

โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



นายชัยณรงค์ เสียงไพโรพันธ์

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา


คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-17-7094-4

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

AN AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING FINITE ELEMENT PROGRAM
USING LINEAR STRAIN TRIANGLE



Mr. Chainarong Siangpraiphan

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-17-7094-4

นายชัยณรงค์ เสียงไพรพันธ์ : โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ โดยใช้ชิ้นส่วน
สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น. (AN AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING FINITE
ELEMENT PROGRAM USING LINEAR STRAIN TRIANGLE) อ.ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร.
ทักษิณ เทพชาตรี 107 หน้า . ISBN 974 - 17 - 7094 - 4

การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยที่ให้ความสำคัญคลาดเคลื่อนกระจายออกไปเท่าๆ กัน
ตลอดทั้งโดเมนของปัญหา จะทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดเมื่อเทียบกับโครงข่ายที่มีระดับชั้นความละเอียดเท่ากัน
กล่าวคือความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่กำหนดไว้เร็วขึ้นนั่นเอง การที่จะให้ผลเฉลยเข้าใกล้
ค่าที่ถูกต้องเร็วขึ้นนี้จำเป็นต้องปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายให้มีความต่อเนื่องและมีขนาดชิ้นส่วนที่เหมาะสม ได้มี
ผู้วิจัยเรื่องนี้โดยใช้วิธีการปรับเรียบเชิงมุม ทว่าผลที่ได้ยังไม่น่าพอใจมากนักเนื่องจากชนิดของชิ้นส่วนที่ใช้ในการ
วิเคราะห์มีพฤติกรรมที่ไม่ยืดหยุ่น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้ทำการเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนให้มีพฤติกรรมยืดหยุ่น
มากขึ้นเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ถูกต้องและรวดเร็วขึ้น โดยเปลี่ยนจากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่เป็น
สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น จากตัวอย่างที่ได้ทำการศึกษาพบว่า จำนวนระดับชั้นความละเอียดสามารถ
ลดลงได้ประมาณ 3 – 30 เท่า โดยที่มีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน ในขณะที่เวลาในการคำนวณน้อยลงได้
ประมาณ 3 - 300 เท่า ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการที่นำเสนอสามารถคำนวณหาผลเฉลยของ
ปัญหาในระนาบได้อย่างมีประสิทธิภาพและรวดเร็ว โดยใช้ความพยายามในการเตรียมข้อมูล และเวลาที่ใช้ในการ
การคำนวณน้อยที่สุด

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่อนิติ.....
สาขาวิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ปีการศึกษา.....2547.....

4570279921 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD : FEM / MESH GENERATION / DELAUNAY / MESH IMPROVEMENT / LST

CHAINARONG SIANGPRAIPHAN : AN AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING FINITE
ELEMENT PROGRAM USING LINEAR STRAIN TRIANGLE . THESIS ADVISOR : PROF.
THAKSIN THEPCHATRI, Ph.D. , 107 pp. ISBN 974 – 17 – 7094– 4

Given the same number of degrees of freedom (DOF) for a problem , an analysis employing the finite element method gives the best solution when errors are uniformly distributed over the whole domain. To obtain better solutions with minimum effort of data preparation and less computation time , an automatic adaptive remeshing technique is being developed. To date , a mesh improvement procedure , angle – based smoothing technique has already been incorporated into a finite element analysis program. Numerical analysis with benchmark plane stress problems utilizing such approach showed satisfactory results. However, due to the use of the constant strain triangular element (CST) , the computation time required is still ineffective. In this research, a better element type , the linear strain triangular element (LST) is used. It has been found that , from the selected examples having the same constraints , the LST approach can reduce the total DOFs by approximately 3-30 times. The calculation time , as a consequence, can be reduced by about 3-300 times. Thus , it has been shown that the proposed method can quickly and effectively solve a plane problem with a minimum effort of data preparation and computation time.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department.....Civil.Engineering..... Student's signature.....

Field of study.....Civil.Engineering..... Advisor's signature.....

Academic year...2004.....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ทักษิณ เทพชาตรี อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้สละเวลาอันมีค่าในการให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ รวมทั้งตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ที่เกิดขึ้น ตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย รวมทั้งขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เรจินดา รัชตโพธิ์ และ รองศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสนจันทร์ศิโยย ที่ได้กรุณาให้ความสนใจในการเป็นคณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์ นอกจากนี้วิทยานิพนธ์คงจะไม่สำเร็จลงได้ หากปราศจากความอนุเคราะห์จาก คุณเทอดเกียรติ จันทวีชรากร คุณรัฐพล สุวรรณพฤษ และ คุณสุรชาญ แซ่ลี ที่คอยแนะนำและให้คำปรึกษาอันเป็นประโยชน์

ท้ายที่สุด ประโยชน์อันพึงได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบแต่ บิดา มารดา ครูบาอาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน รวมทั้งสมาชิกในครอบครัวซึ่งให้กำลังใจเสมอมา



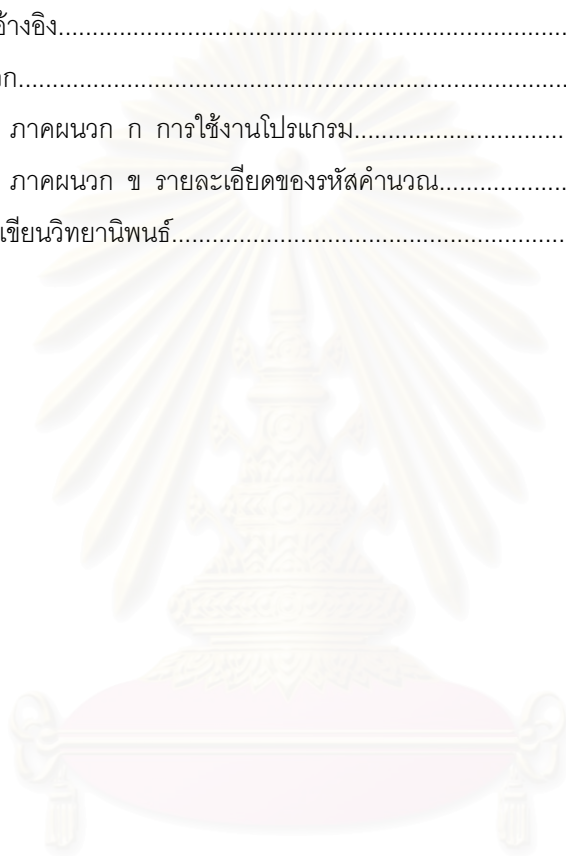
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

| | |
|--|----|
| บทคัดย่อภาษาไทย..... | ง |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..... | จ |
| กิตติกรรมประกาศ..... | ฉ |
| สารบัญ..... | ช |
| สารบัญภาพ..... | ฌ |
| สารบัญตาราง..... | ท |
| | |
| บทที่ 1 บทนำ..... | 1 |
| 1.1 ความนำ..... | 1 |
| 1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... | 2 |
| 1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย..... | 6 |
| 1.4 ขอบเขตการศึกษา..... | 7 |
| | |
| บทที่ 2 แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย..... | 9 |
| 2.1 ความนำ..... | 9 |
| 2.2 การประมาณค่าคลาดเคลื่อน..... | 9 |
| 2.3 การประมาณค่าผลเฉลี่ยจากผลของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์..... | 11 |
| 2.4 การประมาณขนาดของชิ้นส่วน..... | 15 |
| 2.5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข..... | 16 |
| 2.6 สถิติในสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น..... | 18 |
| | |
| บทที่ 3 การพัฒนาโปรแกรม..... | 24 |
| 3.1 ภาษาคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในโปรแกรม..... | 24 |
| 3.2 การเลือกใช้โครงสร้างข้อมูล..... | 25 |
| 3.3 ชนิดของข้อมูล..... | 26 |
| 3.4 โครงสร้างและลำดับการทำงานของโปรแกรม..... | 29 |
| 3.5 การแสดงผล..... | 30 |
| | |
| บทที่ 4 ตัวอย่างการวิเคราะห์ผล..... | 35 |
| 4.1 ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง..... | 35 |
| 4.2 ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด..... | 38 |
| 4.3 ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายคานอิสระ..... | 41 |
| 4.4 ตัวอย่างที่ 4 ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด..... | 43 |

| | |
|--|-----|
| บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ..... | 98 |
| 5.1 สรุปผลการวิจัย..... | 98 |
| 5.2 ข้อเสนอแนะอื่นๆ..... | 99 |
| รายการอ้างอิง..... | 100 |
| ภาคผนวก..... | 103 |
| ภาคผนวก ก การใช้งานโปรแกรม..... | 104 |
| ภาคผนวก ข รายละเอียดของรหัสคำนวณ..... | 106 |
| ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์..... | 107 |



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

| | หน้า |
|--------------|--|
| รูปที่ 1.2.1 | แสดงโครงชิ้นส่วนของปัญหาที่สร้างโดยวิธีต้นไม้สี่ภาค..... 8 |
| รูปที่ 1.2.2 | แสดงโครงชิ้นส่วนของปัญหาที่สร้างโดยวิธีการสร้างฟรอนท์คี่บหน้า..... 8 |
| รูปที่ 2.1.1 | แผนภูมิสายงานของกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ..... 20 |
| รูปที่ 2.3.1 | ตำแหน่งเกาส์ในหย่อมของจุดต่อที่ต้องการประมาณค่า..... 21 |
| รูปที่ 2.3.2 | การประมาณค่าคำตอบจากตำแหน่งเกาส์ในชิ้นส่วนเชิงเส้น 1 มิติ..... 21 |
| รูปที่ 2.3.3 | ลักษณะของชิ้นส่วนบริเวณขอบของปัญหา..... 22 |
| รูปที่ 2.3.4 | ลักษณะของหย่อมที่ใช้ในการประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อที่ขอบ..... 22 |
| รูปที่ 2.3.5 | ลักษณะของจุดที่หาหย่อมภายในยาก..... 22 |
| รูปที่ 2.5.1 | การอินทิเกรตแบบเกาส์จุดเดียว..... 23 |
| รูปที่ 2.6.1 | ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น..... 23 |
| รูปที่ 2.6.2 | ตำแหน่งจุดเกาส์ชุดที่ 1 และ ชุดที่ 2..... 23 |
| รูปที่ 3.2.1 | โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ..... 31 |
| รูปที่ 3.2.2 | โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงค์ลิสต์..... 31 |
| รูปที่ 3.2.3 | การจัดเก็บข้อมูลในโครงสร้างข้อมูล ADT..... 32 |
| รูปที่ 3.3.1 | การจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์..... 33 |
| รูปที่ 3.4.1 | โครงสร้างการทำงานของโปรแกรมหลัก..... 34 |
| รูปที่ 4.1.1 | ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงและแบบจำลองการวิเคราะห์..... 46 |
| รูปที่ 4.1.2 | โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงโดยใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้ วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... 47 |
| รูปที่ 4.1.3 | การกระจายความคลาดเคลื่อนของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงโดยใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้ วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... 48 |
| รูปที่ 4.1.4 | การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงโดยใช้ ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน โดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... 49 |
| รูปที่ 4.1.5 | การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงโดยใช้ ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน โดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... 50 |
| รูปที่ 4.1.6 | การกระจายหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงโดยใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้ วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... 51 |

| | | |
|---------------|--|----|
| รูปที่ 4.1.7 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน โดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 52 |
| รูปที่ 4.1.8 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน โดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 53 |
| รูปที่ 4.1.9 | ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน โดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 54 |
| รูปที่ 4.1.10 | การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหา แผ่นบางรับแรงดึงในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 55 |
| รูปที่ 4.1.11 | ค่าหน่วยในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 56 |
| รูปที่ 4.1.12 | ค่าหน่วยในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 57 |
| รูปที่ 4.1.13 | ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 58 |
| รูปที่ 4.2.1 | ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์..... | 60 |
| รูปที่ 4.2.2 | โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้ วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 61 |
| รูปที่ 4.2.3 | การกระจายความคลาดเคลื่อนของปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้ วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 62 |
| รูปที่ 4.2.4 | การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้ วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 63 |
| รูปที่ 4.2.5 | การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้ วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 64 |

| | | |
|---------------|--|----|
| รูปที่ 4.2.6 | การกระจายหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 65 |
| รูปที่ 4.2.7 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 66 |
| รูปที่ 4.2.8 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 67 |
| รูปที่ 4.2.9 | ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบางโดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 68 |
| รูปที่ 4.2.10 | การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาแผ่นวงกลมบางในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 69 |
| รูปที่ 4.2.11 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบางในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 70 |
| รูปที่ 4.2.12 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบางในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 71 |
| รูปที่ 4.2.13 | ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบางในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 72 |
| รูปที่ 4.2.14 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AC ในปัญหาแผ่นวงกลมบางในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 73 |
| รูปที่ 4.2.15 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AC ในปัญหาแผ่นวงกลมบางในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 74 |
| รูปที่ 4.2.16 | ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AC ในปัญหาแผ่นวงกลมบางในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 75 |
| รูปที่ 4.3.1 | ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระและแบบจำลองการวิเคราะห์..... | 77 |
| รูปที่ 4.3.2 | ผลการวิเคราะห์ ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายที่ 1 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 78 |
| รูปที่ 4.3.3 | ค่าหน่วยแรง บริเวณขอบล่างของคาน ในโครงข่ายที่ 1 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 79 |

| | | |
|--------------|---|----|
| รูปที่ 4.3.4 | การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานยื่น รับแรงกระทำที่ปลายอิสระในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 80 |
| รูปที่ 4.3.5 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบล่าง ในปัญหาคานยื่น รับแรงกระทำที่ปลายอิสระในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 81 |
| รูปที่ 4.3.6 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่าง ในปัญหาคานยื่น รับแรงกระทำที่ปลายอิสระในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 82 |
| รูปที่ 4.3.7 | ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบล่าง ในปัญหาคานยื่น รับแรงกระทำที่ปลายอิสระในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 83 |
| รูปที่ 4.3.8 | โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใน ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ที่เพิ่มความละเอียดของโครงข่ายเริ่มต้น และ ค่าหน่วยแรงบริเวณขอบล่างของคาน..... | 84 |
| รูปที่ 4.4.1 | ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์.... | 86 |
| รูปที่ 4.4.2 | โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพ ชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 87 |
| รูปที่ 4.4.3 | ผลการวิเคราะห์ ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 8 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพ ชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 88 |
| รูปที่ 4.4.4 | ค่าหน่วย ตามขอบบนของคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 8 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพ ชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม..... | 89 |
| รูปที่ 4.4.5 | การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานช่วงเดียว มีช่องเปิดในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 90 |
| รูปที่ 4.4.6 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบบน ในปัญหาคานช่วงเดียว มีช่องเปิดในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 91 |
| รูปที่ 4.4.7 | ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบบน ในปัญหาคานช่วงเดียว มีช่องเปิดในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 92 |
| รูปที่ 4.4.8 | ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบบน ในปัญหาคานช่วงเดียว มีช่องเปิดในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ..... | 93 |
| รูปที่ 4.4.9 | โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS..... | 94 |

| | | |
|---------------|--|-----|
| รูปที่ 4.4.10 | ค่าหน่วยแรง ตามขอบบนของคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 5 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS..... | 95 |
| รูปที่ 4.4.11 | โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใน ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ที่เพิ่มความละเอียดของโครงข่ายเริ่มต้น และ ค่าหน่วยแรงบริเวณขอบบนของคาน..... | 96 |
| รูปที่ 5.2.1 | ตำแหน่งที่ควรเป็นของการเพิ่มจุดต่อ..... | 99 |
| รูปที่ ผ.ก.1 | ตัวอย่างเพิ่มนำเข้าข้อมูล..... | 105 |



สารบัญตาราง

หน้า

| | | |
|----------------|--|----|
| ตารางที่ 4.1.1 | เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง..... | 59 |
| ตารางที่ 4.2.1 | เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง..... | 76 |
| ตารางที่ 4.3.1 | เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ... | 85 |
| ตารางที่ 4.4.1 | เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด..... | 97 |



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความนำ

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นการวิเคราะห์โดยสมมติว่าปัญหาที่ต่อเนื่องกัน มีลักษณะเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ไม่ต่อเนื่องกัน (discretization) และใช้สมการคณิตศาสตร์จำลองพฤติกรรมของชิ้นส่วนเหล่านั้น รวมทั้งการวิเคราะห์พฤติกรรมของชิ้นส่วนทั้งหมดร่วมกัน เราสามารถหาค่าประมาณของผลเฉลยของปัญหาต่อเนื่องได้ โดยความแม่นยำของผลเฉลยนั้นขึ้นอยู่กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ลักษณะของชิ้นส่วนที่นำมาจำลองปัญหา และขนาดของชิ้นส่วนย่อยๆ ที่ประกอบกัน ยิ่งแบบจำลองคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนมากเท่าไร ความแม่นยำในการเป็นตัวแทนของชิ้นส่วนก็จะดีมากขึ้นเท่านั้น ในขณะที่การเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนซึ่งเป็นการลดขนาดของช่วงการประมาณ ก็จะลดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณปัญหาต่อเนื่องด้วยชิ้นส่วน

ในการเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลย ทำได้โดยการเพิ่มภาวะเชิงซ้อนของสมการคณิตศาสตร์ เพื่อให้สอดคล้องกับพฤติกรรมมากขึ้น หรือโดยการเพิ่มจำนวนของชิ้นส่วน จากทั้ง 2 วิธีนี้ การเพิ่มภาวะเชิงซ้อนของสมการคณิตศาสตร์นั้นทำได้ยาก ทั้งในด้านการวิเคราะห์หาสมการคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม และการนำมาเขียนรหัสคำนวณ ดังนั้นจึงควรใช้สมการคณิตศาสตร์ที่สลับซับซ้อนเฉพาะในปัญหาที่ต้องการความแม่นยำของคำตอบมาก ๆ เท่านั้น ในโครงการทั่ว ๆ ไปนิยมใช้สมการคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนมากนัก แต่ใช้ชิ้นส่วนจำนวนมากแทน

ในปัญหาหนึ่ง ๆ จะมีค่าของผลเฉลยแตกต่างกันไปตามโดเมน (domain) ของปัญหา ในบริเวณใดที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่อพื้นที่มาก ก็จะมีผลเฉลยที่คลาดเคลื่อนอยู่มากเช่นกัน ดังนั้นในการที่จะวิเคราะห์ปัญหาให้เกิดประสิทธิภาพที่สุด จำเป็นต้องกระจายความคลาดเคลื่อนเหล่านี้ ให้มีค่าใกล้เคียงกันตลอดทั้งโดเมนของปัญหาซึ่งทำได้โดยการใช้ชิ้นส่วนขนาดเหมาะสมกับพื้นที่ของปัญหา กล่าวคือใช้ชิ้นส่วนขนาดเล็กในพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมากและใช้ชิ้นส่วนขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการคลาดเคลื่อนน้อย การที่จะสร้างให้ได้ดังที่กล่าวมานี้ จำเป็นต้องมีการเตรียมข้อมูลและทำการคำนวณหลายรอบ ซึ่งต้องใช้แรงงานและเวลามาก

กระบวนการสร้างและปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ จึงเข้ามามีบทบาทในงานวิเคราะห์ปัญหาทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่รูปร่างของปัญหาที่มีความซับซ้อนและมีขนาดใหญ่ ซึ่งจะประมาณค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลย และทำการเพิ่มชิ้นส่วนในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมากให้โดยอัตโนมัติ ทำให้ลดปริมาณการเตรียมข้อมูลลงได้มาก อย่างไรก็ตาม กระบวนการสร้างชิ้นส่วนอัตโนมัติเหล่านั้นอาจทำให้ผลเฉลยของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์เกิดความคลาดเคลื่อนจากที่ควรจะเป็นเมื่อพิจารณาจากระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ที่เท่ากันซึ่งจะมีผลต่อการคำนวณในรอบถัดไปหลังจากผ่านเข้าสู่กระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วน ทำให้ผลเฉลยที่ได้ลู่เข้า

มูลค่าแน่นอนตรงได้เข้ามาสูง สาเหตุสำคัญของปัญหานี้คือ ชิ้นส่วนที่ได้จากกระบวนการสร้างชิ้นส่วนอัตโนมัติมีรูปร่างบิดเบี้ยว หรือไม่มีความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วนที่ติดกัน ทำให้ระบบสมการของปัญหาอยู่ในภาวะไม่ปกติ (ill-conditioned)

ลักษณะบิดเบี้ยวของชิ้นส่วนที่เกิดขึ้นในระหว่างการสร้างชิ้นส่วนของกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนโดยอัตโนมัตินั้น อาจมีสาเหตุมาจากปัจจัยดังต่อไปนี้

- 1) ลักษณะของรูปร่างหรือสัณฐานของโดเมน เช่น บริเวณที่มีมุมแหลม พื้นที่ที่มีขนาดเล็ก รูปร่างขนาดเล็ก และบริเวณที่มีส่วนโค้งมาก
- 2) ขนาดของชิ้นส่วน เพราะโดยปกติแล้วโครงข่ายโดเมนของปัญหาที่มีลักษณะหยาบมาก ๆ แต่ละชิ้นส่วนจะมีขนาดใหญ่ มีผลให้ลักษณะรูปร่างของชิ้นส่วนเกิดการบิดเบี้ยวได้
- 3) ความผิดพลาดที่เกิดจากการออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm) ในกระบวนการสร้างและปรับขนาดชิ้นส่วน

จากสาเหตุดังกล่าวข้างต้นพบว่า สัณฐานของโดเมน เป็นสาเหตุที่ไม่อาจหลีกเลี่ยงได้เพราะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ เช่นเดียวกับสาเหตุที่สอง แต่ขนาดของชิ้นส่วนที่หยาบนั้นสามารถปรับแก้ได้เมื่อเข้าสู่กระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วน ดังนั้นความผิดพลาดที่เกิดจากการออกแบบขั้นตอนวิธีจึงเป็นสาเหตุเดียวที่สามารถป้องกันไม่ให้เกิดการบิดเบี้ยวของรูปร่างได้

อย่างไรก็ตาม การคิดหากระบวนการสร้างชิ้นส่วนอัตโนมัติเพื่อให้ได้โครงข่ายชิ้นส่วนที่ประกอบกันทั้งระบบแล้วมีขนาดและรูปร่างที่ดีที่สุด โดยไม่ต้องเพิ่มกระบวนการบางอย่างภายหลังการสร้างชิ้นส่วนเพื่อปรับปรุงคุณภาพโดยรวมของชิ้นส่วนทั้งโดเมนนั้นก็ยังคงเป็นสิ่งที่ยากอยู่ดี กระบวนการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายชิ้นส่วนจึงเข้ามามีบทบาทอย่างมากหลังจากเสร็จสิ้นกระบวนการสร้างชิ้นส่วน เพราะการจัดวางตำแหน่งของจุดต่อที่เหมาะสมจะทำให้ได้ชิ้นส่วนที่มีรูปร่างดี มีความต่อเนื่องทั่วทั้งโครงข่าย การประมาณค่าความคลาดเคลื่อนจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความถูกต้องมากขึ้น และมีการกระจายความคลาดเคลื่อนออกไปเท่า ๆ กันตลอดทั้งโดเมนของปัญหา ทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดเมื่อเทียบกับโครงข่ายที่มีระดับชั้นความละเอียดเท่ากัน

1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การปรับขนาดชิ้นส่วนในการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น มีขั้นตอนที่สำคัญคือการหาความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย เพื่อลดขนาดของชิ้นส่วนในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมาก วิธีดั้งเดิมซึ่งสิ้นเปลือง จะทำโดยการเปรียบเทียบผลเฉลยจากการวิเคราะห์ซ้ำเมื่อมีการลดขนาดชิ้นส่วนตลอดทั้งโดเมนของปัญหา แล้วจึงปรับขนาดของชิ้นส่วนตามค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากการเปรียบเทียบผลเฉลยดังกล่าว

ในช่วงปี 1975 - 1986 Babuska [1,2] และคณะ ได้คิดค้นและพัฒนาการประมาณค่าคลาดเคลื่อน โดยวิธีเศษตกค้างของแรง ซึ่งเป็นการประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการอินทิเกรตค่ากำลังสองของเศษตกค้างของหน่วยแรงในสมการอนุพันธ์ และกำลังสองของผลต่างของหน่วยแรงระหว่างชิ้นส่วน วิธีของ Babuska นี้ ต้องใช้คณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากในการพิสูจน์และคำนวณค่าคลาดเคลื่อน จึงไม่สะดวกในการใช้งาน

ต่อมาในปี 1987 Zienkiewicz [3,4] ซึ่งเป็นหนึ่งในคณะผู้ร่วมงานของ Babuska ได้ร่วมงานกับ Zue พัฒนาวิธีการประมาณค่าหน่วยแรงที่ดีขึ้นจากหน่วยแรงที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ และประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการเปรียบเทียบหน่วยแรงทั้งสอง หลักการของวิธีการนี้คือ ค่าหน่วยแรงที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีค่าไม่ต่อเนื่องกันระหว่างชิ้นส่วน ดังนั้นถ้ามีการปรับให้หน่วยแรงมีความต่อเนื่องกันก็จะได้คำตอบที่ดีขึ้น การปรับค่าใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด (least square) วิธีการนี้ใช้หลักการง่าย ๆ และมีการคำนวณที่ไม่ยุ่งยากนัก เหมาะสำหรับการเขียนรหัสคำนวณ อย่างไรก็ตามค่าประมาณของหน่วยแรงที่ได้จากวิธีนี้มีความถูกต้องน้อย และมีการลู่เข้าสู่คำตอบช้าโดยเฉพาะในแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มีระดับชั้นพหุนามสูง

ปี 1990 Zienkiewicz และ Zue [5,6,7,8] ยังคงร่วมกันพัฒนาการประมาณค่าหน่วยแรงให้มีความถูกต้องมากขึ้นและมีอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบเร็วขึ้น โดยใช้หลักการของจุดลู่เข้ายิ่งยวด (superconvergent point) หรือจุดเกาส์ (Gauss point) ในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งมีค่าหน่วยแรงที่มีความแม่นยำกว่าที่จุดอื่น ๆ และมีอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบสูงกว่าระดับชั้นของพหุนามในสมการคณิตศาสตร์ 1 ระดับ ($O(h^{p+1})$) โดยวิธีนี้การค่าประมาณหน่วยแรง ณ จุดใด ๆ ก็ได้จากการประมาณจากหน่วยแรง ณ จุดเกาส์รอบ ๆ จุดที่ต้องการประมาณนั้นโดยระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด วิธีนี้มีหลักการที่สามารถเข้าใจง่ายและมีความแม่นยำมากพอสมควร ประกอบกับใช้การคำนวณไม่มากนักจึงเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายจนกระทั่งถึงปัจจุบัน

ในระยะหลัง ๆ มีนักวิจัยหลายกลุ่มพยายามที่จะพัฒนาวิธีการของ Zienkiewicz และ Zue ให้ประมาณค่าหน่วยแรงได้แม่นยำขึ้นโดยเฉพาะในบริเวณขอบเขตของปัญหา โดยการเพิ่มข้อกำหนดในการเพิ่มความสมดุลงของหน่วยแรงเพิ่มเติมเข้าไปในวิธีของ Zienkiewicz และ Zue เช่น Blacker และ Belyschko [9] ได้เพิ่มความสมดุลงของแรงเชิงปริมาตร (body force) และแรงเชิงผิว (traction) ในขณะที่ Wiberg และคณะ [10,11] นอกจากเพิ่มพจน์ของแรงทั้งสองนี้แล้ว ยังเพิ่มข้อกำหนดในเรื่องเงื่อนไขค่าขอบเขตด้านการเคลื่อนที่ หรือเงื่อนไขค่าขอบเขตจำเป็น (essential boundary conditions) เข้าไปในสมการด้วย ต่อมา Lee และคณะ [12] ได้เพิ่มความสมดุลงของแรงในลักษณะคล้ายกับ Blacker และ Belyschko แต่อยู่ในรูปของพลังงานเสมือน จึงสามารถนำมาประยุกต์กับชิ้นส่วนที่มีลักษณะโค้งเช่นโครงสร้างเปลือกบางได้ อย่างไรก็ตาม ในการเพิ่มพจน์ของความสมดุลงนี้ ถึงแม้ว่าจะให้คำตอบที่มีความแม่นยำมากขึ้น แต่ส่งผลให้มีการคำนวณมากขึ้นตามไปด้วยเช่นกัน

นอกจากการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน ยังมีขั้นตอนที่สำคัญอีกขั้นตอนหนึ่งในกระบวนการปรับขนาดของชิ้นส่วนคือการสร้างชิ้นส่วนโดยอัตโนมัติ (automatic mesh generation) กระบวนการนี้สามารถแบ่งออกเป็นประเภทใหญ่ ๆ ได้ 2 ประเภทคือ ประเภทแรกมุ่งที่จะลดการเตรียมข้อมูลโดยมนุษย์แต่เพียงอย่าง

เดียว ไม่ได้ต้องการเพื่อใช้ในกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนแต่อย่างใด การสร้างขึ้นส่วนจึงนิยมใช้วิธีแปลงรูปโดเมนของปัญหาให้มาอยู่ในรูปเรขาคณิตอย่างง่าย [13] จากนั้นสร้างขึ้นส่วนในรูปอย่างง่ายนี้ แล้วจึงแปลงกลับไปอยู่ในสภาพเริ่มต้น วิธีนี้มีข้อดีคือ สามารถสร้างขึ้นส่วนที่มีรูปร่างสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมก็ได้ และได้ขึ้นส่วนที่มีรูปร่างค่อนข้างดีมีขนาดต่อเนื่องกัน แต่มีข้อเสียคือใช้ได้กับโดเมนที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนมากนัก และไม่สามารถสร้างขึ้นส่วนให้มีขนาดแตกต่างกันออกไปในแต่ละบริเวณตามที่กำหนดให้ จึงไม่เหมาะสมอย่างยิ่งที่จะนำมาใช้ในกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วน

สำหรับประเภทที่ 2 เป็นการสร้างขึ้นส่วนโดยการเพิ่มขึ้นส่วนลงในโดเมนโดยตรง จึงสามารถกระจายขนาดของขึ้นส่วนให้แตกต่างกันออกไปในแต่ละพื้นที่ได้ ดังจะกล่าวต่อไป

ต้นไม้แปดภาค (octree) [14] หรือ ต้นไม้สี่ภาค (quadtree) เป็นการสร้างขึ้นส่วนโดยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นภาค 8 ภาค หรือ 4 ภาค ตามแต่มิติของปัญหา และในแต่ละภาคเหล่านั้นก็จะทำการแบ่งเป็นภาคย่อยต่อไปเป็นลำดับ จนกระทั่งมีขนาดเท่ากับขนาดของขึ้นส่วนที่เราต้องการ จากนั้นจะเชื่อมขึ้นส่วนเหล่านั้นให้มีความต่อเนื่องและสอดคล้องกับขอบเขตของปัญหา รูปที่ 1.2.1 แสดงโครงข่ายขึ้นส่วนของปัญหาที่สร้างโดยวิธีต้นไม้สี่ภาค วิธีนี้ค่อนข้างยุ่งยากในการสร้างความต่อเนื่องระหว่างขึ้นส่วนและได้ขึ้นส่วนที่มีรูปร่างไม่ค่อยดี จึงไม่เป็นที่นิยมใช้

วิธีต่อมาคือ วิธีการสร้างฟรอนท์ที่คืบหน้า (advancing front technique) [6,15,16,17] เป็นการสร้างขึ้นส่วนโดยการเชื่อมขอบเขตของปัญหาทั้งหมดด้วยเส้น ๆ หนึ่งเรียกว่าฟรอนท์ (front) จากนั้นสร้างขึ้นส่วนจากขอบเขตเข้ามาพร้อมทั้งปรับขนาดของฟรอนท์ใหม่ โดยการกันขึ้นส่วนที่เพิ่งสร้างให้ออกไปนอกฟรอนท์ทำดังนี้เข้าไปจนกระทั่งหมดก็จะได้ขึ้นส่วนเต็มทั้งพื้นที่ รูปที่ 1.2.2 แสดงโครงข่ายขึ้นส่วนของปัญหาที่สร้างโดยวิธีการสร้างฟรอนท์ที่คืบหน้า การกำหนดขนาดของขึ้นส่วนในวิธีนี้ทำได้ในขณะที่กำลังสร้างขึ้นส่วนนั้น ๆ โดยการตรวจสอบจากขนาดที่ได้กำหนดไว้ก่อนในบริเวณนั้น วิธีนี้มีข้อดีคือ เนื่องจากขึ้นส่วนเริ่มจากขอบเขตและมีการสร้างออกไปทีละขึ้นส่วนจึงมั่นใจได้ว่าขึ้นส่วนจะไม่ออกนอกขอบเขตหรือซ้อนทับกัน นอกจากนี้ยังสามารถพัฒนาต่อไปเพื่อสร้างขึ้นส่วนชนิดสี่เหลี่ยมได้ โดยการกำหนดจำนวนขึ้นส่วนที่ขอบเขตและรูปร่างทางเรขาคณิตของขึ้นส่วนอย่างเคร่งครัด

การตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอน (delaunay triangulation) [18,19,20,21] เป็นวิธีเก่าแก่ที่มีจุดประสงค์เพื่อเชื่อมจุดต่อต่าง ๆ เข้าด้วยกันเป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวนมากที่ไม่ซ้อนทับกันเท่านั้น จึงไม่สามารถรับประกันได้ว่าขึ้นส่วนที่สร้างขึ้นจะไม่ออกนอกขอบเขตของปัญหา ในระยะหลังมีผู้พัฒนาวิธีการต่าง ๆ ขึ้นมากมายจนกระทั่งสามารถกำหนดได้ว่าให้สร้างขึ้นส่วนขึ้นเฉพาะภายในขอบเขตเท่านั้น การกำหนดขนาดของขึ้นส่วนขึ้นอยู่กับจุดที่สร้างขึ้นโดยกำหนดระยะห่างของจุดตามความต้องการในแต่ละพื้นที่นั้น วิธีนี้มีข้อดีคือ ตำแหน่ง ขนาด และรูปร่างของขึ้นส่วนขึ้นอยู่กับวิธีการสร้างจุดที่แยกออกมาต่างหาก ในระยะหลังสามารถพัฒนาให้สร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างดีมากตลอดทั้งโดเมน มีการกระจายขนาดของขึ้นส่วนตามที่ต้องการและใช้เวลาในการสร้างน้อย ข้อเสียของวิธีนี้คือไม่สามารถสร้างขึ้นส่วนสี่เหลี่ยมได้โดยตรง ต้อง

ใช้การแปลงรูปจากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอีกทีหนึ่ง [22]

จากขั้นตอนต่าง ๆ ทั้งวิธีหาความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลย และการสร้างชิ้นส่วนอัตโนมัติเพื่อใช้ในกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วน เทอดเกียรติ [23] ได้พัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ โดยเลือกโครงข่ายสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ (Constant Strain Triangle : CST) และใช้วิธีการประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการเปรียบเทียบผลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับค่าผลเฉลยที่ได้จากวิธีการฟื้นตัวเป็นหย่อม (patch recovery) [5,6,7,8] ใช้วิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนเนโดยวิธีฟรอนท์คืบหน้าตามแนวทางของ Karamete , Tokdemir , Ger [24] และใช้วิธีการสร้างจุดตามแนวทางของ Weatherill . Hassan [25] และปรับขนาดชิ้นส่วนโดยการเพิ่มจุดลงในบริเวณพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก ซึ่งสามารถวิเคราะห์ผลได้ในระดับหนึ่งและต้องใช้จำนวนรอบในการปรับขนาดชิ้นส่วนมาก ทั้งนี้เพราะว่าหากความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากรอบปัจจุบันมีค่ามากกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้เกินกว่า 2 เท่า จะกำหนดเป้าหมายของความคลาดเคลื่อนในรอบถัดไปมีขนาดเท่ากับค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนในปัจจุบันและค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ เพื่อหลีกเลี่ยงการเพิ่มจุดต่อในบริเวณที่ไม่จำเป็น ทำให้อัตราการเข้าสู่ของผลเฉลยค่อนข้างช้า โดย เทอดเกียรติ ได้ยกตัวอย่างการวิเคราะห์หัตถ์ด้วยการปรับขนาดชิ้นส่วนเข้าสู่ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้โดยตรง ผลการวิเคราะห์ที่ได้มีการเข้าสู่ของผลเฉลยที่เร็วขึ้น แต่ในโครงข่ายสุดท้ายจะมีการกระจายของชิ้นส่วนที่ไม่ค่อยต่อเนื่องมากนัก ทำให้การคำนวณค่าหน่วยแรงและการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนที่จุดต่อในบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่องยังคงมีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าบริเวณข้างเคียง

รัฐพล [26] ได้ทำการปรับปรุงโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ ของ เทอดเกียรติ เพื่อลดจำนวนรอบของการปรับขนาดชิ้นส่วนลง โดยใช้จำนวนจุดต่อและชิ้นส่วนที่เหมาะสมภายใต้ความคลาดเคลื่อนที่กำหนดโดย มุ่งพัฒนาโดยการปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนภายในโครงข่ายให้มีรูปร่างดีและมีขนาดต่อเนื่องกัน ซึ่งใช้วิธีการผ่อนปรนโครงข่าย (mesh relaxation) ร่วมกับ การปรับเรียบมุม (angle-based smoothing algorithm) ซึ่งทำให้โครงข่ายที่ได้มีรูปร่างดีขึ้นและมีขนาดต่อเนื่องกันมากขึ้นซึ่งจะทำให้การประมาณค่าความคลาดเคลื่อนจากจุดเกาส์มีความถูกต้องมากขึ้น และมีการกระจายความคลาดเคลื่อนเท่ากันทั่วทั้งโครงข่าย

สุรชาญ [27] ได้ทำการปรับปรุงโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ ของ เทอดเกียรติ เพื่อลดเวลาของการปรับขนาดชิ้นส่วนลงโดยใช้การเปลี่ยนวิธีการสร้างชิ้นส่วน ซึ่งเทอดเกียรติใช้วิธีการสร้างชิ้นส่วนจากที่ใช้วิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนเนโดยวิธีฟรอนท์คืบหน้าเพียงอย่างเดียว ซึ่งในการสร้างชิ้นส่วนแต่ละรอบจะต้องลบชิ้นส่วนที่มีอยู่เดิมในรอบก่อนหน้าออกทั้งหมด ทำให้ต้องใช้เวลามากในการสร้างชิ้นส่วนแต่ละรอบ สุรชาญจึงนำวิธีการสร้างชิ้นส่วนจากที่ใช้วิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนเนโดยวิธีฟรอนท์คืบหน้าให้ทำงานร่วมกับการสร้างชิ้นส่วนโดยวิธีแลกเปลี่ยน (swap techniques) ซึ่งในการสร้างชิ้นส่วนรอบต่อไปจะทำการเพิ่มจุดต่อเข้าไปในโครงข่ายที่มีอยู่ แล้วทำการเชื่อมต่อด้านขึ้นใหม่ระหว่างจุดที่เพิ่มเข้าไปกับจุดของสามเหลี่ยมเดอลอนเนนั้น จากนั้นจึงใช้คุณสมบัติของมุมในสามเหลี่ยมและสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอนเน ทำการตรวจสอบสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นใหม่รวมทั้งสามเหลี่ยมเดิมที่อยู่ติดกัน ซึ่งหากมีรูปร่างที่ไม่

สอดคล้องกับคุณสมบัติที่ตั้งไว้ก็จะทำการแลกเปลี่ยนด้านเพื่อให้ได้สามเหลี่ยมที่มีคุณสมบัติตรงกับที่ตั้งไว้ ซึ่งทำให้เวลาในการสร้างปรับขนาดขึ้นส่วนในแต่ละรอบมีสัดส่วนลดลงเล็กน้อยเมื่อจำนวนชิ้นส่วนมากขึ้น แต่จำนวนรอบการปรับขนาดขึ้นส่วนยังคงใกล้เคียงกับวิธีของทอดเกียรติ ซึ่งยังมากกว่าของรัฐพล

ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงมุ่งพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ ของรัฐพล ซึ่งให้ผลเฉลี่ยในจำนวนรอบที่น้อยที่สุดในทั้งสามวิธี แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็ยังคงมากอยู่เมื่อต้องการความคลาดเคลื่อนน้อยๆ เพราะใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ซึ่งพฤติกรรมยังไม่ยืดหยุ่นมากนัก ดังนั้นเพื่อให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลง จึงควรเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนที่นำมาใช้จำลองปัญหา เพื่อให้มีพฤติกรรมที่ยืดหยุ่นกับพฤติกรรมของปัญหามากขึ้น ซึ่งจะทำให้จำนวนชิ้นส่วนที่ต้องใช้น้อยลง และทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลงด้วย อันเป็นเป้าหมายสำคัญของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ

โดยชิ้นส่วนที่นิยมใช้ในงานที่ต้องการความถูกต้องสูง และสามารถทำการปรับปรุงและสร้างชิ้นส่วนได้ง่ายคือชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น แต่สติฟเนสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้นนั้นไม่สามารถหาค่าโดยการอินทิเกรตโดยตรง ซึ่งในการคำนวณค่าสติฟเนส และ นอร์มต่างๆของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้นนี้จำเป็นต้องนำวิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขเข้ามาใช้ ซึ่งได้มีผู้ที่พยายามหาสูตรโดยตรงของสติฟเนสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น [28,29,30,31] ซึ่งทำให้ลดเวลาในการคำนวณลงได้ถึง 9 เท่า แต่ค่าผลเฉลี่ยจะให้ความผิดพลาดเมื่อรูปร่างของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมมีมุมแหลมมาก ซึ่งในโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัตินี้ ไม่สามารถควบคุมรูปร่างของชิ้นส่วนที่สร้างขึ้นได้ ซึ่งในหลายกรณีรูปร่างของชิ้นส่วนที่สร้างขึ้นจะไม่ดีนัก ทำให้วิธีนี้จึงยังไม่เหมาะสม รวมทั้งการคำนวณหาสติฟเนสโดยตรงนี้ไม่สามารถนำมาปรับปรุงใช้ได้กับชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีขอบโค้ง (Isoparametric Element) [32] รวมถึงในการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาอื่น เช่น ปัญหาอีลาสติก-พลาสติก (Elastic - Plastic Solution) [33] เป็นต้น ซึ่งจะต้องมีการเปลี่ยนแปลงสมการของฟังก์ชันฐาน (shape function) ซึ่งจะทำให้สูตรโดยตรงของสติฟเนสไม่สามารถนำมาใช้ได้

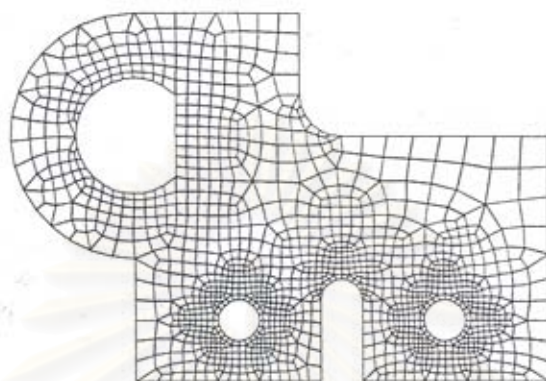
1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. ศึกษาวิธีการปรับปรุงคุณภาพของโครงข่ายชิ้นส่วน โดยเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนที่ใช้จำลองปัญหาให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้น
2. พัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ เพื่อการเข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องและให้มีการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนอย่างสม่ำเสมอ โดยใช้เวลาน้อยลง โดยการเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนที่นำมาจำลองปัญหา เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain Triangle : LST)

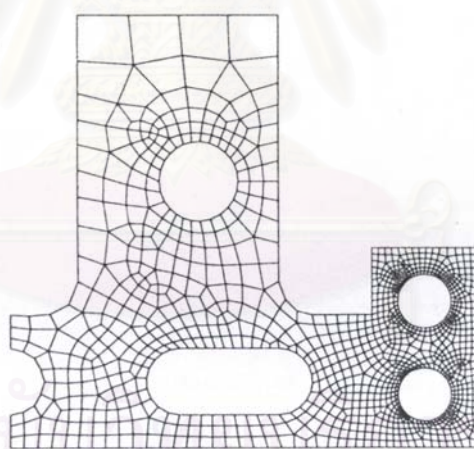
1.4 ขอบเขตการศึกษา

ศึกษาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ [26] โดยเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนที่นำมาใช้ในการจำลองปัญหาซึ่งเดิมเป็นโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ (Constant Strain Triangle : CST) ที่สร้างจากวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอน โดยใช้ฟรอนท์คืบหน้า โดยจะเปลี่ยนชิ้นส่วนเป็นสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain Triangle : LST) โดยมีด้านของสามเหลี่ยมเป็นเส้นตรง และมีจุดต่อที่กึ่งกลางด้านของสามเหลี่ยม

ในขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม จะรับข้อมูลจุดต่อและชิ้นส่วนทั้งหมดที่ได้จากกระบวนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนภายในโครงข่ายแล้ว และทำการเพิ่มจุดต่อที่กึ่งกลางด้านแต่ละด้านเพื่อปรับชิ้นส่วนให้เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น จากนั้นจึงส่งค่ากลับคืนสู่กระบวนการวิเคราะห์ ซึ่งในกระบวนการคำนวณ จะต้องเปลี่ยนค่าฟังก์ชันพื้นฐานของชิ้นส่วน ทั้งในขั้นตอนการประมาณค่าคลาดเคลื่อน และ ในขั้นตอนการวิเคราะห์ และในขั้นตอนการประมาณค่าคลาดเคลื่อนจะเปลี่ยนจากการประมาณค่าคลาดเคลื่อนที่แต่ละจุดต่อ เป็นการประมาณค่าคลาดเคลื่อนที่แต่ละชิ้นส่วน ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อได้ทำการปรับปรุงโครงข่ายโดยเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนเป็นสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ทำให้จำนวนของจุดต่อภายในโครงข่ายมีมากกว่าจำนวนชิ้นส่วนในโครงข่ายมาก ดังนั้นเมื่อใช้การประมาณค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละชิ้นส่วนแทนจะช่วยลดเวลาในการคำนวณลงได้



รูปที่ 1.2.1 แสดงโครงชิ้นส่วนของปัญหาที่สร้างโดยวิธีต้นไม้สี่ภาค



รูปที่ 1.2.2 แสดงโครงชิ้นส่วนของปัญหาที่สร้างโดยวิธีการสร้างพرونที่คี่บนหน้า

บทที่ 2

แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

2.1 ความนำ

กระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติเริ่มจากข้อมูลจุดต่อบริเวณขอบของปัญหา โดยทั่วไปสามารถแบ่งเป็นขั้นตอนหลักหลังจากได้ข้อมูลที่ขอบออกเป็น 5 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นตอนการสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยม
2. ขั้นตอนการปรับปรุงคุณภาพโครงข่าย
3. ขั้นตอนการวิเคราะห์หาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
4. ขั้นตอนการตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อน และ
5. ขั้นตอนการคำนวณขนาดขึ้นส่วนใหม่

เนื่องจากผลเฉลยและค่าคลาดเคลื่อนที่ใช้ในการปรับขนาดขึ้นส่วนนั้น จะเป็นผลโดยตรงจากคุณภาพของโครงข่าย โดยคุณภาพของโครงข่ายขึ้นอยู่กับพฤติกรรมของขึ้นส่วนที่ใส่ว่าใกล้เคียงกับที่เกิดขึ้นจริงของปัญหาหรือไม่ ความต่อเนื่องกันของโครงข่าย และ รูปร่างขึ้นส่วน ซึ่งถ้าโครงข่ายมีคุณภาพดีแล้ว ย่อมให้ผลเฉลยและค่าคลาดเคลื่อนที่ค่อนข้างแม่นยำ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นไปยังการปรับปรุงคุณภาพของโครงข่ายโดยการเปลี่ยนมาใช้ขึ้นส่วนที่มีพฤติกรรมยืดหยุ่นเข้ากับพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริงของปัญหามากขึ้น เนื่องจากได้มีการศึกษาเกี่ยวกับการปรับปรุงรูปร่างและความต่อเนื่องของโครงข่าย ของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ[26] มาแล้วแต่ยังให้ผลไม่น่าพอใจมากนัก ซึ่งในงานวิจัยนี้จะทำการปรับปรุงคุณภาพของโครงข่ายซึ่งได้มีการปรับปรุงคุณภาพของขึ้นส่วนแล้ว โดยการเปลี่ยนขึ้นส่วนที่ใช้จากสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่เป็นสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ดังนั้นในขั้นตอนหลักของการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติจึงต้องมีขั้นตอนเพิ่มขึ้นหลังจากขั้นตอนการปรับปรุงคุณภาพโครงข่าย คือ ขั้นตอนการเพิ่มจุดต่อที่กึ่งกลางด้านของสามเหลี่ยม และมีโครงสร้างการทำงานดังแสดงในรูปที่ 2.1.1 จากนั้นเราจะได้กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องโดยละเอียด

2.2 การประมาณค่าคลาดเคลื่อน

โดยปกติการคำนวณความคลาดเคลื่อนของวิธีการใด ๆ ก็ตามจะทำได้โดยการเทียบคำตอบที่ได้จากวิธีการนั้นๆ กับผลเฉลยแม่นยำตรง เช่น

$$e = u - u_h \quad (2.2.1a)$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (2.2.1b)$$

โดยที่

- e : ค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจัด
- u : ค่าการกระจัดแม่นยำตรง
- u_h : ค่าการกระจัดที่ได้จากการวิเคราะห์
- e_σ : ค่าความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
- σ : ค่าหน่วยแรงแม่นยำตรง
- σ_h : ค่าหน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์

แต่ในกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนนั้นเราไม่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา จึงไม่สามารถหาความคลาดเคลื่อนตามสมการ (2.2.1) ได้ ต้องประมาณจากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยอื่นที่มีความถูกต้องกว่าผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (2.2.2) สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยที่ดีขึ้นนี้ เราจะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในหัวข้อถัดไป

$$e^* = u^* - u_h \quad (2.2.2a)$$

$$e_\sigma^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (2.2.2b)$$

โดยที่

- e^* : ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของการกระจัด
- u^* : ค่าการกระจัดที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- u_h : ค่าการกระจัดจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- e_σ^* : ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
- σ^* : ค่าหน่วยแรงที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- σ_h : ค่าหน่วยแรงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากสมการ (2.2.1) และ (2.2.2) จะเห็นว่าเราวัดความคลาดเคลื่อนเป็นสเกลาร์ในขณะที่คำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีลักษณะเป็นเวกเตอร์ ซึ่งมีความไม่สะดวกในการนำมาใช้งาน ดังนั้นจึงต้องมีการนำรูปแบบอื่นที่มีลักษณะเป็นสเกลาร์มาใช้แทนเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน เช่น ในรูปของแอลทูนอร์ม (L_2 norm) ของความคลาดเคลื่อนดังในสมการ (2.2.3)

$$\|e\|_2 = \left(\int_{\Omega} e_\sigma^T e_\sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.3)$$

โดยที่

- $\|e\|$: แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อน
- e_σ : เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
- Ω : โดเมนที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่ (local) หรือ โดยรวม (global)

นำความคลาดเคลื่อนที่ได้ในสมการ (2.2.3) มาเปรียบเทียบกับแวลทูนอร์มของความเครียด (strain energy norm) ในสมการ (2.2.4) จะได้ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) ดังในสมการ (2.2.5)

$$\|U\|_2 = \left(\int_{\Omega} \sigma^T \sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.4)$$

$$\eta = \frac{\|e\|_2}{\|U\|_2} \quad (2.2.5)$$

โดยที่ $\|U\|$: แวลทูนอร์มของความเครียด
 η : ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

แทนค่าหน่วยแรงและความคลาดเคลื่อนในสมการ (2.2.5) ด้วยค่าประมาณจากสมการ (2.2.2) จะได้ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และแวลทูนอร์มของค่าต่างๆดังนี้

$$\|e^*\|_2 = \left(\int_{\Omega} e_{\sigma}^{*T} e_{\sigma}^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.6a)$$

$$\|U^*\|_2 = \left(\int_{\Omega} \sigma^{*T} \sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.6b)$$

$$\|U\|_2 \approx \sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e^*\|_2^2} \quad (2.2.6c)$$

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\|e^*\|}{\sqrt{\|U^*\|^2 + \|e^*\|^2}} \quad (2.2.6d)$$

เมื่อได้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม แล้วนำไปเปรียบเทียบกับความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ ถ้ามีความคลาดเคลื่อนมากกว่าก็คำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่สอดคล้องกับความคลาดเคลื่อนเฉพาะทีละส่วนต่อไป

2.3 การประมาณค่าผลเฉลยจากผลของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ดังที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2 ว่าการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน จะประมาณจากผลเฉลยของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทียบกับผลเฉลยที่แม่นยำกว่า ซึ่งในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงรายละเอียดในการ

ประมาณค่าหน่วยแรงให้มีความแม่นยำขึ้น โดยวิธีการฟื้นตัวเป็นหย่อม (Patch Recovery) [5,6,7,8] เพื่อให้เปรียบเทียบหาความคลาดเคลื่อน

โดยธรรมชาติของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หน่วยแรงที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนแตกต่างกันไปในแต่ละส่วนของชิ้นส่วน โดยที่ตำแหน่งเกาส์จะมีค่าหน่วยแรงแม่นยำกว่าในตำแหน่งอื่นๆ [34] ดังนั้นเราจึงสามารถประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อได้แม่นยำขึ้นโดยประมาณจากหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์รอบจุดต่อนั้น ดังแสดงในรูป 2.3.1 สำหรับวิธีที่ใช้ในการประมาณค่านั้นทำได้หลายวิธี แต่ที่ค่อนข้างยืดหยุ่นและได้ค่าที่แม่นยำคือวิธีกำลังสองน้อยสุดดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

สมมติให้หน่วยแรงโดยประมาณ (σ^*) เป็นหน่วยแรงที่ได้จากการประมาณค่าจากตำแหน่งเกาส์ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนาม ในกรณี 1 มิติจะมีลักษณะเป็นเส้นดังแสดงในรูป 2.3.2 และลักษณะของเส้นจะขึ้นอยู่กับการกำลังและค่าคงตัวของพหุนาม สำหรับกรณี 2 มิติหน่วยแรงโดยประมาณมีลักษณะเป็นพื้นผิวมีค่าดังในสมการ (2.3.1a) หรือในรูปเมตริกซ์ดังสมการ (2.3.1b)

$$\sigma^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + \dots \quad (2.3.1a)$$

$$\sigma^* = [p]\{a\} \quad (2.3.1b)$$

โดยที่ $[p]$: ฟังก์ชันฐาน (base function) อยู่ในรูปตัวแปรของพหุนาม $[1 \ x \ y \ xy \ x^2 \dots]$
 $\{a\}$: ค่าคงตัวของพหุนามซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องคำนวณหา $\{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \dots\}$

หลักของวิธีกำลังสองน้อยสุดคือต้องหาค่าคงตัว $\{a\}$ ให้หน่วยแรงโดยประมาณมีความแตกต่างจากจุดที่ประมาณมาน้อยที่สุด ในกรณี 2 มิติเศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรงโดยประมาณและหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์สามารถแสดงได้ดังในสมการ (2.3.2)

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma^*(x_i, y_i))^2 \quad (2.3.2a)$$

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - [p(x_i, y_i)]\{a\})^2 \quad (2.3.2b)$$

โดยที่ $R(a)$: เศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรง

σ_h : หน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์

σ^* : หน่วยแรงโดยประมาณ

n : จำนวนตำแหน่งเกาส์ทั้งหมดในหย่อม

ในการหาค่าคงตัวเพื่อให้ได้เศษตกค้างต่ำสุด ทำได้โดยกำหนดค่าอนุพันธ์ของเศษตกค้างให้เท่ากับศูนย์ โดยหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงตัวแต่ละตัว จะได้สมการซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนของค่าคงตัวดังนี้

$$\sum_{i=1}^n [p(x_i, y_i)]^T [p(x_i, y_i)] \{a\} = \sum_{i=1}^n \sigma_h(x_i, y_i) [p(x_i, y_i)]^T \quad (2.3.3)$$

ในงานวิจัยนี้เนื่องจากชิ้นส่วนที่ใช้เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมความเครียดเชิงเส้น ดังนั้นจึงเลือกใช้ฟังก์ชันพื้นฐานเป็นพหุนามกำลัง 2 โดยเลือกใช้ $p = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2]$ ดังนั้นสามารถแจกสมการ (2.3.3) ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum y_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i y_i^2 \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum x_i y_i^2 & \sum x_i^2 y_i & \sum y_i^3 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i y_i^2 & \sum x_i^2 y_i^2 & \sum x_i^3 y_i & \sum x_i y_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 y_i & \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y_i^2 \\ \sum y_i^2 & \sum x_i y_i^2 & \sum y_i^3 & \sum x_i y_i^3 & \sum x_i^2 y_i^2 & \sum y_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \sigma_{gi} \\ \sum x_i \sigma_{gi} \\ \sum y_i \sigma_{gi} \\ \sum x_i y_i \sigma_{gi} \\ \sum x_i^2 \sigma_{gi} \\ \sum y_i^2 \sigma_{gi} \end{Bmatrix}$$

(2.3.4a)

$$[A]\{a\} = \{b\} \quad (2.3.4b)$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (2.3.5)$$

$$\sigma^*(x_i, y_i) = [p(x_i, y_i)]\{a\} \quad (2.3.6)$$

หลังจากคำนวณหาค่าคงตัวจากสมการ (2.3.5) ได้แล้ว สามารถคำนวณหน่วยแรงที่จุดต่อได้โดยการแทนพิกัดที่จุดต่อลงในสมการ (2.3.6) และเนื่องจากในปัญหาบนระนาบมีหน่วยแรง 3 ค่าดังนั้นในแต่ละจุดต่อจึงแก้สมการด้วยการแก้สมการโดยตรง (Direct Solver) การแก้สมการในครั้งที่ 2 และ 3 ก็เพียงแต่แทนค่ากลับไปเท่านั้นไม่ต้องแก้สมการใหม่

ข้อควรระวังสำหรับวิธีนี้ก็คือ จำนวนจุดเกาส์ในแต่ละหอย่อมของจุดต่อจะต้องไม่น้อยกว่าจำนวนตัวแปรในสมการ (2.3.4) ในที่นี้ต้องมีไม่น้อยกว่า 6 จุด มิฉะนั้นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ($[A]$) ในสมการ (2.3.4) จะมีลักษณะเป็นเอกฐาน (Singular) ลักษณะเช่นนี้จะเกิดขึ้นในบริเวณขอบของปัญหาดังจุดต่อหมายเลข 1,3,4,5,6 ในรูป 2.3.3 ซึ่งมีวิธีแก้ปัญหาได้ 2 วิธีคือ

- 1.) ลดจำนวนพจน์ของพหุนามลง เช่น ให้ $[p] = [1 \ x \ y \ xy]$ หรือ $[p] = [1 \ x \ y]$
- 2.) ประมาณค่าหน่วยแรงของจุดต่อนั้นจากหอย่อมของจุดต่ออื่นดังเช่นในรูป 2.3.4

เนื่องจากหน่วยแรงที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในชั้นส่วนที่อยู่บริเวณขอบมีความคลาดเคลื่อนสูงเมื่อเทียบกับชั้นส่วนด้านใน งานวิจัยนี้จึงเลือกใช้วิธีที่ 2 ในการประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อบริเวณขอบ ยกเว้นในกรณีพิเศษที่มีลักษณะดังแสดงในรูป 2.3.5 ซึ่งการหาห้อยอมที่จะใช้ประมาณค่าทำได้ลำบาก จึงใช้วิธีที่ 1 แทนโดยให้จำนวนของพหุนามเท่ากับ $[p] = [1 \ x \ y]$

หลังจากที่ได้ค่าหน่วยแรงที่จุดต่อทุกจุดแล้ว ประมาณค่าหน่วยแรงที่ตำแหน่งใดๆ ในชั้นส่วนด้วยฟังก์ชันสัดฐาน (shape function) ตัวเดียวกับที่ใช้ในการหาค่าการกระจัดในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังในสมการ (2.3.7)

$$\{\sigma^*(x, y)\} = [N(x, y)]\{\sigma_n^*\} \quad (2.3.7)$$

โดยที่ σ_n^* : หน่วยแรงที่ตำแหน่งจุดต่อที่แม่นยำกว่า

σ^* : หน่วยแรงที่ตำแหน่งใดๆที่แม่นยำกว่า

N : ฟังก์ชันสัดฐานในระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์

จากนั้นคำนวณแอลทูนอร์มของความเค้นและความคลาดเคลื่อน ทั้งในส่วนเฉพาะที่ในสมการ (2.3.8) และโดยรวมทั้งปัญหาในสมการ (2.3.9)

$$\|U^*\|_{2l} = \left(\int_{\Omega} (N\sigma_n^*)^T (N\sigma_n^*) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.8a)$$

$$\|e^*\|_{2l} = \left(\int_{\Omega} (N\sigma_n^* - \sigma_h)^T (N\sigma_n^* - \sigma_h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.8b)$$

$$\|e^*\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{Ne} \|e^*\|_{2l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.9a)$$

$$\|U^*\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{Ne} \|U^*\|_{2l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.9b)$$

$$\eta_g^* = \frac{\|e^*\|_{2g}}{\|U^*\|_{2g}} \quad (2.3.9c)$$

โดยที่ $\|U^*\|_{2l}$: แอลทูนอร์มของความเค้นเฉพาะที่ในชั้นส่วน

$\|e^*\|_{2l}$: แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ในชั้นส่วน

$\|U^*\|_{2g}$: แอลทูนอร์มของความเค้นรวม

$\|e^*\|_{2g}$: แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนรวม

N : ฟังก์ชันสัญญาณ
 Ne : จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดในระบบ

2.4 การประมาณขนาดของชิ้นส่วน

เนื่องจากความคลาดเคลื่อนแปรตามขนาดของชิ้นส่วนยกกำลังด้วยกำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐานดังในสมการ (2.4.1) ดังนั้น ถ้าเรารู้ขนาดของชิ้นส่วนและความคลาดเคลื่อนในปัจจุบัน เราสามารถคำนวณขนาดของชิ้นส่วนที่มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ได้ดังในสมการ (2.4.2)

$$\|e\| = Ch^p \quad (2.4.1)$$

โดยที่ C : ค่าคงตัวที่ไม่รู้ค่า
 h : ขนาดของชิ้นส่วน
 p : กำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐาน

$$h_{new} = h_{exist} \cdot \left(\frac{\|e\|_a}{\|e\|_{exist}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.4.2a)$$

ในงานวิจัยนี้ใช้ $p = 2$

$$h_{new} = h_{exist} \cdot \left(\frac{\|e\|_a}{\|e\|_{exist}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.2b)$$

โดยที่ h_{new} : ขนาดของชิ้นส่วนที่จะสร้างชิ้นใหม่
 h_{exist} : ขนาดของชิ้นส่วนในปัจจุบัน
 $\|e\|_a$: ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้
 $\|e\|_{exist}$: ความคลาดเคลื่อนในปัจจุบัน

สำหรับการหาความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ นั้น จะคำนวณจากพื้นฐานที่ว่าในการเปรียบเทียบระบบที่มีชิ้นส่วนจำนวนเท่ากันแล้ว ระบบที่มีการกระจายความคลาดเคลื่อนออกไปเท่า ๆ กันทุกจุดจะให้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนั้น เราสามารถคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วนโดยให้มีขนาดเท่า ๆ กัน ดังแสดงในสมการ (2.4.3)

$$\|e\|_{ea} = \eta_a \frac{\|U^*\|_{2g}}{\sqrt{Ne}} \quad (2.4.4)$$

โดยที่ $\|e\|_{ea}$: ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละขั้นส่วน
 Ne : จำนวนขั้นส่วนทั้งหมดในระบบ
 η_a : ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ของระบบ

2.5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการอินทิเกรตเชิงตัวเลข โดยวิธีของเกาส์ (Gauss's Method) ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้กันมาก ในการวิเคราะห์ปัญหาทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่สามารถจะใช้อินทิเกรตปัญหาในลักษณะมิติเดียว , สองมิติ และสามมิติได้เป็นอย่างดี

2.5.1 การอินทิเกรตเชิงตัวเลขของปัญหามิติเดียว

ในปัญหามิติเดียว การอินทิเกรตเชิงตัวเลขเพื่อหาค่า I โดยวิธีของเกาส์คือ

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (2.5.1)$$

ซึ่งเรียกสมการ (2.5.1) ว่า การอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian Quadrature) จุดเดียว ซึ่งการอินทิเกรตแบบเกาส์สามารถจะเขียนในเทอมของจุดเกาส์ได้ดังนี้

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots + w_n f(\xi_n) \quad (2.5.2)$$

ซึ่ง w_1, w_2, \dots, w_n คือน้ำหนัก (weight) และ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ คือจุดตัวอย่าง (sample) หรือเรียกว่าจุดเกาส์ (Gauss Point) ฉะนั้นจะเห็นว่าแนวความคิดของการอินทิเกรตแบบเกาส์ก็คือ การเลือกจุดเกาส์และน้ำหนัก w ให้มีจำนวนมากเพียงพอถึง n จุด เพื่อให้ผลที่ได้รับมีค่าใกล้เคียงกับผลแม่นยำจากการอินทิเกรตโดยตรง เพื่อเพิ่มความเข้าใจและสาริตการประมาณค่า โดยเลือกใช้ $n=1$ และ 2 ดังต่อไปนี้

ในกรณีของ $n=1$, สมการ(2.5.2) คือ

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) \quad (2.5.3)$$

ในสมการ (2.5.3) จะมีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ w_1 และ ξ_1 ผลของการอินทิเกรตตามสมการ (2.5.3) จะเท่ากับค่าแม่นยำ ถ้าสมมติให้ $f(\xi)$ เท่ากับฟังก์ชันพหุนามอันดับ 1 นั่นคือ $f(\xi) = a_0 + a_1 \xi$ ดังนั้นความคลาดเคลื่อน E คือ

$$E = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 \xi) d\xi - w_1 f(\xi_2) = 0$$

หรือ

$$E = 2a_0 - w_1(a_0 + a_1 \xi_1) + 0$$

หรือ

$$E = a_0(2 - w_1) - w_1 a_1 \xi_1 = 0 \quad (2.5.4)$$

จากสมการ (2.5.4) จะเห็นว่า ถ้าต้องการให้ความคลาดเคลื่อน E เท่ากับศูนย์

$$w_1 = 2 \text{ และ } \xi_1 = 0$$

แทนค่า w_1 และ $f(\xi_1)$ ลงในสมการ (2.5.3)

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx 2f(0) \quad (2.5.5)$$

ผลของอินทิเกรตดูได้จากรูป 2.6.1

ในกรณีของ $n = 2$ (2 จุดเกาส์) จากสมการ (2.5.2)

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) \quad (2.5.6)$$

ดังนั้นจะมีพารามิเตอร์ 4 ตัวคือ w_1, w_2, ξ_1, ξ_2 และฟังก์ชันพหุนามที่จะให้ค่าแม่นยำ ควรเป็นพหุนามอันดับ 3 ที่ประกอบด้วยค่าคงตัว 4 ตัว นั่นคือ $f(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3$ และผลของอินทิเกรตหาได้ดังนี้

$$E = \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3) d\xi - [w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)] \right] \quad (2.5.7)$$

ถ้าต้องการให้ความคลาดเคลื่อน E เท่ากับศูนย์, จากสมการ (2.5.7)

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2 \\ w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 &= 0 \\ w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 &= 2/3 \\ w_1 \xi_1^3 + w_2 \xi_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

จากสมการทั้ง 4 สามารถจะหาพารามิเตอร์ w_1, w_2, ξ_1, ξ_2 ได้ดังนี้

$$w_1 = w_2 = 1, -\xi_1 = \xi_2 = 1/\sqrt{3} = 0.57735 \quad (2.5.8)$$

ตามที่กล่าวมาแล้วข้างต้นจะเห็นว่า n จุดของการอินทิเกรตแบบเกาส์จะให้ค่าแม่นยำ ฟังก์ชัน f เป็นพหุนามระดับ $(2n-1)$ หรือน้อยกว่า

2.5.2 การอินทิเกรตเชิงตัวเลขของปัญหาสองมิติ

สำหรับปัญหาสองมิติการอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยวิธีของเกาส์ จะเขียนอยู่ในรูปของ

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.5.9)$$

ซึ่งสามารถจะหาค่าโดยประมาณของสมการ (2.5.9) ในเทอมของผลบวกของผลคูณของน้ำหนัก (weight) และตำแหน่งของเกาส์ได้ ในทำนองเดียวกับหัวข้อ 2.5.1 คือ

$$\begin{aligned} I &\approx \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta \\ &\approx \sum_{j=1}^n w_j \left[\sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_j) \right] \end{aligned}$$

หรือ

$$I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (2.5.10)$$

2.6 สถิติเนสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

สถิติเนสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้นในพิกัด (x, y) แสดงดังสมการ (2.6.1)

$$K = t \int_A B^T(x, y) \cdot D \cdot B(x, y) dA \quad (2.6.1)$$

และในพิกัดธรรมชาติ (ξ, η) แสดงดังสมการ (2.7.2)

$$K = t \int_A B^T(\xi, \eta) \cdot D \cdot B(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| dA \quad (2.6.2)$$

โดยที่ B : เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด

D : เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

A : พื้นที่ทำการอินทิเกรต

t : ความหนาของชิ้นส่วน

J : เมตริกซ์จาโคเบียน

พิจารณาชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ดังแสดงในรูป 2.6.1 ซึ่งกำหนดให้จุดต่อที่ 4 , 5 และ 6 อยู่กึ่งกลางของด้านซึ่งเป็นเส้นตรง เนื่องจากถ้าไม่ใช่บริเวณขอบของปัญหาจะให้ผลเฉลยดีกว่าสามเหลี่ยมด้านโค้ง [35] และยังสามารถเขียนเป็นรหัสคำนวณได้ง่ายกว่า จึงทำให้ในงานวิจัยนี้สามารถใช้ชิ้นส่วนชนิดรูปร่างของชิ้นส่วนขึ้นกับพิกัดที่จุดยอดของสามเหลี่ยมเท่านั้น (subparametric element) เพื่อลดปริมาณการคำนวณลง โดยเมื่อใช้ชิ้นส่วนชนิดนี้แล้วจะทำให้พิจารณาความสัมพันธ์ทางรูปร่างระหว่างพิกัด (x, y) และ พิกัดธรรมชาติเหมือนกับสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ ซึ่งจะส่งผลให้ เมตริกซ์จาโคเบียน มีค่าคงที่ในแต่ละชิ้นส่วน คือเป็นค่าของพิกัดที่จุดต่อที่มุมเท่านั้น

ในการคำนวณค่าสติเฟนสจำเป็นจะต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีการอินทิเกรตแบบเกาส์ 3 จุดเกาส์ ซึ่งเพียงพอที่จะขจัดภาวะพลังงานเป็นศูนย์เสมือน (spurious zero energy mode) ได้ [35]

และเนื่องจากเกาส์เซียนควอดราเจอร์ 3 จุดเกาส์นี้จะมีอยู่ 2 ชุดจุดเกาส์คือ

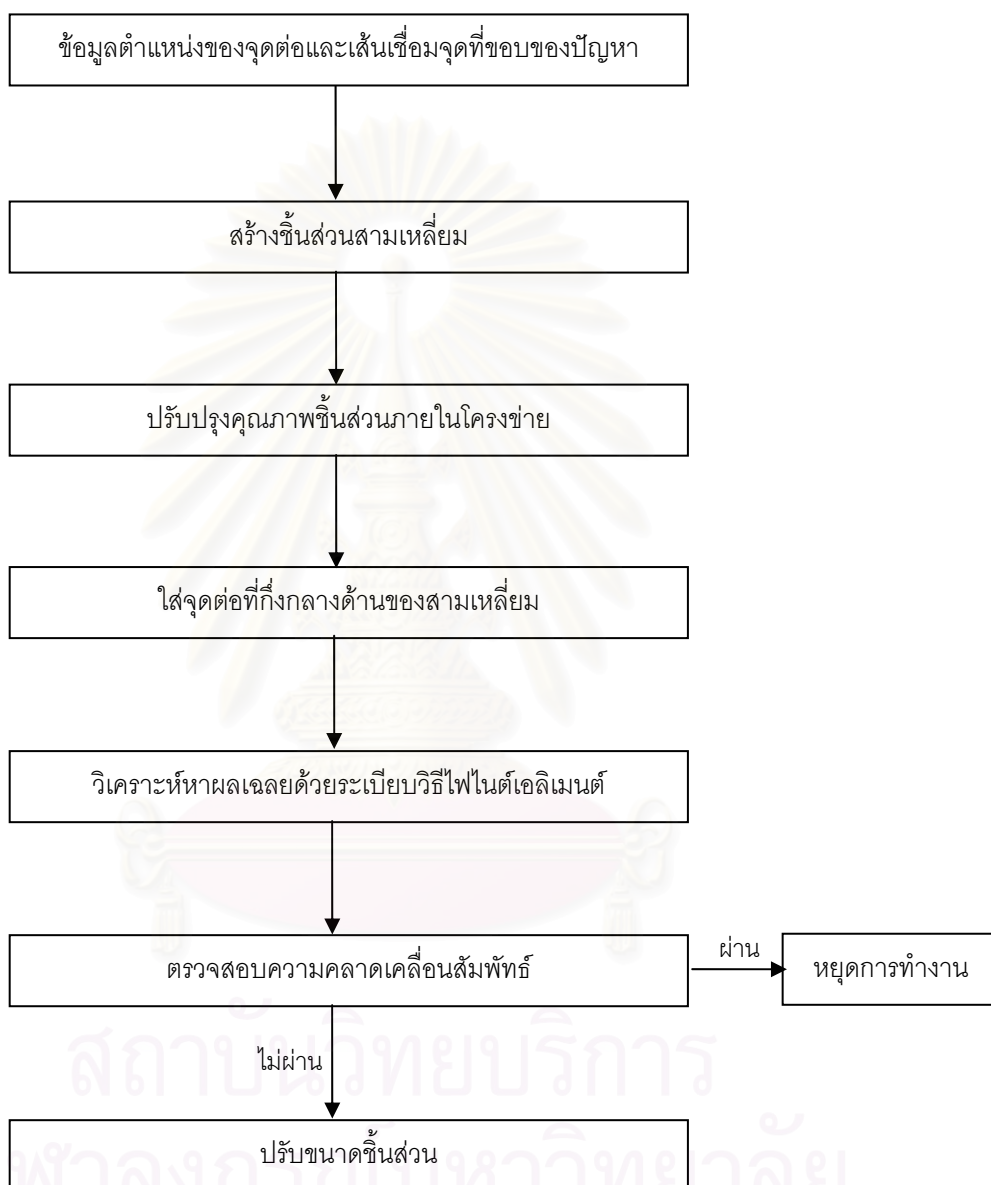
$$\text{ชุดที่ 1 : } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \quad , \quad \text{น้ำหนัก} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ชุดที่ 2 : } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad , \quad \text{น้ำหนัก} = \frac{1}{6}$$

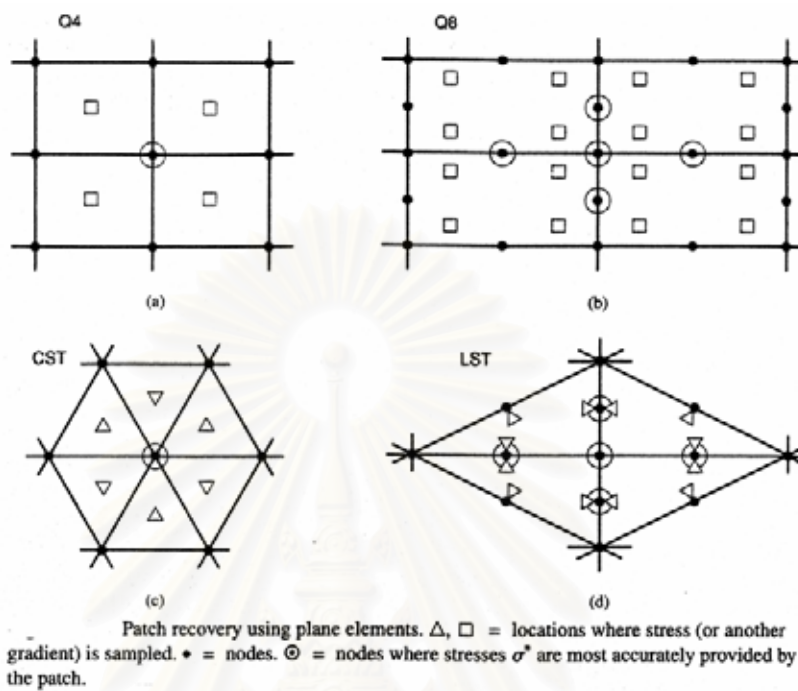
และดังแสดงในรูป 2.6.2

ซึ่งจุดเกาส์ชุดที่ 1 จะได้รับความนิยมมากกว่า แต่ในงานวิจัยนี้จะเลือกใช้จุดเกาส์ชุดที่ 2 เนื่องจากชุดที่ 2 นั้นให้ผลเฉลยที่แม่นยำกว่าชุดที่ 1 [35]

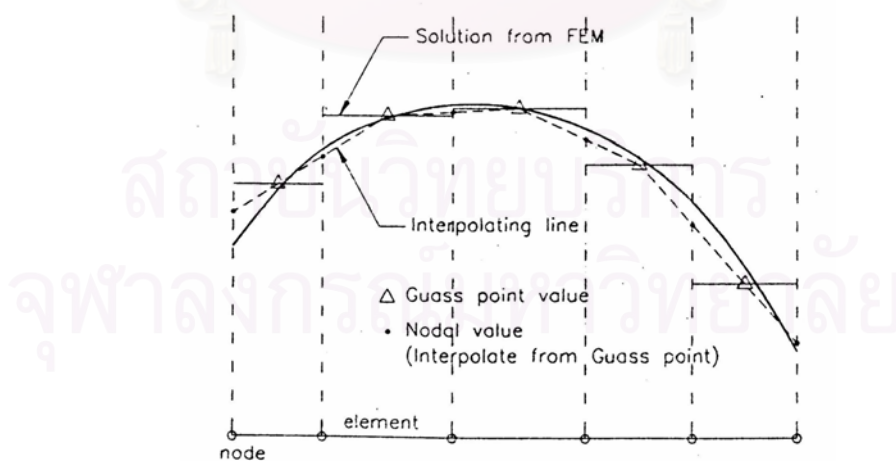
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



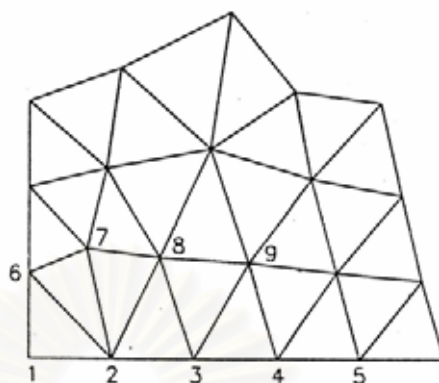
รูปที่ 2.1.1 แผนภูมิสายงานของกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ



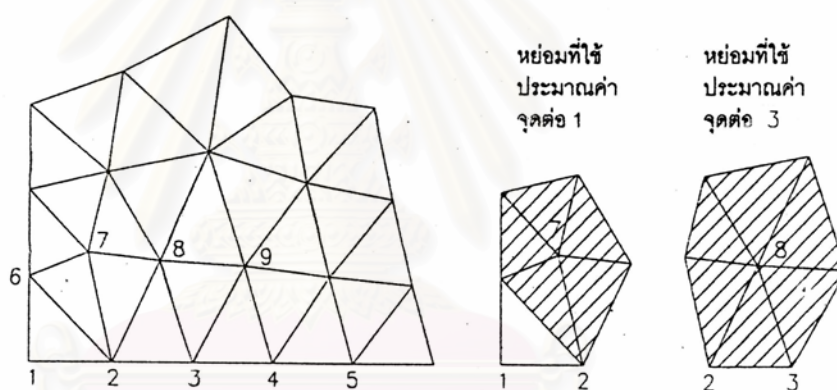
รูปที่ 2.3.1 ตำแหน่งเกาส์ในหย่อมของจุดต่อที่ต้องการประมาณค่า



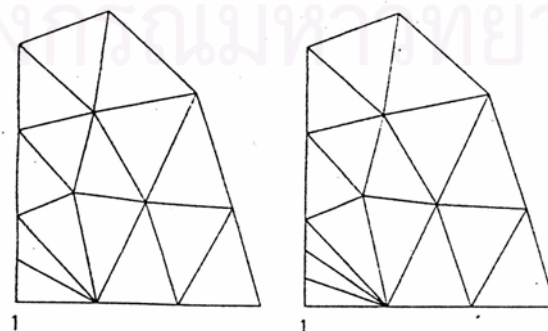
รูปที่ 2.3.2 การประมาณค่าคำตอบจากตำแหน่งเกาส์ในชั้นส่วนเชิงเส้น 1 มิติ



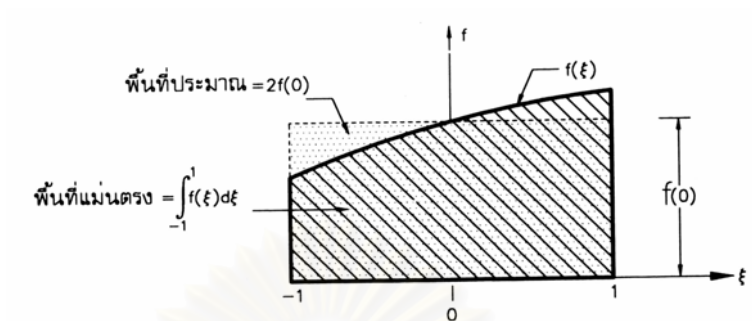
รูปที่ 2.3.3 ลักษณะของชิ้นส่วนบริเวณขอบของปัญหา



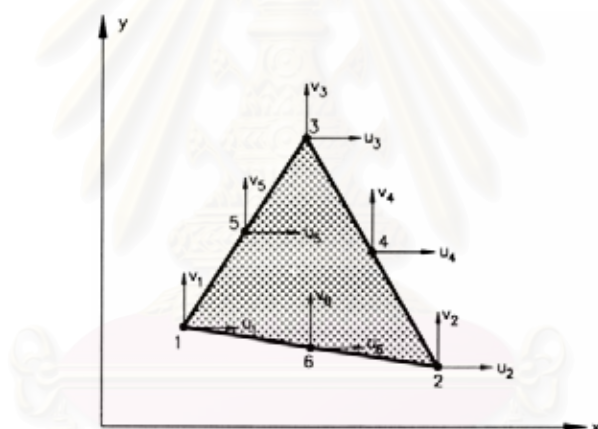
รูปที่ 2.3.4 ลักษณะของหย่อมที่ใช้ในการประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อที่ขอบ



รูปที่ 2.3.5 ลักษณะของจุดที่หาหย่อมภายในยาก

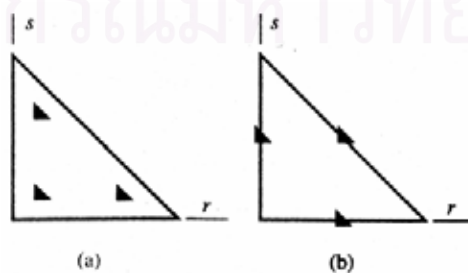


รูปที่ 2.5.1 การอินทิเกรตแบบเกาส์จุดเดียว



รูปที่ 2.6.1 ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.6.2 ตำแหน่งจุดเกาส์ชุดที่ 1 และ ชุดที่ 2

บทที่ 3

การพัฒนาโปรแกรม

3.1 ภาษาคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในโปรแกรม

เนื่องจกงานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งเดิมเลือกใช้ภาษา C++ ในการเขียนรหัสคำนวณเพื่อให้ได้โปรแกรมที่มีประสิทธิภาพ ดังนั้นเพื่อให้การทำงานของฟังก์ชันที่ต้องการปรับปรุงสอดคล้องกับโครงสร้างข้อมูลที่มีอยู่เดิมและเกิดประสิทธิภาพสูงสุด ในงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้ภาษา C++ ในการพัฒนาเช่นกัน โดยมีจุดเด่นของภาษาที่เหมาะสมกับกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนและปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายดังต่อไปนี้

ประสิทธิภาพของโปรแกรม ภาษา C++ เป็นภาษาที่ประมวลผลได้รวดเร็วที่สุดภาษาหนึ่ง ในบรรดาภาษาสูงด้วยกันจะเป็นรองเพียง ภาษาฟอร์แทรน และ ภาษา C อยู่เล็กน้อยเท่านั้น จึงมีความเหมาะสมกับการพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งมีการคำนวณและขั้นตอนต่างๆจำนวนมาก

การจัดสรรหน่วยความจำแบบพลวัต (dynamic memory allocation) เนื่องจากกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนและการสลับขอบของชิ้นส่วนที่มีการขยายและลดขนาดของข้อมูลชนิดต่างๆตลอดเวลา การจัดสรรหน่วยความจำให้มีขนาดเหมาะสมกับข้อมูลแต่ละชนิดในขณะใดๆ ย่อมต้องมีประสิทธิภาพกว่าการจองหน่วยความจำปริมาณมากๆให้กับข้อมูลทุกชนิด ตั้งแต่เริ่มต้นโดยไม่สอดคล้องกับหน่วยความจำที่ใช้จริงในขณะใช้งาน

การเรียกใช้ฟังก์ชันเวียนบังเกิด (recursive function) ถึงแม้ว่าฟังก์ชันเวียนบังเกิดจะทำให้ประสิทธิภาพของโปรแกรมลดลง แต่ในสถานการณ์ที่ไม่รู้จำนวนรอบของการกระทำซ้ำซึ่งเกิดจากการแยกการกระทำซ้ำลงในแต่ละสาขาของข้อมูลที่มีจำนวนไม่แน่นอน เช่น ในกระบวนการค้นหาจุดต่อในพื้นที่ที่กำหนดในโครงสร้างข้อมูล ADT หรือการตรวจสอบการเพิ่มจุดในชิ้นส่วนโดยรอบชิ้นส่วนที่พิจารณา นั้น ถ้าไม่ใช้ฟังก์ชันเวียนบังเกิดก็จะทำให้รหัสคำนวณมีความยุ่งเหยิงอย่างมาก มีผลให้ออกาสผิดพลาดมากขึ้นและอ่านทำความเข้าใจโปรแกรมได้ยาก

การสร้างข้อมูลชนิดใหม่ การสร้างข้อมูลชนิดใหม่ๆ จะส่งผลให้วิธีการเขียนและโครงสร้างของโปรแกรมมีความหลากหลาย การเขียนรหัสคำนวณมีลักษณะเป็นระเบียบมากขึ้น รหัสคำนวณมีความกระชับลดจำนวนตัวแปรที่อาจต้องส่งผ่านให้กับฟังก์ชันจำนวน 10-12 ตัวเหลือเพียง 3-4 ตัว เพิ่มความเข้าใจในโปรแกรมขึ้นอย่างมาก ส่งผลให้การตรวจสอบ ปรับปรุงแก้ไขหรือพัฒนาโปรแกรมต่อไปทำได้ง่าย

การเข้าถึงตำแหน่งของหน่วยความจำโดยตัวชี้ (pointer) ตัวชี้เป็นข้อมูลชนิดหนึ่งซึ่งอ้างอิงถึงตำแหน่งของหน่วยความจำ สามารถตอบสนองต่อคำสั่งและดำเนินการใดๆได้เหมือนกับสิ่งที่อ้างอิงไปถึง ซึ่งจะเป็นอะไร

ก็ได้เช่น ข้อมูลชนิดต่างๆ ฟังก์ชัน โครงสร้างข้อมูล หรือข้อมูลชนิดใหม่ที่สร้างขึ้นมา ฯลฯ จึงส่งผลให้โปรแกรมมีประสิทธิภาพมากขึ้น ลดจำนวนของหน่วยความจำที่ใช้เก็บข้อมูลลงและสามารถเข้าถึงข้อมูลต่างๆได้อย่างรวดเร็ว

จะเห็นว่ามีการใช้คุณสมบัติต่างๆ ของภาษา C++ เป็นจำนวนมาก ดังนั้นในการปรับปรุงโปรแกรมเป็นภาษาอื่นควรคำนึงถึงคุณสมบัติเหล่านี้ด้วย เพื่อไม่ให้เป็นภาระยากลำบากเกินไปในการเขียนรหัสคำนวณใหม่ให้สอดคล้องกับรหัสเดิมที่มีอยู่

3.2 การเลือกใช้โครงสร้างข้อมูล

โครงสร้างข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัยนี้แบ่งเป็นประเภทใหญ่ๆ ได้ 3 ประเภทดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

1) โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ (array) เป็นโครงสร้างข้อมูลที่จองหน่วยความจำขนาดใหญ่ มีหน่วยความจำของแต่ละข้อมูลอยู่ติดกันจึงสามารถเข้าถึงข้อมูลแต่ละตัวได้อย่างรวดเร็ว แต่โดยปกติโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้ต้องจองหน่วยความจำล่วงหน้าและเปลี่ยนแปลงขนาดไม่ได้ (static memory allocation) จึงไม่เหมาะกับกระบวนการปรับขนาดนักเพราะในขณะที่จองหน่วยความจำยังไม่ทราบขนาดของข้อมูล แต่เนื่องจากความเร็วในการอ้างอิงถึงข้อมูลมีความจำเป็น เช่น ในการดำเนินการต่างๆ เกี่ยวกับเมตริกซ์ จึงต้องจำลองโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้โดยการจองหน่วยความจำขนาดใหญ่แบบพลวัตแทน ดังเช่นที่ใช้กับข้อมูลชนิดเวกเตอร์ การอ้างอิงถึงแต่ละข้อมูลก็อ้างอิงถึงตำแหน่งที่ห่างออกจากหน่วยความจำแรกไปเท่ากับหมายเลขข้อมูลคูณด้วยขนาดของข้อมูลนั้น ลักษณะของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้สามารถแสดงได้ดังในรูปที่ 3.2.1

2) โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงคิลิสต์ (link list) เป็นโครงสร้างข้อมูลที่แต่ละข้อมูลอยู่กระจัดกระจายกันออกไปโดยมีการเชื่อมโยงข้อมูลถึงกันข้อมูลต่อข้อมูล ทำให้ไม่สามารถเข้าถึงข้อมูลตัวใดตัวหนึ่งได้ทันที ต้องสืบค้นจากข้อมูลตัวแรกไล่ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งพบตัวที่ต้องการ แต่ข้อดีของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้คือมีความยืดหยุ่นสูงในการเพิ่มลดข้อมูล และถ้าใช้กับกระบวนการที่ต้องกระทำกับข้อมูลทุกตัวไล่กันไป ก็จะมีประสิทธิภาพไม่ยิ่งหย่อนไปกว่าโครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับแต่อย่างใด ชนิดของข้อมูลที่เหมาะสมกับโครงสร้างชนิดนี้คือข้อมูลที่มีการเพิ่มหรือลดจำนวนตลอดเวลา และการนำข้อมูลมาใช้ก็มีการเรียงลำดับตั้งแต่ต้นจนจบ ตัวอย่างของชนิดข้อมูลที่ใช้ได้แก่ ข้อมูลชนิดฟรอนท์ (front) ซึ่งจำนวนข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาและการใช้ข้อมูลก็เลือกใช้ตัวใดก่อนก็ได้ไม่จำเป็นต้องจำเพาะลงไป ลักษณะของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้แสดงได้ดังในรูปที่ 3.2.2

3) โครงสร้างข้อมูลชนิดต้นไม้เชิงตัวเลขสลับ ADT (alternate digital tree) พื้นฐานของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้มาจากโครงสร้างข้อมูลชนิดต้นไม้ทวิภาค (binary tree) ซึ่งแต่ละข้อมูลจะเก็บตำแหน่งของข้อมูลอื่นอีก 2 ตำแหน่ง โดยมีเงื่อนไขในการเก็บข้อมูลต่างกันออกไป เช่น ถ้าต้องการเก็บข้อมูลเพื่อความสะดวกในการค้นหาข้อมูลที่มีค่าอยู่ในช่วงที่ต้องการ ก็อาจตั้งเงื่อนไขว่าถ้าข้อมูลที่เพิ่มมีค่ามากกว่าให้เก็บในฝั่งซ้าย ถ้า

น้อยกว่าให้เก็บในฝั่งขวา ดังนั้นถ้าต้องการหาข้อมูลที่มีค่ามากกว่าข้อมูลในตำแหน่งใด ข้อมูลที่เป็นบริวารในฝั่งขวาทั้งหมดของข้อมูลในตำแหน่งนั้นก็ไม่ต้องพิจารณา ส่วน ADT จะแตกต่างจากต้นไม้ทวิภาคตรงที่การค้นหาข้อมูลจะเป็นการค้นหาที่อ้างอิงตำแหน่งทางเรขาคณิต ดังนั้นในแต่ละข้อมูลจะมีการเก็บตำแหน่งพื้นที่ครอบครองของตัวเองไว้ด้วยเพื่อใช้ในการอ้างอิงกับตำแหน่งที่ต้องการค้นหา และข้อมูลที่เป็นบริวารซึ่งอยู่ในพื้นที่นั้นก็จะมีพื้นที่ครอบครองที่แบ่งจากพื้นที่ครอบครองของข้อมูลต้น โดยมีหลักในการเก็บข้อมูลดังนี้

3.2.3 ประกอบ จุดแรกที่เก็บเข้าไว้ในโครงสร้างจะถือว่าครอบครองพื้นที่ทั้งหมด เมื่อมีการเพิ่มพื้นที่จุดต่อต่อมาพื้นที่ที่ครอบครองโดยจุดนั้นก็ถูกแบ่งให้เล็กลงและให้เป็นพื้นที่ครอบครองของจุดที่เพิ่งเข้ามา โดยพื้นที่ของจุดต้นไม่มีการเปลี่ยนแปลง ดังเช่นจุดที่ 2 ในรูป 3.2.3 ก็จะมีพื้นที่ครอบครองเป็นฝั่งซ้ายของพื้นที่ทั้งหมดและตัวชี้ทางฝั่งซ้ายของจุด 1 ก็จะอ้างอิงไปยังข้อมูลของจุด 2 เมื่อเพิ่มจุด 3 ซึ่งอยู่ในพื้นที่ของจุด 2 พื้นที่ครอบครองของจุด 3 ก็จะเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ครอบครองของจุด 2 คือพื้นที่ 1 ใน 4 ทางฝั่งซ้ายบนของพื้นที่ทั้งหมดพร้อมทั้งเชื่อมโยงตำแหน่งข้อมูลของจุด 3 ไปเก็บยังฝั่งซ้ายของจุด 2 จุดที่ 4 ก็มีลักษณะเช่นเดียวกับจุด 3 สำหรับจุดที่ 5 เป็นจุดแรกที่มีตำแหน่งอยู่บนฝั่งขวาของพื้นที่ ซึ่งเป็นพื้นที่ที่แบ่งจากจุด 1 และยังไม่มีการครอบครอง จุด 5 ก็ครอบครองพื้นที่ฝั่งขวาทั้งหมดและเชื่อมโยงตำแหน่งข้อมูลของจุด 5 ไปเก็บยังฝั่งขวาของจุด 1 เมื่อมีการจัดเก็บข้อมูลครบทั้งหมด ทุกๆ จุดก็จะมีพื้นที่ครอบครองของตนเอง และเมื่อต้องการค้นหาจุดที่อยู่ในพื้นที่ที่สนใจก็ตรวจสอบจากพื้นที่ครอบครองของจุดไล่ตามลำดับลงมา โดยตรวจสอบเฉพาะจุดที่มีพื้นที่ครอบครองซ้อนทับกับพื้นที่ที่สนใจเท่านั้น สำหรับในจุดที่พื้นที่ไม่ซ้อนทับกันก็ไม่จำเป็นต้องพิจารณาจุดนั้นๆ และจุดบริวารทั้งหมดของจุดนั้นที่เชื่อมโยงไปถึง เช่น ถ้าพื้นที่ที่สนใจคือพื้นที่ฝั่งซ้ายของพื้นที่ทั้งหมด จำนวนจุดที่ไม่ต้องพิจารณาก็คือจุดที่อยู่ในฝั่งขวาของจุด 1 ในแผนภูมิต้นไม้ในรูป 3.2.3 ยิ่งพื้นที่สนใจมีขนาดเล็กเท่าใดจำนวนจุดที่ไม่ต้องพิจารณาก็ยิ่งมีมากขึ้น

สำหรับโครงสร้างข้อมูลชนิด ADT ที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะแตกต่างจากที่กล่าวมาเล็กน้อยคือ ในแต่ละจุดจะเชื่อมโยงไปยังจุดบริวาร 4 จุดในแต่ละภาคของพื้นที่ ทำให้ไม่ต้องคำนวณหาลำดับขั้นและทิศทางของการแบ่งพื้นที่ในแต่ละจุด

3.3 ชนิดของข้อมูล

ชนิดของข้อมูลที่ใช้ในโปรแกรมมีจำนวนมากมาย ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะที่สำคัญที่ช่วยให้เข้าใจความสัมพันธ์และการทำงานของโปรแกรมเท่านั้น ดังมีรายละเอียดดังนี้

eline: เป็นข้อมูลที่แทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วนโดยมีข้อมูลต่าง ๆ ดังนี้

- 1) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังตำแหน่งของจุดต่อที่ต้นและปลายของเส้นเชื่อม
- 2) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังตำแหน่งของจุดต่อที่กึ่งกลางเส้นขอบสามเหลี่ยมซึ่งเมื่อมีการประกาศข้อมูล eline ตัวชี้นี้จะมีความเป็นศูนย์ (null) เสมอ
- 3) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังชิ้นส่วนทางด้านซ้ายและขวา เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงไปยังชิ้นส่วนต่างๆผ่านทางเส้นเชื่อมจุด จะมีความเป็นศูนย์ (null) เมื่อไม่มีชิ้นส่วนทางด้านนั้น

- 4) ตัวชี้ชี้ไปยังสมาชิกในพรอนท์ที่อ้างอิงกลับมา เพื่อประโยชน์ในการปรับปรุงพรอนท์เมื่อมีการสร้างชิ้นส่วน จะชี้ไปยังตำแหน่งศูนย์ (null) ถ้าเส้นเชื่อมไม่ได้อยู่ในพรอนท์
- 5) ตัวชี้ชี้ไปยังสมาชิกในพรอนท์ที่อ้างอิงกลับมา (ข้อมูลใหม่) เพื่อประโยชน์ในการปรับปรุงพรอนท์เมื่อมีการสลับการเชื่อมโยง จะมีค่าเป็นศูนย์ (null) เมื่อเส้นเชื่อมชิ้นส่วนนั้น ไม่จำเป็นต้องทำการสลับการเชื่อมโยงระหว่างจุดต่อ

enode: เป็นข้อมูลที่แทนจุดต่อของชิ้นส่วน มีข้อมูลที่เก็บคือ

- 1) ค่าพิกัด x, y ของจุดต่อ
- 2) ค่าระยะห่างของจุดต่อที่กำหนดไว้เพื่อใช้ตรวจสอบในการสร้างจุดต่อใหม่ และในบางครั้งใช้เก็บหมายเลขของจุดต่อเพื่อใช้อ้างอิงไปยังสมาชิกในเวกเตอร์
- 3) ลิงค์ลิสต์ของ eline ที่เชื่อมกับจุดต่อนี้ทั้งหมด มีประโยชน์เพื่อใช้ในการตรวจสอบการเชื่อมโยงไปยังจุดอื่นๆ และใช้ค้นหาชิ้นส่วนที่อยู่รอบจุดต่อในกรณีคำนวณหน่วยแรงที่จุดต่อด้วยวิธีการพื้นตัวเป็นหย่อม การที่เก็บเป็นลิงค์ลิสต์เพราะจำนวนเส้นที่เชื่อมต่อกับจุดต่อในแต่ละจุดมีจำนวนไม่เท่ากัน การเก็บเป็นลิงค์ลิสต์จะประหยัดเนื้อที่ที่สุด การเก็บข้อมูลจะเก็บเป็นตัวชี้ชี้ไปยังตำแหน่งของเส้นเชื่อม และมีการเรียงลำดับในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา

element: เป็นข้อมูลแทนชิ้นส่วนโดยมีข้อมูลที่สำคัญ คือ

- 1) flag สำหรับใช้ตรวจสอบการเพิ่มจุดต่อที่กึ่งกลางชิ้นส่วน โดยตรวจสอบว่าที่ชิ้นส่วนโดยรอบมีการเพิ่มจุดหรือยัง และมีตำแหน่งใกล้เคียงไปหรือไม่ นอกจากนี้บางครั้งยังใช้เก็บหมายเลขของชิ้นส่วนเพื่อใช้ในการอ้างอิง
- 2) ตัวชี้ชี้ไปยัง eline ที่เป็นด้านทั้ง 3 ของชิ้นส่วน การที่เก็บ eline แทน enode เพราะมีความสะดวกกว่าในการอ้างอิงไปยังชิ้นส่วนอื่นๆ เนื่องจากข้อมูลใน eline มีน้อยกว่าทำให้อ้างอิงได้เร็วขึ้น

vector: เป็นข้อมูลที่จำลองโครงสร้างของข้อมูลชนิดแถวลำดับ คือมีการเข้าถึงข้อมูลโดยการอ้างอิงหมายเลขของข้อมูลโดยตรง เพื่อให้มีความสะดวกและรวดเร็วในการแก้สมการหลายตัวแปรที่จำเป็นต้องมีการคูณเชิงสเกลาร์และการคูณระหว่างเมตริกซ์และเวกเตอร์

symmat: เป็นข้อมูลที่แทนเมตริกซ์ชนิดสมมาตร การเก็บข้อมูลจะเก็บข้อมูลชนิด dia_ele ซึ่งเป็นข้อมูลที่แทนค่าสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ โดยจะเก็บข้อมูลเป็นเวกเตอร์ทำให้เข้าถึงสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ได้อย่างรวดเร็ว

dia_ele: เป็นข้อมูลที่อยู่ใน symmat จะเก็บค่าสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์พร้อมทั้งหมายเลขประจำแถวและเก็บลิงค์ลิสต์ที่เชื่อมโยงไปยังสมาชิกในแนวนอนและแนวตั้งของเมตริกซ์ที่สัมพันธ์กับ dia_ele คือ hor_ele และ ver_ele

hor_ele: เป็นข้อมูลที่เก็บค่าสมาชิกของเมตริกซ์และเก็บหมายเลขสดมภ์ของสมาชิกพร้อมทั้งเชื่อมโยงไปยังสมาชิกตัวอื่นๆ ที่อยู่ในแถวเดียวกัน

ver_ele: เป็นข้อมูลที่เก็บตัวชี้ที่ชี้ไปยังข้อมูลสมาชิก hor_ele และเก็บหมายเลขแถวของสมาชิกนั้น ๆ พร้อมทั้งเชื่อมโยงไปยังสมาชิกอื่นที่อยู่ในสดมภ์เดียวกัน สาเหตุที่ต้องเก็บข้อมูลชนิดนี้ก็เพื่อความสะดวกรวดเร็วในการอ้างอิงถึงสมาชิกในการคูณกับเวกเตอร์

ความสัมพันธ์ของข้อมูลชนิด symmat , dia_ele และ ver_ele สามารถแสดงได้ดังในรูป 3.3.1 การเก็บข้อมูลของเมตริกซ์ในลักษณะนี้จะประหยัดหน่วยความจำได้มากและการลดรูปของ ICC ก็ทำได้อย่างมีประสิทธิภาพเพราะเป็นกระบวนการที่ต้องกระทำเรียงไปตามลำดับในแต่ละสมาชิกอยู่แล้ว การคูณกับเวกเตอร์ก็เช่นกัน สามารถอ้างอิงไปยังสมาชิกในเวกเตอร์ได้โดยตรงโดยใช้หมายเลขประจำ แถวและสดมภ์ที่เก็บอยู่ในแต่ละสมาชิก

Boundary: เป็นข้อมูลแรกที่จะเก็บข้อมูลที่ได้จากการนำเข้าจากเพิ่มข้อมูล โดยเป็นข้อมูลของขอบเขตของปัญหา ซึ่งมีข้อมูลย่อยต่อไปนี้

- 1) ค่าพิกัด x, y ของตำแหน่งและปลายของเส้นขอบ
- 2) รัศมีของเส้นขอบในกรณีที่เป็นเส้นโค้ง จะมีค่าศูนย์ถ้าเป็นเส้นตรง มีค่าเป็นบวกเมื่อจุดศูนย์กลางของเส้นโค้งอยู่ทางด้านซ้ายของเส้นขอบ มีค่าเป็นลบเมื่อจุดศูนย์กลางของเส้นขอบอยู่ทางด้านขวาของเส้นขอบ เพราะฉะนั้นถ้าเส้นขอบของปัญหามีขนาดใหญ่กว่าครึ่งวงกลม จำเป็นต้องมีการแบ่งเป็น 2 เส้น
- 3) จำนวนของเส้นย่อยที่จะแบ่งจากเส้นขอบ ทั้งนี้เพื่อความกระชับในการเตรียมข้อมูลและสะดวกในการปรับขนาดของชิ้นส่วน
- 4) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังข้อมูลชนิด bound_load ซึ่งจะเก็บข้อมูลของแรงที่กระทำต่อขอบเขตของปัญหาโดยจะแยกเป็นแรงที่กระทำเป็นจุดและแรงที่กระจายตลอดแนวขอบ
- 5) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังข้อมูลชนิด bound_support ซึ่งจะเก็บข้อมูลของที่รองรับที่ขอบเขตของปัญหา มีทั้งที่รองรับที่เป็นจุดและรองรับตลอดแนวของเส้นขอบ

b_line: เป็นข้อมูลที่ผสมผสานระหว่าง boundary และ eline คือ มีชนิดข้อมูลทั้งหมดของ eline และมีชนิดข้อมูลใน boundary ด้วยยกเว้นจำนวนที่จะแบ่งเป็นเส้นย่อยและค่าพิกัด x, y ซึ่งจะเป็นตัวชี้ไปยัง enode แทน ทั้งนี้ข้อมูลชนิดนี้มีไว้เพื่อใช้เป็นพารามิเตอร์เริ่มต้นในกระบวนการเชื่อมต่อดังกล่าวสามเหลี่ยมหลังการเพิ่มจุดและใช้สร้างขอบของปัญหาใหม่เมื่อมีการลดขนาดของชิ้นส่วนลง

swpline: เป็นข้อมูลที่แทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วน ที่ต้องการจะสลักการเชื่อมโยงระหว่างจุดต่อปลายและจุดต่อข้างเคียง โดยมีข้อมูลต่างๆ ดังนี้

- 1) Evaluate เป็นดัชนีที่ใช้สำหรับลำดับความสำคัญของเส้นขอบที่เชื่อมระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วน โดยเส้นขอบที่มีค่า Evaluate สูงสุด จะถูกจัดเก็บให้อยู่ในลำดับต้นของพรีออนท์และเส้นขอบที่มีค่ารองลงมาก็จะถูกจัดเก็บเรียงต่อกันเป็นลำดับ โดยจะเลือกพิจารณาเฉพาะเส้นขอบที่มีค่า Evaluate มากกว่า 2 เท่านั้น
- 2) ตัวชี้ชี้ไปยังข้อมูลประเภท eline ที่ต้องสลับการเชื่อมโยงระหว่างจุดต่อปลายและจุดต่อข้างเคียง

นอกจากข้อมูลที่ได้กล่าวมาแล้วยังมีข้อมูลชนิดอื่นอีกมาก แต่จะไม่กล่าวถึงในที่นี้เพราะสามารถศึกษาจากรหัสคำนวณเองได้ และไม่มีส่วนช่วยในการเข้าใจความสัมพันธ์และลำดับการทำงานของโปรแกรม

3.4 โครงสร้างและลำดับการทำงานของโปรแกรม

โครงสร้างการทำงานของโปรแกรมของโปรแกรมย่อยต่างๆสามารถศึกษาได้จากงานวิจัยเดิม [23],[26] ในส่วนโปรแกรมหลัก มีรายละเอียดของลำดับการทำงานดังนี้

โปรแกรมหลัก (รูปที่ 3.4.1) เริ่มจากการนำเข้าสู่ข้อมูลขอบเขตของปัญหา แรงกระทำและที่รองรับต่างๆ เข้ามาเก็บในลิงคีสตริงของข้อมูลเส้นขอบ จากนั้นแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นเส้นย่อยๆ เก็บพิกัดของจุดไว้ใน ADT และเก็บเส้นเชื่อมโยงจุดพร้อมทั้งแรงกระทำและที่รองรับไว้ในลิงคีสตริงของ b_line จากข้อมูลใน ADT และ b_line นำมาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมจะได้สามเหลี่ยมที่มีขนาดสอดคล้องกับระยะห่างของจุดที่ขอบ เก็บข้อมูลของชิ้นส่วนที่ได้ในลิงคีสตริงของ element ต่อมาทำการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยใช้ข้อมูลของจุดต่อใน ADT ข้อมูลลิงคีสตริง b_line และข้อมูลลิงคีสตริง eline และเมื่อปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนเสร็จแล้วจะทำการเพิ่มข้อมูลที่จุดกึ่งกลางของด้านสามเหลี่ยมคือข้อมูลต่างๆใน mnode ซึ่งเป็นข้อมูลใน eline เมื่อใส่ข้อมูลให้กับ mnode เสร็จแล้วจึงส่งค่าจุดต่อและชิ้นส่วนที่ได้รับการปรับปรุงคุณภาพแล้วสู่ขั้นตอนคำนวณหาการกระจัดของแต่ละจุดต่อ โดยการสร้างสติฟเนสจากแต่ละชิ้นส่วนจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และแก้สมการด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบมีเงื่อนไขล่วงหน้า เก็บการกระจัดได้ในเวกเตอร์ u เมื่อได้การกระจัดมาแล้วคำนวณหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์ และประมาณค่าหน่วยแรงต่างๆที่จุดต่อทุกจุดต่อ จากนั้นจึงคำนวณค่าคลาดเคลื่อนที่ชิ้นส่วนในโครงข่ายซึ่งใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และคำนวณขนาดของชิ้นส่วนที่สอดคล้องกับค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละชิ้นส่วนแล้วทำการกระจายขนาดของชิ้นส่วนใหม่ไปที่จุดต่อที่เป็นจุดยอดของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม แล้วจึงคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมของปัญหา เพื่อตรวจสอบว่าความคลาดเคลื่อนรวมทั้งหมดมีค่าเกินกว่าที่ยอมให้หรือไม่ ถ้าไม่เกินก็หยุดการทำงาน แต่ถ้าเกินก็ปรับขนาดของชิ้นส่วนใหม่โดยนำข้อมูลจากลิงคีสตริงของ b_line มาสร้างขอบของปัญหาใหม่เก็บไว้ในลิงคีสตริงของข้อมูลขอบ ก็จะได้ขอบของปัญหาตัวใหม่สำหรับวิเคราะห์ต่อไป กระทำซ้ำในลักษณะเดิมจนกระทั่งค่าคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำกว่าที่ยอมให้ก็หยุดการทำงาน

3.5 การแสดงผล

การแสดงผลของโปรแกรมอยู่ในรูปแฟ้มข้อมูล (file) 2 ประเภทคือ

1) แฟ้มข้อมูลที่เป็นตัวหนังสือที่สามารถเปิดอ่าน และแก้ไขข้อมูลได้ด้วย โปรแกรมแก้ไขคำ (text editor) ทั่วไป แฟ้มประเภทนี้มี 2 แฟ้มคือ

1.1) แฟ้มแสดงตำแหน่งของจุดต่างๆ และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างชิ้นส่วนและจุดต่อเพื่อนำไปปรับปรุงใช้เป็นข้อมูลสำหรับโปรแกรมอื่นเพื่อเปรียบเทียบผลต่อไป

1.2) แฟ้มข้อมูลแสดงผลการคำนวณของแต่ละจุดต่อ โดยจะแสดงหมายเลขจุดต่อ การกระจัด หน่วยแรง และความคลาดเคลื่อนในจุดต่อนั้นๆ

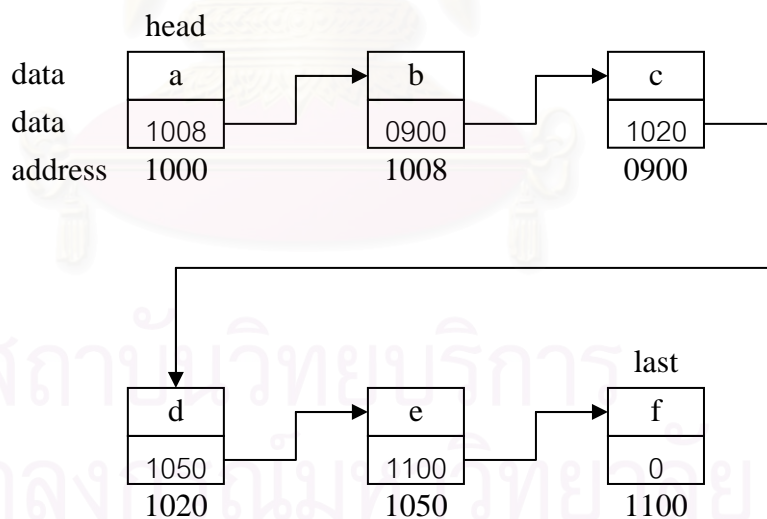
2) แฟ้มข้อมูลแลกเปลี่ยนประเภทกราฟิก เพื่อใช้ในกระบวนการแสดงผลทางกราฟิกโดยโปรแกรม CAD ต่างๆ ในที่นี้เลือกใช้แฟ้มมาตรฐานประเภทแฟ้มแลกเปลี่ยนข้อมูล DXF (data exchange file) ซึ่งจะมี 2 ประเภทคือ ประเภทที่เป็นแฟ้มตัวอักษร (text file) และแฟ้มตัวเลขฐานสอง (binary file) แต่จะเลือกใช้แฟ้มประเภทตัวอักษรเพื่อความสะดวกในการแก้ไขตรวจสอบด้วยโปรแกรมแก้ไขคำ โดยจะแสดงโครงข่ายของชิ้นส่วน การกระจัด หมายเลขจุดต่อ และหมายเลขชิ้นส่วน รวมทั้งแสดงคอนทัวร์ของหน่วยแรงต่างๆ พลังงาน และค่าคลาดเคลื่อนของพลังงาน ในการตรวจสอบผลการแสดงก็สามารถเปิดหรือปิดเลเยอร์ในโปรแกรม CAD เพื่อพิจารณาเฉพาะส่วนที่สนใจได้ สำหรับรูปแบบมาตรฐานชนิดนี้สามารถศึกษาได้ในคู่มือของโปรแกรม CAD ทั่วไป

| | | | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|--|------|
| data | a | b | c | d | e | | char |
| address | 1000 | 1001 | 1002 | 1003 | 1004 | | |

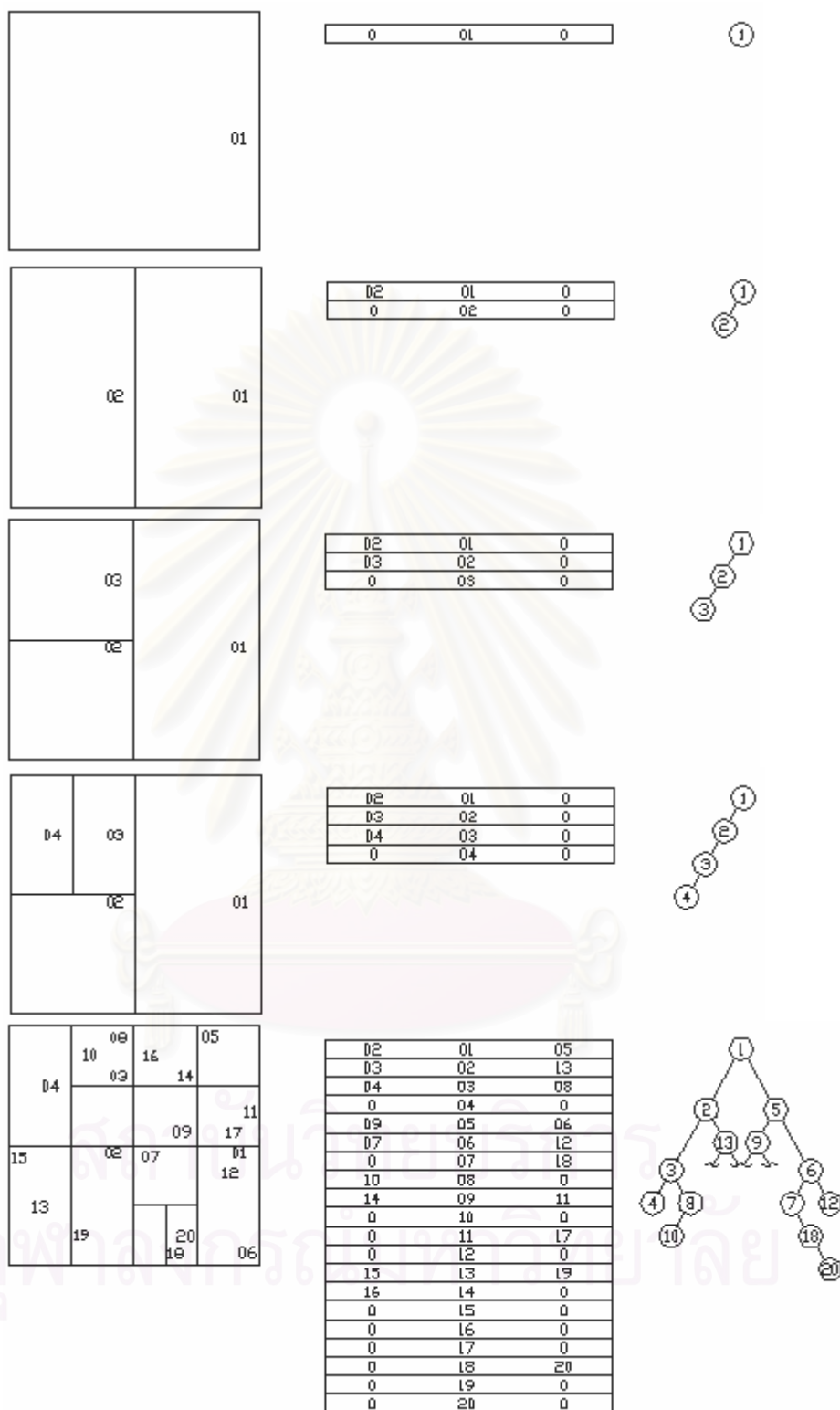
| | | | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|--|-----|
| data | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | int |
| address | 1000 | 1002 | 1004 | 1006 | 1008 | | |

| | | | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|--|----------|
| data | a | b | c | d | e | | long int |
| address | 1000 | 1004 | 1008 | 1012 | 1016 | | |

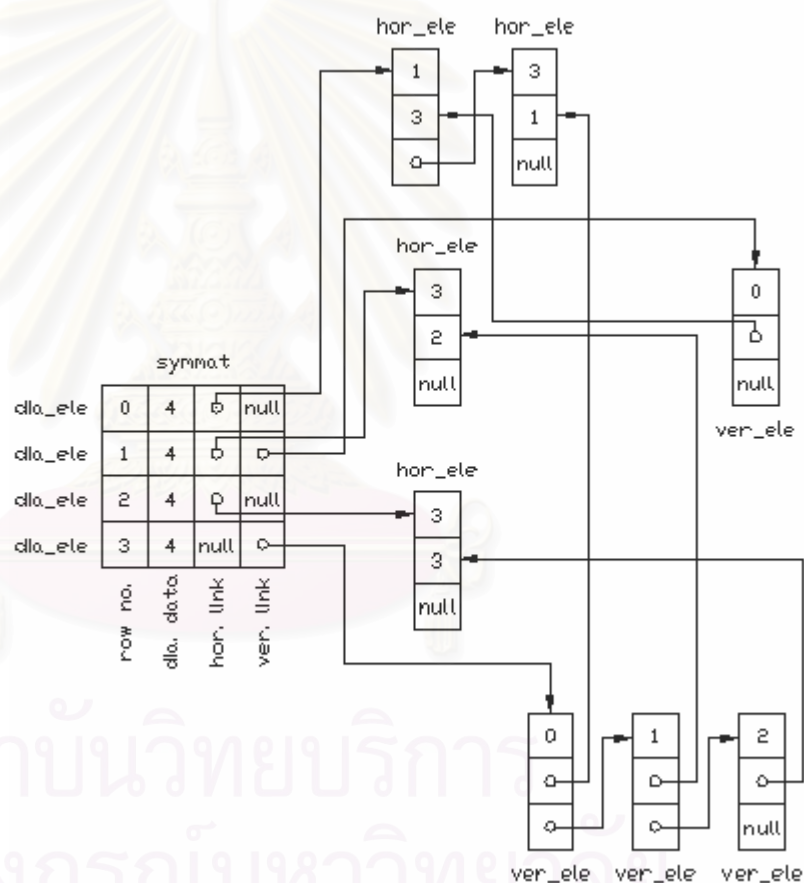
รูปที่ 3.2.1 โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ



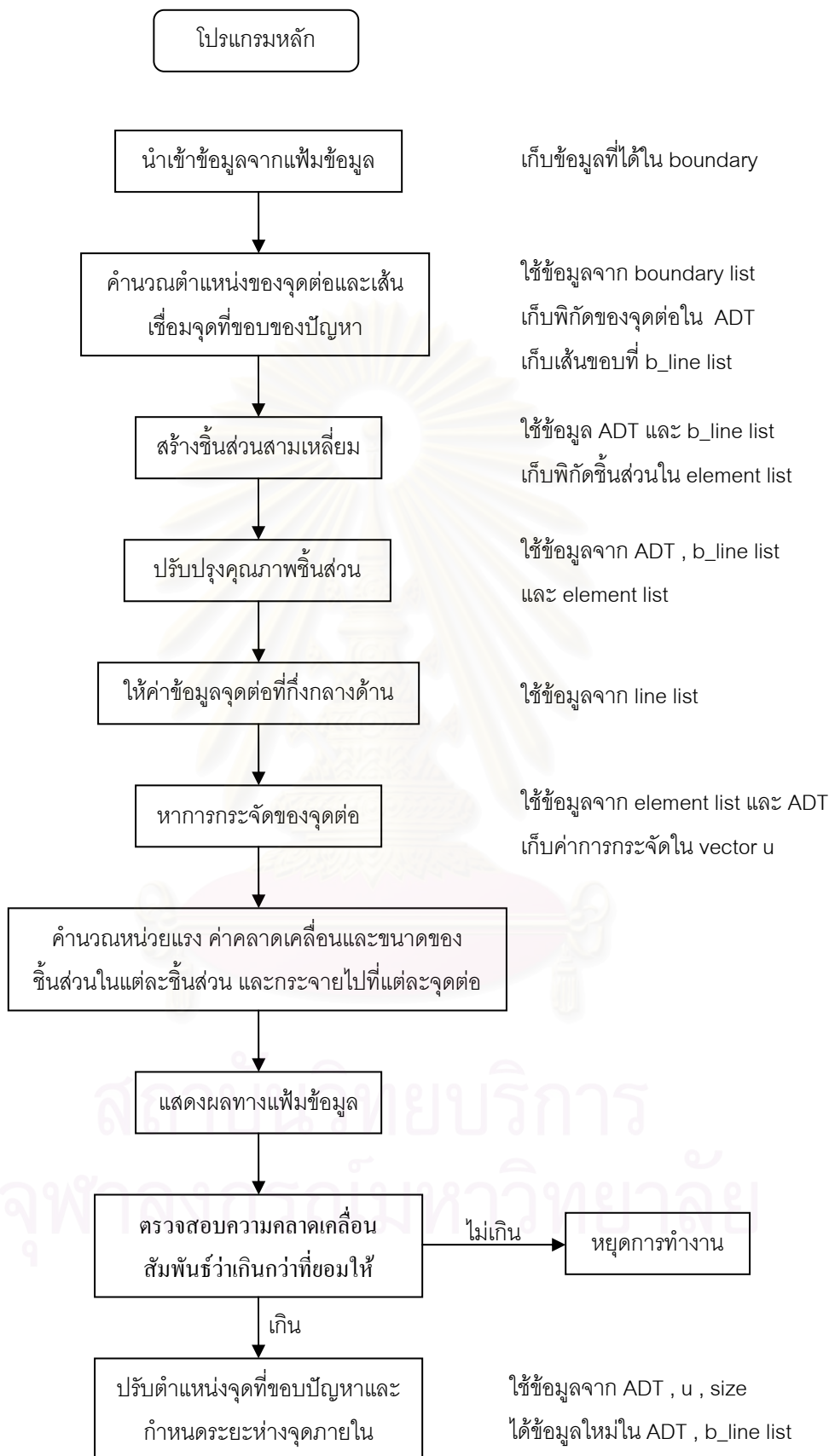
รูปที่ 3.2.2 โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงค์ลิสต์



รูปที่ 3.2.3 การจัดเก็บข้อมูลในโครงสร้างข้อมูล ADT

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 4 & 3 & & 1 \\
 & 4 & & 2 \\
 & & 4 & 3 \\
 \text{SYM.} & & & 4
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$


รูปที่ 3.3.1 การจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์



รูปที่ 3.4.1 โครงสร้างการทำงานของโปรแกรมหลัก

บทที่ 4

ตัวอย่างการวิเคราะห์ผล

เพื่อเป็นการตรวจประสิทธิภาพและความน่าเชื่อถือได้ในการทำงาน และการกระจายค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยภายในโครงข่ายชั้นส่วนที่เป็นผลเฉลยซึ่งได้จากการเปลี่ยนชนิดของชั้นส่วนจากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชั้นส่วนอัตโนมัติเดิม ที่ใช้ชั้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ เป็นชั้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และใช้การปรับปรุงโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกตัวอย่างที่ใช้ในการวิเคราะห์ 4 ตัวอย่างด้วยกัน และ เปรียบเทียบกับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชั้นส่วนอัตโนมัติเดิมที่ใช้ชั้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ ที่มีการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบของลาปลาซ และวิธีการปรับเรียบเชิงมุม

ซึ่งปัญหาที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ

- 1) แผ่นบางขนาดอนันต์มีรูเจาะที่กึ่งกลางแผ่นและรับแรงดึงแผ่กระจายสม่ำเสมอที่ปลายทั้ง 2 ด้าน
- 2) แผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด 2 แรง กระทำในทิศทางตรงข้ามผ่านศูนย์กลางของวงกลม
- 3) คานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายคานอิสระ
- 4) คานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด

สำหรับตัวอย่างที่ 1 – 3 เป็นปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ ซึ่งมักใช้ในการตรวจสอบความถูกต้อง และประสิทธิภาพ ในการสร้างชั้นส่วนสามเหลี่ยมของโปรแกรมที่วิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยในตัวอย่างที่ 3 เป็นการวิเคราะห์ปัญหาการรับแรงดัดเพื่อเป็นการยืนยันความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ และยังแสดงถึงประสิทธิภาพของความแตกต่างของคุณสมบัติ ระหว่างชั้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ในโปรแกรมได้เป็นอย่างดี และในตัวอย่างที่ 4 เป็นการทดสอบปัญหาในการใช้งานจริงไม่สามารถตรวจสอบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลเฉลยแม่นยำตรงได้

4.1 ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง

ตัวอย่างที่ 1 เป็นการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นบางขนาดอนันต์มีรูเจาะที่กึ่งกลางแผ่น และรับแรงดึงแผ่กระจายที่ปลายทั้ง 2 ด้าน เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีขนาดอนันต์จึงลดรูปให้มีขนาดนับได้ดังแสดงในรูป 4.1.1 (ก) คือมีขนาดกว้าง 40 ซม. ยาว 40 ซม.หนา 0.1 ซม. มีรูเจาะที่กึ่งกลางขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 ซม. รับแรงแผ่กระจายตามแนวยาวที่ปลายทั้ง 2 ด้านขนาด 1,000 กก./ตร.ซม. วัสดุมีโมดูลัสยืดหยุ่น 2×10^6 กก./ตร.ซม. อัตราส่วนบัวของเท่ากับ 0.3 สามารถสร้างแบบจำลองสำหรับวิเคราะห์ผลโดยอาศัยหลักสมมาตราได้ดังแสดงในรูปที่ 4.1.1 (ข)

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับให้เท่ากับ 0.01 จะได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 3 รอบ โดยมีโครงข่ายชิ้นส่วนในแต่ละรอบดังแสดงในรูปที่ 4.1.2 จะเห็นว่าชิ้นส่วนที่สร้างขึ้นในรอบที่ 2 และรอบที่ 3 จะมีขนาดไม่ต่อเนื่องมากนักในบริเวณขอบที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนมากซึ่งในกรณีนี้คือ ขอบที่รับแรงแผ่กระจาย เมื่อพิจารณาการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนดังแสดงในรูปที่ 4.1.3 จะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนในโครงข่ายที่ 2 จะมีค่าคลาดเคลื่อนสูงอยู่ 2 บริเวณ คือ บริเวณที่รับแรงแผ่กระจาย และบริเวณรูเจาะ ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงสัดส่วนของพื้นที่ที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนที่สูงกว่าบริเวณอื่น บริเวณที่รับแรงแผ่กระจาย จะมีการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนเป็นบริเวณที่ไม่กว้างเมื่อเทียบกับความยาวของส่วนที่รับแรงแผ่กระจาย ทำให้เมื่อมีการเพิ่มจุดต่อเพื่อจะทำการปรับขนาดชิ้นส่วนในรอบถัดไป จะมีการเพิ่มจุดต่อที่เฉพาะที่ขอบของปัญหาทำให้เมื่อถึงขั้นตอนการสร้างสามเหลี่ยมจึงไม่มีจุดต่อที่เป็นตัวเลือกมากนักในการสร้างชิ้นส่วน ส่งผลให้ชิ้นส่วนบริเวณนี้ไม่ต่อเนื่องมากนัก ส่วนพื้นที่บริเวณรูเจาะ จะมีการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนเป็นสัดส่วนที่เหมาะสมในการสร้างจุดต่อเพิ่มในการปรับขนาดในรอบถัดไปทำให้เมื่อถึงขั้นตอนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม จึงมีจุดต่อที่เป็นตัวเลือกเพียงพอในการสร้างชิ้นส่วนจึงส่งผลให้โครงข่ายของชิ้นส่วนบริเวณนี้มีความต่อเนื่อง เมื่อพิจารณาถึงค่าคลาดเคลื่อนในโครงข่ายสุดท้ายจะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนกระจายเท่ากันเกือบทั้งปัญหา ซึ่งเหลือบริเวณที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนมากอีกเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

สำหรับการกระจายค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.1.4 – 4.1.6 ซึ่งจะมีความต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทัวร์ในทุกโครงข่ายชิ้นส่วน เพราะเป็นผลมาจากหน่วยแรงที่จุดต่อที่ได้มีการประมาณจากชิ้นส่วนโดยรอบเรียบร้อยแล้ว เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงตามแนว AB ในรูปที่ 4.1.1 ได้ผลการเปรียบเทียบในแต่ละโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 4.1.7 – 4.1.9 ซึ่งมีจะมีลักษณะเข้าสู่ค่าตอบแม่นยำมากขึ้นเมื่อโครงข่ายของชิ้นส่วนมีความละเอียดมากขึ้น และในโครงข่ายสุดท้ายผลเฉลยที่ได้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมาก และจะสังเกตเห็นว่าหน่วยแรงในทิศทาง x หลังจากผ่านค่าสูงสุดจะมีค่าลดลงมากกว่าค่าที่ได้จากการคำนวณผลเฉลยแม่นยำตรง และจะเข้าสู่ศูนย์ในบริเวณใกล้จุด B ทั้งนี้เนื่องจากการจำลองแผ่นบางขนาดอนันต์ด้วยแผ่นบางที่มีขนาดนับได้ซึ่งจะมีหน่วยแรงในทิศทาง x เท่ากับศูนย์ที่ขอบของปัญหาในขณะที่แผ่นบางขนาดอนันต์ไม่มีขอบ เมื่อค่าหน่วยแรงลดลงถึงค่าหนึ่งก็จะคงที่ไปตลอด ลักษณะเช่นนี้เกิดขึ้นกับหน่วยแรงในทิศทาง y เช่นกัน โดยที่จุด B หน่วยแรงที่ได้จะมีค่าต่ำกว่าค่าผลเฉลยแม่นยำเล็กน้อยแต่จะส่งผลในบริเวณแคบๆ ไม่มากเหมือนกับหน่วยแรงในทิศทาง x สำหรับหน่วยแรงเฉือนจะไม่เกิดผลกระทบเช่นนี้เพราะทั้งในแผ่นบางขนาดอนันต์และแผ่นบางขนาดนับได้ให้ผลเฉลยเท่ากับศูนย์เท่ากัน

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติในงานวิจัยนี้กับผลการวิเคราะห์ที่ได้จากกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบของลาปลาซ และตั้งเป้าหมายของการปรับขนาดไปที่ค่าเฉลี่ยระหว่างค่าคลาดเคลื่อนปัจจุบันและค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับให้ [23] และ กระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม [26] พบ ว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 4 รอบทั้งสองงานวิจัยเดิม โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และ

ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำในโครงข่ายสุดท้ายเปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1.10 – 4.1.13

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย พบว่าในงานวิจัยนี้ยังคงให้ความต่อเนื่องของชิ้นส่วนที่ดีกว่าในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ ซึ่งสร้างชิ้นส่วนโดยมีขนาดของชิ้นส่วนแบ่งออกเป็นหย่อมอย่างชัดเจน แต่ในงานวิจัยนี้ให้ความต่อเนื่องของชิ้นส่วนได้ไม่ดีเฉพาะบริเวณขอบของปัญหาที่รับแรงแผ่กระจายเท่านั้นซึ่งเป็นผลจากการกระจายค่าคลาดเคลื่อนดังที่ได้กล่าวไปแล้ว

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ ในโครงข่ายสุดท้ายมีจำนวนจุดต่อเพียง 723 จุดต่อเท่านั้น และมีการปรับขนาดชิ้นส่วนเพียง 3 รอบ ก็ทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 2079 จุดต่อ และในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 1848 จุดต่อ ซึ่งทั้งสองงานวิจัยต้องใช้การปรับขนาดโครงข่าย เพื่อให้ได้ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อน สัมพัทธ์ที่ยอมให้ 4 รอบ ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ทำให้จำนวนจุดต่อลดลงถึงเกือบ 3 เท่า และส่งผลถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดลดลงถึงเกือบ 3 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ และลดลงเกือบ 4 เท่า ในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำบริเวณขอบ AB ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยนี้ให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องมากกว่าผลจากงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ และให้ผลคล้ายกับผลจากงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม ที่เป็นเช่นนั้นเพราะในงานวิจัยนี้ได้คำนวณค่าหน่วยแรงที่ขอบของปัญหาจากการประมาณค่าของหน่วยแรงที่ได้จากชิ้นส่วนรอบจุดต่อ ซึ่งคล้ายกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม ซึ่งทำให้ได้ผลการคำนวณที่ต่อเนื่องเหมือนกัน

จากขั้นตอนการปรับขนาดชิ้นส่วนเมื่อพิจารณาสมการที่ใช้คำนวณหาค่าขนาดชิ้นส่วนใหม่ คือ สมการ (2.4.2) จะเห็นได้ว่าถ้าใช้ค่า $p=1$ จะทำให้ได้ขนาดของชิ้นส่วนใหม่เล็กลง ซึ่งจะส่งผลให้มีการเพิ่มจุดต่อมากขึ้น และน่าจะทำให้จำนวนรอบในการปรับขนาดลดลงด้วย แต่เมื่อพิจารณาถึงทฤษฎีและความถูกต้องของการปรับเปลี่ยนค่า p ให้มีค่าอื่นที่ไม่ใช่ 2 นั้นจะเห็นว่าการปรับเปลี่ยนนี้จะไม่ถูกต้องทางทฤษฎีคือจะขัดแย้งกับสมการที่ (2.4.1) นั่นคือ p คือ กำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐาน ซึ่งเท่ากับ 2 นั่นเอง ดังนั้นการปรับเปลี่ยนนี้อาจจะส่งผลถึงการสร้างจุดต่อในที่ที่ไม่เหมาะสมซึ่งอาจจะทำให้ผลที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นได้ ดังนั้นเพื่อเป็นการทดสอบ ในงานวิจัยนี้จึงทดลองใช้ค่า $p=1$ ในการคำนวณหาขนาดชิ้นส่วนใหม่ซึ่งจะเป็นการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยได้เร็วขึ้น โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1.10 – 4.1.13

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย พบว่ามีการสร้างชิ้นส่วนที่ดีขึ้นบริเวณขอบของปัญหาที่รับแรงแผ่กระจาย อันเนื่องมาจากการเพิ่มจุดต่อที่มากขึ้นในบริเวณใกล้ขอบของปัญหาเนื่องจากมีการ

ลดขนาดของชิ้นส่วนใหม่ลง ส่งผลให้การสร้างชิ้นส่วนในบริเวณนี้ทำได้ดีขึ้น แต่ในบริเวณรูเจาะมีจำนวนชิ้นส่วนค่อนข้างหนาแน่นซึ่งก็เป็นผลจากเพิ่มจำนวนจุดต่อที่มากขึ้นนั่นเอง การลดขนาดของชิ้นส่วนใหม่นี้จะส่งผลกระทบต่อให้มีการเพิ่มจุดต่อในบริเวณที่ไม่จำเป็นซึ่งทำให้มีจำนวนจุดต่อมากเกินไปในบางบริเวณ แต่ความต่อเนื่องของโครงข่ายโดยรวมก็มีความต่อเนื่องกันค่อนข้างดี

ในด้านเวลา ในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าวิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยนี้มีการปรับขนาดชิ้นส่วนลดลงเหลือเพียง 2 รอบ ซึ่งก็เป็นผลมาจากการลดขนาดชิ้นส่วนใหม่นั้นเอง ซึ่งก็ส่งผลให้มีจำนวนจุดต่อเพิ่มขึ้นเป็น 980 จุดต่อ และเวลารวมในการคำนวณของวิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยจะน้อยลงเล็กน้อย เพราะใช้การคำนวณเพียง 2 โครงข่าย แต่ในโครงข่ายสุดท้ายมีจำนวนจุดต่อมากขึ้น

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้จะเกิดความผิดพลาดขึ้นที่จุดต่อแรกที่บริเวณรูเจาะคือให้ค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดที่หน่วยแรงในทิศทาง y และผิดพลาดมากที่สุดที่หน่วยแรงในทิศทาง x และหน่วยแรงเฉือน แต่ในบริเวณอื่นยังคงให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องเช่นเดิม ซึ่งผลที่เกิดขึ้นนี้อาจเป็นผลจากการปรับเปลี่ยนค่า p ซึ่งผิดไปจากทฤษฎีนั่นเอง ดังนั้นในการปรับเปลี่ยนค่า p ให้เป็นค่าอื่นที่ไม่ใช่ 2 ก็ควรจะมีการตรวจสอบผลการคำนวณที่ได้ด้วยว่ามีลักษณะการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงเหมาะสมหรือไม่ คือมีการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงอย่างทันทีทันใดหรือไม่นั่นเอง

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าผลที่ได้จากการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย นั้นยังไม่เห็นผลมากนัก เนื่องจากจำนวนโครงข่ายการปรับขนาดชิ้นส่วนในงานวิจัยนี้ยังไม่มากนักและยังมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมากด้วย และผลของงานวิจัยนี้ยังให้ผลที่ดีกว่าผลจากงานวิจัยเดิมในด้านของเวลาไม่มากนัก เนื่องมาจากในตัวอย่างนี้มีบริเวณที่มีค่าหน่วยแรงคงที่เป็นบริเวณกว้าง ทำให้ชิ้นส่วนที่ใช้ในงานวิจัยเดิมยังใช้ได้

4.2 ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด

ตัวอย่างนี้เป็นปัญหาแผ่นวงกลมบางขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 ซม. รับแรงกระทำเป็นจุด 2 แรง ในแนวแกน y กระทำในทิศทางตรงกันข้าม ขนาดของแรงเท่ากับ 100 กก. วัสดุมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 2×10^6 กก./ตร.ซม. และอัตราส่วนบัวของเท่ากับ 0.3 ดังแสดงในรูปที่ 4.2.1 (ก) และสามารถสร้างแบบจำลองสำหรับวิเคราะห์ผลโดยอาศัยหลักสมมาตรได้ดังแสดงใน รูปที่ 4.2.1 (ข) โดยจำลองแรงกระทำให้แผ่กระจายเป็นรูปสามเหลี่ยมเพื่อลดปัญหาเนื่องจากบริเวณที่แรงกระทำเป็นจุดมีความคลาดเคลื่อนมากกว่าในบริเวณอื่นมาก ทำให้การลดขนาดชิ้นส่วนในบริเวณอื่นไม่มีผลต่อความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม โดยในปัญหานี้ได้จำลองแรงที่กระทำแผ่กระจายออกไป 4 องศาจากแนวแกนเดิมในที่มีระยะ 0.0698 ซม. จากแนวแกน y ซึ่งอาจจะกำหนดให้มากขึ้นหรือน้อยลงกว่านี้ได้ขึ้นอยู่กับผู้ทำการวิเคราะห์

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้เท่ากับ 0.05 จะได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 8 รอบ โดยมีโครงข่ายชิ้นส่วนบางโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 4.2.2 จะเห็นว่าโครงข่ายชิ้นส่วนทุกโครงข่ายมีความต่อเนื่องกันดี

โดยจะพบว่า มีการเพิ่มจุดต่อมากเฉพาะบริเวณที่ได้รับแรงกระทำเท่านั้นซึ่งก็เป็นผลมาจากค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นสูงเฉพาะบริเวณที่แรงกระทำเท่านั้น ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้นจะพบว่า มีการกระจายไม่ดัดนักซึ่งเป็นผลมาจากประสิทธิภาพของชิ้นสามเหลี่ยมที่ใช้ในการคำนวณ คือ ให้ผลการวิเคราะห์ที่ตีมากในบริเวณที่ห่างไกลกับตำแหน่งที่แรงกระทำ เนื่องจากลักษณะการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนที่ใช้มากกว่าที่บริเวณใกล้แรงกระทำนั่นเอง ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนบริเวณดังกล่าวมีค่าน้อยมากคือไม่ถึง 1 เปอร์เซ็นต์ จึงทำให้ไม่มีการเพิ่มจุดต่อในบริเวณนี้ แต่ไปเพิ่มจุดต่อที่บริเวณใกล้กับที่แรงกระทำเนื่องจากค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นสูง แต่เมื่อมีการเพิ่มจุดต่อแล้ว และทำการคำนวณรอบต่อไป จนถึงรอบสุดท้าย จะพบว่าบางบริเวณที่ยังมีค่าคลาดสูงอยู่ถึง 10 เปอร์เซ็นต์ แต่โปรแกรมก็หยุดการคำนวณซึ่งก็เป็นจากค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่บริเวณที่ห่างไกลจากจุดที่แรงกระทำนั่นเองที่มีค่าน้อยมากทำให้ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมที่เกิดขึ้นน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ ทำให้การกระจายตัวของค่าคลาดเคลื่อนยังไม่ดีเท่าที่ควร

สำหรับการกระจายค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.2.4 – 4.2.6 ซึ่งจะมีการต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทัวรีนในทุกโครงข่าย และเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงตามแนว AB ในรูปที่ 4.2.1 ได้ผลการเปรียบเทียบในแต่ละโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 4.2.7 – 4.2.9 ซึ่งจะมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากตั้งแต่โครงข่ายแรก

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลจากงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 7 รอบ และงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 4 รอบ โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ใน รูปที่ 4.2.10 – 4.2.13

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย พบว่าในงานวิจัยนี้ยังคงให้ความต่อเนื่องของชิ้นส่วนที่ดีกว่าในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ แต่เมื่อพิจารณาถึงลักษณะของโครงข่ายจะเห็นว่า บริเวณที่เป็นส่วนโค้งของปัญหา ชิ้นส่วนที่ใช้ในงานวิจัยนี้ไม่สามารถเป็นตัวแทนในลักษณะทางกายภาพได้ดีนัก เนื่องจากมีการเพิ่มจุดต่อน้อยในบริเวณนี้ รวมทั้งคุณสมบัติของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเป็นชิ้นส่วนที่มีรูปร่างเหมือนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ คือมีด้านของสามเหลี่ยมเป็นเส้นตรง วิธีการที่จะแก้ปัญหานี้คือ เปลี่ยนโครงข่ายเริ่มต้นของปัญหานี้ให้มีความละเอียดมากขึ้น แต่ก็ส่งผลถึง การกระจายของค่าคลาดเคลื่อนและจำนวนจุดต่อที่สร้างขึ้นรวมทั้งจำนวนรอบและเวลาในการคำนวณด้วย หรือเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ให้มีด้านเป็นพหุนามกำลัง 2

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ ในโครงข่ายสุดท้ายมีจำนวนจุดต่อเพียง 151 จุดต่อเท่านั้น แต่มีการปรับขนาดชิ้นส่วนถึง 8 รอบ เพื่อทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 2630 จุดต่อและใช้การปรับขนาดโครงข่ายถึง 7 รอบ และในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม มี

จำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 2366 จุดต่อและใช้การปรับขนาดโครงข่ายเพียง 4 รอบ ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ทำให้จำนวนจุดต่อลดลงถึงเกือบ 17 เท่า และส่งผลถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดลดลงถึงเกือบ 15 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิม ถึงแม้ว่าจะใช้จำนวนรอบในการปรับขนาดถึง 8 รอบ สาเหตุที่มีการปรับขนาดถึง 8 รอบเพราะบริเวณที่มีการเพิ่มจุดต่อมีบริเวณไม่มากเมื่อเทียบกับพื้นที่ของปัญหา และการคำนวณหาขนาดชิ้นส่วนใหม่ก็เป็นการทำให้มีการเพิ่มจุดต่อเฉพาะบริเวณที่จำเป็นเท่านั้น จึงทำให้การปรับขนาดของปัญหานี้เป็นไปอย่างค่อยเป็นค่อยไปและได้โครงข่ายที่มีความต่อเนื่องมาก

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยนี้ให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องมากกว่า ผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ และให้ผลคล้ายกับผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม ถึงแม้จะมีจุดต่อจำนวนน้อยมากที่อยู่บนขอบ AB

เมื่อได้ทดลองใช้วิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 2 รอบโดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2.10 – 4.2.13

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย พบว่ามีการสร้างชิ้นส่วนเป็นจำนวนมากในบริเวณใกล้จุดที่รับแรงกระทำ ทำให้โครงข่ายที่ได้ไม่ต่อเนื่องมากนัก

ในด้านเวลา ในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าวิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยนี้มีการปรับขนาดชิ้นส่วนลดลงเหลือเพียง 2 รอบ แต่ก็ส่งผลให้มีจำนวนจุดต่อเพิ่มขึ้นเป็น 201 จุดต่อ และเวลารวมในการคำนวณของวิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยจะลดลงเกือบ 3 เท่า เพราะใช้การคำนวณเพียง 2 โครงข่าย

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้ยังคงให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องเช่นเดิม

เมื่อพิจารณาถึงผลกระทบเนื่องจากการจำลองแรงที่กระทำแก่กระจายออกไป 4 องศาจากแนวแรงเดิม ซึ่งจะเห็นว่าไม่ส่งผลกระทบต่อหน่วยแรงบริเวณขอบ AB ของปัญหาเนื่องจากขอบ AB ห่างไกลจากตำแหน่งที่แรงกระทำมาก จึงทำให้ผลกระทบจากการจำลองแรงกระทำเป็นจุดเป็นแรงแก่กระจายนี้ไม่ส่งผลกระทบต่อบริเวณที่ได้รับผลกระทบควรจะอยู่ใกล้กับตำแหน่งที่แรงกระทำ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ขอบ AC กับผลเฉลยแม่นยำตรง และเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัยเดิมกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ขอบ AC ด้วย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2.14 – 4.2.16 ซึ่งจะพบว่าผลจากการเปรียบเทียบทุกงานวิจัยให้ค่าของหน่วยแรงในลักษณะคล้ายกัน คือมีความคลาดเคลื่อนมากบริเวณที่แรงกระทำ แต่มีลักษณะของหน่วยแรงเป็นไปในทางเดียวกัน และผลการวิเคราะห์หน่วยแรงเฉือนที่ได้จากงานวิจัยนี้ให้ค่าคลาดเคลื่อนที่มากกว่าในงานวิจัยเดิม ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นเนื่องจากการจำลองแรงกระทำเป็นจุดเป็นแรงแก่กระจายนั่นเอง ซึ่งเมื่อทดลองลดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ให้ลดลงก็ยังไม่สามารถแก้ไขปัญหานี้ได้เนื่องจากสภาพของปัญหาที่เปลี่ยนแปลงไปแล้ว

นั่นเอง วิธีแก้ปัญหาคือต้องลดมุมที่ให้แรงแผ่กระจายกระทำให้เล็กลงเพื่อให้ลักษณะของปัญหาใกล้เคียงกับปัญหาเดิมมากที่สุด แต่ก็ส่งผลให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนมากขึ้นอย่างมากที่บริเวณแรงกระทำ

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าผลที่ได้จากการเร่งการลู่เข้าสู่ผลเฉลย นั้นทำให้จำนวนรอบในการปรับขนาดและเวลาลดลงอย่างมาก และผลของงานวิจัยนี้ยังให้ผลที่ดีกว่าผลจากงานวิจัยเดิมในด้านของเวลาอย่างมาก เนื่องจากในตัวอย่างนี้ค่าหน่วยแรงมีการเปลี่ยนแปลงเกือบตลอดทั้งปัญหา แต่ยังให้โครงข่ายที่มีความต่อเนื่องดีอยู่ ทำให้เห็นความได้เปรียบของคุณสมบัติของชิ้นส่วนที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้อย่างชัดเจน และจะเห็นว่าการจำลองแบบจำลองของปัญหามีความสำคัญมากดังที่ให้เห็นในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ตามแนว AC กับผลเฉลยแม่นยำ

4.3 ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาคานยื่น รับแรงกระทำที่ปลายอิสระ

ในตัวอย่างนี้เป็นการวิเคราะห์ปัญหารับแรงดัด โดยสามารถตรวจสอบผลการวิเคราะห์ที่ได้ทั้งในด้านหน่วยแรงและระยะการเคลื่อนที่กับผลเฉลยแม่นยำ เพื่อยืนยันความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ก่อนจะนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกัน (รับแรงดัด) ในตัวอย่างที่ 4 ซึ่งเป็นปัญหาการใช้งานจริง ไม่มีผลเฉลยแม่นยำ โดยลักษณะของปัญหาที่ใช้วิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 3 นี้เป็นคานยื่นที่มีความยาว 200 ซม. ลึก 30 ซม. และกว้าง 20 ซม. กำหนดค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุเท่ากับ 2.634×10^5 กก./ซม. และมีอัตราส่วนบัวของเท่ากับ 0.22 รับแรงกระทำที่ปลายคานด้านอิสระ 1,000 กก. ดังแสดงในรูปที่ 4.3.1 (ก) โดยจำลองแรงกระทำให้กระจายทั่วทั้งหน้าตัดคาน ดังแสดงในรูปที่ 4.3.1 (ข)

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้เท่ากับ 0.05 จะได้ผลการวิเคราะห์ 1 รอบ โดยมีโครงข่ายชิ้นส่วนดังแสดงในรูปที่ 4.3.2 (ก) จะเห็นว่าโครงข่ายชิ้นส่วนมีความต่อเนื่องกัน ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้น จะพบว่ามีการกระจายไม่ดัดเนื่องจากไม่มีการปรับขนาดชิ้นส่วนจึงไม่สามารถที่จะกระจายค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นได้ และจะพบว่าค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในพื้นที่ของปัญหาส่วนใหญ่จะน้อยมากคือไม่ถึง 1 เปอร์เซ็นต์ แต่จะเกิดค่าคลาดเคลื่อนที่สูงกว่าบริเวณจุดรองรับ และปลายคานที่รับแรงแผ่กระจายแต่ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นก็ไม่สูงมากและเป็นบริเวณน้อย จึงทำให้ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมที่เกิดขึ้นน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ทำให้ไม่มีการปรับขนาดชิ้นส่วน

สำหรับการกระจายค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.3.3 ซึ่งจะมีการต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทัวร์ดี เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นยำตามแนวขอบล่างของคาน ได้ผลการเปรียบเทียบ ดังแสดงในรูปที่ 4.3.3 ซึ่งจะมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมาก

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลการวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 7 รอบ และงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 4 รอบ

โดยได้แสดงโครงข่ายขึ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.3.4 – 4.3.7

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของขึ้นส่วนในโครงข่าย ไม่สามารถเปรียบเทียบผลที่ได้จากงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเดิมได้อย่างชัดเจนเนื่องจากผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ไม่มีการปรับขนาดโครงข่าย แต่เมื่อพิจารณาโครงข่ายสุดท้ายที่ได้จากงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ จะมีการสร้างขึ้นส่วนขนาดเล็กรวมกันเป็นหย่อมสลับด้วยขึ้นส่วนขนาดใหญ่ที่รวมกันเป็นหย่อม และเมื่อพิจารณาโครงข่ายสุดท้ายที่ได้จากงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมจะให้ขนาดของขึ้นที่ต่อเนื่องกันดีตลอดทั้งโครงข่าย

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ สามารถเข้าสู่ผลเฉลยได้อย่างรวดเร็ว เนื่องจากคุณสมบัติของขึ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์เหมาะสมกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง ทำให้ค่าหน่วยแรงที่ได้ออกอย่างรวดเร็ว ซึ่งในโครงข่ายมีจำนวนจุดต่อเพียง 345 จุดต่อเท่านั้น ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 9637 จุดต่อและใช้การปรับขนาดโครงข่ายถึง 7 รอบ และในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 9174 จุดต่อและใช้การปรับขนาดโครงข่ายถึง 4 รอบ ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ทำให้จำนวนจุดต่อลดลงถึงเกือบ 30 เท่า และส่งผลถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดลดลงถึงเกือบ 300 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิม

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำบริเวณขอบล่างของคาน ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยนี้ให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องมากกว่า ผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ และให้ผลคล้ายกับผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม แต่ที่บริเวณใกล้จุดรองรับจะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในงานวิจัยนี้จะมีระยะไกลจากจุดรองรับมากกว่าในงานวิจัยเดิม เนื่องจากระยะห่างของจุดต่อที่บริเวณใกล้กับจุดรองรับมีระยะทางมากเนื่องจากไม่มีการปรับขนาดขึ้นส่วน ดังนั้นเพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าวในงานวิจัยนี้จึงได้ปรับปรุงโครงข่ายเริ่มต้นใหม่ให้มีความความละเอียดมากขึ้นที่บริเวณใกล้กับจุดรองรับ โดยได้แสดงโครงข่ายขึ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.3.8 โดยผลที่ได้ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ลดลงและมีจำนวนจุดต่อมากขึ้น ซึ่งไม่มีการปรับขนาดโครงข่ายเช่นเดิม และผลการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำทำให้ค่าหน่วยแรงที่บริเวณใกล้ที่รองรับมีความคลาดเคลื่อนลดลง และมีลักษณะใกล้เคียงกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม แต่มีจำนวนจุดต่อน้อยกว่ามาก

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ผลของงานวิจัยนี้ให้ผลที่ดีกว่าผลจากงานวิจัยเดิมในด้านของเวลาอย่างมาก เนื่องมาจากในตัวอย่างนี้ค่าหน่วยแรงมีการเปลี่ยนแปลงเกือบตลอดทั้งปัญหา และค่าการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงเป็นแบบเชิงเส้นซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติของขึ้นส่วน ที่ใช้ในงานวิจัยนี้อย่างมากจึงทำให้ได้ผลเฉลยอย่างรวดเร็ว

4.4 ตัวอย่างที่ 4 ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด

ตัวอย่างนี้เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่มีค่าหน่วยแรงเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วตลอดทั้งโดเมน และมีหลายบริเวณที่มีค่าคลาดเคลื่อนสูงทำให้ยากแก่การกระจายค่าคลาดเคลื่อนให้เท่ากันทั้งโดเมน โดยตัวอย่างนี้เป็นกรณีวิเคราะห์คานขนาด 300 ซม. ลึก 40 ซม. กว้าง 20 ซม. มีฐานรองรับแบบธรรมดาและรับแรงกระทำเป็นจุด ซึ่งในปัญหาที่นำไปทำการวิเคราะห์จะเปลี่ยนแรงที่กระทำเป็นจุดเป็นแรงแผ่กระจายรูปสามเหลี่ยมมีฐานกว้าง 10 ซม. เพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนที่จะเกิดขึ้นสูงมากบริเวณที่แรงกระทำเป็นจุด และคานถูกออกแบบให้มีช่องเปิดภายในคาน 2 ช่อง ขนาดช่องละ 40 x 18 ซม. เจาะห่างจากขอบบนและขอบล่างข้างละ 11 ซม. ดังแสดงในรูปที่ 4.4.1 (ก) แต่เนื่องจากการจำลองแบบคานให้มีรูเจาะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจะให้ค่าคลาดเคลื่อนบริเวณที่เป็นจุดต่อมุมฉากสูงมาก เมื่อปรับขนาดจึงมีการปรับขนาดบริเวณนี้เท่านั้นทำให้การปรับขนาดที่บริเวณอื่นทำได้ไม่ดี ผลเฉลยที่ได้ในบางบริเวณยังคงมีความคลาดเคลื่อนสูง การแก้ปัญหาเช่นนี้จึงทำได้เช่นเดียวกับการจำลองแรงกระทำเป็นจุดให้เป็นแรงกระทำแบบแผ่รูปสามเหลี่ยม นั่นคือพยายามหลีกเลี่ยงการสร้างจุดต่อที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าหน่วยแรงกับจุดข้างเคียงที่แตกต่างกันมาก โดยการจำลองช่องเปิดบริเวณมุมฉากให้เป็นส่วนของเส้นโค้งรัศมี 3 ซม. ดังแสดงในรูปที่ 4.4.1 (ข)

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับให้เท่ากับ 0.05 จะได้ผลการวิเคราะห์ 8 รอบ โดยมีโครงข่ายชิ้นส่วนบางโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 4.4.2 จะเห็นว่าโครงข่ายชิ้นส่วนมีความต่อเนื่องกัน และมีการปรับขนาดชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กเพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนที่บริเวณแรงกระทำ บริเวณจุดรองรับธรรมดา และบริเวณมุมของช่องเจาะ ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้น จะพบว่ามีค่าคลาดเคลื่อนมากบริเวณจุดรองรับทั้ง 2 ด้าน และบริเวณช่องเจาะ แต่ค่าคลาดเคลื่อนก็ไม่สูงมากนักเนื่องจากการปรับลดขนาดชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กลงเพื่อลดความคลาดเคลื่อน แต่ก็ทำได้ไม่ดีมากนักเนื่องจากที่บริเวณอื่นของปัญหามีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นน้อยมาก คือไม่ถึง 1 เปอร์เซ็นต์ ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนโดยรวมมีขนาดน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับแล้วโปรแกรมจึงหยุดการทำงาน

สำหรับการกระจายค่าคลาดเคลื่อนและค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.4.3 ซึ่งจะมีการต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทัวร์ดี แต่จะมีค่าหน่วยแรงเปลี่ยนแปลงชันมากบริเวณจุดรองรับ บริเวณแรงกระทำเป็นจุดและที่บริเวณมุมของช่องเจาะรูปสี่เหลี่ยม เมื่อนำหน่วยแรงในทิศทาง y และหน่วยแรงเฉือนที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงตามแนวขอบบนของคานซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ได้ผลการเปรียบเทียบ ดังแสดงในรูปที่ 4.4.4 และได้แสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ซึ่งไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงในรูปที่ 4.4.4 เช่นกัน ซึ่งจะมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมากบริเวณที่แรงกระทำ และบริเวณที่อยู่เหนือแนวช่องเจาะ ซึ่งก็เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงหน่วยแรงอย่างรวดเร็ว

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลการวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 5 รอบ โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.4.5 – 4.4.8

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย ในงานวิจัยเดิมจะให้โครงที่มีความต่อเนื่องค่อนข้างดีถึงแม้จะมีการปรับขนาดให้มีขนาดเล็กมากและหนาแน่นมากก็ตาม และก็มีลักษณะของการปรับขนาดของชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กในบริเวณเดียวกับผลที่ได้จากงานวิจัยนี้

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ สามารถเข้าสู่ผลเฉลยได้อย่างค่อนข้างช้าเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงเป็นไปอย่างลาดชันมาก แต่การปรับขนาดจะมีการเพิ่มจุดต่อไม่มากนักเนื่องจากจะเพิ่มจุดต่ออย่างเหมาะสมจึงทำให้การกระจายของค่าคลาดเคลื่อนที่สูงมีบริเวณไม่มากนัก ซึ่งในโครงข่ายมีจำนวนจุดต่อเพียง 1792 จุดต่อเท่านั้น ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 31611 จุดต่อและใช้การปรับขนาดโครงข่ายถึง 5 รอบ ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ทำให้จำนวนจุดต่อลดลงถึงเกือบ 20 เท่า และส่งผลถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดลดลงถึงเกือบ 35 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิม

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบบนของคาน ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยเดิมให้ค่าหน่วยแรงมีลักษณะคล้ายกับผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือจะมีค่าคลาดเคลื่อนมากที่บริเวณที่รับแรงกระทำ และบริเวณเหนือช่องเจาะรูสี่เหลี่ยม

เมื่อได้ทดลองใช้วิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 3 รอบโดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.4.5 - 4.4.8

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย พบว่ามีการสร้างชิ้นส่วนและจุดต่อมากกว่าและมีการกระจายของชิ้นส่วนคล้ายกัน แต่จะมีค่าคลาดเคลื่อนที่สูงเกิดขึ้นมากกว่าเล็กน้อยเนื่องมาจากการเร่งการเพิ่มจุดต่อทำให้การกระจายความคลาดเคลื่อนทำได้ไม่ดีนัก

ในด้านเวลา ในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าวิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยนี้มีการปรับขนาดชิ้นส่วนลดลงเหลือเพียง 3 รอบ แต่ก็ส่งผลให้มีจำนวนจุดต่อเพิ่มขึ้นเป็น 2422 จุดต่อ และเวลารวมในการคำนวณของวิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยจะลดลงเกือบ 2 เท่า เพราะใช้การคำนวณเพียง 3 โครงข่าย

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้ยังคงให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องเช่นเดิม และค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะน้อยกว่าเล็กน้อยเนื่องจากรายงานจุดต่อที่มากกว่าทำให้การประมาณค่าหน่วยแรงบริเวณนี้ดีขึ้น

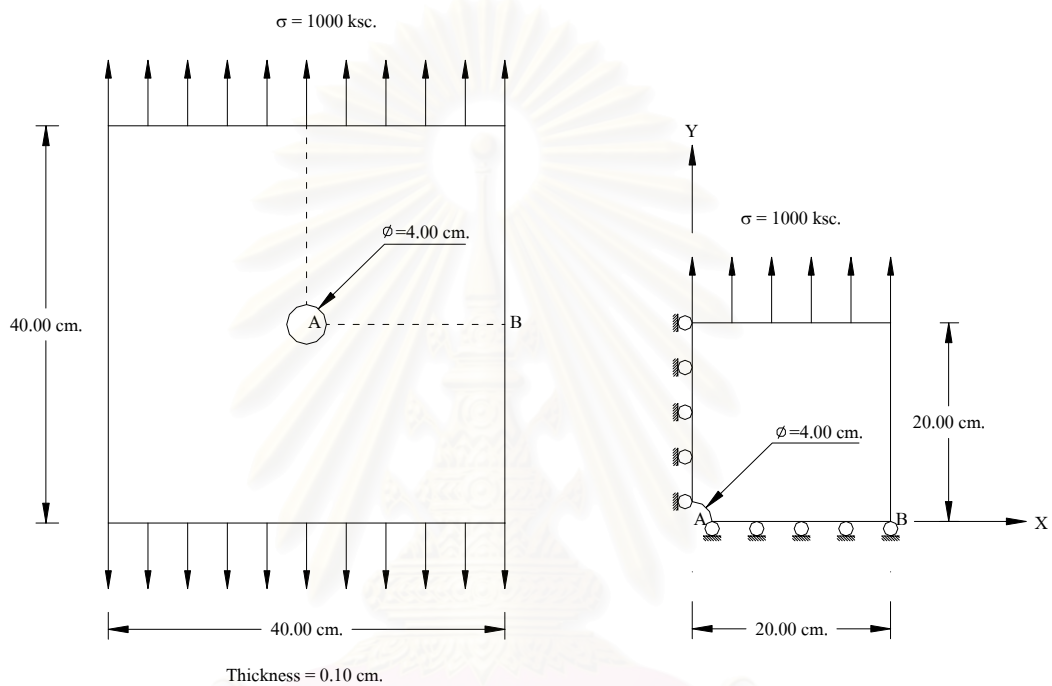
เนื่องจากในตัวอย่างนี้ไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรงเมื่อเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้ ดังนั้นจึงได้มีการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลการวิเคราะห์จากโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ซึ่งโครงข่ายที่ได้จากการวิเคราะห์โดยโปรแกรมสำเร็จรูปได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.4.9 และค่าหน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์ที่แสดง

ไว้ในรูปที่ 4.4.10 ซึ่งจะพบว่า จำนวนจุดต่อที่ใช้ในโปรแกรมสำเร็จรูปจะมากกว่าที่ใช้ในงานวิจัยนี้ เกือบ 4 เท่า และเวลาที่ใช้ในการคำนวณมากกว่าที่ใช้ในงานวิจัยนี้มากกว่า 3 เท่า ซึ่งให้ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x มีลักษณะใกล้เคียงกัน แต่จะพบว่าหน่วยแรงในทิศทาง y และ หน่วยแรงเฉือน ที่ได้จากงานวิจัยนี้จะมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นสูงกว่าที่บริเวณแรงกระทำ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้ทดลองปรับลดขนาดชิ้นส่วนในโครงข่ายเริ่มต้นที่บริเวณแรงกระทำลงโดยได้แสดงโครงข่ายสุดท้ายที่ได้จากการวิเคราะห์ และค่าหน่วยแรงต่างๆที่ขอบบนของคาน ดังแสดงในรูปที่ 4.4.11 ซึ่งใช้จำนวนรอบในการปรับขนาดโครงข่ายลดลงเหลือเพียง 5 รอบเนื่องมาจากการลดขนาดชิ้นส่วนในโครงข่ายเริ่มต้นแต่ก็ทำให้มีจำนวนจุดต่อเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน และค่าหน่วยแรงในทิศทาง y และหน่วยแรงเฉือน มีความคลาดเคลื่อนลดลงมากโดยมีลักษณะใกล้เคียงกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม และผลที่ได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ผลของงานวิจัยนี้ให้ผลที่ดีกว่าผลจากงานวิจัยเดิม ในด้านของเวลาค่อนข้างมาก แต่จะไม่มากเท่ากับตัวอย่างที่ 3 เนื่องมาจากในตัวอย่างนี้ค่าหน่วยแรงมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วตลอดทั้งปัญหาและมีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นมากนัก และวิธีการเร่งการเข้าสู่ผลเฉลยก็ช่วยลดเวลาลงได้อีกอย่างมาก เพียงแต่อาจมีการเพิ่มจุดเกินความจำเป็นบ้างในบางพื้นที่ของปัญหาเท่านั้น

จากตัวอย่างการวิเคราะห์ จะพบว่าลักษณะการกระจายของหน่วยแรงจะมีผลอย่างมากต่อผลการทำนาย ซึ่งถ้าลักษณะการกระจายของหน่วยแรงเหมาะสมกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ จะทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้ให้ผลที่ถูกต้อง แม่นยำ และรวดเร็ว และการกำหนดค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับให้ก็ควรเหมาะสมกับการลักษณะการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง คือเมื่อปัญหามีการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงตลอดทั้งพื้นที่ ก็ควรกำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับให้ค่อนข้างสูงเพื่อตรวจสอบการเข้าสู่ผลเฉลยก่อน แต่ถ้าหน่วยแรงมีค่าค่อนข้างคงที่เป็นบริเวณกว้างก็สามารถกำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับให้มีค่าต่ำได้ และการกำหนดการเพิ่มจุดต่อเพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนจะมีความสำคัญมาก ซึ่งเป็นผลมาจากการกำหนดขนาดของชิ้นส่วนใหม่ในรอบถัดไปนั่นเองว่าจะทำให้การเพิ่มจุดต่อเกิดความเหมาะสมได้หรือไม่

ในการปรับปรุงเพื่อให้ได้โครงข่ายที่มีการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนที่เท่ากันตลอดทั้งโครงข่ายจะทำได้ยากมาก เนื่องจากจะมีบริเวณกว้างของปัญหาที่มีค่าคลาดเคลื่อนต่ำมากทำให้ส่งผลถึงค่าคลาดเคลื่อนโดยรวม ทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้เกิดค่าคลาดเคลื่อนสูงในหลายบริเวณเสมอ โดยวิธีแก้ไขคืออาจทำการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม โดยแบ่งการคำนวณเป็นพื้นที่ย่อยๆ เพื่อให้เกิดการกระจายค่าคลาดเคลื่อนได้อย่างเท่ากันทั้งปัญหา

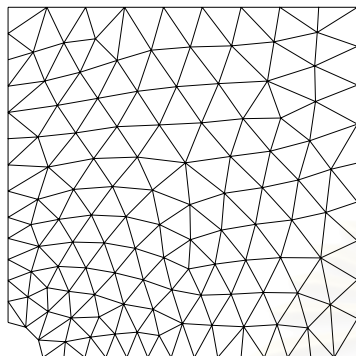


(ก) แผ่นบางมีรูเจาะรับแรงดึงหัวท้าย

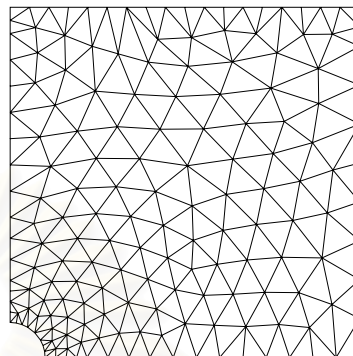
(ข) แบบจำลองการวิเคราะห์

รูปที่ 4.1.1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงและแบบจำลองการวิเคราะห์

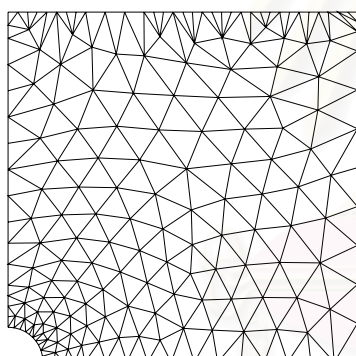
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



Mesh 1 $\eta = 0.0206$ Ne = 230 Nn = 509



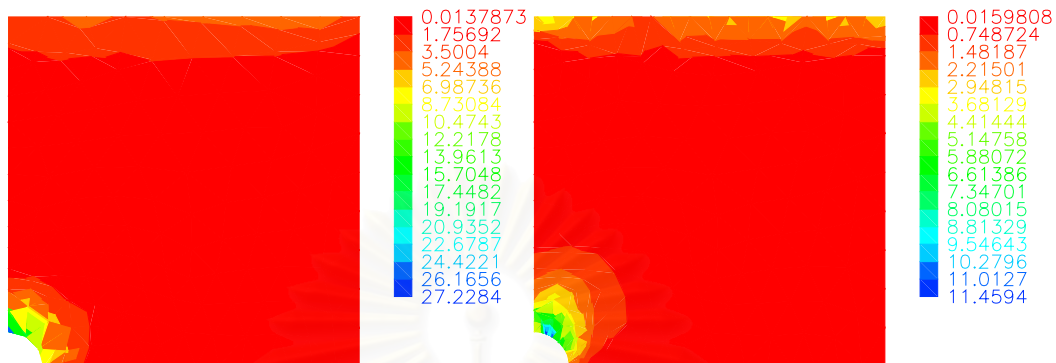
Mesh 2 $\eta = 0.0101$ Ne = 286 Nn = 641



Mesh 3 $\eta = 0.0075$ Ne = 318 Nn = 723

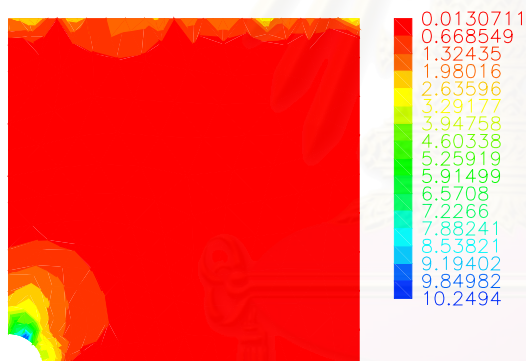
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.1.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



Mesh 1 $\eta = 0.0206$ Ne = 230 Nn = 509

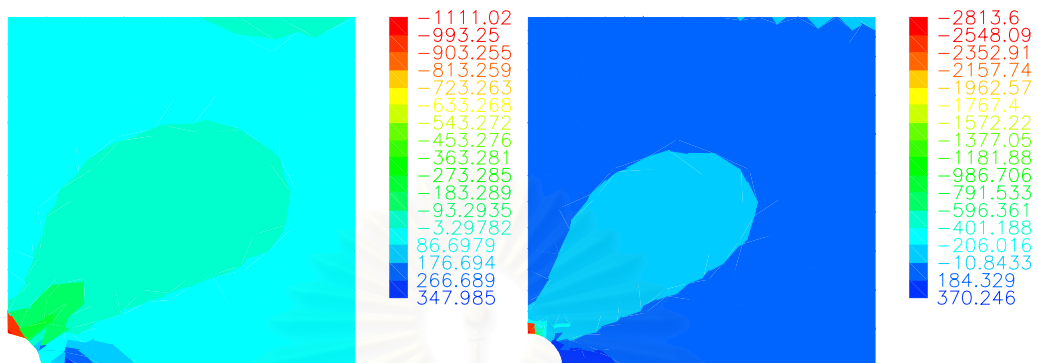
Mesh 2 $\eta = 0.0101$ Ne = 286 Nn = 641



Mesh 3 $\eta = 0.0075$ Ne = 318 Nn = 723

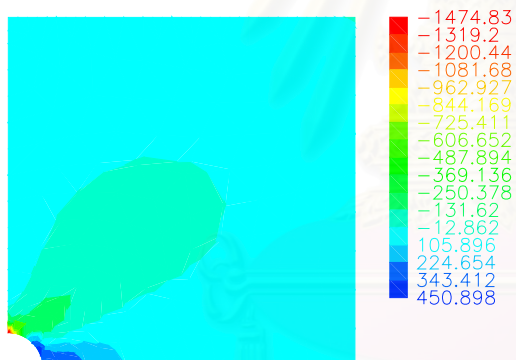
สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.1.3 การกระจายความคลาดเคลื่อนของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



Mesh_1 $\eta = 0.0206$ Ne = 230 Nn = 509

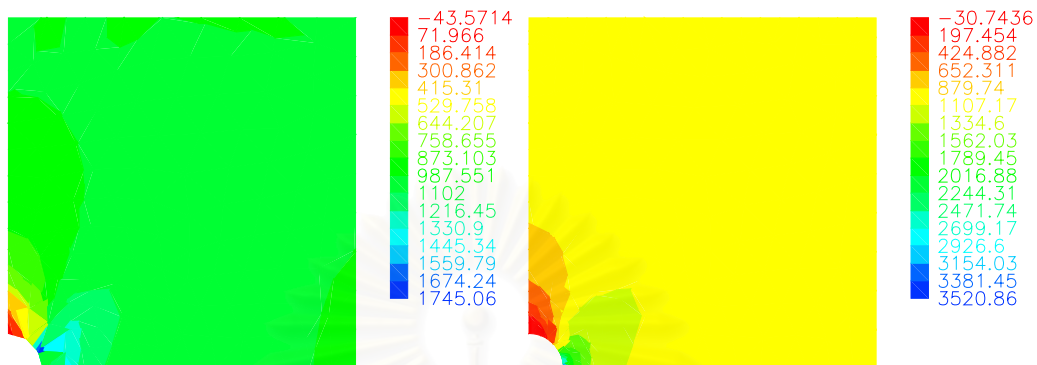
Mesh_2 $\eta = 0.0101$ Ne = 286 Nn = 641



Mesh_3 $\eta = 0.0075$ Ne = 318 Nn = 723

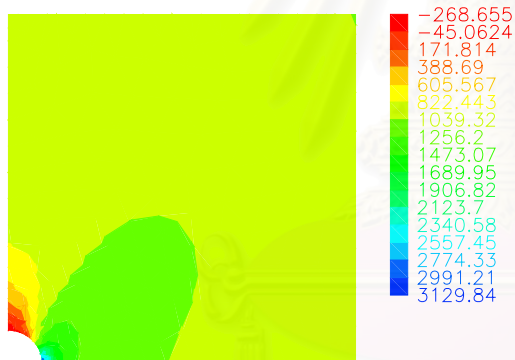
สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.1.4 การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



Mesh_1 $\eta = 0.0206$ Ne = 230 Nn = 509

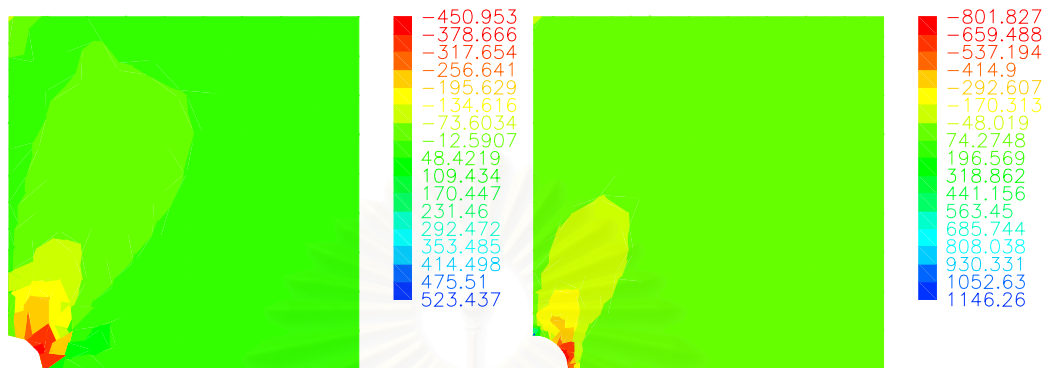
Mesh_2 $\eta = 0.0101$ Ne = 286 Nn = 641



Mesh_3 $\eta = 0.0075$ Ne = 318 Nn = 723

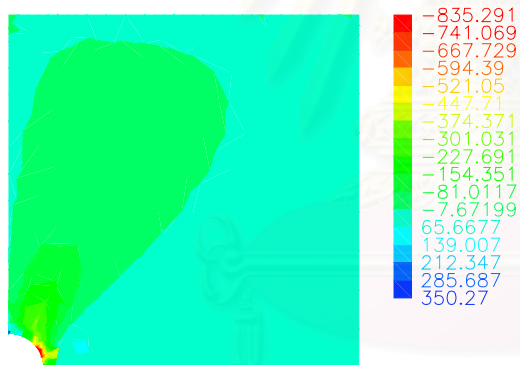
สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.1.5 การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



Mesh_1 $\eta = 0.0206$ Ne = 230 Nn = 509

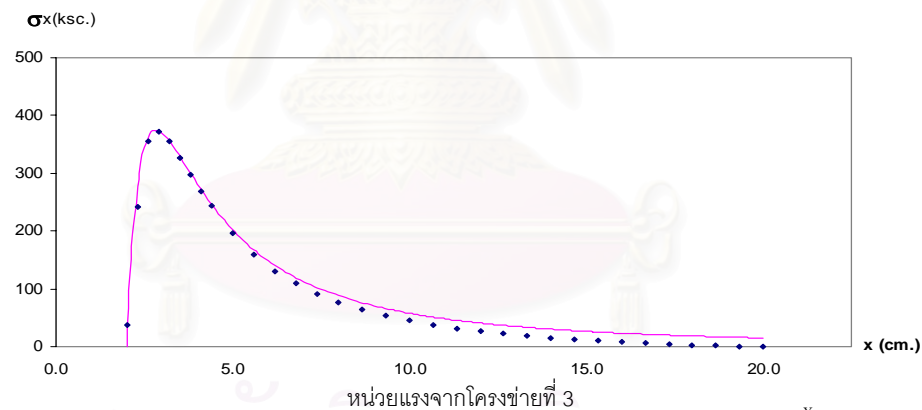
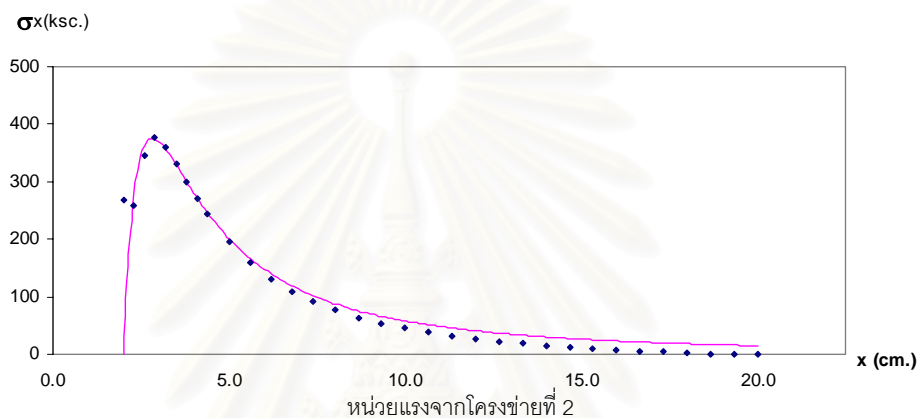
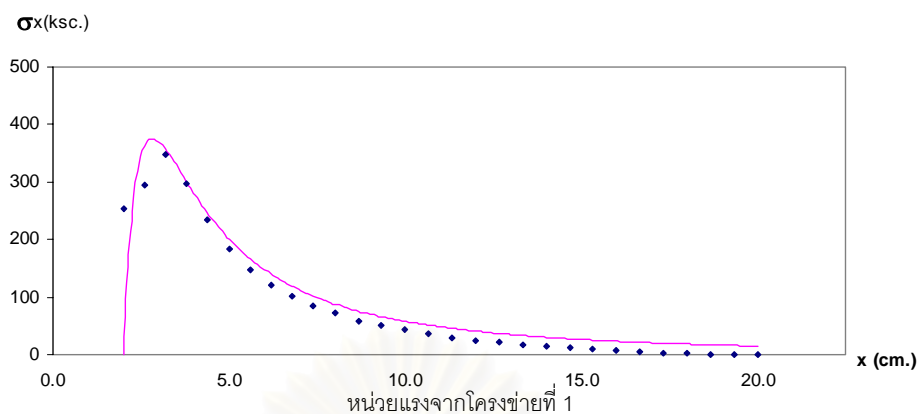
Mesh_2 $\eta = 0.0101$ Ne = 286 Nn = 641



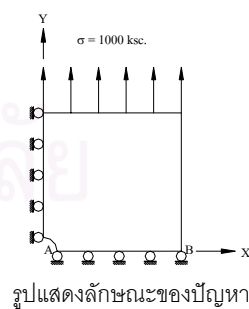
Mesh_3 $\eta = 0.0075$ Ne = 318 Nn = 723

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

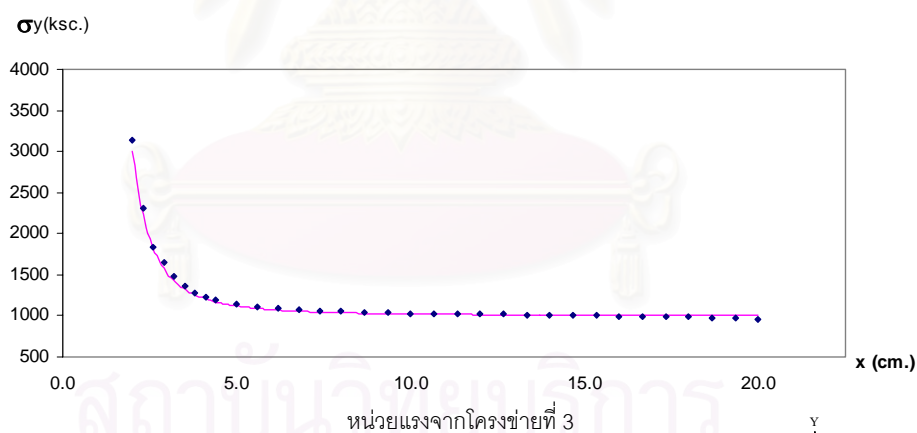
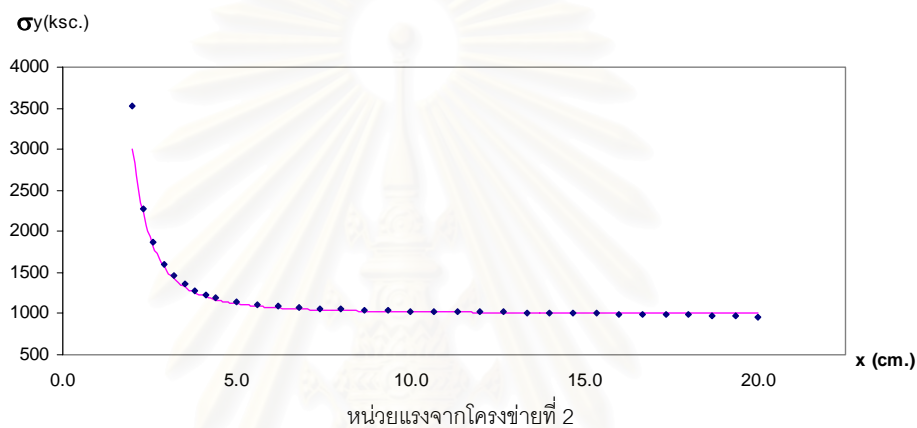
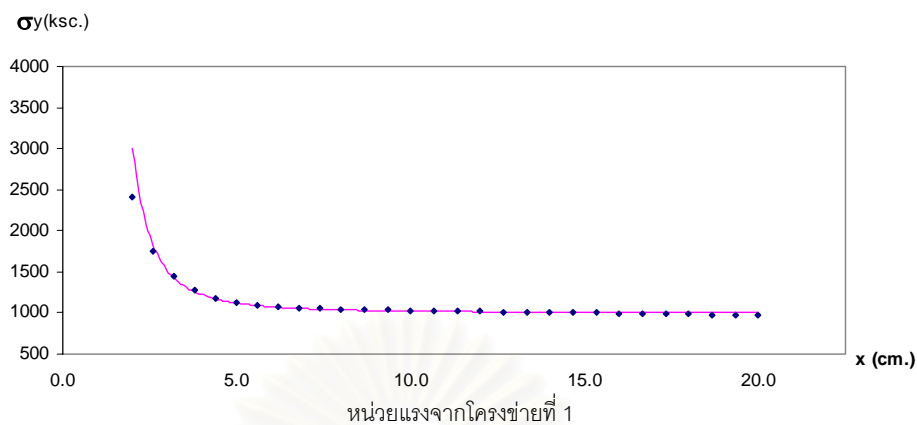
รูปที่ 4.1.6 การกระจายหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่ง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



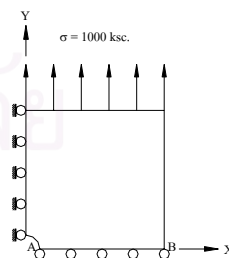
◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



รูปที่ 4.1.7 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม

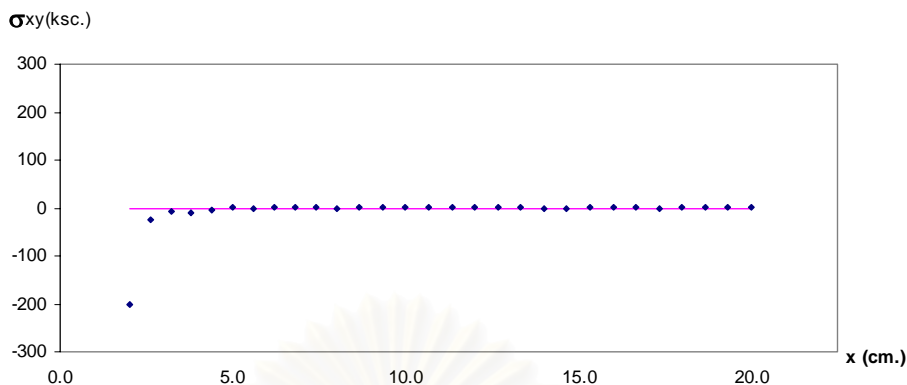


◆ Finite Element solution
 — Exact Solution

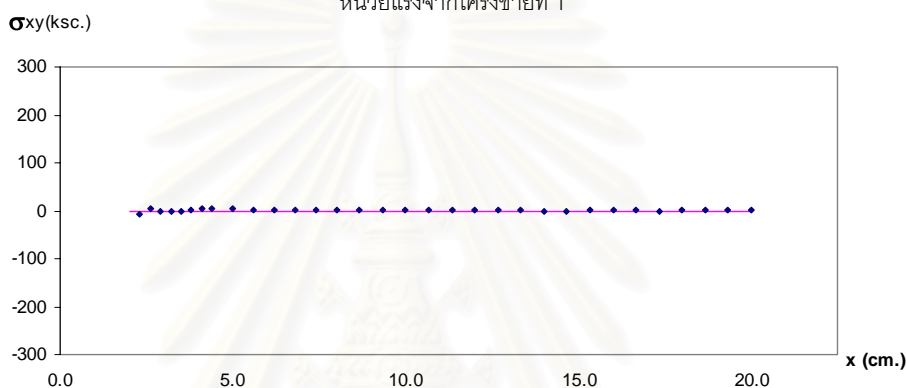


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

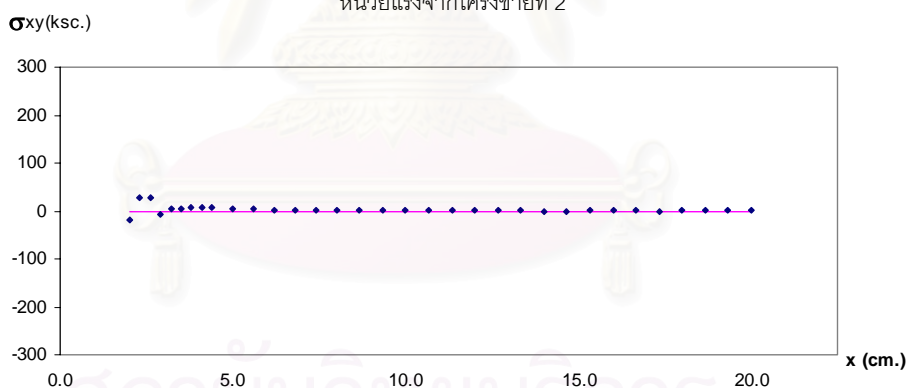
รูปที่ 4.1.8 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1

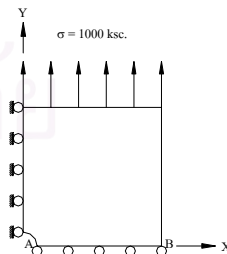


หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 2



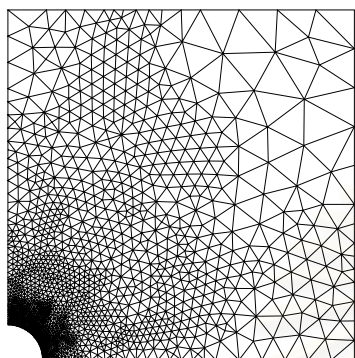
หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 3

◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



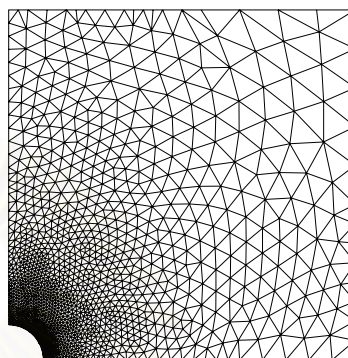
รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.1.9 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



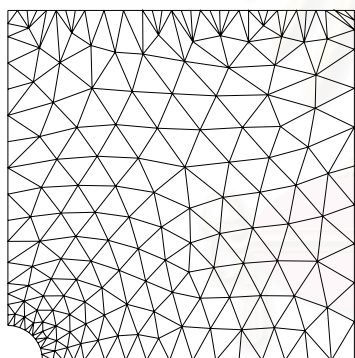
(ก) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 4 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ

$$\eta = 0.0098 \quad Ne = 3979 \quad Nn = 2079$$



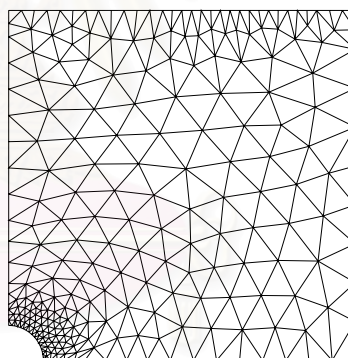
(ข) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 4 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

$$\eta = 0.0098 \quad Ne = 3482 \quad Nn = 1848$$



(ค) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 3 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม (p=2)

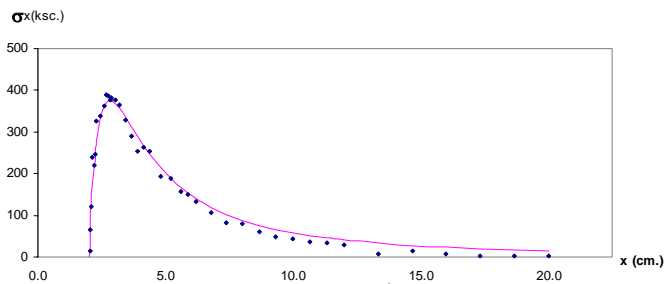
$$\eta = 0.0075 \quad Ne = 318 \quad Nn = 723$$



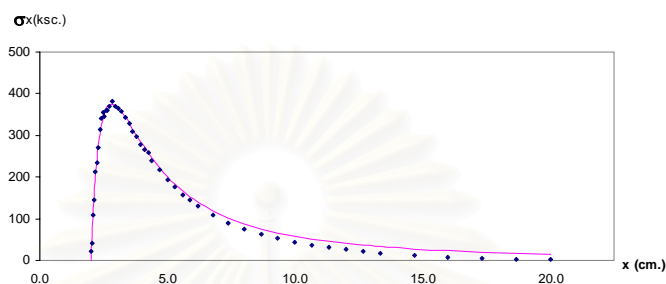
(ง) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 2 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมและเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

$$\eta = 0.0059 \quad Ne = 443 \quad Nn = 980$$

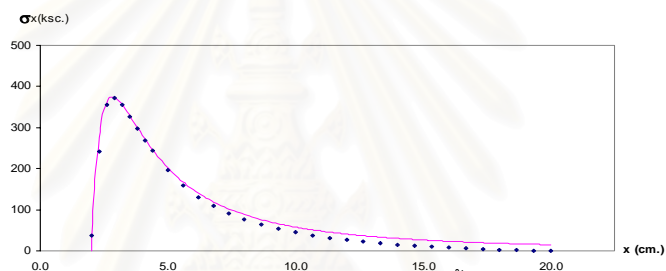
รูปที่ 4.1.10 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



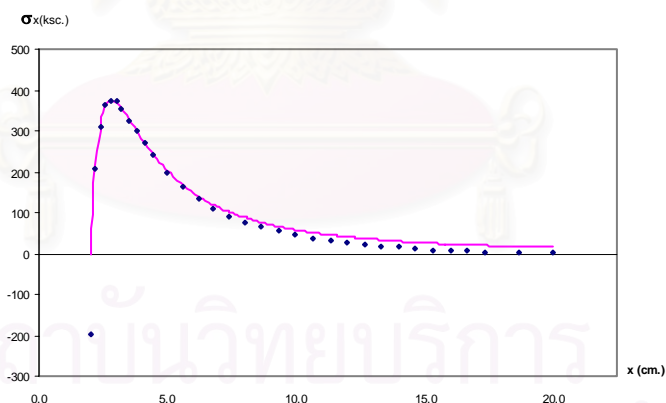
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

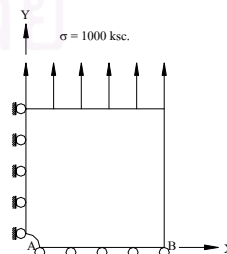


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ (p=2)



(ง) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีแรงการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

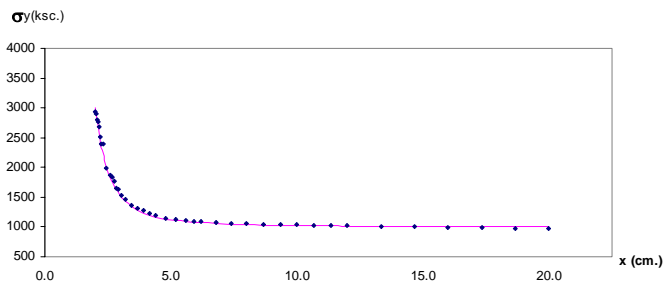
- ◆ Finite Element solution
- Exact Solution



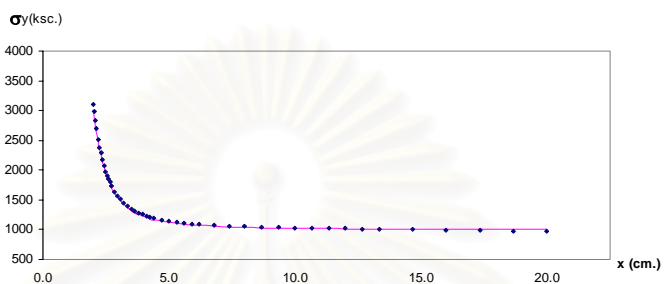
รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.1.11 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง

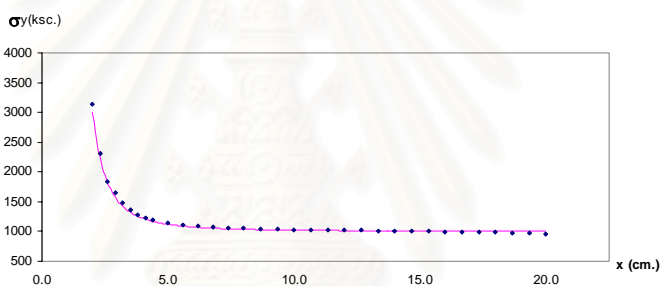
ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



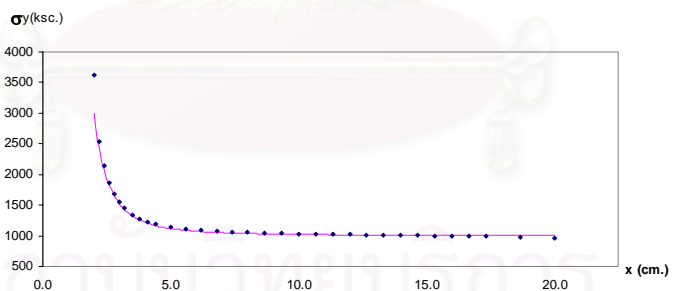
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

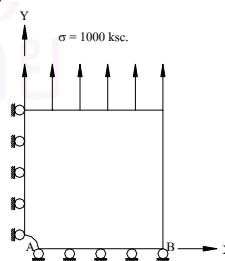


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ (p=2)



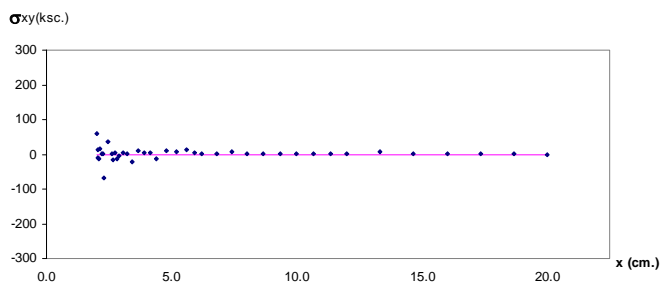
(ง) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

◆ Finite Element solution
 — Exact Solution

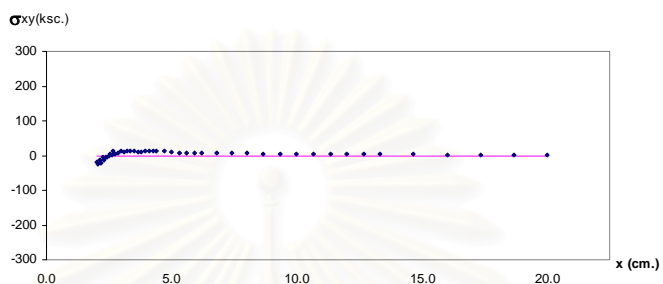


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

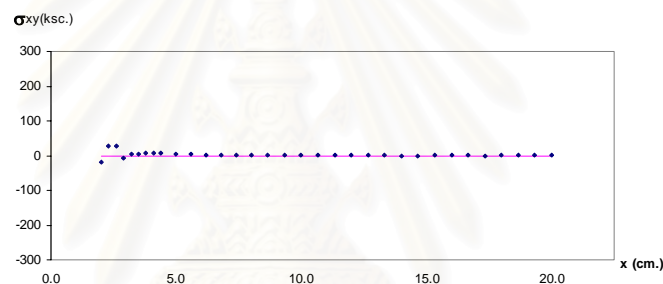
รูปที่ 4.1.12 ค่าหน่วยในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



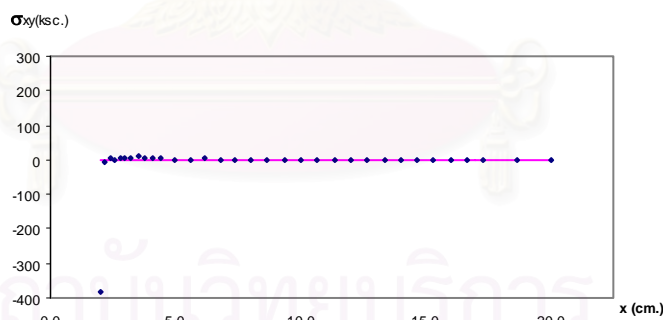
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

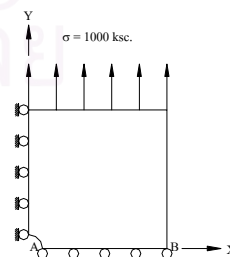


(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ (p=2)



(ง) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



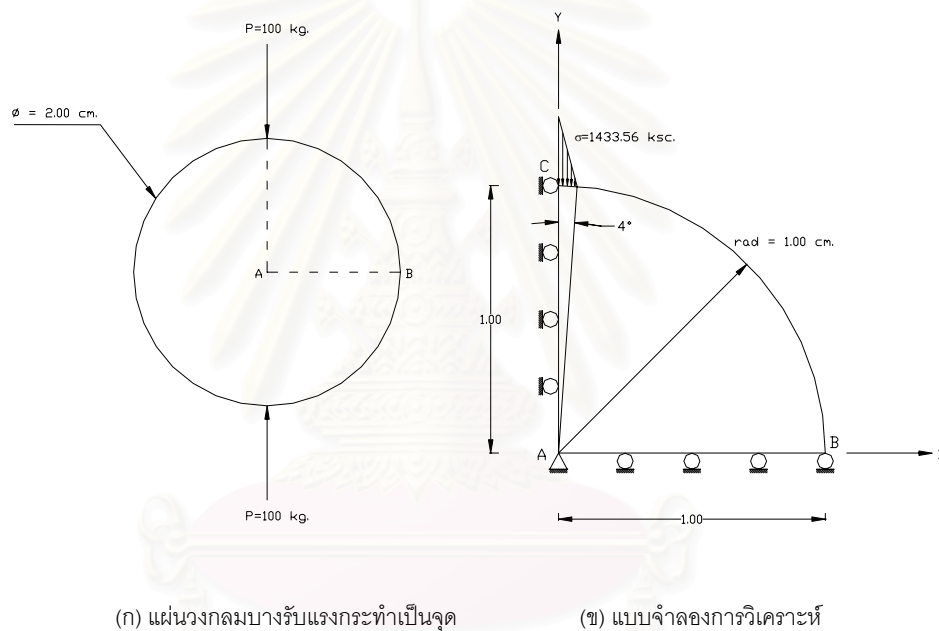
รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.1.13 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ

| งานวิจัย | จำนวน โครงข่าย | จำนวน จุดต่อ | จำนวน ชั้นส่วน | ความคลาด เคลื่อนสัมพัทธ์ | เวลา (วินาที) | จำนวนเท่าของเวลาเมื่อ เปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้ p=2 |
|---|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------------------|------------------|---|
| งานวิจัยเดิมที่ใช้ การปรับเรียบของลาปลาซ | 4 | 2079 | 3979 | 0.0098 | 55 | 2.62 |
| งานวิจัยเดิมที่ใช้ การปรับเรียบเชิงมุม | 4 | 1848 | 3482 | 0.0098 | 78 | 3.71 |
| งานวิจัยนี้ ที่ใช้ p=2 | 3 | 723 | 318 | 0.0075 | 21 | 1.00 |
| งานวิจัยนี้ ที่ใช้ p=1 | 2 | 980 | 443 | 0.0059 | 19 | 0.90 |

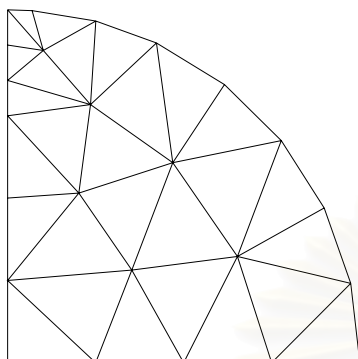
ตารางที่ 4.1.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

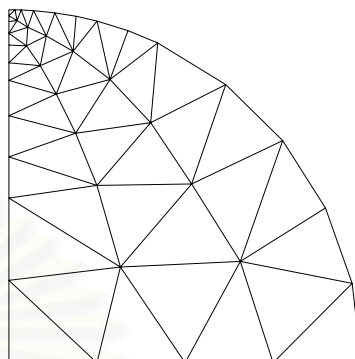


รูปที่ 4.2.1 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์

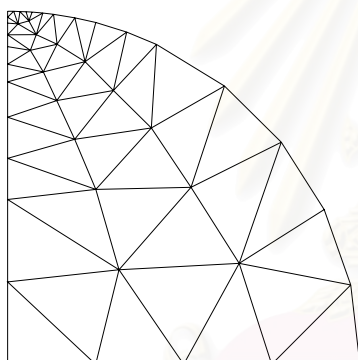
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



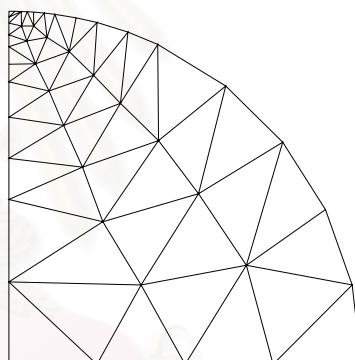
Mesh 1 $\eta = 0.1178$ Ne = 28 Nn = 75



Mesh 3 $\eta = 0.0604$ Ne = 54 Nn = 137



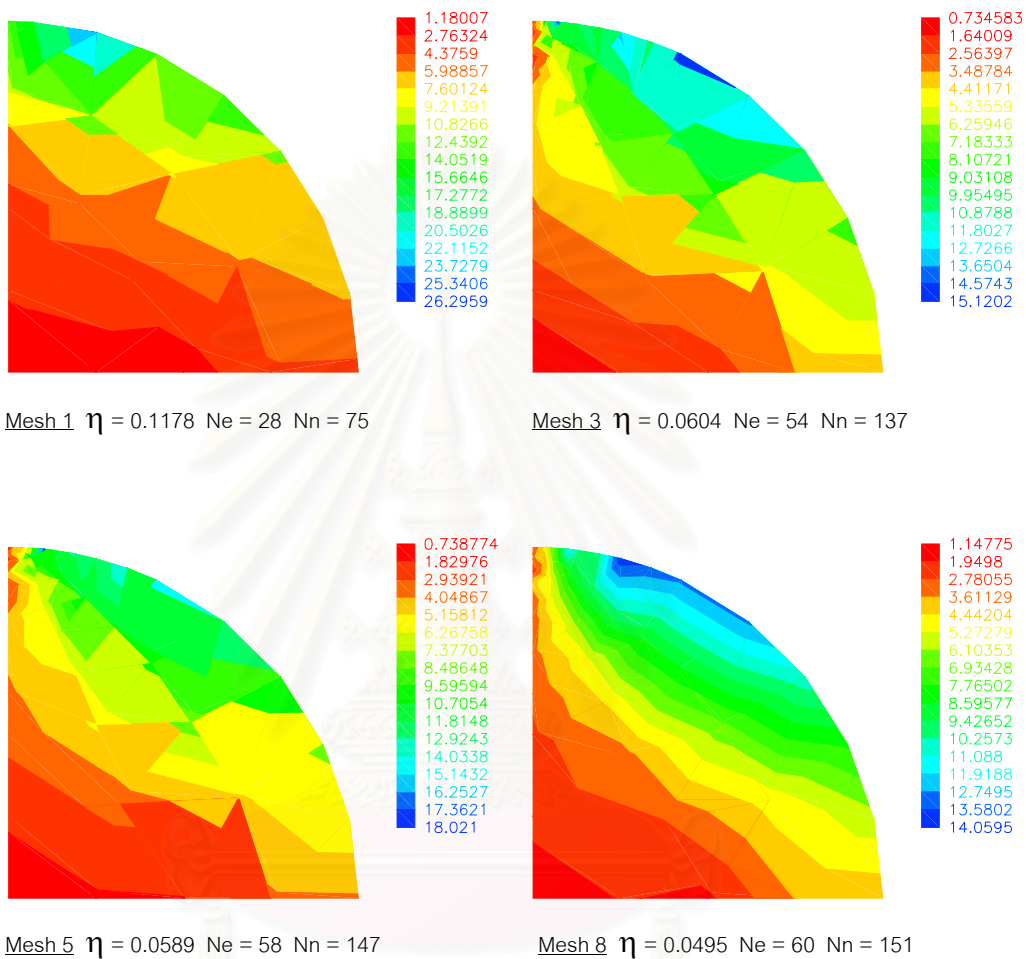
Mesh 5 $\eta = 0.0589$ Ne = 58 Nn = 147



Mesh 8 $\eta = 0.0495$ Ne = 60 Nn = 151

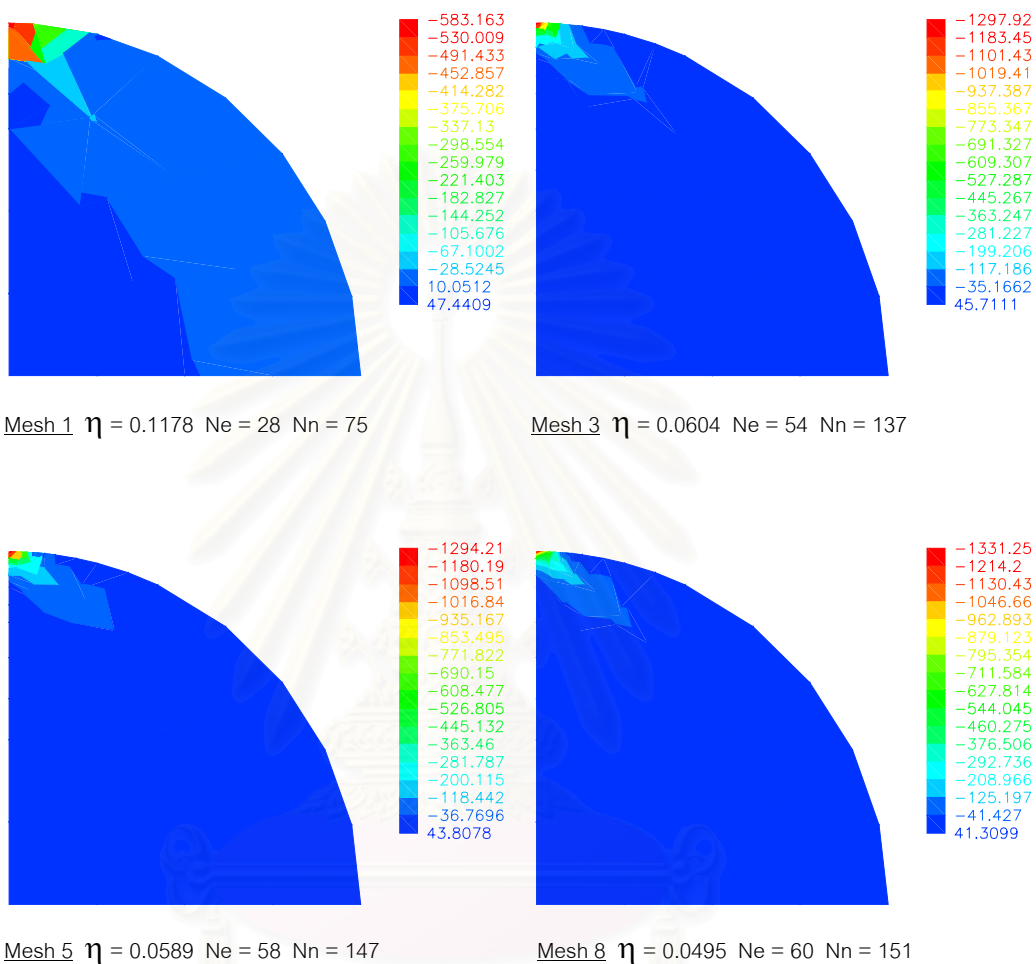
สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.2.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



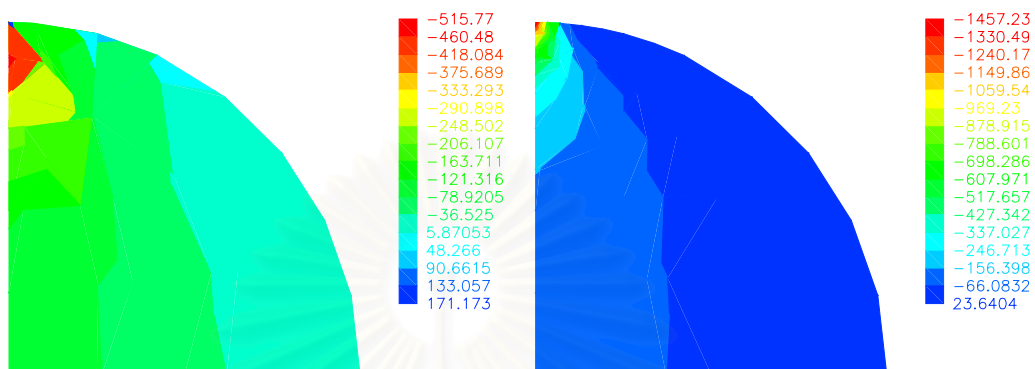
สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.2.3 การกระจายความคลาดเคลื่อนของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



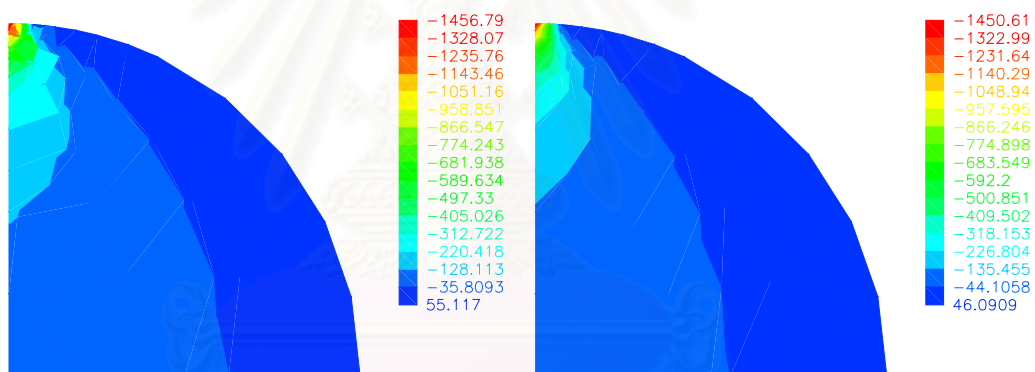
สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.2.4 การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



Mesh_1 $\eta = 0.1178$ Ne = 28 Nn = 75

Mesh_3 $\eta = 0.0604$ Ne = 54 Nn = 137

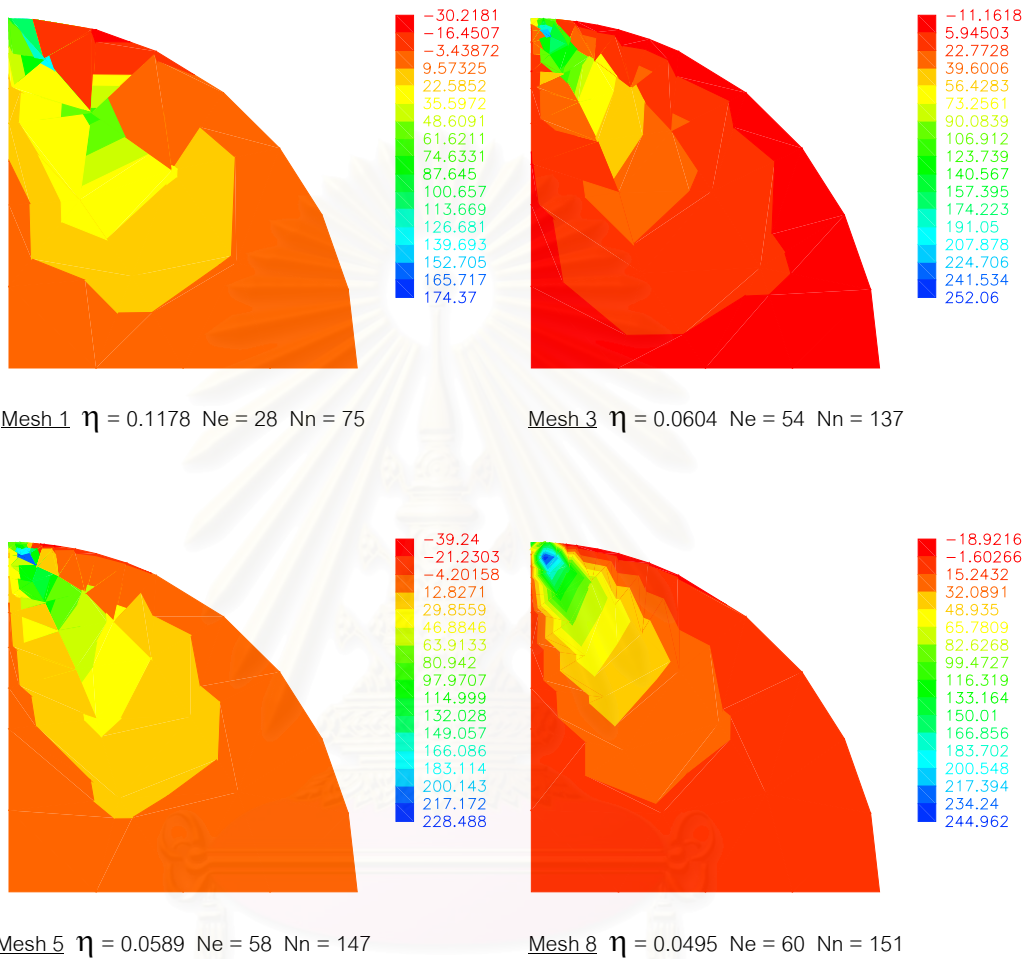


Mesh_5 $\eta = 0.0589$ Ne = 58 Nn = 147

Mesh_8 $\eta = 0.0495$ Ne = 60 Nn = 151

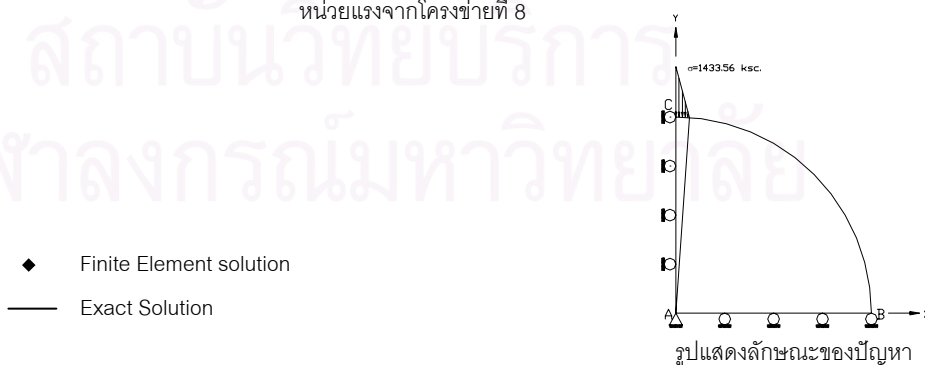
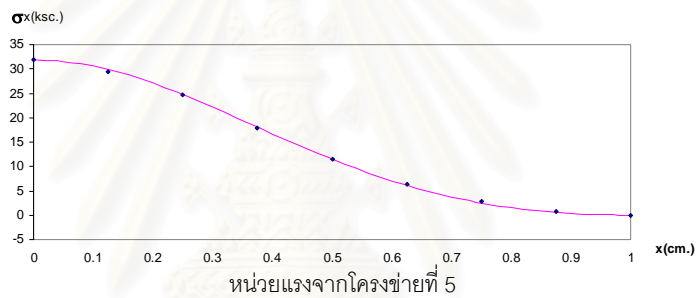
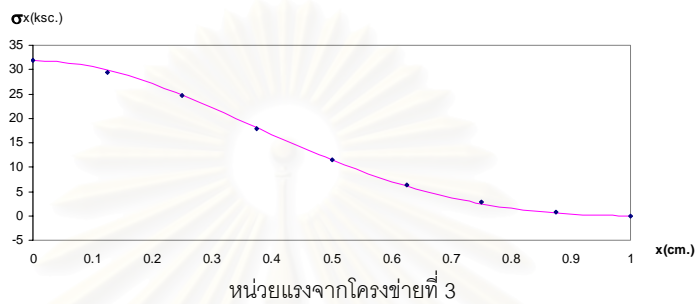
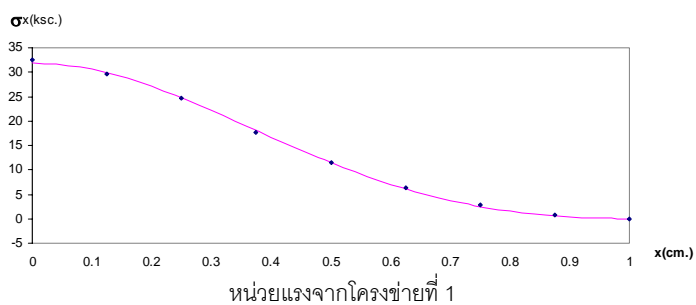
สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.2.5 การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม

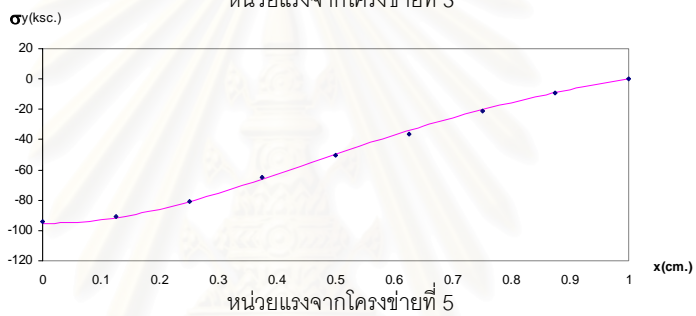
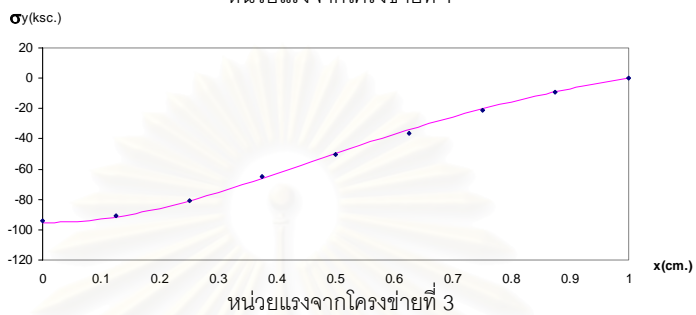
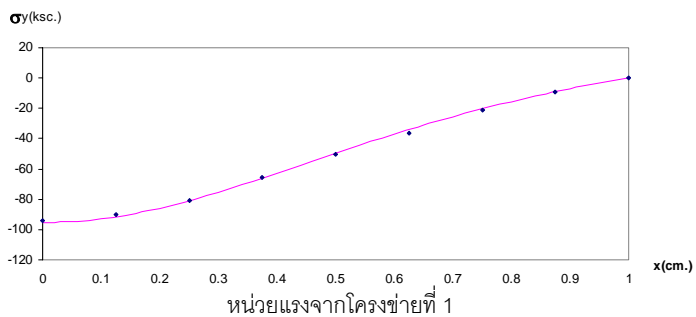


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

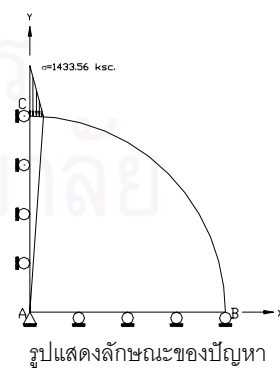
รูปที่ 4.2.6 การกระจายหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



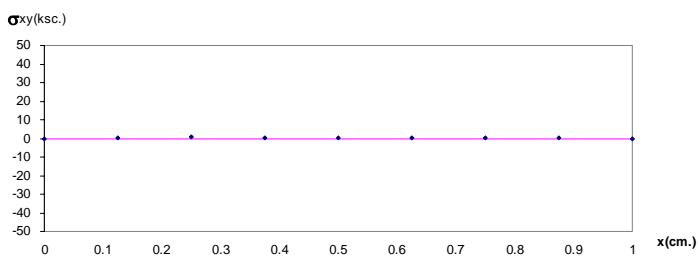
รูปที่ 4.2.7 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



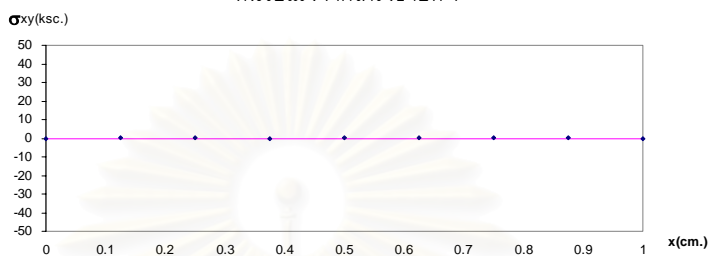
◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



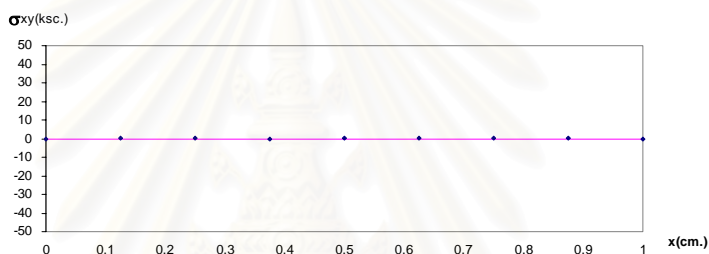
รูปที่ 4.2.8 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



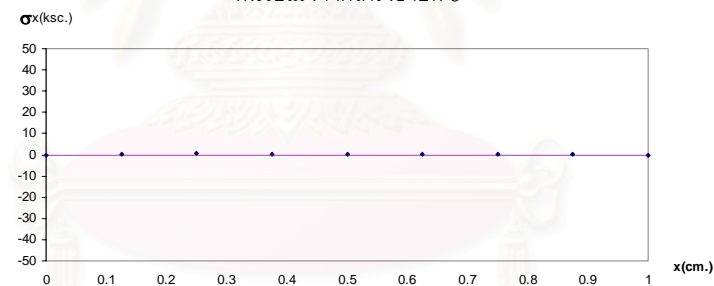
หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 3



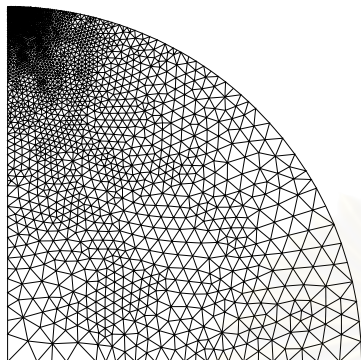
หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 5



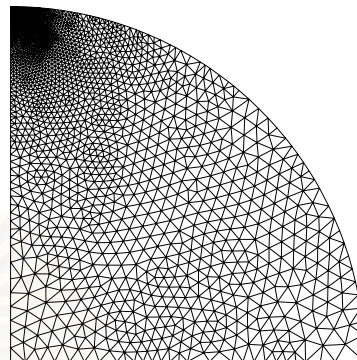
หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 8



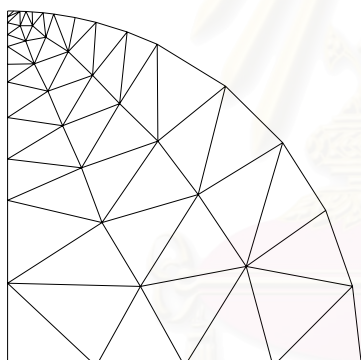
รูปที่ 4.2.9 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



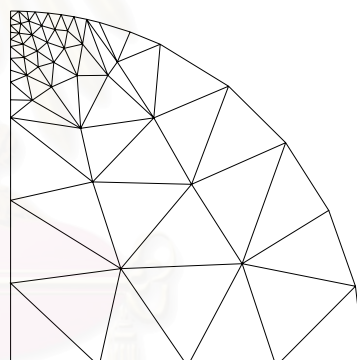
(ก) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 7 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ
 $\eta = 0.0436$ $N_e = 5031$ $N_n = 2630$



(ข) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 4 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม
 $\eta = 0.0450$ $N_e = 4499$ $N_n = 2366$

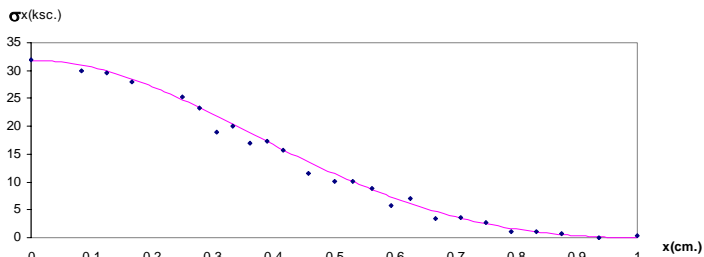


(ค) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 8 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม ($p=2$)
 $\eta = 0.0495$ $N_e = 60$ $N_n = 151$

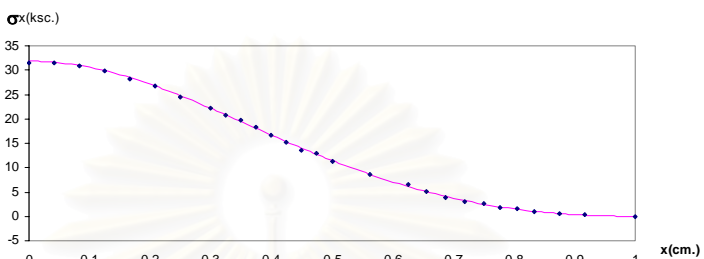


(ง) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 2 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมและเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย ($p=2$)
 $\eta = 0.0452$ $N_e = 84$ $N_n = 201$

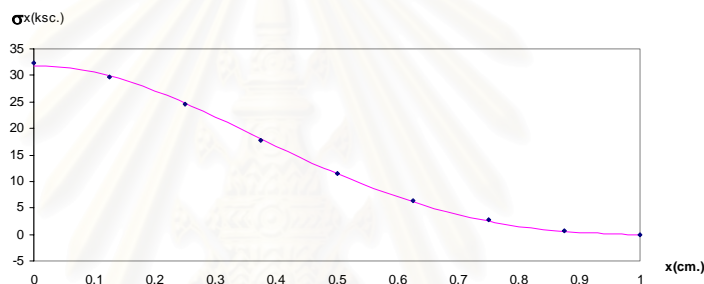
รูปที่ 4.2.10 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชั้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



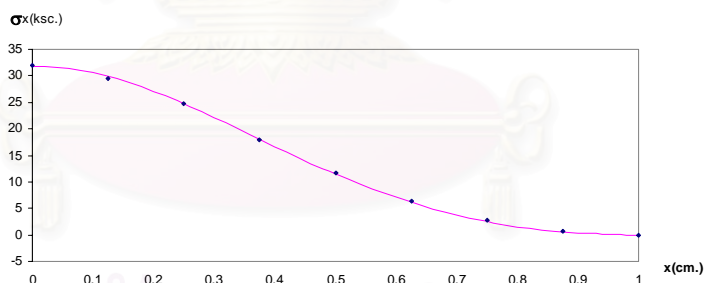
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

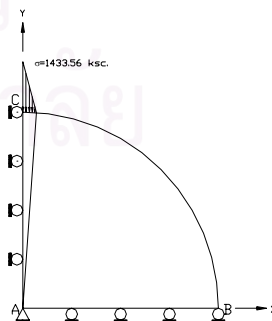


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ (p=2)



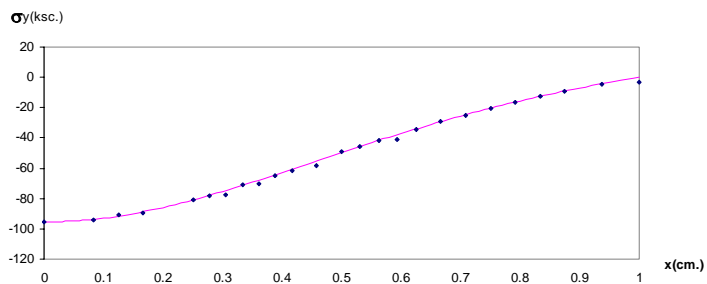
(ง) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

◆ Finite Element solution
 — Exact Solution

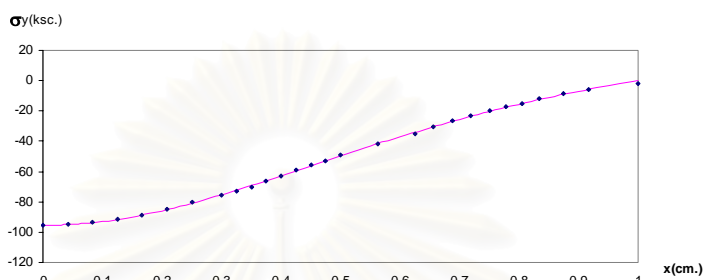


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

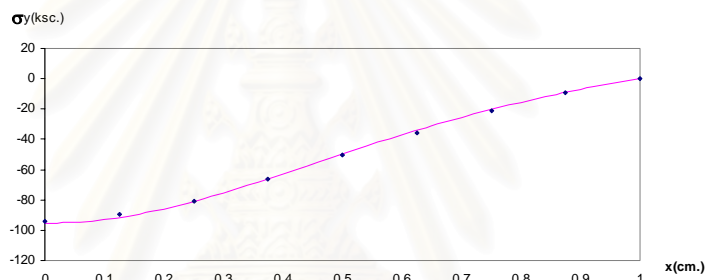
รูปที่ 4.2.11 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



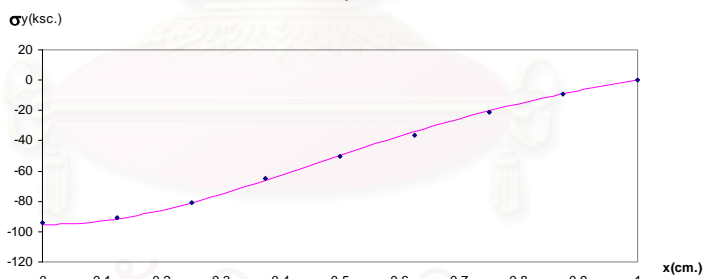
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

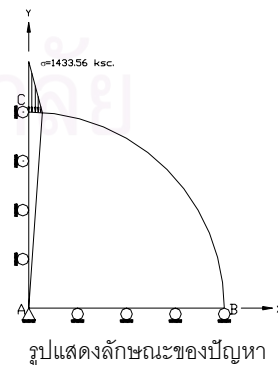


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ (p=2)

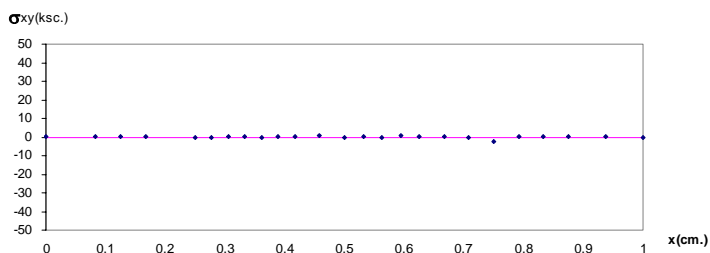


(ง) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

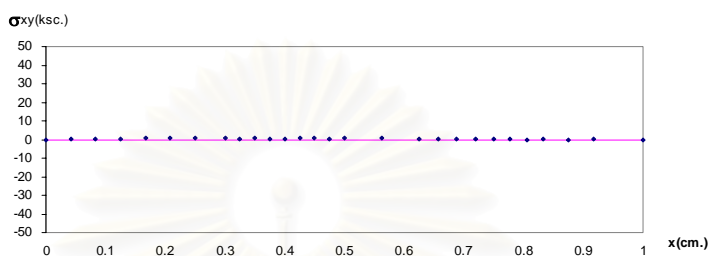
◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



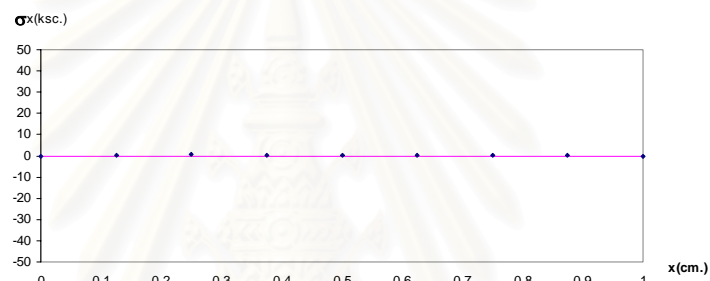
รูปที่ 4.2.12 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



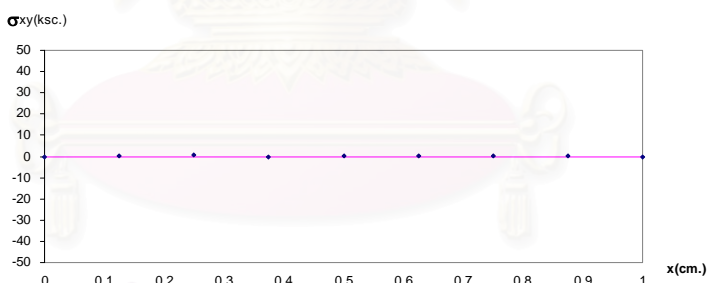
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

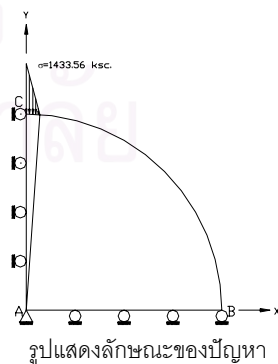


(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ (p=2)

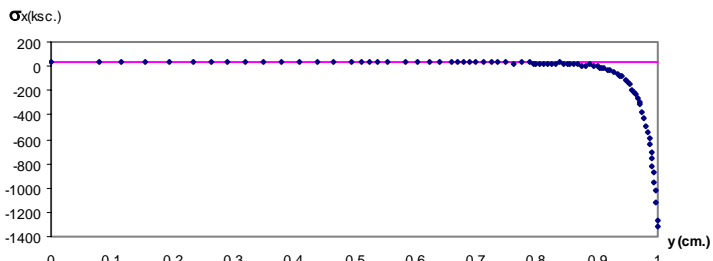


(ง) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

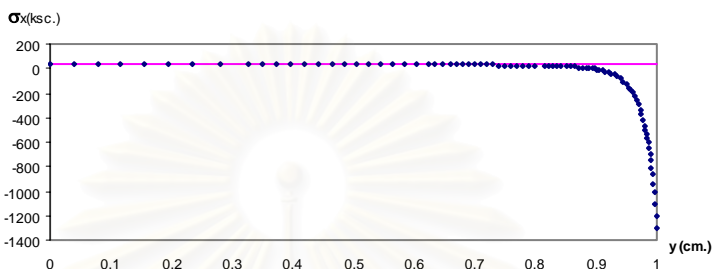
◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



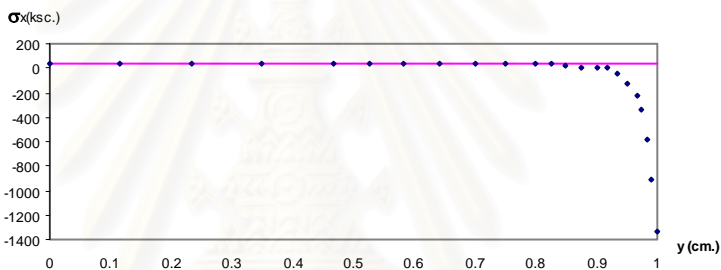
รูปที่ 4.2.13 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



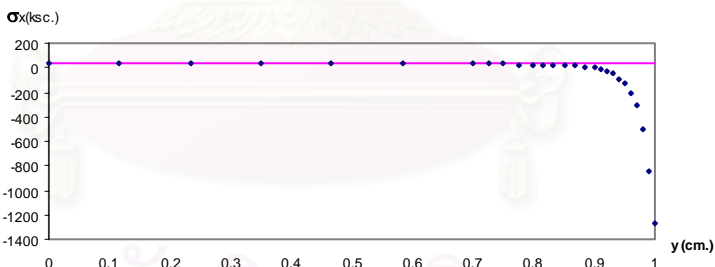
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

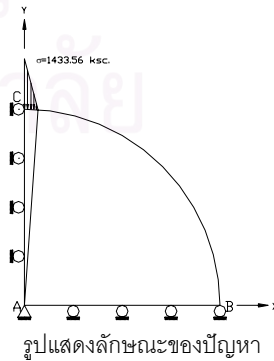


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ (p=2)

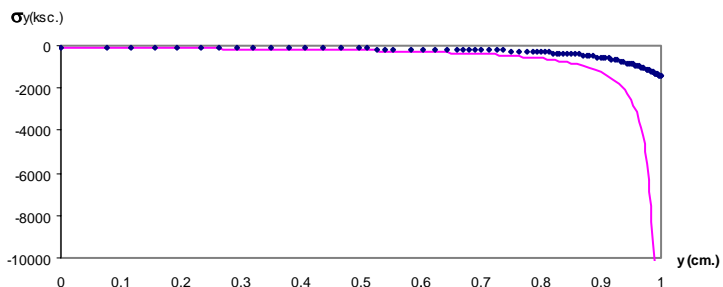


(ง) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

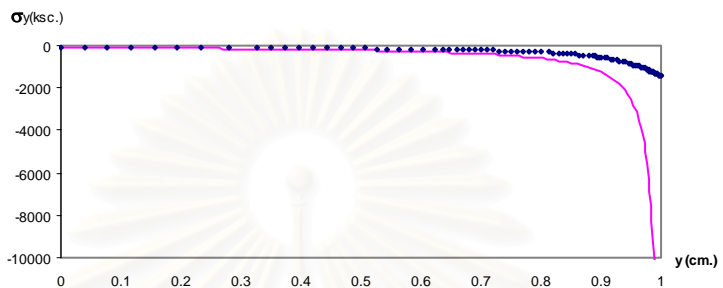
◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



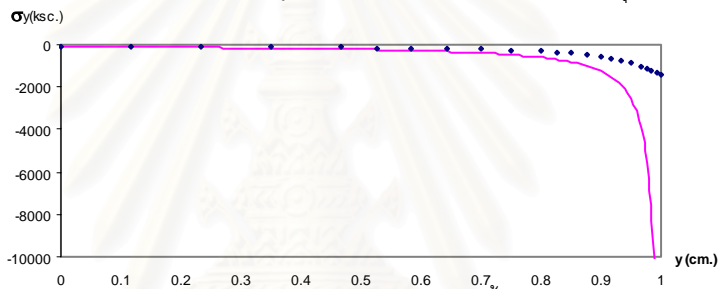
รูปที่ 4.2.14 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AC ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



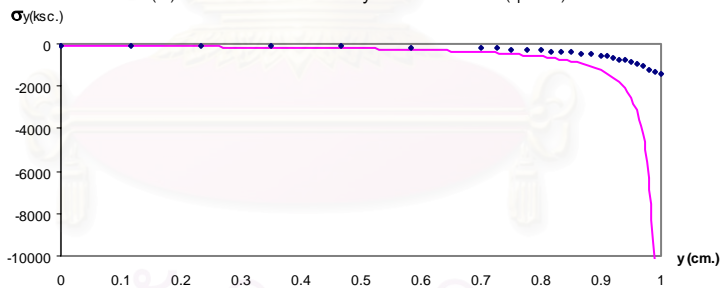
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

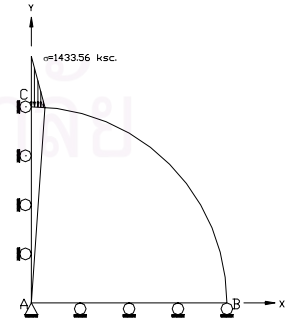


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ (p=2)



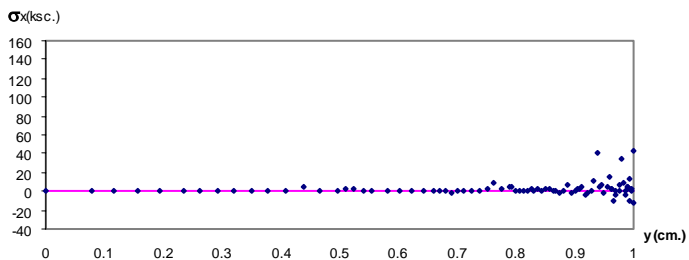
(ง) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

◆ Finite Element solution
 — Exact Solution

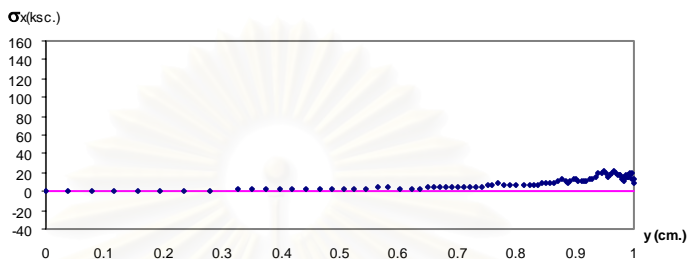


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

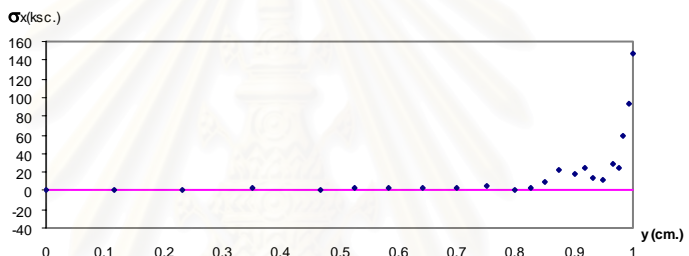
รูปที่ 4.2.15 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AC ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



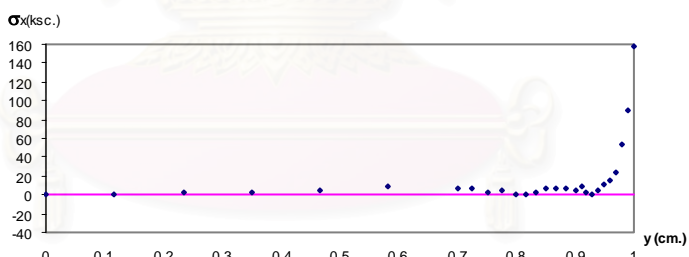
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

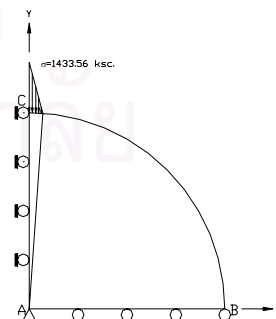


(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ (p=2)



(ง) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ และใช้วิธีเ่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

◆ Finite Element solution
 — Exact Solution



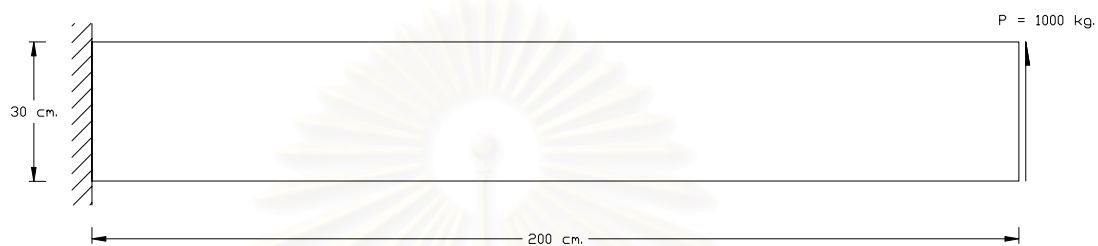
รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.2.16 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AC ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง
 ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ

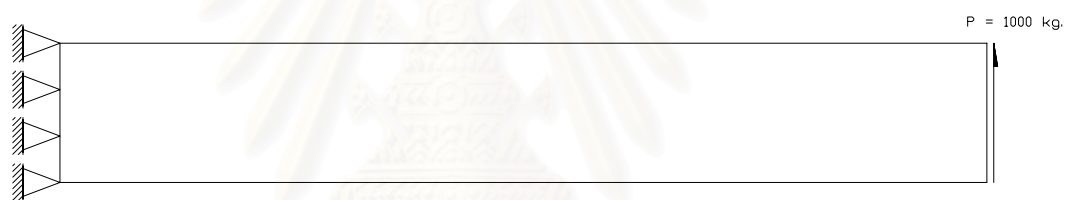
| งานวิจัย | จำนวน โครงข่าย | จำนวน จุดต่อ | จำนวน ชั้นส่วน | ความคลาด เคลื่อนสัมพัทธ์ | เวลา (วินาที) | จำนวนเท่าของเวลาเมื่อ เปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้ p=2 |
|---|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------------------|------------------|---|
| งานวิจัยเดิมที่ใช้ การปรับเรียบของลาปลาซ | 7 | 2630 | 5031 | 0.0436 | 116 | 14.50 |
| งานวิจัยเดิมที่ใช้ การปรับเรียบเชิงมุม | 4 | 2366 | 4499 | 0.0450 | 103 | 12.88 |
| งานวิจัยนี้ ที่ใช้ p=2 | 8 | 151 | 60 | 0.0495 | 8 | 1.00 |
| งานวิจัยนี้ ที่ใช้ p=1 | 2 | 201 | 84 | 0.0452 | 3 | 0.38 |

ตารางที่ 4.2.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาแผ่นวงกลมบาง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



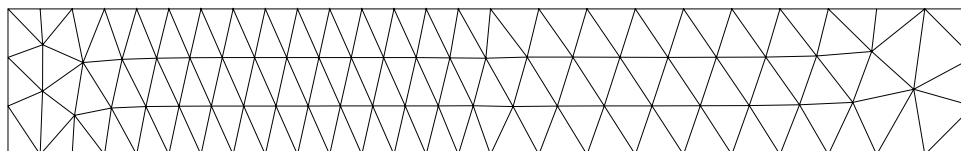
(ก) คานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ



(ข) แบบจำลองการวิเคราะห์

รูปที่ 4.3.1 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระและแบบจำลองการวิเคราะห์

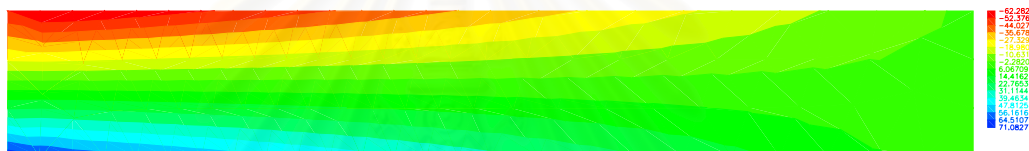
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) โครงข่ายชิ้นส่วน $\eta = 0.0169$ $N_e = 144$ $N_n = 345$



(ข) การกระจายค่าคลาดเคลื่อน



(ค) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง x

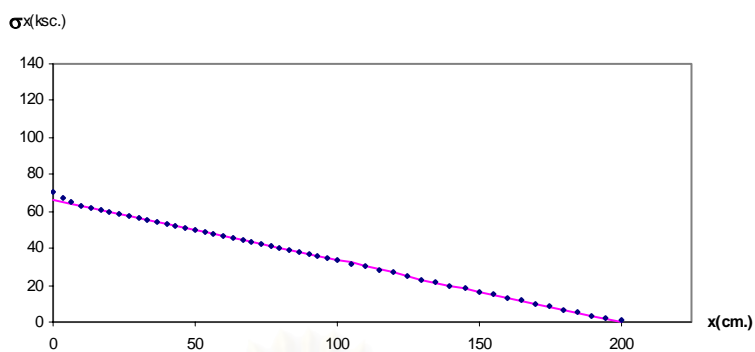


(ง) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง y

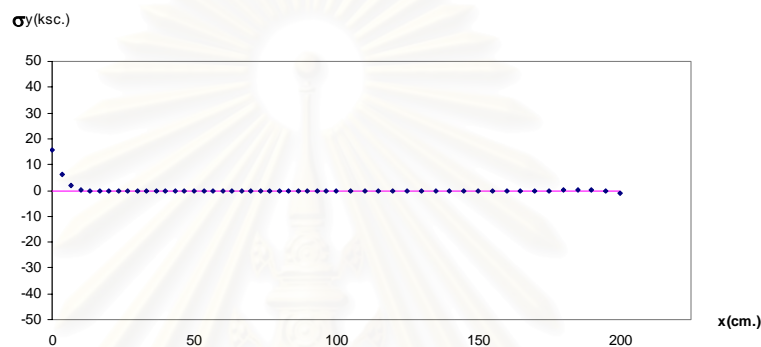


(จ) การกระจายของหน่วยแรงเฉือน

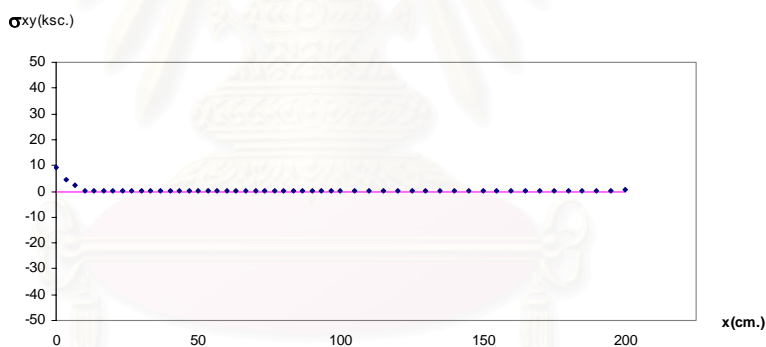
รูปที่ 4.3.2 ผลการวิเคราะห์ ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายที่ 1 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y



(ค) หน่วยแรงเฉือน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

◆ Finite Element solution

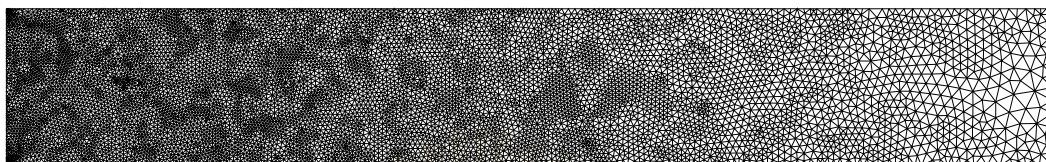
— Exact Solution

รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.3.3 ค่าหน่วยแรง บริเวณขอบล่างของคาน ในโครงข่ายที่ 1

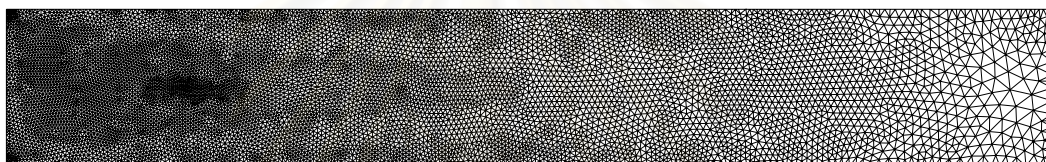
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ

ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



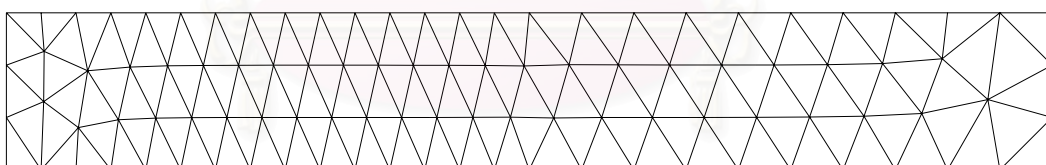
(ก) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 7 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ

$$\eta = 0.0447 \quad N_e = 18649 \quad N_n = 9637$$



(ข) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 4 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

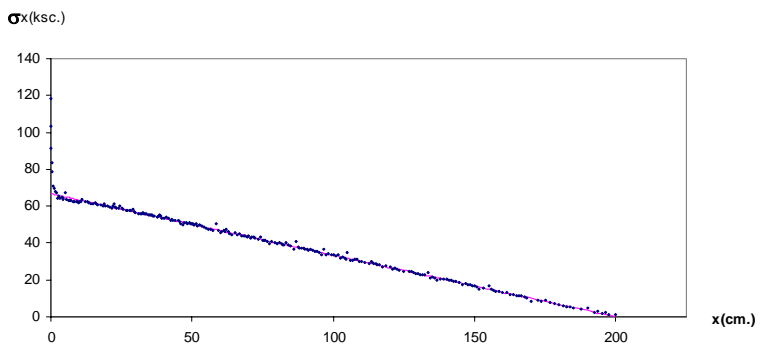
$$\eta = 0.0463 \quad N_e = 17679 \quad N_n = 9174$$



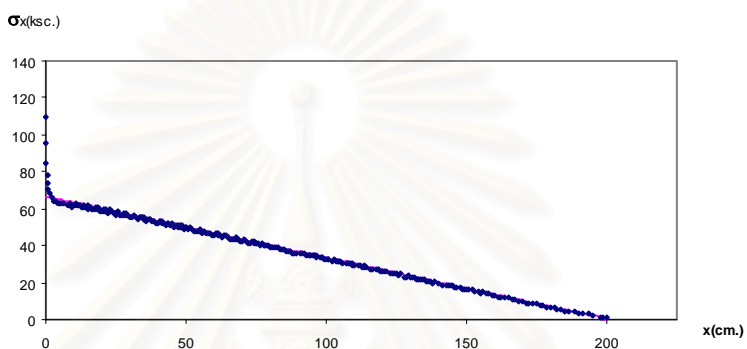
(ค) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 1 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

$$\eta = 0.0169 \quad N_e = 144 \quad N_n = 345$$

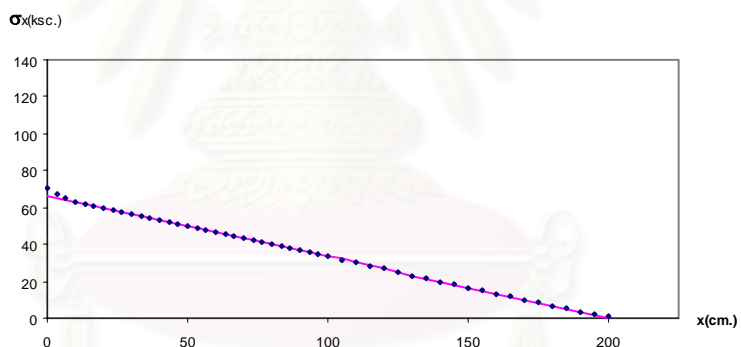
รูปที่ 4.3.4 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชั้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานยี่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ
ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้

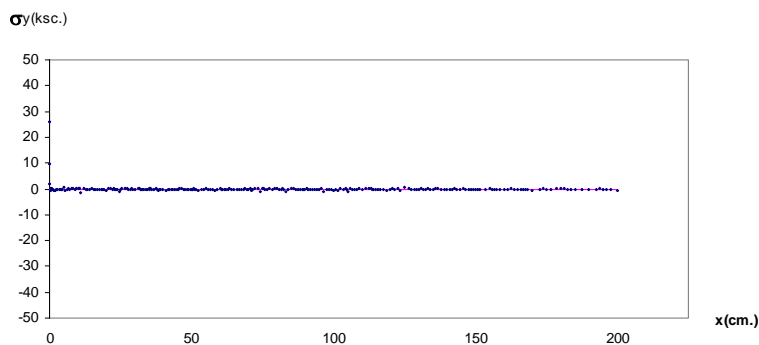
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

◆ Finite Element solution

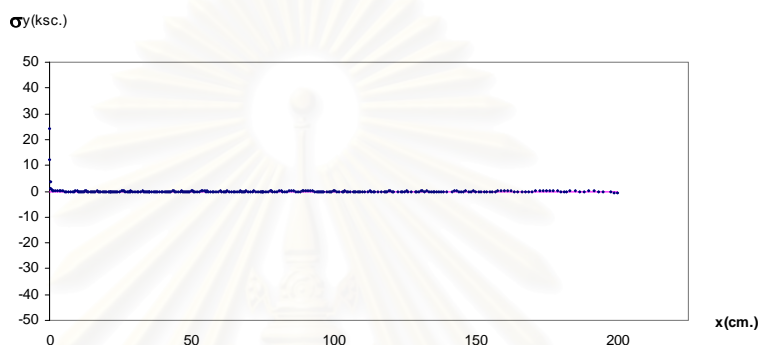
— Exact Solution

รูปแสดงลักษณะของปัญหา

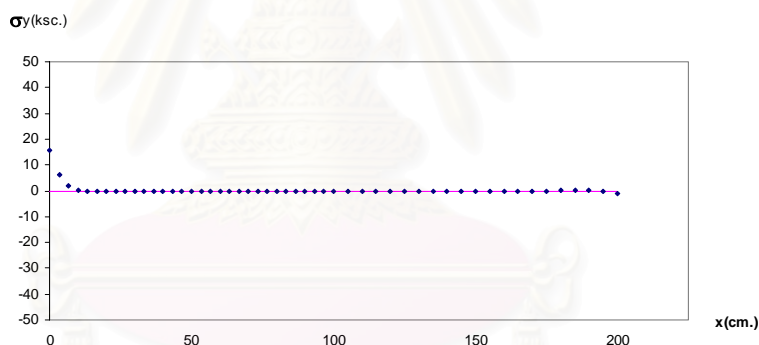
รูปที่ 4.3.5 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบล่าง ในปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



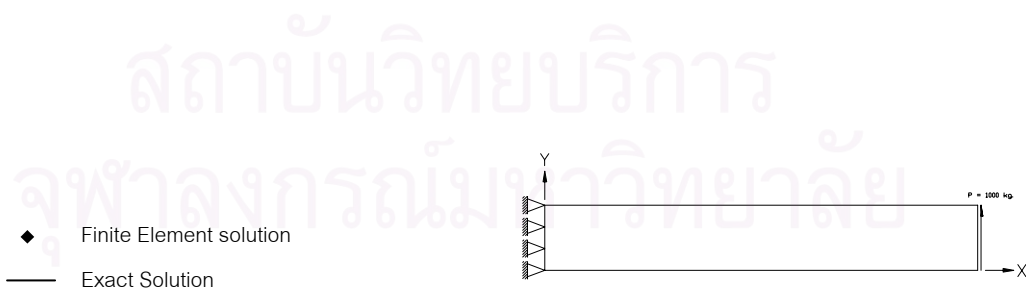
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

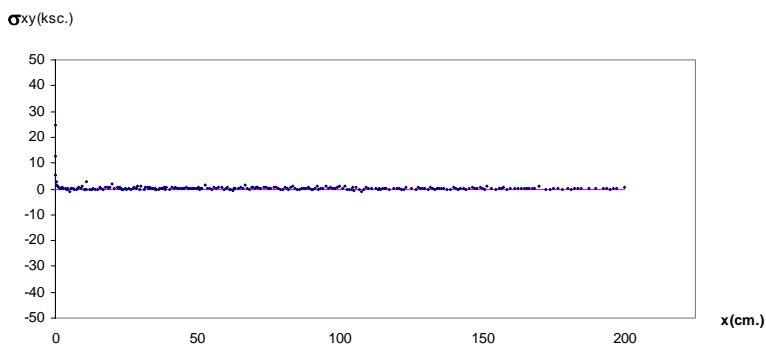


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้

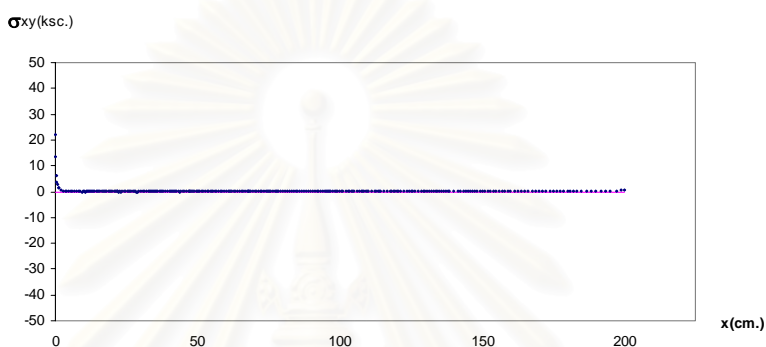


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

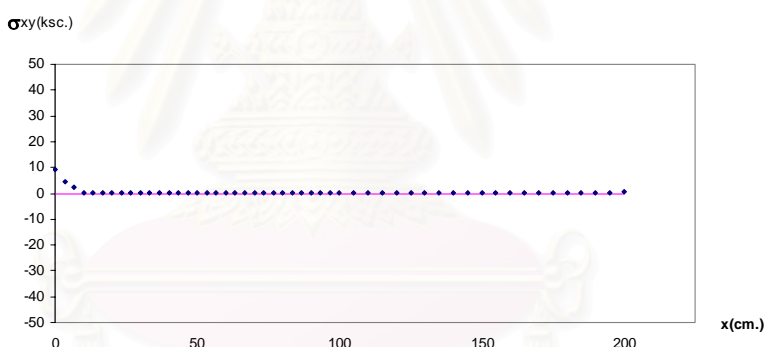
รูปที่ 4.3.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่าง ในปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



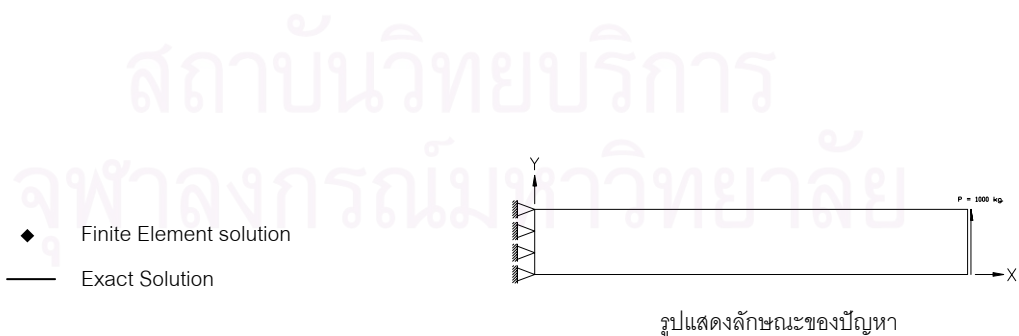
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ^[23]



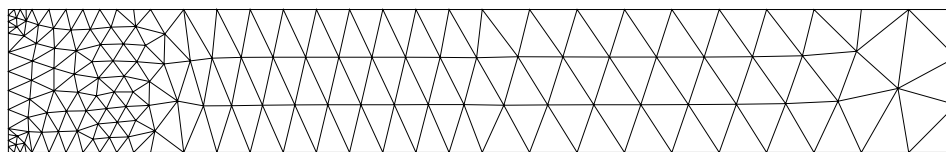
(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม^[26]



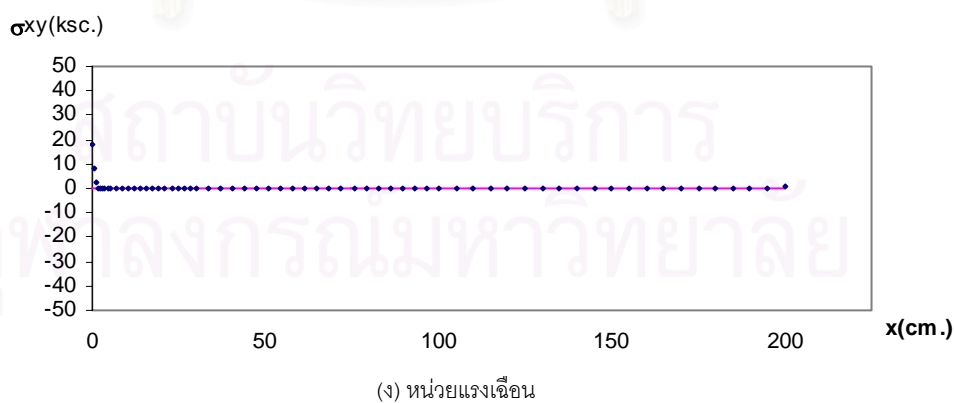
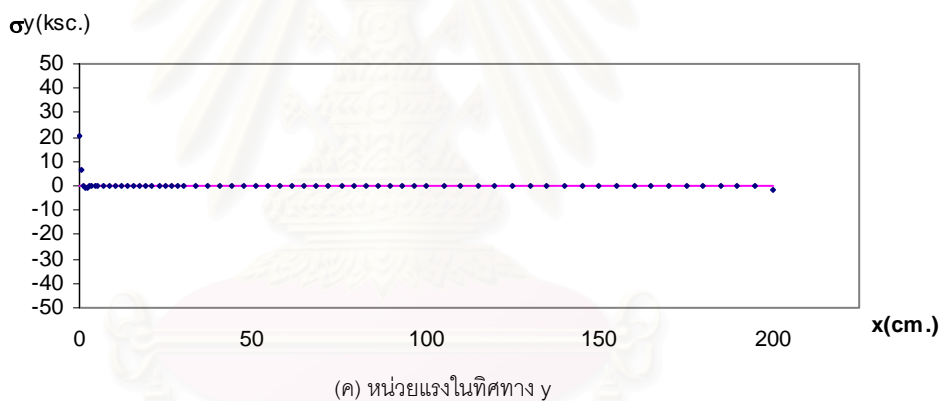
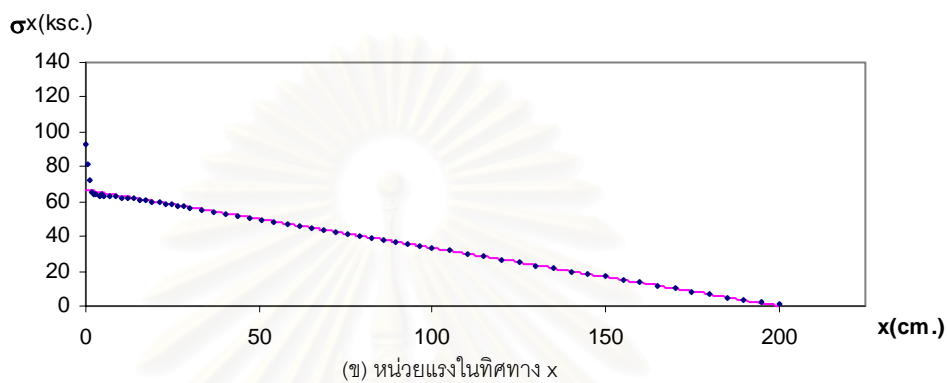
(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้



รูปที่ 4.3.7 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบล่าง ในปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



(ก) โครงข่ายชิ้นส่วน $\eta = 0.0100$ $N_e = 260$ $N_n = 599$



◆ Finite Element solution

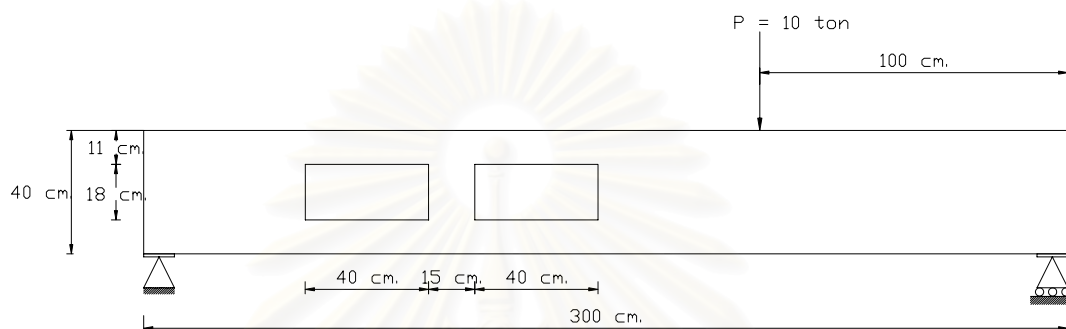
— Exact Solution

รูปที่ 4.3.8 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใน ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ
 ที่เพิ่มความละเอียดของโครงข่ายเริ่มต้น และ
 ค่าหน่วยแรงบริเวณขอบล่างของคาน

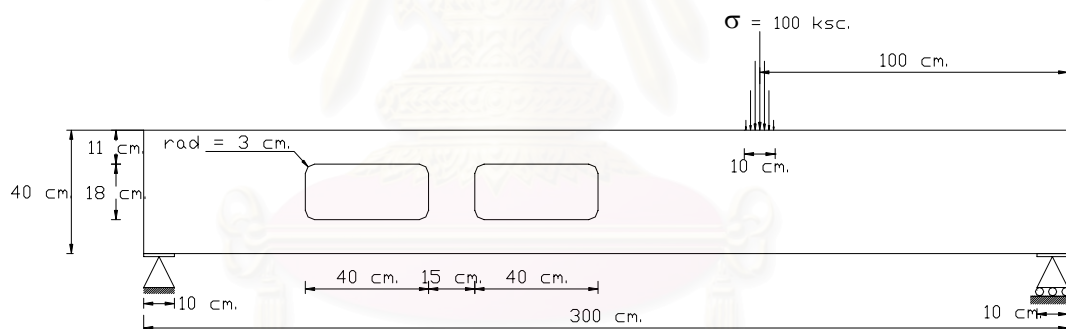
| งานวิจัย | จำนวน โครงข่าย | จำนวน จุดต่อ | จำนวน ชิ้นส่วน | ความคลาด เคลื่อนสัมพัทธ์ | เวลา (วินาที) | จำนวนเท่าของเวลาเมื่อ เปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้ |
|---|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------------------|------------------|--|
| งานวิจัยเดิมที่ใช้ การปรับเรียบของลาปลาซ | 7 | 9637 | 18649 | 0.0447 | 2095 | 299.29 |
| งานวิจัยเดิมที่ใช้ การปรับเรียบเชิงมุม | 4 | 9174 | 17679 | 0.0463 | 1795 | 256.43 |
| งานวิจัยนี้ | 1 | 345 | 144 | 0.0169 | 7 | 1.00 |

ตารางที่ 4.3.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาคานยีนรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

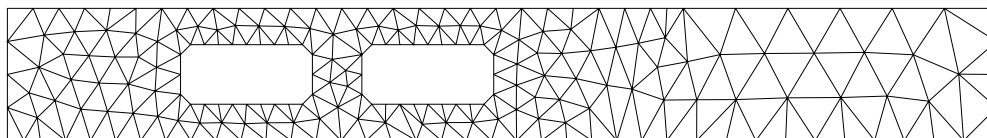


(ก) คานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด

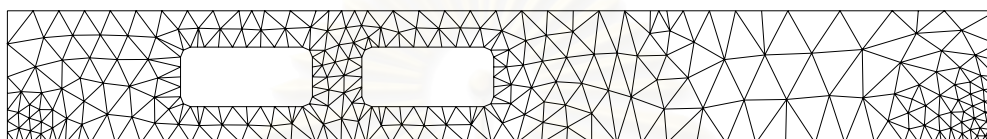


(ข) แบบจำลองการวิเคราะห์

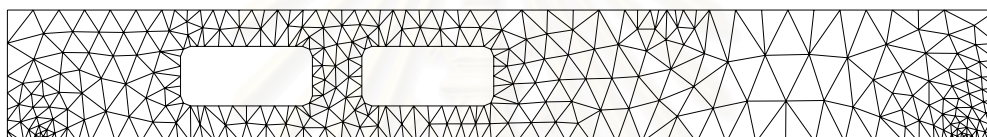
รูปที่ 4.4.1 ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์



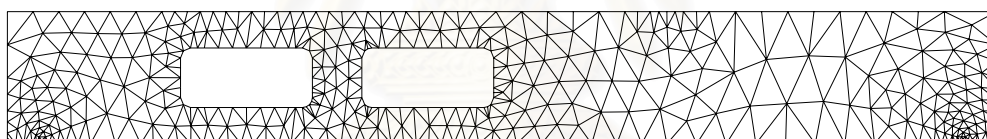
Mesh 1 $\eta = 0.2054$ Ne = 313 Nn = 752



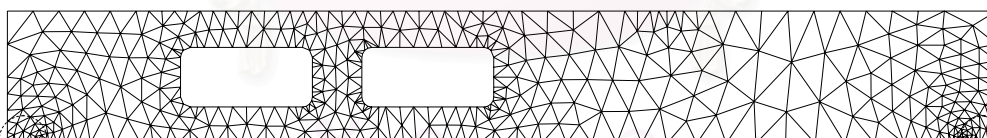
Mesh 2 $\eta = 0.1018$ Ne = 499 Nn = 1176



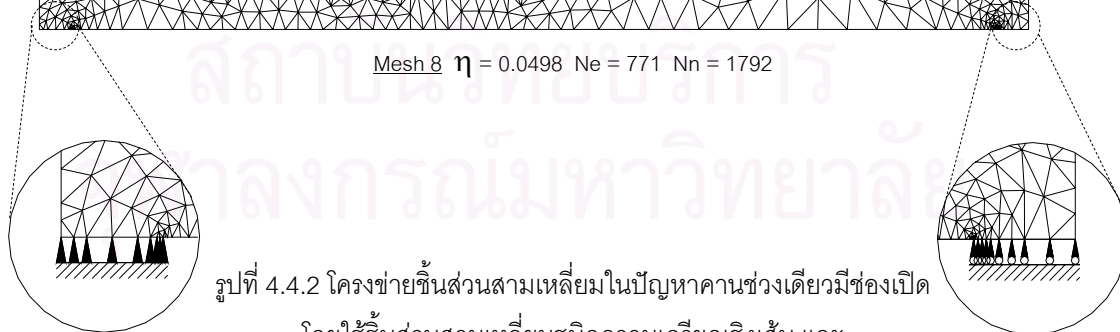
Mesh 4 $\eta = 0.0634$ Ne = 621 Nn = 1462



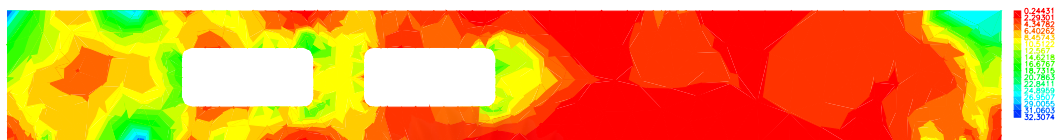
Mesh 6 $\eta = 0.0597$ Ne = 692 Nn = 1617



Mesh 8 $\eta = 0.0498$ Ne = 771 Nn = 1792



รูปที่ 4.4.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



(ก) การกระจายค่าคลาดเคลื่อน



(ข) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง x

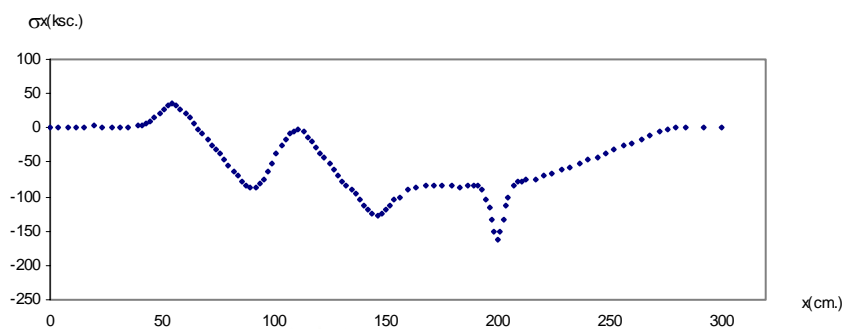


(ค) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง y

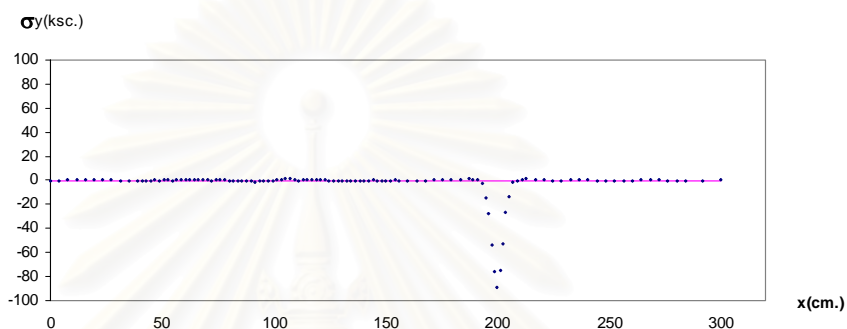


(ง) การกระจายของหน่วยแรงเฉือน

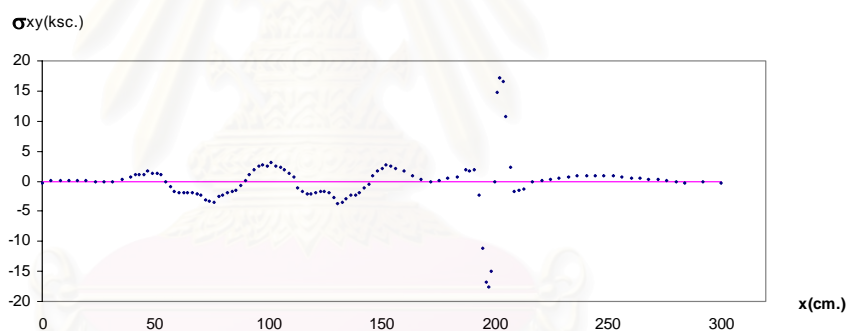
สถาบันวิทยบริการ
 รูปที่ 4.4.3 ผลการวิเคราะห์ ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 8
 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และ
 ปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



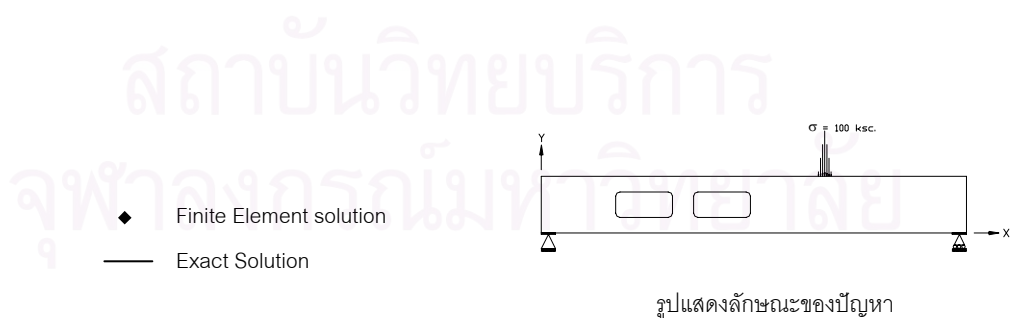
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y



(ค) หน่วยแรงเฉือน

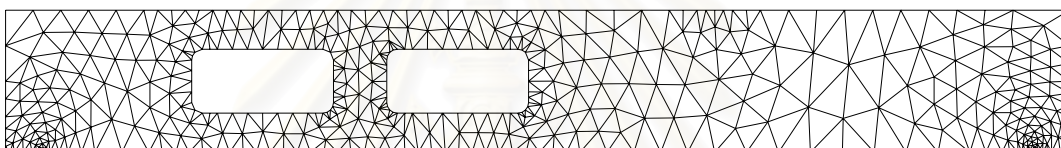


รูปที่ 4.4.4 ค่าหน่วยแรง ตามขอบบนของคานช่วงเดี่ยวยมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 8 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนโดยใช้วิธีปรับเรียบเชิงมุม



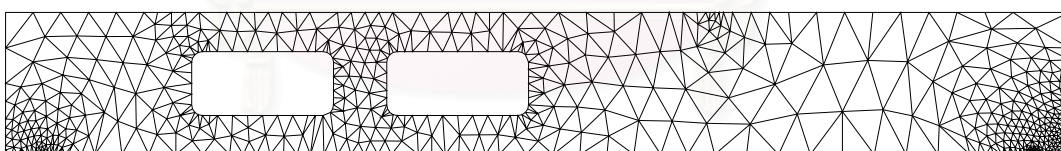
(ก) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 5 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

$$\eta = 0.0481 \quad Ne = 60729 \quad Nn = 31611$$



(ข) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 8 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม (p=2)

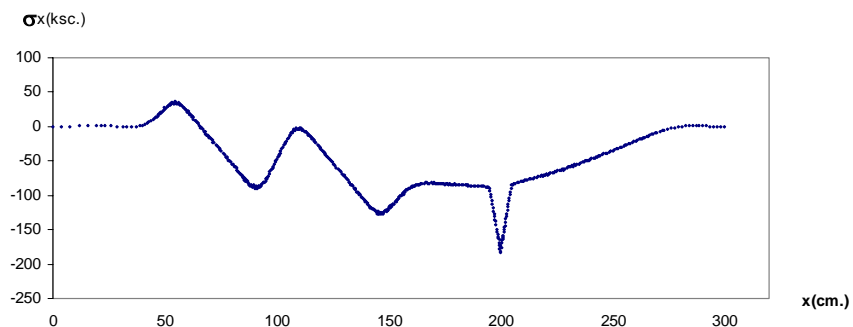
$$\eta = 0.0498 \quad Ne = 771 \quad Nn = 1792$$



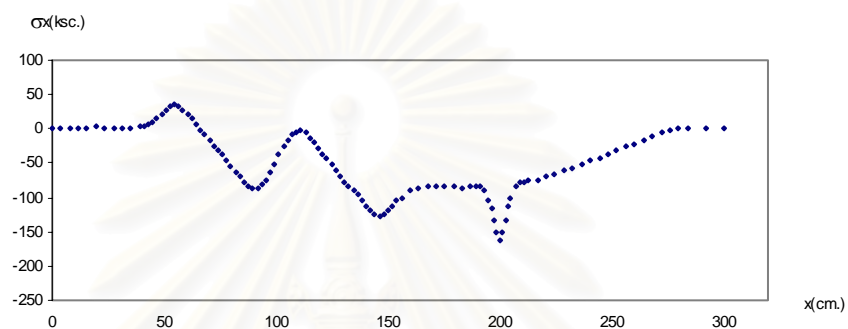
(ค) โครงข่ายชั้นส่วนที่ 3 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมและเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

$$\eta = 0.0478 \quad Ne = 1073 \quad Nn = 2422$$

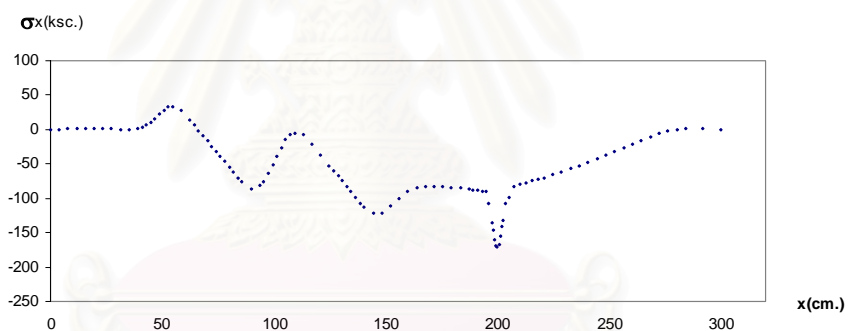
รูปที่ 4.4.5 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชั้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานช่วงเดี่ยวมี่ช่องเปิด
ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

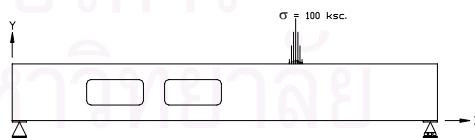


(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ (p=2)



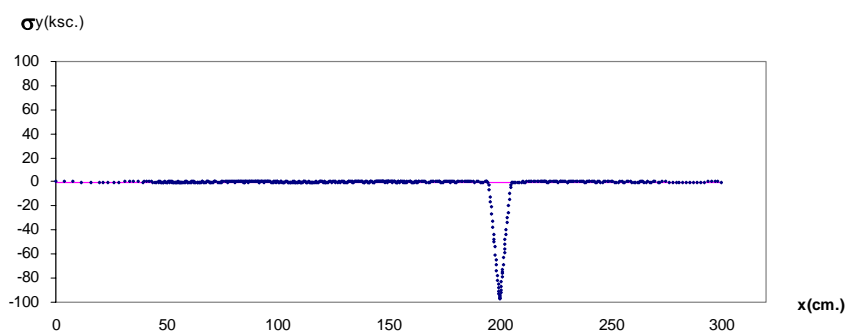
(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ และวิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

◆ Finite Element solution

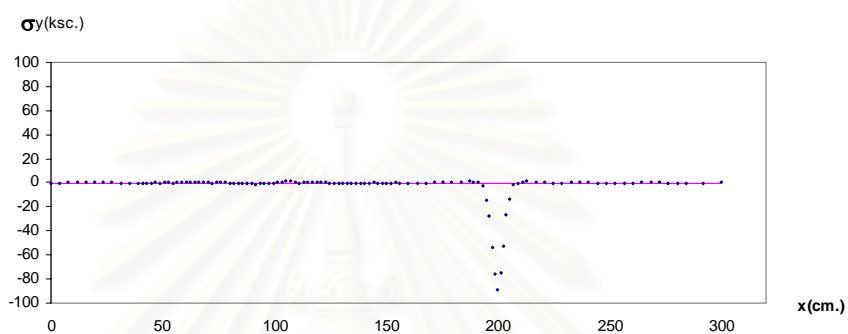


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

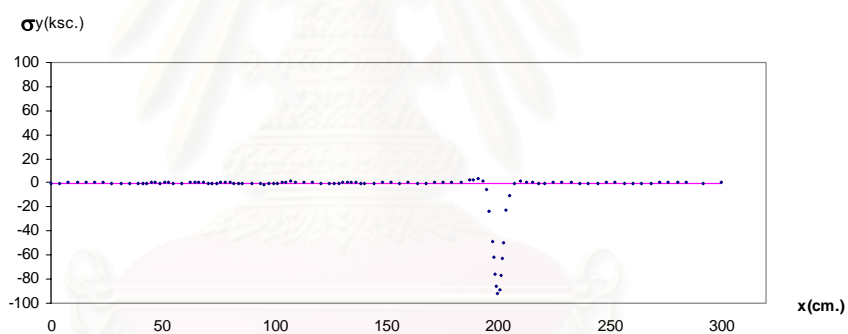
รูปที่ 4.4.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบบน ในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

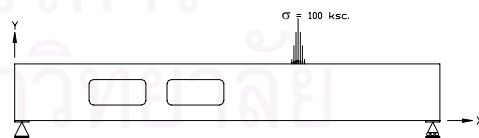


(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ (p=2)



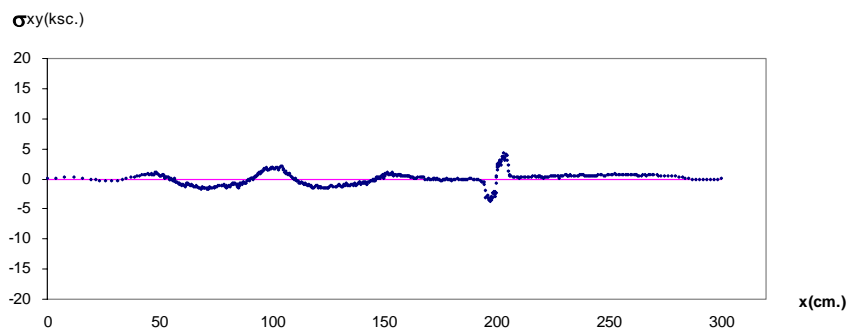
(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ และวิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)

◆ Finite Element solution
 — Exact Solution

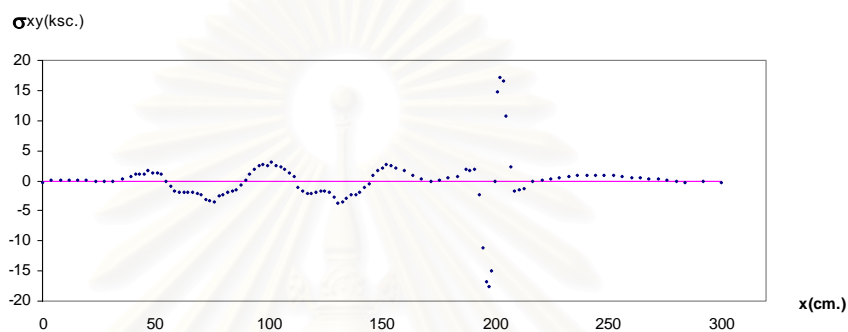


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

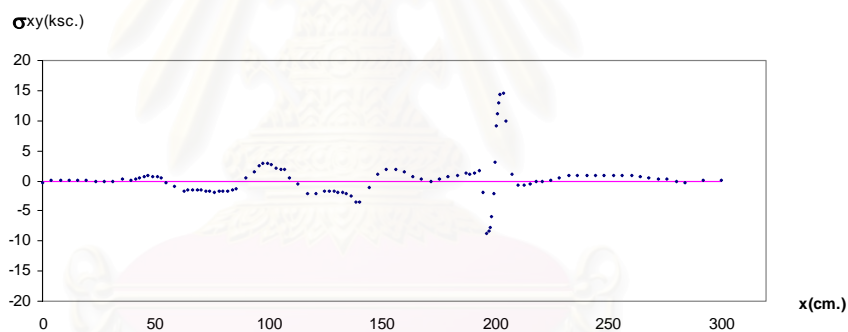
รูปที่ 4.4.7 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบบน ในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



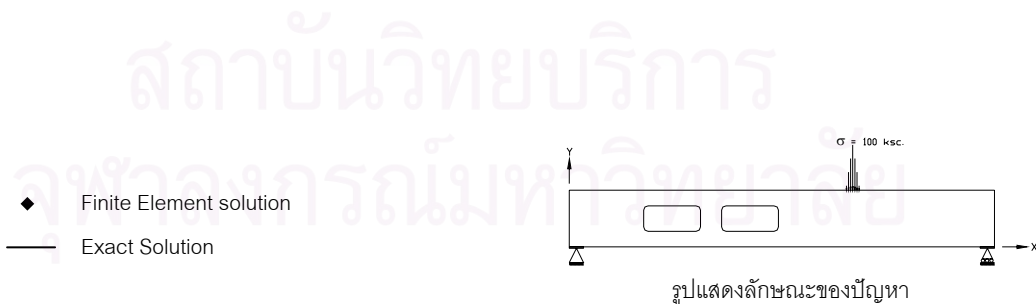
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



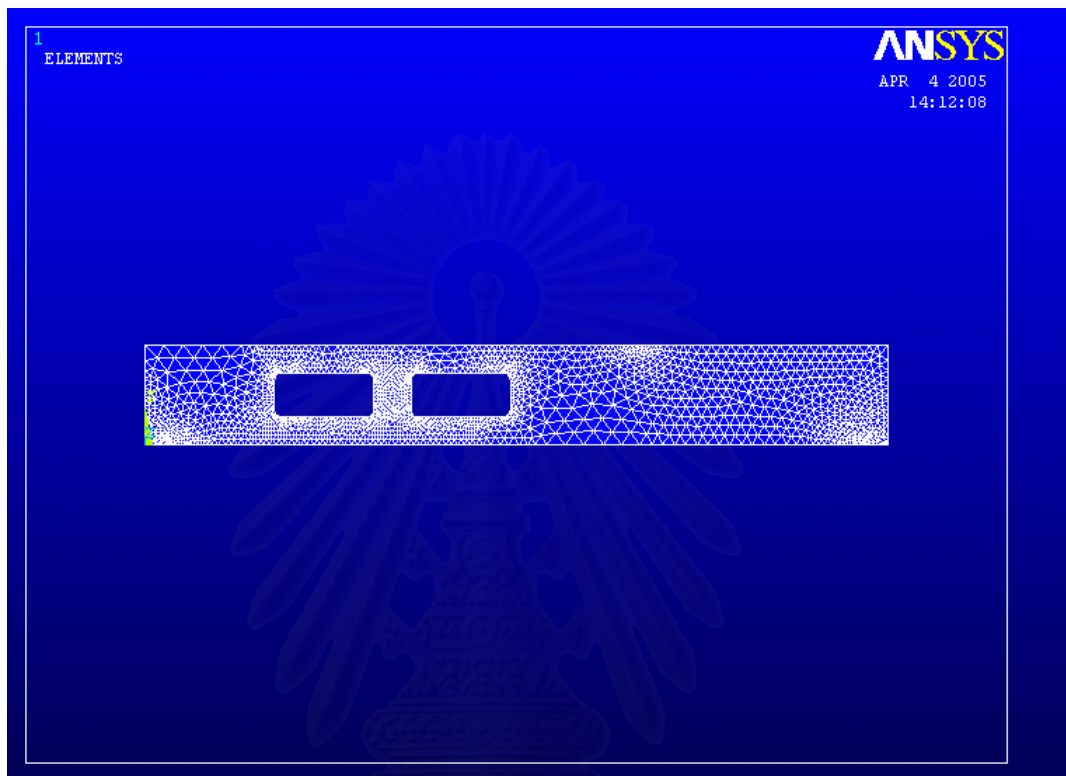
(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ (p=2)



(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ และวิธีเร่งการเข้าสู่ผลเฉลย (p=1)



รูปที่ 4.4.8 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบบน ในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด
ในโครงข่ายสุดท้าย ของงานวิจัยต่างๆ



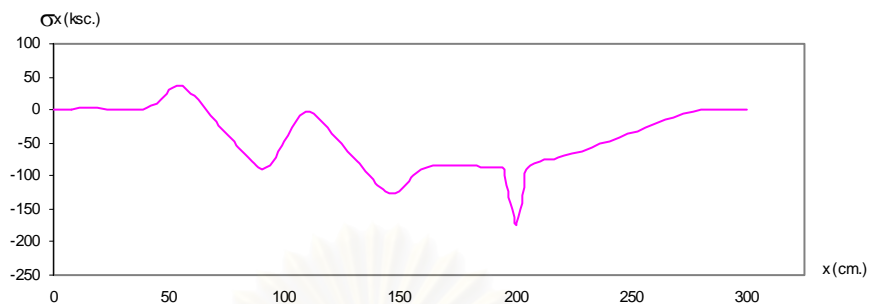
โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 5

โครงข่ายชิ้นส่วน $\eta = 0.0570$ $N_e = 3139$ $N_n = 6694$

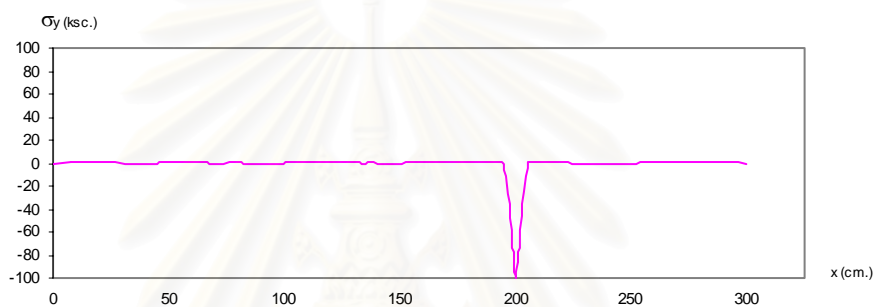
รูปที่ 4.4.9 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด

โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

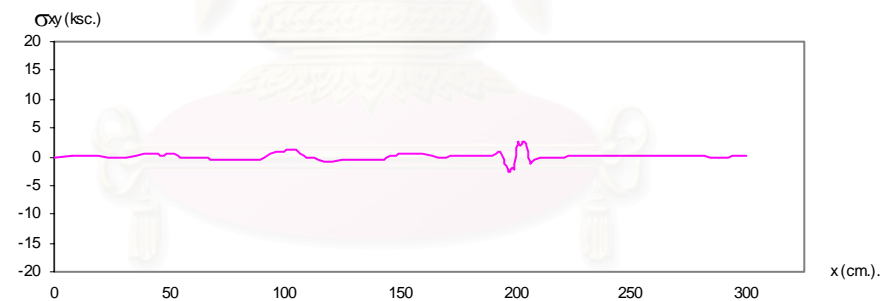
ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS



(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x



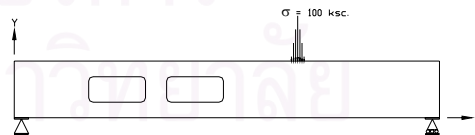
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y



(ค) หน่วยแรงเฉือน

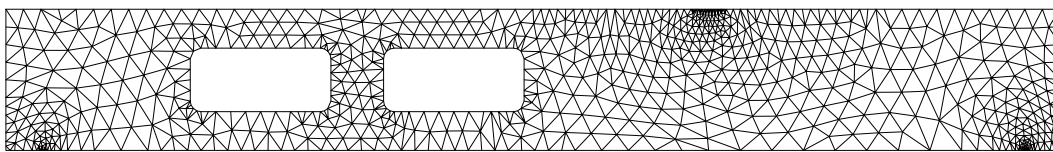
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

◆ Finite Element solution



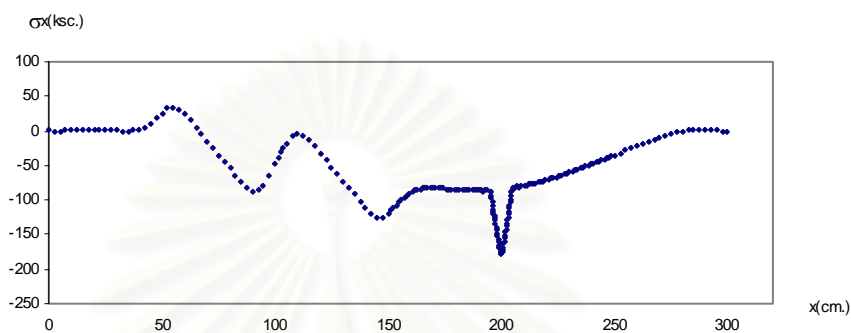
รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.4.10 ค่าหน่วยแรง ตามขอบบนของคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 5 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และที่ได้จากการวิเคราะห์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS

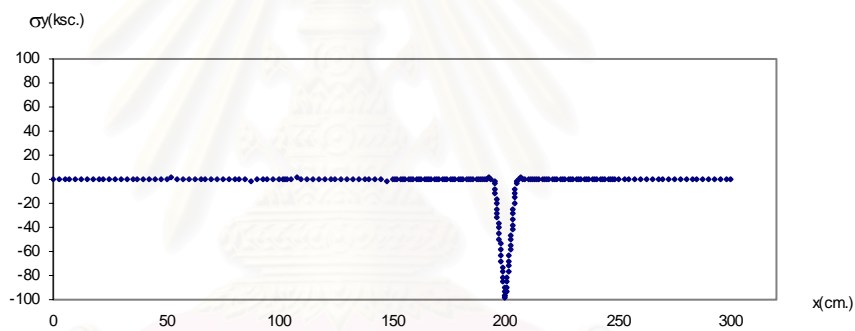


(ก) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 5

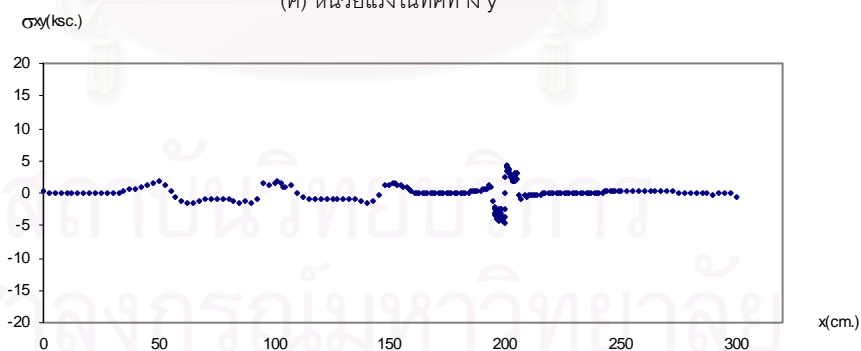
$\eta = 0.0444$ Ne = 1292 Nn = 2895



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y



(ง) หน่วยแรงเฉือน

◆ Finite Element solution

รูปที่ 4.4.11 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใน ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด
 ที่เพิ่มความละเอียดของโครงข่ายเริ่มต้น และ
 ค่าหน่วยแรงบริเวณขอบบนของคาน

| งานวิจัย | จำนวน โครงข่าย | จำนวน จุดต่อ | จำนวน ชั้นส่วน | ความคลาด เคลื่อนสัมพัทธ์ | เวลา (วินาที) | จำนวนเท่าของเวลาเมื่อ เปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้ p=2 |
|---|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------------------|------------------|---|
| งานวิจัยเดิมที่ใช้ การปรับเรียบเชิงมุม | 5 | 31611 | 60729 | 0.0481 | 3997 | 42.52 |
| งานวิจัยนี้ ที่ใช้ p=2 | 8 | 1792 | 771 | 0.0498 | 94 | 1.00 |
| งานวิจัยนี้ ที่ใช้ p=1 | 3 | 2422 | 1073 | 0.0478 | 63 | 0.67 |
| โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS | 5 | 6694 | 3139 | 0.0570 | 329 | 3.50 |

ตารางที่ 4.4.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ในปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติในงานวิจัยนี้ ยังคงยึดหลักการทำงานตามกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนเดิม นั่นคือ ใช้การประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการเปรียบเทียบผลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับค่าประมาณของผลเฉลยที่ได้จากวิธีการพื้นฐานเป็นหย่อม สร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนโดยวิธีพรอนท์คืบหน้า ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม และปรับขนาดขึ้นส่วนโดยการเพิ่มจุดลงในบริเวณพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก โดยคำนวณความหนาแน่นของจุดจากความคลาดเคลื่อนโดยประมาณ

ในส่วนของการพัฒนาโปรแกรมที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงนั้น จะเป็นการเปลี่ยนพฤติกรรมของขึ้นส่วนที่ประกอบกันเป็นโครงข่ายให้มีพฤติกรรมที่ยืดหยุ่นมากขึ้น คือเปลี่ยนชนิดของขึ้นส่วนจากสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่เป็นสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ซึ่งจะทำให้ผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความแม่นยำมากขึ้นและลดเวลาในการคำนวณลง ซึ่งสามารถสรุปผลที่ได้จากการพัฒนาโปรแกรม ดังนี้

การประมาณค่าคลาดเคลื่อน มีการกระจายค่าคลาดเคลื่อนได้ดีในพื้นที่ของปัญหา แต่จะเกิดค่าคลาดเคลื่อนที่สูงกว่าบริเวณอื่น คือที่บริเวณขอบของปัญหาที่รับแรงแต่ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นก็สูงกว่าไม่มาก และให้ผลที่ดีขึ้นกว่าในงานวิจัยเดิม ซึ่งเป็นผลมาจากการประมาณค่าหน่วยแรงที่ดีขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งผลจากการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนนี้จะส่งผลถึงการปรับขนาดของโครงข่ายในรอบถัดไปให้มีความต่อเนื่องของโครงข่ายที่ดี ในบริเวณภายในของปัญหา แต่จะเกิดความไม่ต่อเนื่องบ้างที่บริเวณขอบที่รับแรงก็เนื่องจากค่าคลาดเคลื่อนที่สูงกว่าบริเวณอื่นแต่สัดส่วนของพื้นที่ที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนไม่เหมาะสม ทำให้สร้างจุดต่อในบริเวณนี้ได้ไม่ดีนักเมื่อถึงขั้นตอนการสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมจึงทำให้ได้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ไม่ค่อยต่อเนื่องมากนัก ซึ่งจะเห็นได้ในตัวอย่างที่ 1 ของงานวิจัยนี้ ดังนั้นการกำหนดโครงข่ายเริ่มต้นที่เหมาะสมจะทำให้การกระจายของค่าคลาดเคลื่อนดีขึ้น ซึ่งจะทำให้การปรับขนาดโครงข่ายในรอบถัดไปนั้นสร้างขึ้นส่วนได้มีความต่อเนื่องด้วย

ผลของพฤติกรรมของขึ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าลักษณะการกระจายของหน่วยแรงของปัญหาในการวิเคราะห์นั้นจะส่งผลต่อเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์อย่างมาก คือ เมื่อปัญหาที่ใช้ในการวิเคราะห์ มีลักษณะการกระจายของหน่วยแรงใกล้เคียงกับพฤติกรรมของขึ้นส่วนซึ่งในที่นี้คือ เมื่อปัญหาที่มีการกระจายของหน่วยแรงมีลักษณะเป็นเชิงเส้นจะทำให้ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ถูกต้องและแม่นยำอย่างรวดเร็ว ซึ่งสังเกตได้จากตัวอย่างที่ 3 ของงานวิจัยนี้ จะเห็นว่าลักษณะการกระจายของหน่วยแรงในคานยันจะเป็นลักษณะเชิงเส้นคือเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะที่ห่างออกจากตำแหน่งที่แรงกระทำ ดังนั้นจึงทำให้ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ของ

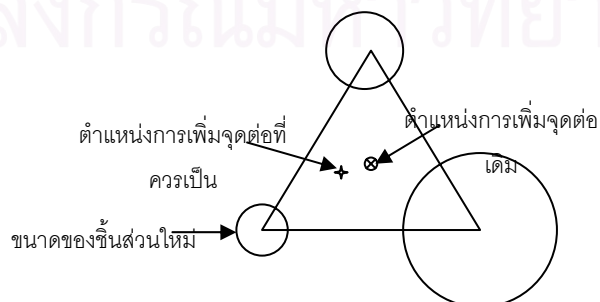
งานวิจัยนี้ถูกต้องอย่างรวดเร็วมาก โดยไม่ต้องใช้การปรับขนาดโครงข่ายเลย ซึ่งจะแตกต่างจากตัวอย่างที่ 1 ซึ่งลักษณะการกระจายของหน่วยแรงนั้นค่อนข้างคงที่เป็นบริเวณกว้าง จึงทำให้เวลาโดยรวมเร็วกว่าในงานวิจัยก่อนหน้าไม่มากนัก ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เวลาที่จะใช้ในการวิเคราะห์นั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา ว่ามีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของชิ้นส่วน มากน้อยเพียงใด

บริเวณส่วนโค้งที่ขอบเขตของปัญหา จะเห็นว่าการเป็นตัวแทนทางกายภาพของขอบเขตที่เป็นเส้นโค้งในงานวิจัยนี้จะไม่ดีมากนัก เนื่องจากการปรับขนาดของโครงข่ายจะปรับขนาดเฉพาะในบริเวณที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนสูง ทำให้การปรับขนาดที่ขอบเขตที่เป็นส่วนโค้งทำได้ไม่ดีมากนัก วิธีแก้ไขคือต้องเปลี่ยนโครงข่ายเริ่มต้นให้มีความละเอียดขึ้นในบริเวณที่ต้องการ หรือ เปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนที่ใช้เป็นสามเหลี่ยมชนิดที่ด้านเป็นเส้นโค้งซึ่งจะทำให้เสียเวลาที่ใช้การสร้างโครงข่ายมากขึ้น

โปรแกรมที่ปรับปรุงแล้วนี้สามารถวิเคราะห์หาค่าได้แม่นยำและรวดเร็วขึ้นมาก ซึ่งในการนำไปใช้จริงผู้ใช้จำเป็นต้องมีความรู้ในการกำหนดค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้และการกำหนดโครงข่ายเริ่มต้นให้เหมาะสม รวมทั้งการสร้างแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์ให้เหมาะสมกับปัญหาซึ่งจะแตกต่างกันออกไป เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการทำงานของโปรแกรม

5.2 ข้อเสนอนี้และอื่นๆ

ในการศึกษาเพื่อการนำไปใช้งานจริง ควรจะมีการปรับปรุงในส่วนของการปรับขนาดชิ้นส่วนให้สามารถมีการเพิ่มหรือลดจุดต่อได้อย่างอิสระ และการเพิ่มจุดต่อควรพิจารณาตำแหน่งที่เพิ่มให้เหมาะสมกับค่าคลาดเคลื่อนโดยรอบที่เกิดขึ้น คือ โดยปกติการเพิ่มจุดต่อจะเพิ่มที่กึ่งกลางของชิ้นส่วน ซึ่งโดยเบื้องต้นจะมีการตรวจสอบว่าเพิ่มจุดต่อได้หรือไม่กับจุดต่อที่เป็นจุดยอดของชิ้นส่วนนั้น ซึ่งแต่ละจุดต่อก็จะมีค่าความคลาดเคลื่อนแตกต่างกันไป ดังนั้นเพื่อให้จุดต่อที่เพิ่มเข้ามาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพจึงควรเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่อที่เพิ่มเข้าไป โดยเพิ่มจุดต่อให้ใกล้กับจุดต่อที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนสูงกว่า ดังแสดงในรูปที่ 5.2.1 และจุดต่อบริเวณขอบก็ควรจะมีการปรับเปลี่ยนตำแหน่งได้ใหม่ในทุกรอบของการปรับขนาดชิ้นส่วน จะทำให้ได้โครงข่ายที่ความต่อเนื่องมากขึ้น ซึ่งจะสามารถใช้จุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายได้อย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสมที่สุด และก็จะช่วยลดเวลาในส่วนของการคำนวณจุดต่อที่ไม่จำเป็นลงได้



รูปที่ 5.2.1 ตำแหน่งที่ควรเป็นของการเพิ่มจุดต่อ

รายการอ้างอิง

1. Kelly D. W., De J. P. Gago S. R., Zienkiewicz O. C., Babuska I. "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method : Part I – Error Analysis" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19(1983): 1593-1619.
2. Kelly D. W. , De J. P. Gago S. R. , Zienkiewicz O. C. , Babuska I. "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II – Adaptive Mesh Refinement" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19(1983): 1621-1656.
3. Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24(1987): 337-357.
4. Ainsworth M., Zhu J. Z., Craig A. W., Zienkiewicz O. C. "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28(1989): 2161-2174.
5. Zhu J. Z., Zienkiewicz O. C. "Superconvergence Recovery Technique and a Posteriori Error Estimators" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 30(1990): 1321-1339.
6. Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. "Adaptive and Mesh Generation" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32(1991): 783-810.
7. Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part I: The Recovery Technique" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33(1992): 1331-1364.
8. Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part II: Error Estimates and Adaptivity" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33(1992): 1365-1382.
9. Blacker T., Belytschko T. "Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(1994): 517-536.
10. Wiberg N. –E., Abdulwahab WF. "Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36(1993): 2703-2724.
11. Wiberg N. –E., Abdulwahab WF., Ziukas S. "Enhanced Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(1994): 3417-3440.

12. Lee T. Park H. C., Lee S. W. "A Superconvergent Stress Recovery Technique with Equilibrium Constraint" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(1997): 1139-1160.
13. Herrmann L. R. "Laplacian – Isoparametric Grid Generation Scheme" J. Eng. Mech. Div., 1976(October): 749-759.
14. Bachmann P. L., Witthchen S. L., Shephard M. S., Grice K. R. Yerry M. A. "Robust, Geometrically Based, Automatic Two Dimensional Mesh Generation" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24(1987): 1043-1078.
15. S. H. Lo, " A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains," International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21(1985): 1403-1426.
16. Peraire J., Peiro J., Farmaggia L., Morgan K., Zienkiewicz O. C. "Finite Element Euler Computations in Three Dimensions" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26(1988): 2135-2159.
17. J. Z. Zhu, O. C. Zienkiewicz, E. Hinton and J. Wu "A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32(1991): 849-866.
18. Cavendish J. C. "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domain for the Finite Element Method" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8(1974): 679-696.
19. Lo S. H. "Delaunay Triangulation of Non-Convex Planar Domains" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28(1989): 2659-2707.
20. Borouchaki H., George P. L. "Aspects of 2-D Delaunay Mesh Generation" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(1997): 1957-1975.
21. Alexander F. "Almost Regular Delaunay - Triangulations" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(1997): 4595-4610.
22. Johnson B. P., Sullivan J. M. Kwasnik J. R. and A. "Automatic Conversion of Triangular Finite Element Meshes to Quadrilateral Elements" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31(1991): 67-84.
23. เทอดเกียรติ จันทร์ชวกร, โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
24. Karamete B.K. , Tokdemir T. , Ger M. "Unstructured Grid Generation and a Simple Triangulation Algorithm for Arbitraries Using Object Oriented Programming" International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(1997): 251-268.

25. Weatherill N.P. , Hassan O. “Efficient Three – Dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraint” International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(1994): 2005-2039.
26. รัฐพล สุวรรณพฤษ , โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติโดยใช้วิธีการปรับเรียบเชิงมุม วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.
27. สุรชาญ แซ่ลี่ , การสร้างและปรับขนาดชิ้นส่วนโดยอัตโนมัติด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.
28. K. Mosert and G. Swoboda , “Explicit Stiffness Matrix of the Linearly Varying Strain Triangular Element” , Computer & Structures , 8(1977): 311–314.
29. G. Subramanian and C. Jeyachandra Bose , “Convenient Generation of Stiffness Matrices for the Family of Plane Triangular Element” , Computer & Structures , 15(1981): 85 – 89.
30. Kent L. Lawrence , Rajiv V. Nambiar and Brad Bergmann, “Closed Form Stiffness Matrices and Error Estimators for Plane Hierarchic Triangular Elements” International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31(1991): 879-894.
31. P. S. Shiakolas , R. V. Nambiar , K. L. Lawrence and W. A. Rogers , “Closed - Form Stiffness Matrices for the Linear Strain and Quadratic Strain Tetrahedron Finite Elements” , Computer & Structures , 45(1992), No. 2: 237– 242.
32. Carlos A. Felippa , “Programming the Isoparametric Six – Node Triangle” , Engineering Computations , 7(1990),No. 2: 173 – 177.
33. Subhash C. Anand and Roger H. H. Shaw , “Use of LAST Element in Elastic – Plastic Solutions” , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 15(1978): 1–12.
34. Mackinnon R.J. , Carrey G. F. ,” Superconvergent Derivatives : A Taylor Series Analysis “ , International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28(1989): 489-509.
35. K. Y. Sze , D.Zhu ,” On the relative merits of three – point integration rules for six – node triangles “ ,Finite Element in Analysis and Design , 27(1997): 335–343.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

การใช้งานโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมมีการทำงานโดยอาศัยการนำเข้าข้อมูลจากแฟ้มข้อมูลเป็นหลัก ดังนั้นแฟ้มข้อมูลจึงเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดสำหรับผู้ใช้งาน ซึ่งมีรายละเอียดของแฟ้มดังนี้ โดยยกตัวอย่างแฟ้มจากการวิเคราะห์ปัญหาในตัวอย่างที 1 ของบทที่ 4 ดังแสดงในรูป ผ.ก.1 โดยเพิ่มหมายเลขบรรทัดเพื่อความสะดวกในการอ้างอิง

ในส่วนแรกของแฟ้มบรรทัดที่ 1 – 6 จะเป็นการกำหนดลักษณะของปัญหา ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับได้ และคุณสมบัติทางวัสดุของปัญหาซึ่งสามารถเข้าใจได้โดยง่าย ลำดับต่อมาในบรรทัดที่ 8 จะเป็นพิกัดที่มุมล่างซ้ายและมุมขวาบนของพื้นที่ที่จะกำหนดให้ ADT เพื่อใช้แบ่งให้กับแต่ละจุดต่อไป ข้อสังเกตคือที่มุมบนขวาต้องอยู่เลยตำแหน่งบนขวาสุดของปัญหาออกไป ในขณะที่มุมล่างซ้ายสามารถกำหนดให้ซ้อนทับกับตำแหน่งล่างซ้ายของปัญหาได้

ส่วนต่อมาในบรรทัดที่ 10 เป็นจำนวนของขอบเขตของปัญหา และในบรรทัดที่ 12 – 18 เป็นข้อมูลของแต่ละขอบเขตโดยมีข้อมูลเรียงตามลำดับดังนี้ 1. หมายเลขประจำขอบเขตโดยต้องเริ่มจาก 0 ไล่ตามกันไป 2. ค่าพิกัดในแนวแกน x ของจุดเริ่มต้น 3. ค่าพิกัดในแนวแกน y ของจุดเริ่มต้น 4. ค่าพิกัดในแนวแกน x ของจุดปลาย 5. ค่าพิกัดในแนวแกน y ของจุดปลาย 6. รัศมีของเส้นขอบเขต มีค่าเป็นบวกเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ทางซ้ายของเส้น มีค่าเป็นลบเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ทางด้านขวาของเส้น และมีค่าเป็น 0 ถ้าเป็นเส้นตรง 7. จำนวนขอบเขตย่อยที่จะแบ่งจากขอบเขตนั้น

ต่อมาเป็นข้อมูลของที่รองรับโดยในบรรทัดที่ 20 เป็นจำนวนของที่รองรับ และมีรายละเอียดของที่รองรับในบรรทัดที่ 22 – 25 โดยมีข้อมูลของที่รองรับเรียงตามลำดับดังนี้ 1. เป็นหมายเลขเส้นขอบเขตที่จะอ้างอิงถึง 2. ชนิดของที่รองรับมีค่า p หรือ P ถ้ามีการรองรับเฉพาะที่จุดเริ่มต้นของขอบเขต และมีค่าเป็น l หรือ L ถ้ามีการรองรับตลอดทั้งเส้นขอบเขต 3. การรองรับในทิศทาง x มีค่าเป็น 1 ถ้าไม่อนุญาตให้มีการเคลื่อนที่ และมีค่าเป็น 0 ถ้าอนุญาตให้เคลื่อนที่ในแนวแกน x ได้ 4. การรองรับในทิศทาง y มีค่าเป็น 1 ถ้าไม่อนุญาตให้มีการเคลื่อนที่ และมีค่าเป็น 0 ถ้าอนุญาตให้เคลื่อนที่ในแนวแกน y ได้

ต่อมาเป็นข้อมูลของแรงกระทำโดยในบรรทัดที่ 27 เป็นจำนวนแรงกระทำ และ บรรทัดที่ 29 เป็นรายละเอียดของแรงกระทำโดยมีข้อมูลเรียงตามลำดับดังนี้ 1. หมายเลขของขอบเขตที่อ้างอิงถึง 2. ชนิดของแรงกระทำ มีค่าเป็น p หรือ P ถ้าแรงกระทำเป็นจุดกระทำเฉพาะที่จุดเริ่มต้นของขอบเขต และมีค่าเป็น l หรือ L ถ้ามีแรงกระทำเป็นแรงแผ่กระจายตลอดทั้งเส้นขอบเขต 3. และ 4. เป็นขนาดของแรงกระทำในทิศทาง x และ y ที่จุดเริ่มต้นของขอบเขต 5. และ 6. เป็นขนาดของแรงกระทำทิศทาง x และ y ที่จุดปลายของขอบเขต ถ้าชนิดข้อมูลเป็น p หรือ P ข้อมูลที่ 5. และ 6. ต้องไม่มี

ในส่วนสุดท้ายของแฟ้มในบรรทัดที่ 31 เป็นข้อมูลสำหรับการแสดงผลทางกราฟฟิกโดยกำหนดขนาดของตัวหนังสือและมาตราส่วนในการแสดงผลการเปลี่ยนตำแหน่ง

ในการใช้งาน โปรแกรมจะให้ป้อนชื่อแฟ้มข้อมูลสำหรับนำเข้า และหลังจากที่ทำการวิเคราะห์แล้ว โปรแกรมก็จะให้กำหนดชื่อแฟ้มข้อมูลส่งออกให้ โดยในแต่ละรอบของโครงข่ายชิ้นส่วนจะส่งออกแฟ้มข้อมูล 3 แฟ้ม คือ

1. แฟ้มข้อมูลทางเรขาคณิตของจุดต่อและชิ้นส่วน และค่าการเคลื่อนที่ของแต่ละจุดต่อ
2. แฟ้มข้อมูลแสดงค่าหน่วยแรงและค่าคลาดเคลื่อนของแต่ละจุดต่อ
3. แฟ้มและเปลี่ยนข้อมูลทางด้านกราฟฟิก

สำหรับการใช้ข้อมูลใน 2 แฟ้มแรกสามารถเปิดใช้ได้ด้วยโปรแกรมแก้ไขค่าทั่วไป ส่วนแฟ้มข้อมูลที่ 3 สามารถนำเข้าแสดงผลในโปรแกรม CAD ทั่วไป เช่น ถ้าใช้โปรแกรม AutoCAD ก็จะสามารถนำเข้าแฟ้มข้อมูลโดยใช้คำสั่ง dxfin จากนั้นก็สามารถจัดการกับข้อมูลได้เหมือนกับข้อมูลที่เขียนขึ้นจาก AutoCAD ทุกประการ

```

1 Plane type<plane stress=0 , plane strain=1>
2 0
3 Expected Error
4 0.01
5 Material properties <E nu thickness >
6 2e6 0.3 0.1
7 Limit of search <lowerleft (x,y) upperright (x,y)>
8 0 0 20.01 20.01
9 Number of boundary
10 7
11 BoundaryNo. (x1,y1) (x2,y2) radius segment
12 0 0 20 0 8 0 8
13 1 0 8 0 2 0 5
14 2 0 2 2 0 -2 3
15 3 2 0 8 0 0 5
16 4 8 0 20 0 0 9
17 5 20 0 20 20 0 9
18 6 20 20 0 20 0 9
19 Number of support
20 4
21 BoundaryNo. (Point/Line<p/l>) ( x,y <fix/free:1/0>)
22 0 L 1 0
23 1 L 1 0
24 3 L 0 1
25 4 L 0 1
26 Number of load
27 1
28 BoundaryNo. (Point/Line) (x1,y1) (x2,y2) <if point neglect x2,y2>
29 6 L 0 100 0 100
30 Text size & Displacement scale
31 0.2 50

```

รูปที่ ผ.ก.1 ตัวอย่างแฟ้มนำเข้าข้อมูล

ภาคผนวก ข

รายละเอียดของรหัสคำนวณ

ในการเขียนรหัสคำนวณด้วยภาษา C++ จะแบ่งประเภทแฟ้มข้อมูลเป็น 2 ชนิด คือ แฟ้มส่วนหัวคือมีชื่อแฟ้มลงท้ายด้วย .h และแฟ้มโปรแกรมคือมีชื่อลงท้ายด้วย .cpp ในงานวิจัยนี้ได้รวมแฟ้มโปรแกรมเข้าในแฟ้มส่วนหัวเพื่อลดการพิมพ์ในการคอมไพล์โปรแกรม ดังนั้นถ้าต้องการความรวดเร็วในการคอมไพล์สามารถแยกส่วนดำเนินการ (implementation) ในแฟ้มส่วนหัวออกเป็นแฟ้มโปรแกรมในชื่อเดียวกันแล้วใช้คำสั่ง #include "filename" ในการอ้างอิงถึงแฟ้มส่วนหัว สำหรับรายละเอียดของรหัสคำนวณทั้งหมดได้รวบรวมไว้ในแผ่นดิสเกตประกอบวิทยานิพนธ์



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายชัยณรงค์ เสียงไพโรจน์ เกิดเมื่อวันที่ 21 มิถุนายน พ.ศ. 2524 ที่จังหวัดขอนแก่น เข้ารับการศึกษาระดับประถมศึกษาที่โรงเรียนเทศบาลสวนสนุก จังหวัดขอนแก่น และเข้ารับการศึกษาระดับมัธยมศึกษาที่โรงเรียนขอนแก่นวิทยายน จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น ในปีการศึกษา 2544 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2545



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย