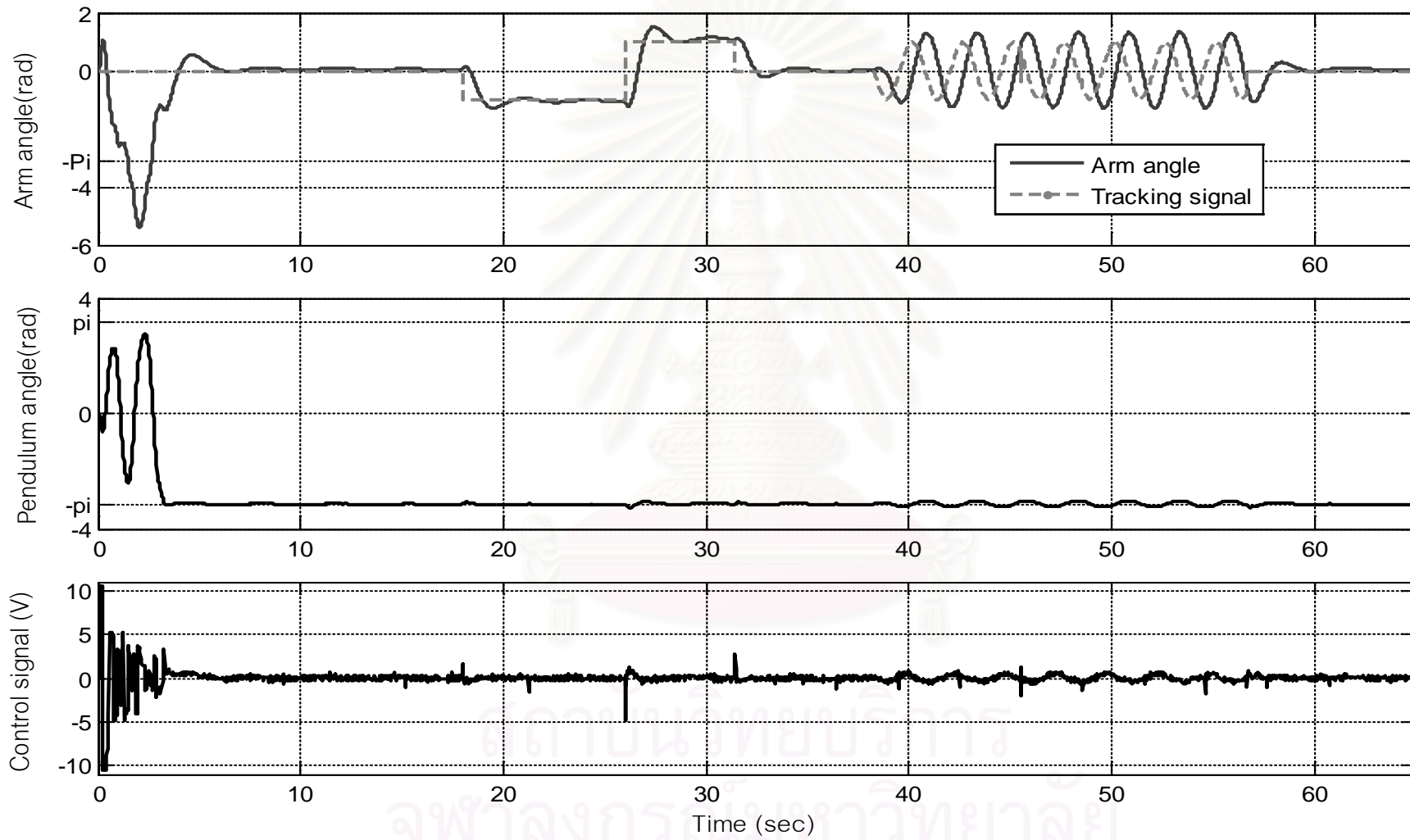
5.5.2 FPGA

FPGA ย่อมาจาก Field Programmable Gate Arrays เป็น IC ในลักษณะที่สามารถทำการ Program ได้ โดยภายในจะประกอบไปด้วย logic gate ต่อกันจำนวนมากภายในลักษณะเป็น array แต่ logic gate เหล่านี้ สามารถที่จะทำการต่อเชื่อมจุดต่อตามความต้องการได้โดยการโปรแกรมให้เป็นวงจรที่ต้องการ ได้ภายใน IC ตัวเดียว และสามารถที่จะเปลี่ยนแปลงโปรแกรมใหม่ได้ภายหลัง

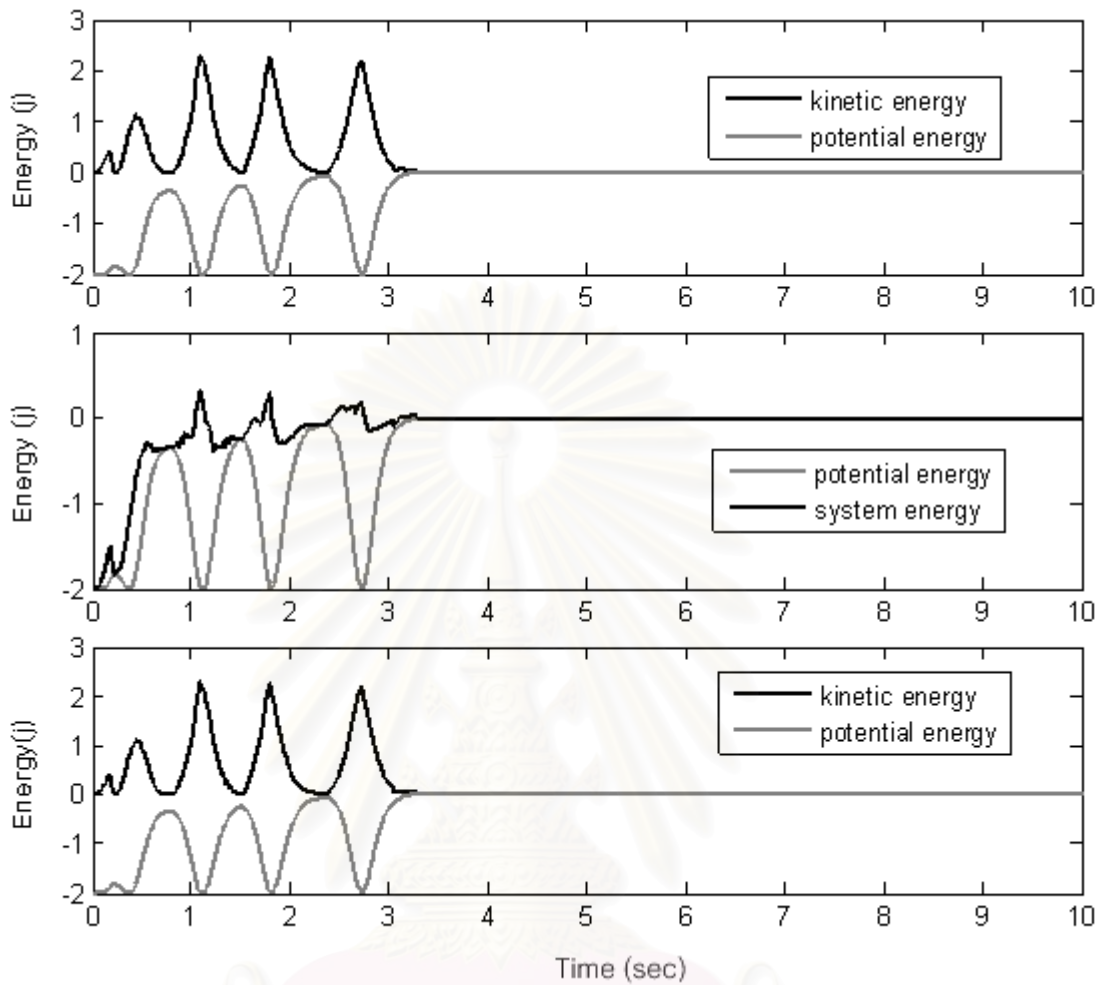
สำหรับ FPGA แล้วการโปรแกรมของเป็นเพียงการต่อ และตัดจุดเชื่อมต่อกภายใน เพื่อให้เป็นวงจร และ I/O ตามที่เราต้องการ

5.6 ผลการทดลอง

จากรูปที่ 5-8 กราฟที่หนึ่งแสดงการแกว่งของส่วนแขนเพนดูลัมสังเกตว่ามีการเคลื่อนที่กลับไปมาแต่ไม่มีรูปแบบที่ชัดเจนเนื่องจากตัวควบคุมที่ออกแบบสำหรับแกว่งเพนดูลัมขึ้นไม่ได้ ออกแบบเพื่อควบคุมส่วนแขนเพนดูลัมและกฎควบคุมใช้เพียงแต่ค่าพลังงานของแกว่งเพนดูลัมเท่านั้นการเคลื่อนที่ของส่วนแขนจึงไม่มีรูปแบบ ในตอนเริ่มต้นส่วนแขนจะเริ่มแกว่งที่ทิศทางหนึ่งก่อนเพื่อให้เพนดูลัมเริ่มแกว่งจากนั้นจะกลับทิศทางตามกฎควบคุมที่ออกแบบไว้ซึ่งสัมพันธ์กับเพนดูลัมในรูปที่ 5-8 กราฟที่สองซึ่งแสดงส่วนแกว่งเพนดูลัม จะพบว่าแกว่งแกว่งเพนดูลัมจะขยายขนาดเรื่อยๆได้อย่างชัดเจนและอยู่ในตำแหน่งตั้งขึ้นในที่สุดหลังที่เวลาประมาณ 4 วินาที จากนั้นจะเปลี่ยนตัวควบคุมจาก swing up มาเป็นตัวควบคุม LQR เพื่อรักษาสมดุลซึ่งจะทำหน้าที่แทน และสามารถเลี้ยงแกว่งเพนดูลัมได้อย่างดี แต่จะพบว่าในส่วนแขนนั้นจะยังเหลือส่วนที่เป็นความผิดพลาดอยู่บ้างพิจารณารูปที่ 5-8 กราฟแรก ช่วงวินาทีที่ 6 ถึง 18 ซึ่งจะเห็นว่ามีแกว่งอยู่บ้างเล็กน้อย ในการรักษาสมดุลเพนดูลัมได้ลองมีการจ่ายสัญญาณขึ้นเพื่อทดสอบควบคุมตำแหน่งแขนเพนดูลัมซึ่งสามารถทำได้ แต่จะมีการพุ่งเกิน (Overshoot) อยู่บ้าง และลองให้ตามรอยสัญญาณคลื่นไซน์สามารถทำได้แต่ขนาดจะเปลี่ยนไปและมีเวลาหน่วงอันเนื่องมาจากพลวัตของระบบเพนดูลัมเอง ในส่วนกราฟที่สามแสดงสัญญาณควบคุม สังเกตว่าในช่วงแกว่งเพนดูลัมขึ้นสัญญาณควบคุมมีการเปลี่ยนทิศทางได้ดีและมีขนาดลดลงตามกฎควบคุมที่ได้ออกแบบไว้ นอกจากนี้ขณะที่รักษาสมดุลเพนดูลัมสัญญาณควบคุมค่อนข้างเรียบแสดงว่าการรักษาเสถียรภาพมีสมรรถนะที่ดี

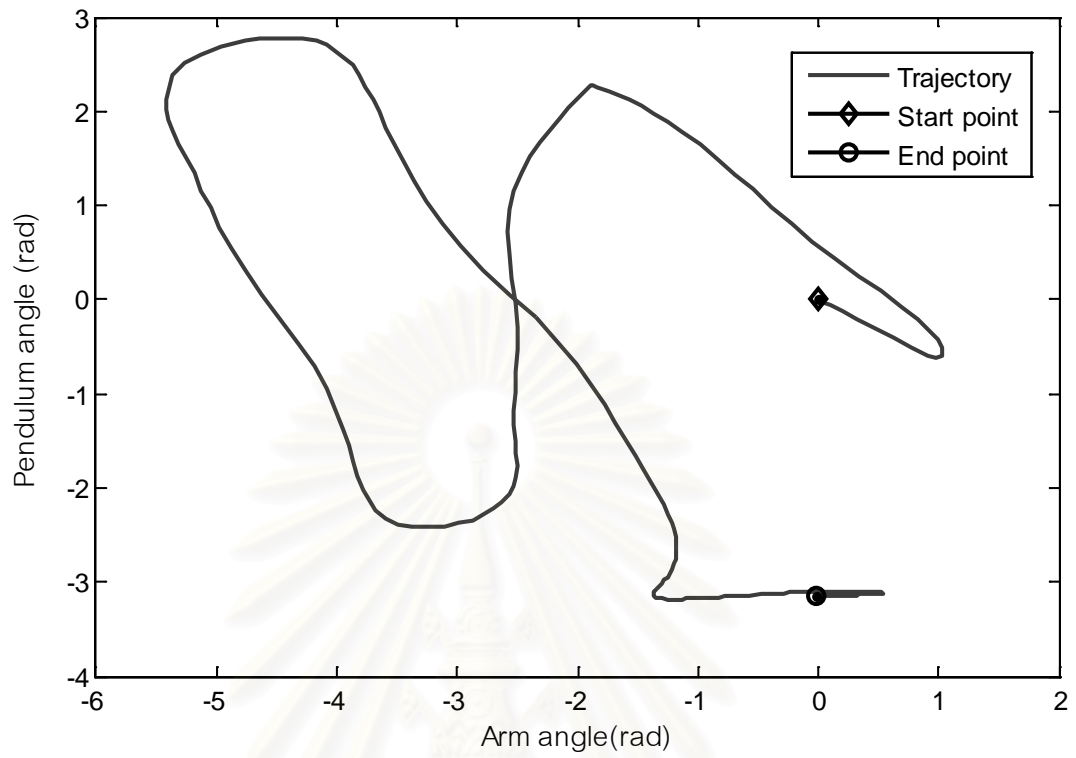


รูปที่ 5-8 ผลการควบคุมเพนดูลัม

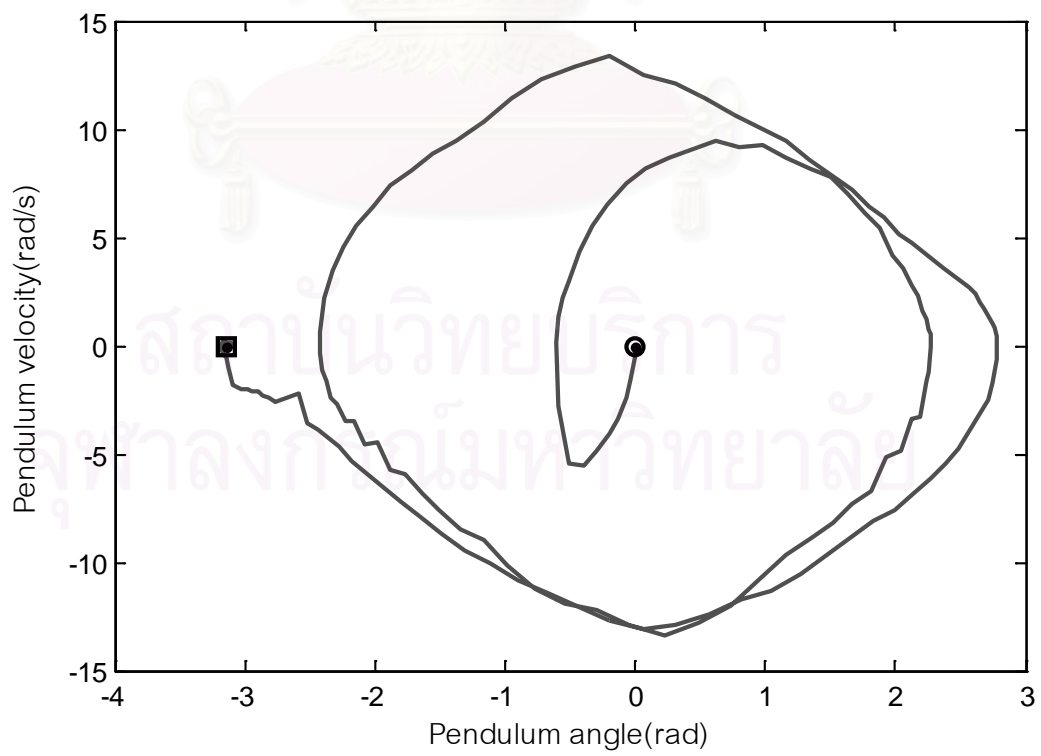


รูปที่ 5-9 พลังงานของแท่งเพนดูลัม

รูปที่ 5-9 แสดงพลังงานของแท่งเพนดูลัมสังเกตกราฟที่หนึ่งและสอง จะเห็นว่าระดับพลังงานศักย์ของแท่งเพนดูลัมเพิ่มขึ้นเรื่อยๆจนในที่สุดมาอยู่ที่ระดับที่ต้องการ ส่วนพลังงานจลน์จะเห็นว่าไม่ราบเรียบนักเนื่องจากว่ากฎควบคุมพิจารณาแต่พลังงานของแท่งเพนดูลัมเมื่อมีการกลับทิศสัญญาณควบคุมพลังงานที่ยังมีอยู่ในส่วนแขนเพนดูลัมส่งผลมาสู่แท่งเพนดูลัมทำให้ความเร็วเพิ่มมากขึ้น และพิจารณาพลังงานรวมทั้งหมดถึงแม้ว่าระดับพลังงานจะเพิ่มมากขึ้นแล้วแต่ตำแหน่งของแท่งเพนดูลัมยังไม่ผ่านจุดที่เปลี่ยนตัวควบคุม

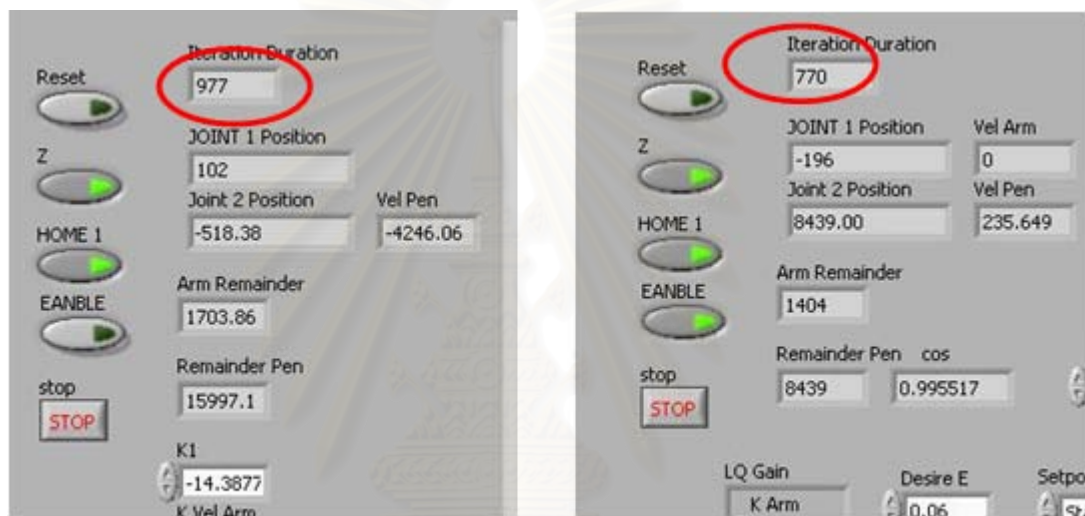


รูปที่ 5-10 ตำแหน่งแขนเพนดูลัมและแท่งเพนดูลัม



รูปที่ 5-11 ตำแหน่งและความเร็วแท่งเพนดูลัม

ในรูปที่ 5-10 แสดงความสัมพันธ์ของตำแหน่งแขนเพนดูลัมและแท่งเพนดูลัมโดยตำแหน่งจะเริ่มที่จุด $(0,0)$ และวิ่งไปสู่จุด $(0, \pi)$ จะเห็นว่าเส้นทางจากจุดเริ่มต้นไปสู่จุดสุดท้ายมีการเคลื่อนที่ที่ราบเรียบสม่ำเสมอ ส่วนในรูปที่ 5-11 แสดงตำแหน่งและความเร็วของแท่งเพนดูลัมจากจุดเริ่มต้นไปสู่จุดที่เพนดูลัมตั้งขึ้นซึ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ของกราฟแสดงให้เห็นความราบเรียบและสม่ำเสมอเช่นกัน ซึ่งทั้งสองกราฟนี้แสดงให้เห็นว่าการควบคุมสำหรับแกว่งขึ้นนั้นมีประสิทธิภาพที่ดี



(ก)

(ข)

รูปที่ 5-12 เวลาในการคำนวณ (ก) ใช้ไมโครโปรเซสเซอร์อย่างเดียว

(ข) ไมโครโปรเซสเซอร์และ FPGA

จากการใช้ FPGA ร่วมทำงานกับไมโครโปรเซสเซอร์ด้วยการนำตัวควบคุม LQR และการสับเปลี่ยนตัวควบคุมซึ่งจากเดิมทำงานบนไมโครโปรเซสเซอร์ทั้งหมดใช้เวลาในการคำนวณอยู่ในช่วง 1 มิลลิวินาที รูปที่ 5-12 (ก) ซึ่งสามารถลดเวลาการคำนวณลงได้น้อยกว่า 1 มิลลิวินาที รูปที่ 5-12(ข) การที่ลดเวลาในการคำนวณลงได้สามารถเพิ่มประสิทธิภาพตัวควบคุมคือ เมื่อการคำนวณเกิน 1 มิลลิวินาที ไมโครโปรเซสเซอร์จะใช้เวลาเพิ่มเป็น 2 มิลลิวินาทีในหนึ่งรอบการคำนวณ ซึ่งจะทำให้เวลาของรอบการคำนวณไม่สม่ำเสมอส่งผลให้การหาความเร็วของแขนและแท่งเพนดูลัมมีค่าต่ำลง ประสิทธิภาพโดยรวมของตัวควบคุมลดลงและส่งผลให้การควบคุมแกว่งเพนดูลัมขึ้นไม่สามารถทำได้

ตารางที่ 5-1 ส่วนโปรแกรมในแต่ละอุปกรณ์

Host computer	PowerPC	FPGA
Labview สำหรับแสดงผลและ สั่งการเครื่อง cRIO	คำนวณส่วนทศนิยม ฟังก์ชันตรีโกณ ตัวควบคุมแกว่งเพนดูลัมขึ้น	ตำแหน่งเอนโคดเดอร์ ทิศทางการเคลื่อนที่ ส่งจ่ายสัญญาณควบคุม คำนวณส่วน integer ตัวควบคุม LQR การสับเปลี่ยนตัวควบคุม

5.7 สรุปผลการทดลอง

ในการควบคุมเพนดูลัมผกผันแบบหมุนโดยใช้ตัวควบคุมสองตัวคือส่วนแกว่งเพนดูลัมขึ้น โดยใช้หลักการพลังงานของแกว่งเพนดูลัมมารองรับพลวัตส่วนที่ไม่เชิงเส้นของระบบ และส่วนป้อนกลับสเตต LQR สำหรับรักษาสมดุลของแกว่งเพนดูลัมพบว่าตัวควบคุมทั้งสองสามารถรับมือกับระบบเพนดูลัมผกผันได้ดี ในส่วนของตัวควบคุมการแกว่งเพนดูลัมขึ้นสามารถแกว่งเพนดูลัมขึ้นอย่างราบรื่นและกระทำได้อย่างรวดเร็ว สำหรับตัวควบคุมรักษาสมดุลสามารถรักษาสมดุลเพนดูลัมได้ทันทีที่แกว่งขึ้นถึงตำแหน่งที่ตั้งตรง นอกจากนี้ตัวควบคุมรักษาเสถียรภาพสามารถควบคุมตำแหน่งในส่วนแขนเพนดูลัมได้ทั้งจากการจ่ายสัญญาณขึ้น และสัญญาณคลื่นไซน์โดยที่ยังรักษาสมดุลเพนดูลัมให้ตั้งขึ้นได้ตลอด ส่วนการสับเปลี่ยนตัวควบคุมทั้งสองตัวสามารถทำได้อย่างราบรื่นเช่นกัน

จากการนำ FPGA มาช่วยในการคำนวณสามารถช่วยลดเวลาในรอบการคำนวณได้มากกว่าการใช้ไมโครโปรเซสเซอร์เพียงอย่างเดียวส่งผลให้ประสิทธิภาพโดยรวมมีเสถียรภาพมากขึ้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาการควบคุมระบบไม่เชิงเส้นโดยใช้เพนดูลัมผกผันเป็นระบบทดสอบ ขั้นตอนในการออกแบบตัวควบคุมมีความจำเป็นต้องรู้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ แต่ในการสร้างตัวควบคุมจะไม่ได้สร้างบนแบบจำลองไม่เชิงเส้นโดยตรงทั้งนี้เนื่องจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนและมีความไม่เชิงเส้นสูง เมื่อวิเคราะห์การทำงานของเพนดูลัมผกผันแบบหมุนนั้นจะต้องทำการแกว่งเพนดูลัมจากจุดต่ำสุดให้แท่งเพนดูลัมไปอยู่ในตำแหน่งตั้งขึ้นเสียก่อน จากนั้นคือรักษาตำแหน่งของเพนดูลัมให้อยู่ในลักษณะตั้งขึ้นต่อไป เมื่อพิจารณาจากการทำงานจะเห็นว่า การควบคุมเพนดูลัมผกผันมีความจำเป็นต้องแบ่งการทำงานออกเป็นสองส่วนจึงมีแนวคิดที่ว่าใช้ตัวควบคุมสองชนิดคือ สำหรับการแกว่งเพนดูลัมขึ้นโดยใช้การควบคุมผ่านพลังงานของระบบซึ่งจะทำการควบคุมเพนดูลัมผ่านสมการพลังงานเนื่องจากระบบเพนดูลัมผกผันเป็นระบบที่มีองศาอิสระเท่ากันสองแต่มีตัวขับเพียงหนึ่งตัวการควบคุมตำแหน่งเพนดูลัมโดยตรงจึงไม่สามารถกระทำได้ ส่วนการรักษาสมดุลแท่งเพนดูลัมจะใช้ตัวควบคุม LQR ซึ่งออกแบบจากแบบจำลองเชิงเส้นซึ่งสามารถแปลงระบบไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้ที่รอบๆ สมดุล

ในขั้นต้นได้ทำการออกแบบระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนโดยชุดทดลองที่ออกแบบนั้นจะต้องเป็นไปตามสมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณหาแบบจำลองนั้นคือมีความแข็งแกร่งและตอบสนองได้รวดเร็ว ดังนั้นชุดทดลองที่ออกแบบจะไม่มีชุดส่งกำลังเพื่อกำจัดเวลาหน่วงของระบบและออกแบบให้มีความแข็งแรงของวัสดุสูงเพื่อให้สอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการคำนวณเห็นได้อย่างชัดเจนว่าระบบมีพจน์ที่แสดงความไม่เชิงเส้นอยู่หลายพจน์นั้นแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าระบบมีความไม่เชิงเส้นดังที่คาดการณ์ไว้ นอกจากนี้เมื่อทำการแปลงแบบจำลองให้อยู่ในรูปเชิงเส้นที่รอบจุดสมดุล ณ ตำแหน่งตั้งขึ้น พบว่าค่าโพลและซีโรของระบบมีค่าอยู่ทางขวามือของแกนจินตภาพบนระนาบ S จุดนี้ทำให้ทราบว่าระบบมีความไวเสถียรภาพและเป็นระบบมุมเฟสไม่น้อยที่สุด

การออกแบบตัวควบคุมของระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนนี้ได้ออกแบบให้มีการทำงานบนตัวประมวลผลร่วมคือ FPGA และไมโครโปรเซสเซอร์ซึ่งตัวประมวลผลแต่ละแบบมีข้อดีแตกต่างกันออกไปจึงนำมาทำงานร่วมกันเพื่อให้ตัวควบคุมที่ออกแบบมีประสิทธิภาพสูงสุด

จากผลการทดลองพบว่าการใช้ตัวคุมทั้งสองชนิดสามารถทำหน้าที่ได้อย่างมีประสิทธิภาพ การแกว่งเพนดูลัมขึ้นโดยใช้การควบคุมผ่านพลังงานของระบบ ใช้เวลาในการแกว่งขึ้นประมาณ 4 วินาที ในส่วนตัวควบคุม LQR นอกจากรักษาสมดุลที่จุดสมดุลได้อย่างดีแล้ว ยังสามารถทำหน้าที่ตามรอยสัญญาณในส่วนแกนเพนดูลัมโดยที่ยังสามารถรักษาเพนดูลัมให้อยู่ในลักษณะตั้งขึ้นได้ตลอด นอกจากนี้การทำงานสลับเปลี่ยนระหว่างตัวควบคุมทั้งสองสามารถทำได้เป็นอย่างดีและราบรื่น และการนำ FPGA มาช่วยในการคำนวณสามารถลดเวลาการทำงานของโปรแกรมได้

6.2 ข้อเสนอแนะ

- 1.) การออกแบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนควรออกแบบให้ความผิดพลาดทางกลน้อยที่สุดเพื่อให้ทราบสมรรถนะที่แท้จริงของระบบควบคุมที่ใช้ เช่นในกรณีวิทยานิพนธ์นี้มิได้มีการใช้แหวนลื่น (Slip ring) ในการส่งสัญญาณจากเอนโคเดอร์ของแท่งเพนดูลัม แต่ใช้สายสัญญาณแทน และเนื่องจากสายสัญญาณมีความแข็งทำให้เมื่อสายมีการบิดตัวจะมีแรงรบกวนเข้าสู่ระบบโดยมีลักษณะที่ไม่สามารถทำนายได้ทำให้ผลสมรรถนะของตัวควบคุมมีความชัดเจนน้อยลง
- 2.) ในการรักษาสมดุลแท่งเพนดูลัมตัวควบคุมทำหน้าที่เพียงรักษาแท่งเพนดูลัมให้สมดุลตั้งอยู่ที่จุดสมดุลเท่านั้น ยังไม่สามารถควบคุมให้แท่งเพนดูลัมอยู่ในมุมใดๆที่ต้องการได้ จึงควรมีการศึกษาและสร้างตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนเพื่อรักษาสมดุลที่ตำแหน่งใดๆต่อไป
- 3.) ในการควบคุมตำแหน่งส่วนแกนเพนดูลัมโดยใช้การเปลี่ยนตำแหน่งควบคุมยังไม่สามารถให้ผลที่ดีที่สุดคือมีเวลาหน่วงจึงควรมีการออกแบบโดยใช้การควบคุมแบบตามรอย (Tracking control) โดยผ่านพลวัตผกผัน (Inverse dynamic) เพื่อให้การตามรอยสมบูรณ์ยิ่งขึ้น
- 4.) ในการหาค่าอัตราขยายสำหรับตัวควบคุมแกว่งเพนดูลัมขึ้นจะได้มาจากการทดลองซึ่งควรมีวิธีการหาค่าอัตราขยายที่เหมาะสมด้วยการคำนวณได้

รายการอ้างอิง

- [1] วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ. การควบคุมระบบพลศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2, กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545
- [2] จารุทัศน์ วงษ์สันต์. MATLAB สำหรับการแก้ปัญหาเชิงวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2544
- [3] คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ฟิสิกส์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541
- [4] คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ฟิสิกส์ 2. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543
- [5] วโรดม ตูจินดา. การวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมทางวิศวกรรม. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2550
- [6] เขตต์ พิฑูรมานิต. การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนโดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวควบคุมบล็อกเต็ม. ปรินซ์ฮาลาบัณฑิต. ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545
- [7] กิตติชัย รุจิราพันธ์. การออกแบบตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนโดยใช้เทคนิคกำหนดอัตราขยาย. ปรินซ์ฮาลาบัณฑิต. ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547
- [8] ศุภวัฒน์ เจียมลักษณะไพศาล และ รัชทิน จันท์เจริญ. การประมาณการแปลงระบบเป็นเชิงเส้นด้วยการป้อนกลับของระบบน้ำสองถัง. ใน การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 20. นครราชสีมา, 2549
- [9] สุदारัตน์ ขวัญอ่อน และคณะ. การสร้างเสถียรภาพให้ระบบลูกตุ้มผกผันด้วยตัวควบคุมนิวโร-ฟัซซี่ชนิดกฎอินพุตเดียว. ปรินซ์ฮาลาบัณฑิต. ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี วทท., 2548
- [10] ไพบุลย์ จำนงวุฒิโรจน์. การนำระบบควบคุมแบบฟัซซี่มาใช้ควบคุมการทำงานของระบบตุ้มน้ำหนักแกว่ง. ปรินซ์ฮาลาบัณฑิต. ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2539
- [11] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544

- [12] J E. Slotine and W. Ping., Applied Nonlinear Control. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [13] Francis C. Moon. Applied Dynamics with Application to Multibody and Mechatronic Systems. John Wiley & Sons. Inc., 1998
- [14] Y.Yavin. Control of a rotary inverted pendulum. Applied Mathematics Letter 12 1999:131-134.
- [15] R. Chanchareon. J. Kananai. S. Chantranuwathana. and V. Sangveraphunsiri. Stabilizing of an Inverted Pendulum Using Computed Feedback Linearization Technique. Proceeding of IASTED Conference Intelligent Systems and Control. USA 2005
- [16] R. Chanchareon. et al. Tracking Control of an Inverted Pendulum Using Computed Feedback Linearization Technique. Proceeding of IEEE Conference Robotics, Automation and Mechatronics. 2006
- [17] R. Chanchareon. et al. Controller Design Based on Computed Feedback Linearization. Proceeding of IEEE Conference, Robotics, Automation and Mechatronics. 2006
- [18] S.Awtar. et al. Inverted pendulum system: rotary and arm-driven – a mechatronic system design case study. Department of Mechanical Engineering. Rensselaer Polytechnic Institute. Troy. NY
- [19] Zhongmin Wang. et al. Minimum-Time Swing-up of A Rotary Inverted Pendulum by Iterative Impulsive Control. Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts, June 30 -July 2 2004
- [20] Tom Fujinaka. et al. Stabilization of Double Inverted Pendulum with Self-Tuning Neuro-PID. Department of Computer and Systems Sciences. Osaka Prefecture University. Sakai. Osaka. Japan
- [21] Shigeyasu kawaji. Control of double inverted pendulum with elastic joint. Department of Electrical and Computer Sciences. Kumamoto University. Japan

- [22] Daniel Jerome Block. Mechanical Design AND Control of the Pendubot. Department of General Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996
- [23] Xianmin Chen. et al. Linear Motor Driven Inverted Pendulum and LQR Controller Design. Proceeding of IEEE International Conference on Automation and Logistics Beijing ,2007
- [24] S. W. Nawawi. et al. Real-Time Control of a Two-Wheeled Inverted Pendulum Mobile Robot. International Journal of Computer, Information, and Systems Science. and Engineering, 2008
- [25] H.W.J.van den Berg. Introduction to the control of an inverted pendulum setup. Department of Electrical & Electronic Engineering. University of Melbourne, 2003
- [26] Nour M.I.H.. Ooi J.. Chan K. Y.. Fuzzy logic control vs. conventional PID control of an inverted pendulum robot. International Conference Intelligent and Advanced Systems, 2007
- [27] Tan Kok Chye. Teo Chun Sang. Rotary Inverted Pendulum. Master's thesis. School of electrical and Electronic Engineering. Nanyang Technological University,1999
- [28] Petr ernest. Petr Horacek. Algorithm for control of a Rotating Pendulum. Faculty of Electrical Engineering. Czech Technical University. Prague
- [29] Johnny Lam. Control of an Inverted Pendulum
- [30] Katsuhisa furuta and Masaki Yamakita. Swing Up Control of Inverted Pendulum. Department of Control Engineering. Tokyo Institute of Technology., 1991
- [31] Jiri Mertl. et al. Swing-Up and Stabilization of Rotary Inverted Pendulum. Department of Cybernetics. Faculty of Applied Sciences. University of West Bohemia
- [32] Kazunobu Yoshida. Swing-up Control of an inverted Pendulum by Energy Based Methods. American Control Conference. San Diego, California, 1999

- [33] Ling K.V.. et al. An Online Internet Laboratory for Control Experiments. School of Electrical and Electronic Engineering. Nanyang Technological University, 2001
- [34] K.J. Astrom and K. Furuta. Swinging Up a Pendulum by Energy Control. IFAC 13th World Congress. San Francisco, California, 1996
- [35] Yanliang Zhang. et al. Nonlinear Adaptive Sliding Mode Control for a Rotary Inverted Pendulum. School of Mechanical and Aerospace Engineering. Nanyang Technological University
- [36] Chih-Keng Chen. et al. Input State Linearization of a Rotary Inverted Pendulum. Asia Journal of Control. Volume 6. Page 130-135. March, 2004
- [37] Joao P. Hespanha. LQG/LQR controller design. Dept. of Electrical & Computer Engineering. University of California. April, 2007
- [38] Michael Kwapisz. Control of an Inverted Pendulum (Pendubot). Department of Automatic Control. Lund Institute of Technology, 2005

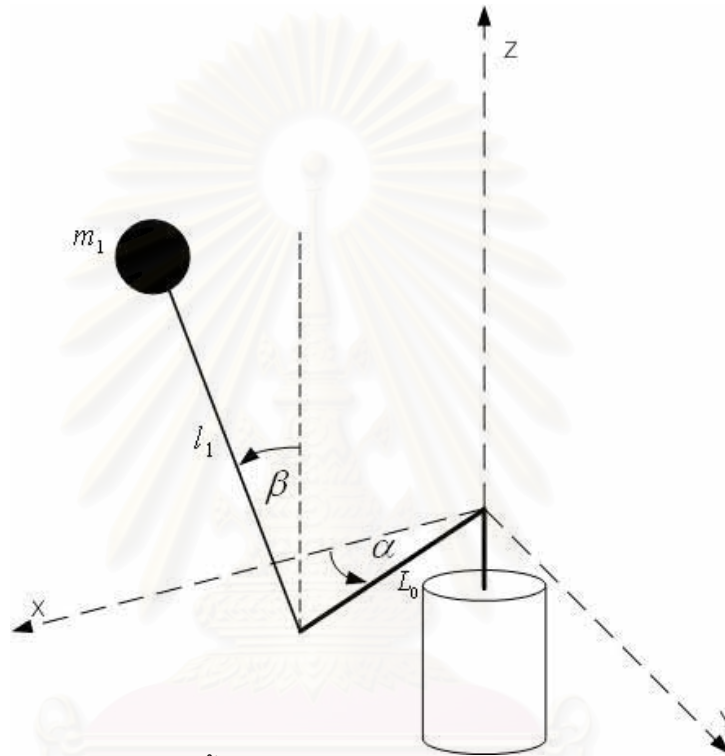


ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

ก.1 รายละเอียดแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตำแหน่งแขนเพนดูลัมลงข้างล่าง



รูปที่ ก-1 การตั้งแกนของเพนดูลัม (Co-ordinate system)

กำหนด θ เป็นค่ามุมของแขนเพนดูลัมเทียบกับตำแหน่งแท่งเพนดูลัมลงข้างล่างตามรูปที่ ก-1 ซึ่งมีค่ามุมต่างกัน π เรเดียน และเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างมุม θ และ β ได้ ดังนี้

ตารางที่ ก-1 ความสัมพันธ์ระหว่าง β และ θ

$\beta = \theta - \pi$	$\cos \beta = \cos(\theta - \pi)$	$\sin \beta = \sin(\theta - \pi)$	$\sin 2\beta = \sin 2(\theta - \pi)$
$\dot{\beta} = \dot{\theta}$	$= -\cos \theta$	$= -\sin \theta$	$= \sin(2\theta - 2\pi)$
$\ddot{\beta} = \ddot{\theta}$			$= \sin 2\theta$

โดยการแทนค่าลงในสมการที่ (4.21) สำหรับพิกัดทั่วไป α

$$\begin{aligned}
& (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} (-\sin \theta)^2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta} (-\cos \theta) + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin 2\theta \\
& \quad + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}^2 (-\sin \theta) + C_0 \dot{\alpha} = \tau_m \\
& (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \theta + m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta} \cos \theta + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin 2\theta \\
& \quad - m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta + C_0 \dot{\alpha} = \tau_m
\end{aligned} \tag{A.1}$$

เมื่อแทนค่า τ_m จากสมการที่ (4.31)

$$\begin{aligned}
& (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} (-\sin \theta)^2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta} (-\cos \theta) + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin 2\theta \\
& \quad + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}^2 (-\sin \theta) + \left(C_0 + \frac{K_r K_b}{R_a} \right) \dot{\alpha} = \frac{K_r K_u}{R_a} u \\
& (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\alpha} + m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \theta + m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta} \cos \theta + m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin 2\theta \\
& \quad - m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta + \left(C_0 + \frac{K_r K_b}{R_a} \right) \dot{\alpha} = \frac{K_r K_u}{R_a} u
\end{aligned} \tag{A.2}$$

และสำหรับการเคลื่อนที่ของแท่งเพนดูลัม แทนค่าลงในสมการที่ (4.28)

$$\begin{aligned}
& -m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} (-\cos \theta) + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\theta + C_1 \dot{\theta} - m_1 g l_1 (-\sin \theta) = 0 \\
& m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} \cos \theta + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\theta + C_1 \dot{\theta} + m_1 g l_1 \sin \theta = 0
\end{aligned} \tag{A.3}$$

เมื่อเขียนในรูปเมตริกซ์

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \theta & m_1 L_0 l_1 \cos \theta \\ m_1 L_0 l_1 \cos \theta & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} C_0 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta} \sin 2\theta & -m_1 L_0 l_1 \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\theta & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l_1 \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_m \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

แทนค่า τ_m ด้วยสมการ (4.31) ได้แบบจำลองสำหรับตัวควบคุม

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \theta & m_1 L_0 l_1 \cos \theta \\ m_1 L_0 l_1 \cos \theta & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} C_0 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta} \sin 2\theta & -m_1 L_0 l_1 \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\theta & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l_1 \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_r, K_u \\ 0 \end{bmatrix} u
\end{aligned} \tag{A.5}$$

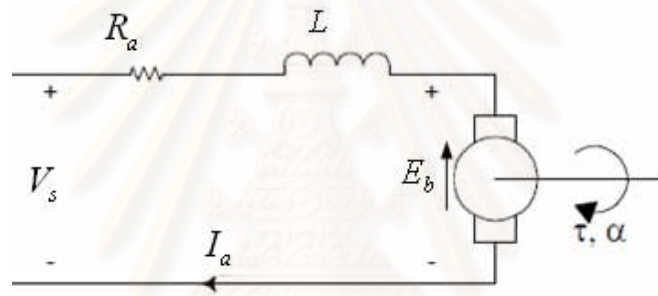


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

ข.1 การหาค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์

หลักการทำงานของมอเตอร์กระแสตรงคือการผ่านไฟฟ้ากระแสตรงเข้าไปยังขดลวดที่อยู่ในสนามแม่เหล็กทำให้เกิดแรงเกิดขึ้นในแนวตั้งฉากเส้นแรงแม่เหล็กและกระแสไฟฟ้า โดยที่สนามแม่เหล็กของมอเตอร์เกิดจากแม่เหล็กถาวร ดังนั้นปริมาณสนามแม่เหล็กเราสามารถกำหนดให้คงที่ได้ การควบคุมแรงบิดของมอเตอร์จึงเกิดจากการควบคุมกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านขดลวดมอเตอร์ (Armature) เพียงอย่างเดียว โดยเขียนแผนภาพองค์ประกอบของมอเตอร์ออกมาเป็นดังนี้



รูปที่ ข-1 วงจรระบบของมอเตอร์

แรงดันไฟฟ้า (Voltage) ที่ตกคร่อมวงจรรอาร์เมเจอร์ สามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$V_s = i_a R_a + L \frac{di_a}{dt} + E_b \quad (\text{B.1})$$

เพราะว่าแรงดันไฟฟ้าฟ้าย้อนกลับ (Back EMF, E_b) เป็นสัดส่วนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของแนวเส้นแรงแม่เหล็กหรือความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ ตามทฤษฎีแรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำเราจะได้ [4]

$$\begin{aligned} E_b &= NBA\omega \\ E_b &= K_b\omega \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

โดยที่

$$E_b = \text{แรงดันไฟฟ้าฟ้าย้อนกลับ}$$

N = จำนวนรอบขดลวด

B = การเหนี่ยวนำแม่เหล็ก

A = พื้นที่หน้าตัดของขดลวด

K_b = ค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ

i_a = กระแสไฟฟ้า

R_a = ค่าความต้านทานที่ขดลวดอาร์เมเจอร์

L = ค่าความเหนี่ยวนำที่ขดลวดอาร์เมเจอร์ ω = ความเร็วเชิงมุมของเพลามอเตอร์

เนื่องจากมอเตอร์เป็นแบบแม่เหล็กถาวรถือว่าสนามแม่เหล็กคงที่ แรงบิดที่มอเตอร์สามารถสร้างขึ้นจึงเป็นสัดส่วนกับกระแสที่ไหลผ่านขดลวดอาร์เมเจอร์ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\tau &= NBAi_a \\ \tau &= K_t i_a\end{aligned}\quad (B.3)$$

จากสมการที่ (B.2) และ (B.3) จะเห็นได้ว่าทั้ง K_t และ K_e ต่างก็เท่ากับ NBA ดังนั้นสรุปได้ว่าค่าทั้งสองเท่ากัน

ข.1.1 การหาค่าความต้านทานของขดลวดท่อนมอเตอร์

เมื่อพิจารณาตั้งแต่มอเตอร์หยุดนิ่ง ความเร็ว (ω) มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น $E_b = K_e \omega = 0$ และ $R_a \gg L$ และค่า L มีค่าน้อยมากๆ จากสมการที่ (B.1) เราจะหา R_a ค่าในมอเตอร์ได้จาก

$$V_s = i_a R_a \quad (B.4)$$

การทดลองหาค่าความต้านทานของขดลวดเราจะกระทำโดย นำ แอมป์ มิเตอร์วัดค่ากระแสที่ไหลเข้ามอเตอร์หนึ่งตัว และโวลต์มิเตอร์วัดความต่างศักย์ตกคร่อมที่มอเตอร์อีกหนึ่งตัว โดยจับมอเตอร์ไว้ไม่ให้หมุน จากนั้นบันทึกค่าโดยปรับค่าแรงดันเป็นค่าต่างๆกัน นำค่าที่บันทึกได้ไปคำนวณตามสมการ ผลที่ได้สามารถดูได้จากภาคผนวก ข

ข.1.2 การหาค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ

จากหัวข้อที่ ข.1.1 เราสามารถหาค่าความต้านทานของขดลวดได้เมื่อพิจารณาสมการที่ (B.1)

$$V_s = i_a R_a + L \frac{di_a}{dt} + E_b \quad (B.5)$$

เมื่อค่า $R_a \gg L$ แล้ว และค่า L มีค่าน้อยมากๆ ค่าให้เทอม $L \frac{di_a}{dt} = 0$

$$V_s = i_a R_a + E_b \quad (\text{B.6})$$

$$V_s = i_a R_a + K_b \dot{\alpha} \quad (\text{B.7})$$

ในกรณีนี้เราสามารถวัดค่า V_s, i_a, α และหาค่า $R_a, \dot{\alpha}$ ได้จากการคำนวณ เราก็จะได้ค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ

การทดลองหาค่า K_b ทำโดยการต่อมอเตอร์เข้ากันแหล่งจ่ายแรงดันคงที่ แล้วนำมัลติมิเตอร์วัดค่ากระแสที่ไหลเข้ามอเตอร์หนึ่งตัว และวัดความต่างศักย์ตกคร่อมที่มอเตอร์อีกหนึ่งตัว จากนั้นต่อสัญญาณเอนโคเดอร์เข้าคอมพิวเตอร์แล้วทำการแปลงสัญญาณเป็นความเร็ว เมื่อมอเตอร์หมุนเข้าสู่ความเร็วคงที่แล้ว วัดค่าต่างๆคือ V_s, i_a, α และ $R_a, \dot{\alpha}$ ที่คำนวณได้ก็กลับไปใส่ในสมการที่ (B.7) จะได้ค่า K_b ทดลองซ้ำโดยใช้ค่าแรงดันหลายๆค่า

ข.2 การหาอัตราขยายของเครื่องขยายสัญญาณ

สัญญาณควบคุม ที่เป็นแรงดันจาก เครื่อง cRIO ถูกแปลงให้เป็นกระแสโดย เครื่องขยายสัญญาณแปลงสัญญาณเพื่อควบคุมแรงบิดของมอเตอร์โดยมีความสัมพันธ์ คือ

$$i_a = K_u u \quad (\text{B.8})$$

การทดลองทำโดยการจ่ายสัญญาณควบคุมและวัดค่ากระแสที่ไหลผ่านมอเตอร์ ในการทดลองนี้แบ่งเป็นสองวิธีการคือปล่อยมอเตอร์หมุนอิสระ และหยุดมอเตอร์อยู่กับที่ จากนั้นนำข้อมูลได้มาแทนด้วยกราฟระหว่างสัญญาณควบคุมและกระแสด้วยสมการเชิงเส้น ค่าความชันของกราฟที่คำนวณได้คือค่าอัตราขยายของเครื่องขยายสัญญาณ

ข.3 การหาค่าความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

จากเอนโคเดอร์ทั้งสองตัวเราสามารถรู้ตำแหน่งมุม จะทำการหาค่าความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมได้ด้วย 2 วิธีคือ

ข.3.1 การหาด้วยวิธีเชิงเลข (Numerical Differentiation)

ในการหาความเร็วด้วยวิธีนี้จะกระทำโดยการนำค่าตำแหน่งสองจุดมาลบกันแล้วหารด้วยค่าเวลาสุ่มตัวอย่างซึ่งโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณจะใช้รูปแบบผลต่างการแบ่งย่อยสามรูปแบบ ดังนี้

ค่าอนุพันธ์การแบ่งย่อยไปข้างหน้า

$$f'(x_i) = \frac{[f(x_{i+1}) - f(x_i)]}{T_s} \quad (\text{B.9})$$

ค่าอนุพันธ์การแบ่งย่อยแบบตรงกลาง

$$f'(x_i) = \frac{[f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))]}{2T_s} \quad (\text{B.10})$$

และค่าอนุพันธ์การแบ่งย่อยแบบย้อนหลัง

$$f'(x_i) = \frac{[f(x_i) - f(x_{i-1}))]}{T_s} \quad (\text{B.11})$$

การใช้งานจะใช้ค่าอนุพันธ์แบบแบ่งย่อยตรงกลางในทุกๆจุดข้อมูลยกเว้นจุดแรกจะทำการแบ่งย่อยไปข้างหน้าและจุดสุดท้ายจะทำการแบ่งย่อยไปข้างหลัง ซึ่งจะใช้วิธีดังกล่าวในกรณีไม่สามารถหาสมการแทนข้อมูลได้

ข.3.2 การหาด้วยการสร้างสมการแทนข้อมูลที่เหมาะสม(Curve fitting)

ในการทดลองหาค่าพารามิเตอร์ของระบบจะใช้ วิธีการจ่ายสัญญาณควบคุมใน รูปแบบคลื่นไซน์ (Sine Wave) ดังนั้นผลตอบตำแหน่งจะออกในลักษณะใกล้เคียงกัน การประมาณฟังก์ชันจึงอยู่ในรูปแบบ

$$f(x) = a * \sin(b * x + c) \quad (\text{B.12})$$

โดยที่ a, b และ c คือขนาด ความถี่และมุมเฟสเริ่มต้น ตามลำดับ โดยค่าความถี่ของผลการทดลองจะต้องมีค่าเท่ากับสัญญาณอินพุตเท่านั้น

ข.4 การหาค่าพารามิเตอร์ของระบบเพนดูลัม

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อ 4.1.1 สมการที่ (4.32) จะเห็นว่าพารามิเตอร์หลายตัวที่จำเป็นต้องใช้ซึ่งสามารถแบ่งได้ 2 ประเภทตาม ตารางที่ 4-1 ส่วนที่หาไม่ได้โดยตรงจะใช้วิธี ดังนี้

ข.4.1 การหาด้วยวิธีการคำนวณ

สำหรับการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของเพนดูลัมสามารถคำนวณได้จากสมการและมีการย้ายแกนหมุน [13], [3] ดังนี้

$$J = \int r^2 dm + mR^2 \quad (\text{B.13})$$

สำหรับเพนดูลัม เอนโคดเดอร์ และน้ำหนักถ่วง

$$J = \frac{m(w^2 + l^2)}{12} + mR^2 \quad (\text{B.14})$$

น้ำหนักถ่วง

$$J = \frac{mr^2}{2} + mR^2 \quad (\text{B.15})$$

โมเมนต์ความเฉื่อยรวม

$$\begin{aligned} J_0 &= J_a + J_e + J_w \\ &= \left(\frac{m_a(w_a^2 + l_a^2)}{12} \right) + \left(\frac{m_e(w_e^2 + l_e^2)}{12} + m_e R_e^2 \right) + \left(\frac{m_w r^2}{2} + m_w R_w^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} m_a &= 0.145, w_a = 0.042, l_a = 0.25, \\ m_e &= 0.229, w_e = 0.042, l_e = 0.059, R_e = 0.117, \\ m_w &= 0.22, r = 0.049, R_w = 0.105 \end{aligned}$$

ได้

$$J_0 = 0.0067010 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{B.17})$$

ในส่วนแท่งเพนดูลัมจะประกอบด้วยตัวแท่งเพนดูลัมและน้ำหนักถ่วง และเนื่องจากแท่งเพนดูลัมมีน้ำหนักเบาเมื่อเทียบกับน้ำหนักถ่วง ดังนั้นจึงคิดโมเมนต์ความเฉื่อยโดยให้จุดศูนย์กลางมวลเป็นอนุภาค

$$J_1 = m_1 l^2 \quad (\text{B.18})$$

แทนค่า $m_1 = m_{rod} + m_{w2}, m_{rod} = 0.29, m_{w2} = 0.089, l = 0.235$ ได้

$$J_1 = 0.00651655 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{B.19})$$

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่หาได้จากการคำนวณนี้เพื่อเป็นแนวทางให้ทราบว่าค่าที่ได้จากการทดลองมีความผิดพลาดหรือไม่ซึ่งค่าที่ได้จะต้องได้ใกล้เคียงกัน

ข.4.2 การประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Estimation) [2]

สมมติว่ามีกลุ่มข้อมูล

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

โดยที่ n คือจำนวนของข้อมูล

เมื่อต้องการหาสมการแทนค่าข้อมูลด้วยสมการเชิงเส้น

$$g(x) = \alpha x + \beta \quad (\text{B.20})$$

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & 1 \\ x_{1,2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1,n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{หรือ } \vec{y} = \vec{A}\vec{k} \quad (\text{B.21})$$

$$\vec{y} = \vec{A}\vec{k}$$

$$\vec{A}^T \vec{y} = \vec{A}^T \vec{A}\vec{k} \quad (\text{B.22})$$

$$(\vec{A}^T \vec{A})^{-1} \vec{A}^T \vec{y} = \vec{k}$$

ดังนั้นเราจะสามารถหาค่า \vec{k} ได้

ข.4.3 การหาค่าพารามิเตอร์ด้วยการทดลองทั้งระบบ

ในการหาพารามิเตอร์ด้วยวิธีการนี้เราจะทดลองโดยที่ตำแหน่งของแท่งเพนดูลัมลง

ข้างล่าง ดังนั้นสมการที่ใช้หาค่าพารามิเตอร์คือ

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \theta & m_1 L_0 l_1 \cos \theta \\ m_1 L_0 l_1 \cos \theta & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} C_0 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta} \sin 2\theta & -m_1 L_0 l_1 \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\theta & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23}) \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l_1 \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_r K_u \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

ทำการแยกพารามิเตอร์ที่หาค่าได้และหาค่าไม่ได้ในสมการที่ (B.23) ออกจากกันเป็นสอง

ชุด

$$\begin{bmatrix} -m_1 L_0^2 \ddot{\alpha} - m_1 l_1^2 \sin^2 \theta - m_1 L_0 l_1 \cos \theta \\ -m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin 2\theta + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta + K_r K_u u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ C_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha} \cos \theta - m_1 l_1^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\theta - m_1 g l \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

ในทางซ้ายมือของสมการที่ (B.24) และ (B.25) คือพารามิเตอร์ที่หาค่าได้โดยในส่วนของค่าความเร็วและความเร่งเชิงมุมได้มาจากการทดลองหาผลตอบสนองของระบบแล้วคำนวณจากค่าตำแหน่งของชุดทดลอง และเมื่อแทนค่า $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ ที่ได้จากทุกๆ ช่วงเวลาการสุ่มข้อมูล (Sampling Time) กลับลงไปในสมการที่ (B.24) และ (B.25) จะได้ชุดสมการตามจำนวนเวลาการสุ่มข้อมูล สมมติจำนวน N สมการ และจัดสมการลงในเมตริกซ์

กำหนดให้ i เป็นดัชนีของข้อมูลตัวอย่างมีค่า 1 ถึง N

$$y = Ak$$

$$y0_i = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \ddot{\alpha}_n & \dot{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} J_0 \\ C_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$$y0_i = -m_1 L_0^2 \ddot{\alpha}_{(i)} - m_1 l_1^2 \sin^2 \theta_{(i)} - m_1 L_0 l_1 \cos \theta_{(i)} - m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_{(i)} \dot{\theta}_{(i)} \sin 2\theta_{(i)} + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_{(i)}^2 \sin \theta_{(i)} + K_r K_u u_{(i)} \quad (\text{B.27})$$

ด้วยวิธีการในหัวข้อ 4.2 สามารถหาค่าพารามิเตอร์ J_0, C_0 ในทางกลับกันเมื่อกำหนดให้

$$y1_i = -m_1 L_0 l_1 \ddot{\alpha}_{(i)} \cos \theta_{(i)} - m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_{(i)} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_{(i)}^2 \sin 2\theta_{(i)} - m_1 g l \sin \theta_{(i)} \quad (\text{B.28})$$

และเมตริกซ์ A คือเมตริกซ์ของความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของแท่งเพนดูลัมแล้วจะได้ค่าพารามิเตอร์ J_1, C_1

4.4 การหาค่าพารามิเตอร์ของแขนเพนดูลัม

การหาพารามิเตอร์เฉพาะส่วนแขนเพนดูลัมนี้จะใช้การคำนวณจากสมการแรงบิดของ

ระบบ

$$J_0 \ddot{\alpha} + C_0 \dot{\alpha} = \tau_m \quad (\text{B.29})$$

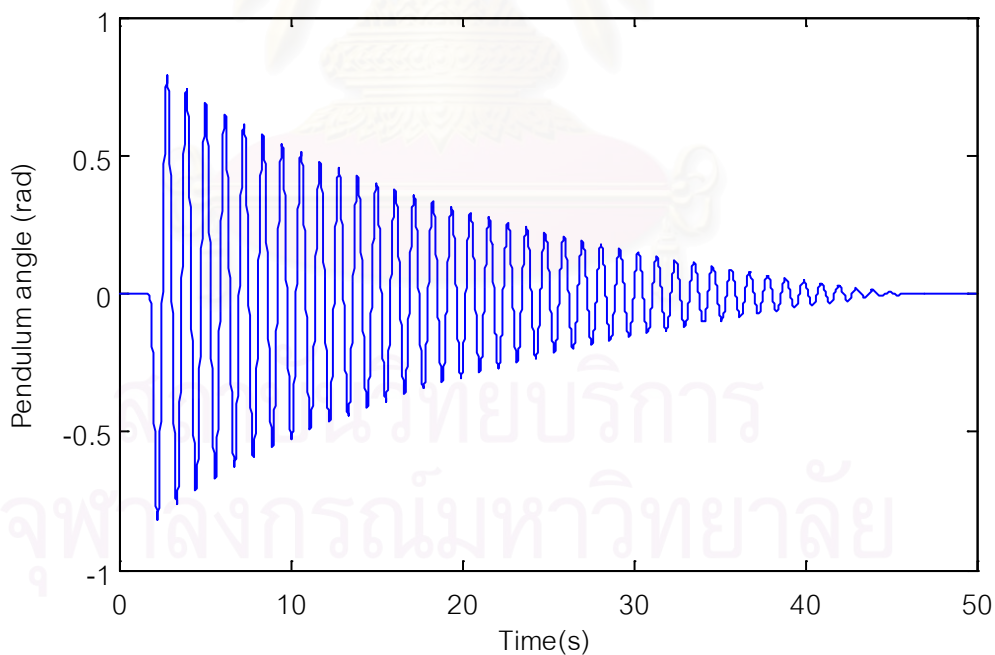
ด้วยวิธีการนี้จำเป็นต้องทำการถอดแอมพลิจูดออกก่อน เมื่อเหลือแต่ส่วนแกนเพนดูลัมแล้วจะทดสอบด้วยการจ่ายสัญญาณขั้น (Step Signal) และบันทึกข้อมูลตำแหน่งของมอเตอร์เพื่อนำมาหาค่าความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมที่ทุกๆจุดข้อมูล และทราบค่าแรงบิด τ จากการหาค่าจากนั้นใช้วิธีกำลังสองเชิงเส้นเพื่อหาค่า J_0 และ C_0

ข.4.5 การหาค่าพารามิเตอร์ของแท่งเพนดูลัม

วิธีการทดลองคือให้เฉพาะส่วนแท่งเพนดูลัมเท่านั้นที่เคลื่อนที่ ไม่มีการจ่ายค่าสัญญาณควบคุม แท่งเพนดูลัมจะแกว่งอย่างอิสระในลักษณะที่ลงข้างล่างดังนั้นค่า $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ และ u มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสามารถลดรูปได้เหลือ

$$(J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta} + C_1 \dot{\theta} + m_1 g l_1 \sin \theta = 0 \quad (\text{B.30})$$

เช่นเดียวกับการหาพารามิเตอร์ทั้งระบบ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะได้ค่า J_1, C_1



รูปที่ ข-2 การแกว่งอย่างอิสระของแท่งเพนดูลัม

นอกจากนี้การหาค่าเมื่อพิจารณารูปที่ ข-2 นั้นคือการแกว่งแบบมีความหน่วง ซึ่งอธิบายได้จากสมการ [3]

$$y(t) = Ae^{-\zeta t} \sin(\omega't + \phi) \quad (\text{B.31})$$

โดยที่ $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \zeta^2}$, ζ คือค่าคงที่ความหน่วงซึ่งมีค่าเท่ากับ $\zeta = \frac{C}{2J}$

จะเห็นว่าจากสมการการแกว่งแบบมีความหน่วง ค่าขนาดของมุมแกว่งจะมีการลดลงแบบยกกำลัง (Exponential) ดังนั้นถ้าสามารถหาสมการแบบยกกำลังมาประมาณค่า ขนาดของมุมแกว่งสูงสุดทุกๆจุดได้ก็สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานได้



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

ค.1 ผลการหาค่าพารามิเตอร์

ค.1.1 ค่าความต้านทานของขดลวดมอเตอร์ (R_a)

ตารางที่ ค-1 ค่าความต้านทานเฉลี่ยตามครั้งการทดลอง

การทดลองครั้งที่	ค่าความต้านทาน (โอห์ม)
1	7.537327
2	7.526661
3	7.204792
4	7.042604

ตารางที่ ค-1 จะเห็นว่าผลการทดลองในการทดลองครั้งที่ 1 ค่าความต้านทานเฉลี่ยจะมีค่าสูงที่สุด เนื่องจากมอเตอร์ที่ใช้ในการทดลองเป็นมอเตอร์เก่าและไม่ได้มีการใช้งานมานานความต้านทานที่เพิ่มขึ้นอาจมีสาเหตุมาจากชั้นออกไซด์เกิดขึ้นที่ผิวของคอมมิวเตเตอร์ (Commutator) ของมอเตอร์ ซึ่งเมื่อให้มอเตอร์หมุนทำงานระยะหนึ่งชั้นออกไซด์ที่เกิดขึ้นจะหายไป ในการทดลองครั้งที่ 2, 3 และ 4 จะเห็นได้ว่าความต้านทานมีค่าลดลง

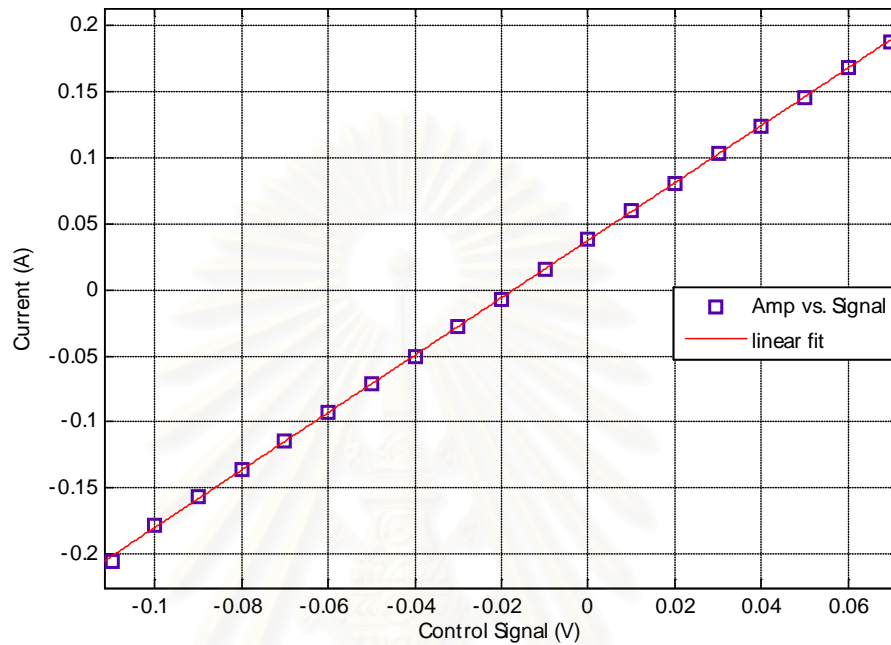
ค.1.2 ค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ K_b

ตารางที่ ค-2 แสดงการหาค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ K_b

แรงดัน (โวลต์)	กระแส (แอมแปร์)	ความต้านทานขดลวดที่ใช้ (โอห์ม)	ความเร็ว (rad/s)	K_b
16	0.161	7.042604	97.4063	0.15262
19.99	0.175	7.042604	125.457	0.149514
21.05	0.178	7.042604	133.024	0.148818
			ค่าเฉลี่ย	0.150317

ค.1.3 ค่าเกนของเครื่องขยายสัญญาณ (Amplifier Gain)

นำผลการทดลองมาวาดกราฟ ด้วยโปรแกรม MATLAB ได้ผลดังรูปที่ ค-1



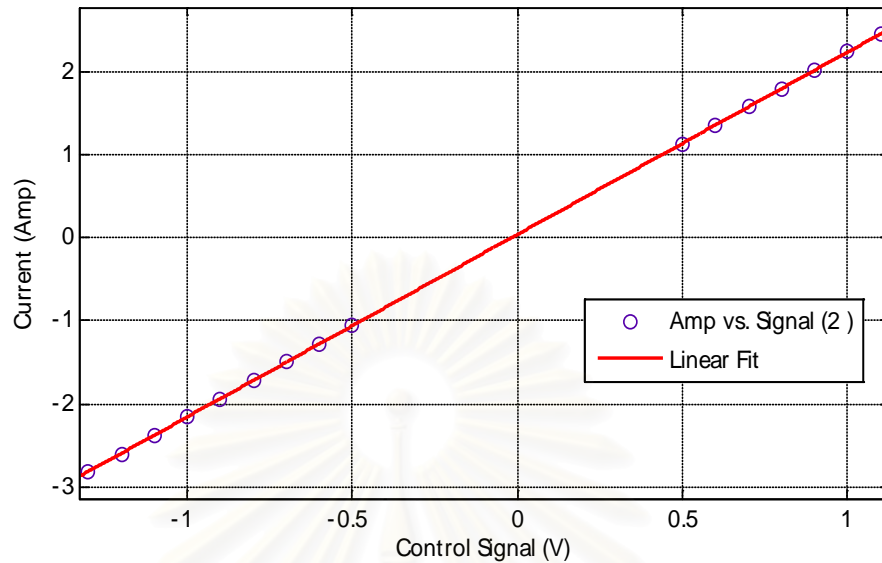
รูปที่ ค-1 ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณควบคุมและกระแสโดยให้มอเตอร์หมุน

จากวิธีที่ 1 โดยการปล่อยให้มอเตอร์หมุน เมื่อทำการถดถอยแบบเชิงเส้นได้สมการดังนี้

$$y(x) = 2.17193x + 0.03739 \quad (C.1)$$

จากสมการที่ (4.39) เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ค่า K_u เท่ากับ 2.17193

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ ค-2 ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณควบคุมและกระแสโดยหุยมอเตอร์

และจากวิธีที่ 2 โดยการหุยมอเตอร์ เมื่อทำการถดถอยแบบเชิงเส้นได้สมการดังนี้

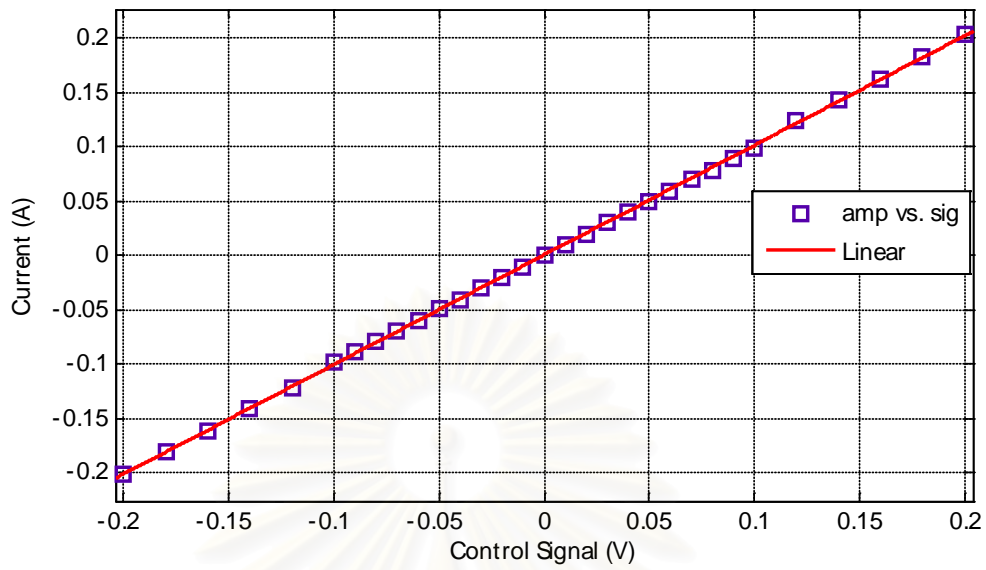
$$y(x) = 2.20344x + 0.04216 \quad (C.2)$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการที่ (4.39) จะได้ค่า K_u เท่ากับ 2.200344

ตารางที่ ค-3 ผลการทดลองหาอัตราขยายเครื่องขยายสัญญาณ

การทดลองแบบที่	ค่าความชันของกราฟ	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	2.17193	0.03739
2	2.20344	0.04216
ค่าเฉลี่ย	2.18766	0.03978

จากผลการทดลองครั้งข้างต้นจะพบว่าเมื่อจ่ายสัญญาณควบคุมที่ 0 โวลต์ เครื่องขยายสัญญาณจะมีการจ่ายกระแสออกมา 0.03739 แอมป์ และ 0.04216 แอมป์ ซึ่งค่าที่ได้จากการวัดจริงคือ 0.038 แอมป์ นั้นแสดงว่าเครื่องขยายสัญญาณมีค่าคลาดเคลื่อน (Offset) จริงต้องมีการชดเชยเพื่อให้เท่ากับศูนย์ และเพื่อให้การควบคุมสามารถทำได้ละเอียดยิ่งขึ้นจึงทำการปรับลดอัตราขยายของเครื่องขยายสัญญาณลง

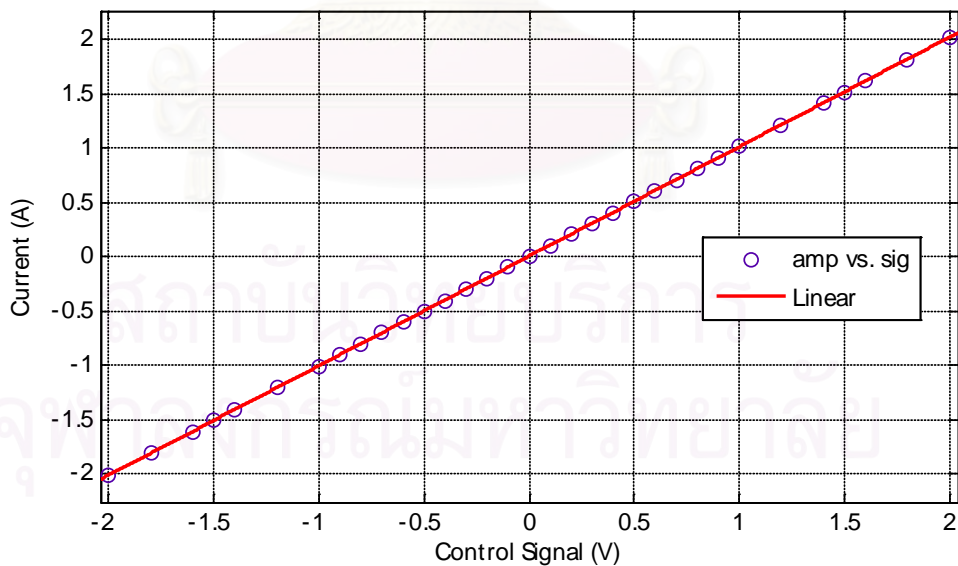


รูปที่ ค-3 ความสัมพันธ์สัญญาณควบคุมและกระแสโดยมอเตอร์หุนหลังลดอัตราขยาย

เมื่อทำการถดถอยแบบเชิงเส้นได้สมการดังนี้

$$y(x) = 1.00748x + 0.0005806 \quad (C.3)$$

และเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการที่ (4.39) จะได้ค่า K_u เท่ากับ 1.00748



รูปที่ ค-4 ความสัมพันธ์สัญญาณควบคุมและกระแสโดยหุยมอเตอร์หลังลดอัตราขยาย

เมื่อทำการถดถอยแบบเชิงเส้นได้สมการดังนี้

$$y(x) = 1.00782x + 0.002485 \quad (C.4)$$

และเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการที่ (4.39) จะได้ค่า K_u เท่ากับ 1.00782

ตารางที่ ค-4 ผลการทดลองหาอัตราขยายเครื่องขยายสัญญาณหลังปรับอัตราขยาย

การทดลองแบบที่	ค่าความชันของกราฟ	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	1.00748	0.0005806
2	1.00782	0.002485
ค่าเฉลี่ย	1.00765	0.000153

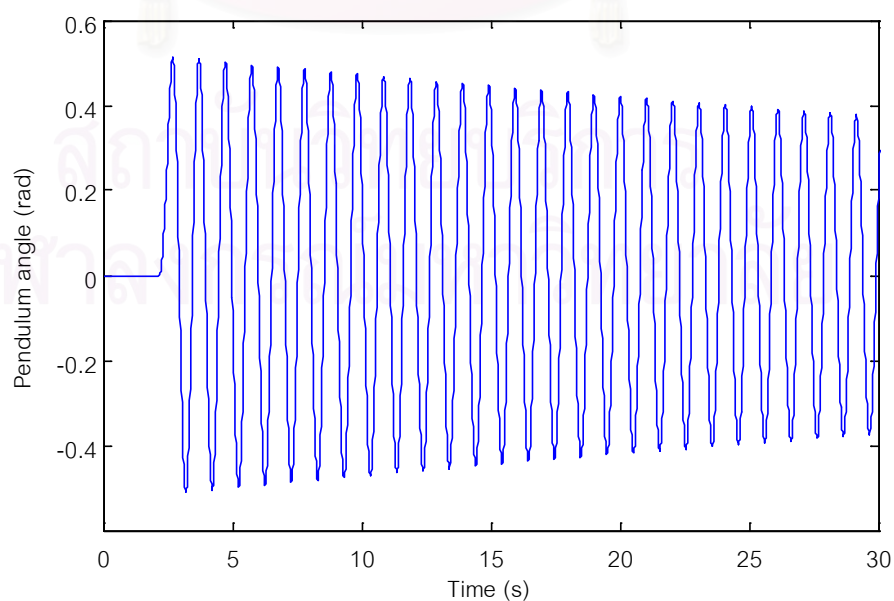
ค.1.4 การหาค่าพารามิเตอร์ของแขนเพนดูลัม

การหาค่าพารามิเตอร์ของส่วนแขนเพนดูลัมจะใช้การจ่ายสัญญาณพัลส์ให้แก่ระบบ ซึ่งในการทดลองหาค่าพารามิเตอร์ส่วนแขนของเพนดูลัมนี้จะใช้สัญญาณทดสอบ ± 1 โวลต์ 0.5 วินาที, ± 1 โวลต์ 1 วินาที, -1 โวลต์ 2 วินาที และ ± 2 โวลต์ 2 วินาที แล้วบันทึกค่าตำแหน่งเทียบกับเวลา เพื่อนำมาหาความเร็วและความเร่งเชิงมุม ได้ผลการทดลอง

จากผลการทดลองด้วยวิธีดังกล่าวได้ค่าเฉลี่ย $J_0 = 0.005674, C_0 = 0.0013647$

ค.1.5 การหาค่าพารามิเตอร์ของแท่งเพนดูลัม

ในการทดลองปล่อยให้แท่งเพนดูลัมแกว่งอย่างอิสระและได้ค่าตำแหน่งเทียบกับเวลา จากนั้นนำค่าตำแหน่งดังกล่าวมาหาความเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุมด้วยวิธีการเชิงเลข

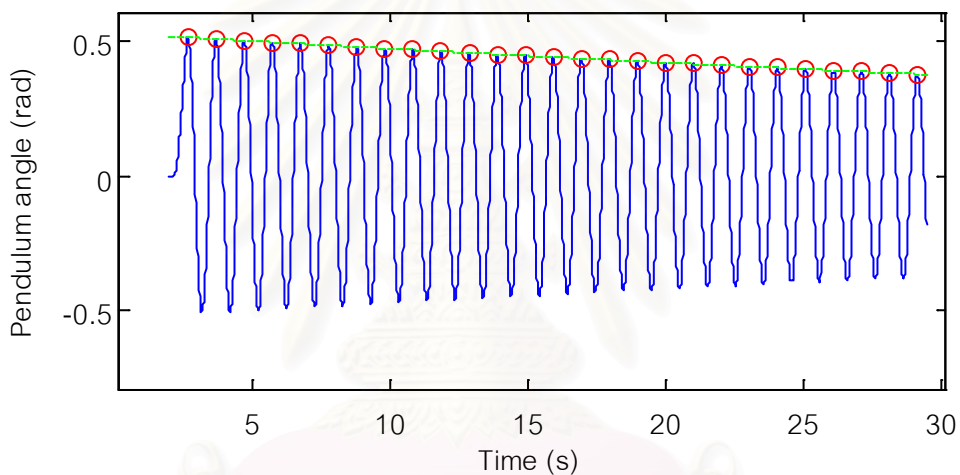


รูปที่ ค-5 การแกว่งอย่างอิสระของแท่งเพนดูลัม

ตารางที่ ค-5 ผลการหาพารามิเตอร์ของแท่งเพนดูลัม

ครั้งที่	J_1	C_1
1	0.00693922	-0.00007434
2	0.00694833	-0.00007846
ค่าเฉลี่ย	0.006943755	-0.0000764

จากข้อมูลตำแหน่งของการปล่อยแท่งเพนดูลัมให้แก่วงอย่างอิสระ เลือกใช้ช่วงข้อมูลในวินาทีที่ 2 ถึง 29 มาวิเคราะห์



รูปที่ ค-6 ตำแหน่งของเพนดูลัมและเส้นโค้งยกกำลังแทนค่าแอมพลิจูดสูงสุด

โดยใช้โปรแกรม MATLAB ทำการหาจุดที่แอมพลิจูดสูงสุดในแต่ละช่วงแล้วแทนด้วยเส้นโค้งยกกำลัง ได้ดังนี้

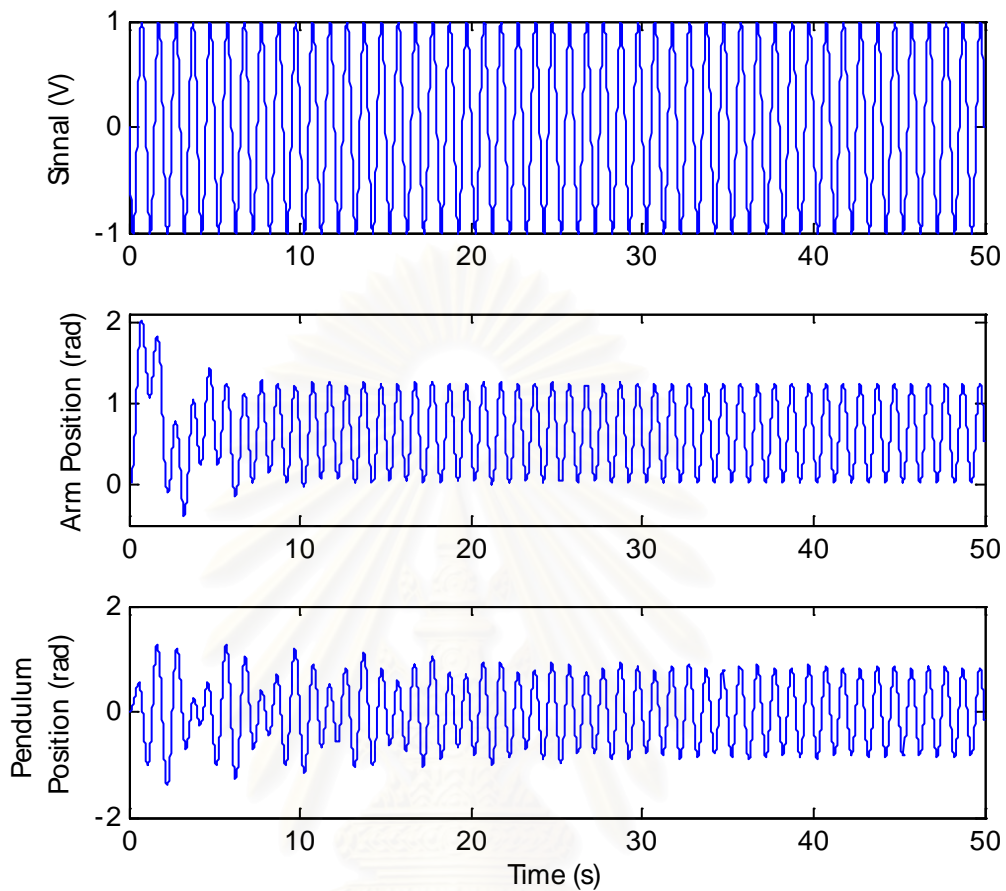
$$y(t) = A^{-Bt} \quad (C.5)$$

โดยที่ $A = 0.5311$, $B = 0.0117$ และ $B = \zeta = \frac{C}{2J}$; $J = 0.006943755$

ได้ $C_1 = 0.00162483867$

ค.1.6 ผลการหาค่าพารามิเตอร์ของเพนดูลัมผกผันทั้งระบบ

ในที่นี้จะยกตัวอย่างการทดลองเพื่อเป็นแนวทางในการทำความเข้าใจ สัญญาณที่ใช้ทดสอบคือ คลื่นไซน์ที่ความถี่ 1 เฮิรท์ซ์ แอมพลิจูด (Amplitude) 1 โวลต์ มุมเฟส π เรเดียน



รูปที่ ค-7 ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณ

พิจารณารูปที่ ค-7 ในส่วนแท่งเพนดูลัมจะเห็นว่าช่วงเริ่มต้นถึงเวลา 30 วินาทีตำแหน่งของแท่งเพนดูลัมยังมีแอมพลิจูดของการแกว่งไม่สม่ำเสมอ และเนื่องจากข้อมูลที่ใช้งานคืออนุพันธ์อันดับหนึ่ง (ความเร็วเชิงมุม) และอนุพันธ์อันดับสอง (ความเร่งเชิงมุม) ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการหาสมการแทนข้อมูลจึงใช้ข้อมูลจากช่วงที่ 30 ถึง 50 วินาที นอกจากนี้ส่วนของแขนเพนดูลัมถึงแม้จะเข้าสู่สถานะคงตัวได้เร็วแต่ช่วงข้อมูลมิได้แกว่งอยู่ระหว่างแกนตำแหน่งเท่ากับศูนย์จึงได้มีการปรับข้อมูลให้สมมาตรกับแกนตำแหน่งเท่ากับศูนย์ ซึ่งไม่มีผลต่อข้อมูลที่ต้องการแสดงตำแหน่งของแขนเพนดูลัมและกราฟแทนผลตอบสนองด้วยฟังก์ชันไซน์

$$f(x) = a1 * \sin(b1 * x + c1) \quad (C.6)$$

และ $a1 = 0.6222$, $b1 = 6.283$, $c1 = -3.002$

$$f(x) = 0.6222 \sin(0.283 - 3.002) \quad (C.7)$$

ทำการหาค่าของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองที่ค่าช่วงเวลาตั้งแต่ 30 ถึง 50 วินาที และแทนค่าทั้งหมดที่ได้ลงในสมการ และด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดจะได้ค่าค่าโมเมนต์ความเฉื่อยและสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของระบบที่ใช้ในการทดลอง ซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก

ตารางที่ ค-6 ผลการหาพารามิเตอร์ทั้งระบบ

J_0	C_0	J_1	C_1
0.0068487	0.0020882	0.0000763	0.0003340

ตารางที่ ค-7 พารามิเตอร์ที่ได้จากการหาด้วยวิธีต่างๆ

	J_0	C_0	J_1	C_1
คำนวณ	0.006701	-	0.00651655	0.0016248
ส่วนแขนเพนดูลัม	0.005674	0.0013647	-	-
ส่วนแท่งเพนดูลัม	-	-	0.006943755	-0.0000764
ทั้งระบบ	0.0068487	0.0020882	0.0000763	0.0003340

จากผลการหาค่าพารามิเตอร์ของระบบเพนดูลัมที่ใช้ในการทดลองจะเห็นได้ว่าในแต่ละวิธีการจะมีค่าที่ได้แตกต่างกัน ในทางหลักการแล้วการทดสอบทั้งระบบเป็นค่าที่เหมาะสมในการนำไปใช้ออกแบบตัวควบคุม แต่จากแบบจำลองคณิตศาสตร์ในสมการที่ (4.32) จะเห็นได้ว่ามีพจน์ที่ไม่คงที่คือตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง ประกอบอยู่กับพารามิเตอร์ที่ต้องการหาค่าพจน์ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง มีค่าต่างกันมากเช่นความเร็วมีค่ามากกว่าความเร่งมากๆ พารามิเตอร์ที่อยู่ในพจน์เดียวกับความเร่งเมื่อคำนวณออกมาได้จะมีความคลาดเคลื่อนสูง และอุปกรณ์บับในวิทยานิพนธ์นี้มีข้อจำกัดในการทดสอบนั้นคือไม่สามารถหมุนได้รอบโดยอิสระ รูปแบบสัญญาณที่ใช้ทดสอบจึงมีข้อจำกัด การที่ทำให้ระบบมีค่าความเร็วและความเร่งต่างๆกัน เพื่อให้ผลทดสอบน่าเชื่อถือจึงมีข้อจำกัดตามไปด้วย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายอธิป วางขุนทด เกิดเมื่อวันที่ 23 มีนาคม พ.ศ. 2525 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จ
การศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะ
วิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2546 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตร
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2548



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย