อสมการสมเหตุสมผลและการแปลงเพื่อหาผลเฉลยสำหรับ
ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปอย่างมีประสิทธิภาพ

นางสาวสายฝน เทียมแก้ว

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

VALID INEQUALITIES AND TRANSFORMATIONS FOR EFFICIENT SOLVING THE GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM

Miss Saiphon Theamkheaw

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Computational Science

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	อสมการสมเหตุสมผลและการแปลงเพื่อหาผลเฉลยสำหรับปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปอย่างมีประสิทธิภาพ
โดย	นางสาวสายฝน เทียมแก้ว
สาขาวิชา	วิทยาการคณนา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.........วนิดา เหมะกุล......... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ)

.........สิริพันธุ์ สงวนสินธุกุล......... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. สิริพันธุ์ สงวนสินธุกุล)

สายฝน เทียมแก้ว: อสมการสมเหตุสมผลและการแปลงเพื่อหาผลเฉลยสำหรับปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปอย่างมีประสิทธิภาพ. (VALID INEQUALITIES AND TRANSFORMATIONS FOR EFFICIENT SOLVING THE GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM) อ. ที่ปรึกษา: ผศ. ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ, 98 หน้า.

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป เป็นปัญหากำหนดการจำนวนเต็มประเภทหนึ่ง ซึ่งหาผลเฉลยโดยใช้วิธีขยายและจำกัดเขตทั่วไป แต่สำหรับปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปมีโครงสร้างของตัวแบบที่เฉพาะเจาะจง ซึ่งมีแนวโน้มในการปรับปรุงจำนวนรอบการคำนวณด้วยวิธีขยายและจำกัดเขต วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เรานำเสนอหลักการปรับปรุงจำนวนรอบการคำนวณของวิธีขยายและจำกัดเขต โดยใช้วิธีเพิ่มอสมการอย่างสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา การใช้อสมการอย่างสมเหตุสมผลช่วยลดบริเวณที่เป็นไปได้ของกำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน โดยไม่กำจัดผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป การแปลงปัญหา กำหนดจุดเริ่มต้นใหม่ให้กับปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปซึ่งเป็นตัวแทนผลเฉลยที่ดีกว่าจุดเริ่มต้นเดิม เราใช้ซอฟต์แวร์เปิด GLPK (GNU Linear Programming Kit) เพื่อเปรียบเทียบจำนวนรอบการคำนวณระหว่างวิธีขยายและจำกัดเขตแบบเดิมกับวิธีแบบใหม่ของเรา งานวิจัย เราใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่า 40% เมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตแบบเดิม

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ.....สายฝน เทียมแก้ว.........

สาขาวิชา วิทยาการคณนา ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.......................

ปีการศึกษา 2550

4772514923: MAJOR COMPUTATIONAL SCIENCE

KEY WORD: INTEGER PROGRAMMING/ GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM/ BRANCH-AND-BOUND METHOD/ VALID INEQUALITY

SAIPHON THEAMKHEAW: VALID INEQUALITIES AND TRANSFORMATIONS FOR EFFICIENT SOLVING THE GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM. THESIS ADVISOR: ASST. PROF. KRUNG SINAPIROMSARAN, Ph.D., [98] pp.

The generalized assignment problem is one of the integer programming problem that has been solved by the general branch-and-bound. Due to a special structure of the generalized assignment problem, it is possible to improve the number of iterations of the branch-and-bound method. In this thesis, we improve the number of branch-and-bound iterations by applying the valid inequalities and transformation. The valid inequalities reduce feasible region of the linear programming relaxation but maintain integer feasible solutions. Transformation defines a new starting point for the generalized assignment problem, which is a better candidate than the original starting point. We use open source GLPK (GNU Linear Programming Kit) to compare the number of iterations between the original branch-and-bound method with our methodology, our method uses 40% less iterations than the original branch-and-bound method.

Department **Mathematics** Student's signature....สายฝน เทียมแก้ว....

Field of study **Computational Science** Advisor's signature..............

Academic year **2007**

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะแนวทางในการดำเนินการวิจัย ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และอาจารย์ ดร. สิริพันธุ์ สงวนสินธุกุล กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำและตรวจแก้วิทยานิพนธ์เล่มนี้ให้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้ซึ่งสนับสนุนและให้กำลังใจข้าพเจ้าตลอดมา ขอขอบคุณหน่วยงานต่าง ๆ ที่ให้ความอนุเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ สำนักหอสมุดกลาง และห้องสมุดภาควิชาคณิตศาสตร์ ขอขอบคุณมูลนิธิเพื่อการศึกษาคอมพิวเตอร์และการสื่อสาร ที่ให้ทุนการศึกษา และสุดท้ายขอขอบคุณทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือ และเป็นกำลังใจให้ข้าพเจ้าในการทำวิทยานิพนธ์นี้

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ในปัจจุบัน การตัดสินใจดำเนินการใด ๆ กลายเป็นสิ่งสำคัญของการวางแผนนโยบายขององค์กร ซึ่งการตัดสินใจผิดย่อมส่งผลทำให้เกิดความเสียหายต่อองค์กรนั้น ทั้งทางตรงและทางอ้อม จึงทำให้เกิดความพยายามหาหลักการในการแก้ปัญหา เพื่อให้เกิดความผิดพลาดน้อยที่สุดและส่งผลดีต่อองค์กรมากที่สุด หลักการดำเนินงานดังกล่าวคือ วิชาที่ว่าด้วย การวิจัยดำเนินงาน (operations research)

การวิจัยดำเนินงาน เป็นวิชาการซึ่งเกิดขึ้นระหว่างสงครามโลกครั้งที่ 2 จุดประสงค์ในการศึกษาคือ การหาแนวทางปฏิบัติและการตัดสินใจ เพื่อเลือกใช้อาวุธยุทโธปกรณ์ที่มีอยู่อย่างจำกัดให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด เมื่อสงครามโลกสิ้นสุดลงความสำเร็จของทีมงานทหารที่ใช้วิชาการวิจัยดำเนินงานส่งผลให้วงการอุตสาหกรรมมีความสนใจและนำหลักการที่พัฒนาขึ้นใหม่นี้มาใช้จนสามารถแก้ไขปัญหาที่ซับซ้อนด้านการผลิตและด้านอื่น ๆ ในอุตสาหกรรมได้อย่างดี

กำหนดการเชิงเส้นเป็นเทคนิคที่รู้จักกันแพร่หลายในงานส่วนการวิจัยดำเนินงาน ซึ่งเป็นเทคนิคการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อให้เกิดประโยชน์มากที่สุด ภายใต้การใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด โดยความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (linear programming problem) [1, 2, 3, 4] นั้นมีด้วยกันหลายวิธี แต่วิธีที่นิยมใช้ คือ วิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method)

ในงานวิจัยนี้เราศึกษาปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป (generalized assignment problem) ซึ่งเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นประเภทหนึ่งที่ค่าของตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็ม หรือเรียกว่าเป็นปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม (integer Programming) [1, 2] ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปเป็นปัญหาการจัดคนเข้ากับงาน การจัดงานเข้ากับเครื่องจักร หรือการจัดโครงการก่อสร้างต่าง ๆ เพื่อให้เกิดความเหมาะสมในแต่ละราย โดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยสุดในการจัดการ ทั้งนี้เพื่อก่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดแก่องค์กร

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป [5, 6] มีรูปแบบ ดังนี้

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n} &\le b_1 \\
a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n} &\le b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_{mn} &\le b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} &= 1 \\
&\vdots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} &= 1
\end{aligned}
$$

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn} \in \{0, 1\}$$

หรือสามารถเขียนรูปย่อได้ดังนี้

ให้ $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ และ $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$ (1.1)

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i \in M \tag{1.2}$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \qquad j \in N \tag{1.3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i \in M; j \in N \tag{1.4}$$

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป เช่นกรณีปัญหาการจัดคนเข้ากับงาน จะมีคนจำนวน m คน และมีงาน n งาน ซึ่ง (1.1) เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function) ที่ต้องการหาค่าใช้จ่ายที่น้อยสุดในการกำหนดงาน และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (constraints) (1.2), (1.3) ส่วน (1.4) คือตัวแปรตัดสินใจ (decision variables) ซึ่งมีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น

โดย c_{ij} คือ ค่าใช้จ่ายในการทำงาน j ของคนที่ i

a_{ij} คือ เวลาที่ใช้ในการทำงาน j ของคนที่ i

b_i คือ ขีดจำกัดในการทำงานของคนที่ i

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าคนที่ } i \text{ ทำงาน } j \\ 0 & \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

การแก้ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปสามารถใช้วิธีขยายและจำกัดเขต (branch-and-bound method) [1, 2, 7] เพื่อแก้ปัญหา ซึ่งเป็นหนึ่งในวิธีการแก้ปัญหากำหนดการจำนวนเต็มที่มีประสิทธิภาพและเป็นที่นิยมอย่างมาก โดยใช้กำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน (LP relaxation) การแตกกิ่ง (branching) ค่าขอบเขต (bounding) และการเป็นฟาทอม (fathoming) ในปัจจุบันนักวิจัยหลายท่านต้องการคิดค้นวิธีการใหม่ ๆ ที่มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีขยายและจำกัดเขต เพราะปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นและมีขนาดใหญ่ ซึ่ง Ross และ Soland [5] กล่าวถึงขั้นตอนวิธีการของวิธีขยายและจำกัดเขตสำหรับปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป โดยเฉพาะ Farias และ Nemhauser [8] กล่าวถึงวิธีการแก้ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป โดยใช้ชุดของอสมการสมเหตุสมผล (family of valid inequalities) ส่วน Chu และ Beasley [6], Feltl และ Raidl [9], Wilson และ J.M. [10] กล่าวถึงวิธีการแก้ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป โดยใช้วิธีทางพันธุกรรม (genetic algorithm) และ Wolsey [11], Gottlieb และ Rao [12] กล่าวถึงการใช้หน้า (facet) และอสมการสมเหตุสมผลอย่างเข้ม

งานวิจัยนี้ เราใช้วิธีขยายและจำกัดเขตที่เพิ่มอสมการสมเหตุสมผล [8] พร้อมกับการแปลงปัญหาโดยอาศัยแนวคิด [13] เพื่อหาผลเฉลย ซึ่ง [8] กล่าวถึงวิธีการแก้ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป โดยใช้ชุดของอสมการสมเหตุสมผลเพื่อช่วยลดบริเวณที่เป็นไปได้ (feasible region) ของกำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน และตัดโหนดบางโหนดออกเพื่อลดขนาดของต้นไม้ทำให้หาผล

เฉลยได้เร็วขึ้น ส่วน [13] กล่าวถึงค่าขอบเขตของตัวแปรตัดสินใจที่มีผลต่อประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุด (optimal solution) ของปัญหากำหนดการเชิงเส้น โดยกำหนดจุดเริ่มต้นใหม่ของปัญหา จากงานวิจัย พบว่าจุดเริ่มต้นของปัญหามีผลต่อเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลย ถ้าจุดเริ่มต้นใหม่อยู่ใกล้กับผลเฉลยที่เหมาะที่สุดมากกว่าจุดเริ่มต้นเดิม จะทำให้เวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยลดลง ซึ่งนำค่าขอบเขตของตัวแปรตัดสินใจมาใช้ในการปรับขอบเพื่อกำหนดจุดเริ่มต้นใหม่

วิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็น 5 บท ในบทที่ 1 เป็นบทนำซึ่งกล่าวถึงที่มาของงานวิจัย วัตถุประสงค์ของงานวิจัย และงานวิจัยอื่นที่เกี่ยวข้อง

บทที่ 2 กล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ปัญหากำหนดการเชิงเส้น ปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป วิธีการขยายและจำกัดเขต และอสมการสมเหตุสมผล

บทที่ 3 กล่าวถึงขั้นตอนการทำงานวิจัย ซึ่งประกอบด้วย การจำลองปัญหา การสร้างอสมการสมเหตุสมผลจากอสมการเงื่อนไขบังคับ และการแปลงปัญหาโดยใช้ขอบเขตของตัวแปรตัดสินใจสมเหตุสมผล

บทที่ 4 กล่าวถึงผลการทดลอง ซึ่งแสดงจำนวนรอบการคำนวณ ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของปัญหาทั้ง 3 แบบ

บทที่ 5 กล่าวถึงสรุปผลของงานวิจัยและงานในอนาคต

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานในงานวิจัย

ในบทนี้ จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ปัญหากำหนดการเชิงเส้น ปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป วิธีขยายและจำกัดเขต และอสมการสมเหตุสมผล

2.1 ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

กำหนดการเชิงเส้น เป็นเทคนิคที่รู้จักกันแพร่หลายในส่วนงานของการวิจัยดำเนินงาน ใช้แก้ปัญหาทางการจัดสรรปัจจัยและทรัพยากรที่มีลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อแก้ปัญหาและตัดสินใจให้เกิดผลตามแนวทางการดำเนินงานที่ดีที่สุด เช่น หากำไรสูงสุด หาค่าใช้จ่ายที่น้อยสุด และแนวทางการดำเนินงานอื่น ๆ ที่ก่อให้เกิดประโยชน์มากที่สุด

ปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีรูปแบบบัญญัติ (canonical form) ดังนี้

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\
\\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

หรือสามารถเขียนรูปย่อได้ดังนี้

ให้ $M = \{1,2,...,m\}$ และ $N = \{1,2,...,n\}$

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\sum_{j \in N} c_j x_j$ (2.1)

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in M \qquad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \qquad j \in N \qquad (2.3)$$

ปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีขนาด m เงื่อนไขบังคับ n ตัวแปร ซึ่ง (2.1) เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ต้องการหาค่ามากสุด และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (2.2) ส่วน (2.3) คือตัวแปรตัดสินใจ ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

โดย c_j เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

a_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับ

b_i เป็นค่าคงที่ทางขวามือ

x_j เป็นตัวแปรตัดสินใจ

2.2 ปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม

ปัญหากำหนดการจำนวนเต็มเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นประเภทหนึ่ง ที่ค่าของตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็ม

ปัญหากำหนดการจำนวนเต็มแบ่งออกเป็น 3 ประเภท คือ

2.2.1 ปัญหากำหนดการจำนวนเต็มบริสุทธิ์ (pure integer programming problem)

ตัวอย่างของปัญหาประเภทนี้ เช่น ปัญหาการขนส่ง (transportation problem) ซึ่งค่าของตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็มทุกตัว

ตัวอย่าง 2.1

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$8x_{11} + 6x_{12} + 7x_{21} + 5x_{22}$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$x_{11} + x_{12} \le 35$$
$$x_{21} + x_{22} \le 50$$
$$x_{11} + x_{21} \ge 45$$
$$x_{12} + x_{22} \ge 20$$

$x_{ij} \ge 0$; x_{ij} เป็นจำนวนเต็มบวก $(i = 1,2 \; ; j = 1,2)$

2.2.2 ปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม (mixed integer programming problem)

ตัวอย่างของปัญหาประเภทนี้ เช่น ปัญหาการจัดตั้งสถานที่ (facility location problem) ซึ่งค่าของตัวแปรตัดสินใจมีทั้งเป็นจำนวนเต็มและจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.2

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$10x_{11} + 15x_{12} + 7x_{21} + 9x_{22} + 12y_1 + 27y_2$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$x_{11} + x_{21} = 40$$
$$x_{12} + x_{22} = 50$$
$$x_{11} + x_{12} \le 90y_1$$
$$x_{21} + x_{22} \le 90y_2$$

$x_{ij}, y_i \ge 0$; y_i เป็นจำนวนเต็มบวก $(i = 1,2 \; ; j = 1,2)$

2.2.3 ปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม 0-1 (0-1 integer programming problem)

ตัวอย่างของปัญหาประเภทนี้ เช่น ข้อปัญหาถุงเป้ (knapsack problem) ปัญหาการจัดกำหนดการ (scheduling problem) ปัญหาการจับคู่ (matching problem) ปัญหาการกำหนดงาน (assignment problem) ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป (generalized assignment problem) ซึ่งเป็นปัญหาในงานวิจัยนี้ เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้มีค่าของตัวแปรตัดสินใจเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.3

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$7x_{11} + 5x_{12} + 3x_{21} + 4x_{22}$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$4x_{11} + 6x_{12} \le 18$$
$$5x_{21} + 7x_{22} \le 23$$
$$x_{11} + x_{21} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, (i = 1,2 \; ; \; j = 1,2)$$

2.3 ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป

ในงานวิจัยนี้เราศึกษาปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป ซึ่งเป็นปัญหากำหนดการจำนวนเต็มประเภทหนึ่ง ปัญหานี้เป็นปัญหาจริงที่เกิดขึ้นเพื่อจัดคนให้เข้ากับงาน การจัดงานเข้ากับเครื่องจักร หรือการจัดโครงการก่อสร้างต่าง ๆ เพื่อว่าจ้างผู้รับเหมาให้เกิดความเหมาะสมในแต่ละราย เป็นต้น โดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยสุดในการจ้างงาน

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปมีรูปแบบดังนี้

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$
ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n} &\le b_1 \\
a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n} &\le b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_{mn} &\le b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} &= 1 \\
&\vdots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} &= 1
\end{aligned}
$$

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn} \in \{0, 1\}$$

หรือสามารถเขียนรูปย่อได้ดังนี้

ให้ $M = \{1, 2, ..., m\}$ และ $N = \{1, 2, ..., n\}$

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$
ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i \in M$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \qquad j \in N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i \in M; j \in N$$

โดย c_{ij} คือ ค่าใช้จ่ายในการทำงาน j ของคนที่ i

a_{ij} คือ เวลาที่ใช้ในการทำงาน j ของคนที่ i

b_i คือ ขีดจำกัดในการทำงานของคนที่ i

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าคนที่ } i \text{ ทำงาน } j \\ 0 & \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ตัวอย่างของปัญหา จาก [14] ในประเทศนิวซีแลนด์ อุตสาหกรรมอาหารที่มีนมเป็นส่วนประกอบได้ใช้รูปแบบของปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป เพื่อหาค่าใช้จ่ายน้อยสุดในการขนส่งนมจากฟาร์มนมไปยังโรงงานต่าง ๆ ซึ่งต้องคำนึงถึงระยะทางในการขนส่งของแต่ละโรงงาน เพื่อรักษาคุณภาพนมที่ส่งออกจากฟาร์มนม โดยแต่ละฟาร์ม สามารถส่งให้โรงงานเพียงโรงงานเดียวเท่านั้น ในงานวิจัย ทำปัญหาขนาดต่าง ๆ ดังนี้ กำหนด จำนวนฟาร์ม (m) = 4 และ จำนวนโรงงาน (n) = 500, 1000, 1500 ดังนั้นปัญหาจึงมีขนาด $m \times n$ = 4×500, 4×1000, 4×1500 ดังแสดงตัวอย่าง 2.4 ซึ่งข้อมูลเป็นตัวเลขสมมติ

ตัวอย่าง 2.4

โรงงาน 4 โรงงาน A, B, C และ D ซึ่งแต่ละโรงงานใช้นมเป็นวัตถุดิบในการผลิต มีความต้องการนมในแต่ละวันดังนี้ 300, 450, 375 และ 400 กิโลกรัม ตามลำดับ โดยมีฟาร์มนม 3 ฟาร์ม กนก โชคชัย และขจร ซึ่งแต่ละฟาร์มสามารถผลิตนมในแต่ละวันได้ 350, 400 และ 500 กิโลกรัม ตามลำดับ ฟาร์มนมคิดค่าขนส่งไปยังโรงงานต่าง ๆ ต่อกิโลกรัม หน่วยเป็นบาท ดังนี้

โรงงาน / ฟาร์มนม	A	B	C	D
กนก	3	4	5	7
โชคชัย	4	5	6	8
ขจร	3	5	5	9

โดยมีเงื่อนไขว่า ฟาร์มแต่ละฟาร์มสามารถส่งนมได้เพียงโรงงานเดียวเท่านั้น และปริมาณนมที่ส่งต้องไม่ต่ำกว่าปริมาณความต้องการของแต่ละโรงงาน

จากปัญหานี้ เราสามารถเขียนรูปแบบปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป เพื่อหาค่าใช้จ่ายน้อยสุดในการขนส่งนมจากฟาร์มนมไปยังโรงงานต่าง ๆ ดังนี้

ให้ x_{ij} แทนปริมาณนมที่ฟาร์ม i ขนส่งนมไปยังโรงงาน j เมื่อ $i = 1,2,3$ และ $j = 1,2,3,4$

ต้องการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$1050x_{11} + 1400x_{12} + 1750x_{13} + 2450x_{14} + 1600x_{21} + 2000x_{22} +$$
$$2400x_{23} + 3200x_{24} + 1500x_{31} + 2500x_{32} + 2500x_{33} + 4500x_{34}$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned}
350x_{11} + 400x_{21} + 500x_{31} &\geq 300 \\
350x_{12} + 400x_{22} + 500x_{32} &\geq 450 \\
350x_{13} + 400x_{23} + 500x_{33} &\geq 375 \\
350x_{14} + 400x_{24} + 500x_{34} &\geq 400 \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1
\end{aligned}$$

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{34} \in \{0, 1\}$$

วิธีการแก้ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปมีด้วยกันหลายวิธี แต่หนึ่งในวิธีที่มีประสิทธิภาพและเป็นที่นิยมคือ วิธีขยายและจำกัดเขต

2.4 วิธีขยายและจำกัดเขต

การแก้ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปสามารถใช้วิธีขยายและจำกัดเขตเพื่อแก้ปัญหา ซึ่งเป็นหนึ่งในวิธีการแก้ปัญหากำหนดการจำนวนเต็มที่มีประสิทธิภาพและเป็นที่นิยมอย่างมาก โดยใช้กำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน การแตกกิ่ง ค่าขอบเขต และการเป็นฟาทอม

วิธีขยายและจำกัดเขตมีขั้นตอนวิธีการดังนี้ [15]

ขั้นตอนเริ่มต้น:

กำหนดค่าขอบเขตล่างของฟังก์ชันจุดประสงค์เท่ากับ $-\infty$ จากนั้นใช้กำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน โดยจะผ่อนปรนค่าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาที่เป็นจำนวนเต็ม ให้เป็นจำนวนจริงทุกตัว และใช้วิธีซิมเพล็กซ์แก้ปัญหา นำผลเฉลยที่ได้ไปตรวจสอบกับขั้นตอนการเป็นฟาทอม และขั้นตอนการทดสอบความเหมาะที่สุด ถ้าปัญหาไม่เป็นฟาทอม จะทำขั้นตอนข้างล่างนี้

ขั้นตอนที่ 1: การแตกกิ่ง

ปัญหาจะทำการแตกกิ่งเมื่อผลเฉลยที่ได้จากการแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์ไม่เป็นจำนวนเต็มทุกตัว ซึ่งจะเลือกแตกกิ่งตัวแปรตัดสินใจที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ให้ x_j เป็นตัวแปรตัดสินใจที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม และ x_j^* เป็นค่าของตัวแปรตัดสินใจ ณ ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน

โดยจะแบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย 2 ปัญหาและเพิ่มเงื่อนไขบังคับ $x_j \le \lfloor x_j^* \rfloor$ และ $x_j \ge \lfloor x_j^* \rfloor + 1$

ขั้นตอนที่ 2: ค่าขอบเขต

สำหรับแต่ละปัญหาย่อยใหม่ ค่าขอบเขตคือ ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ได้จากการใช้กำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรนและแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์

ขั้นตอนที่ 3: การเป็นฟาทอม

สำหรับแต่ละปัญหาย่อยใหม่ ถ้าปัญหาย่อยใดเป็นฟาทอม จะไม่ทำการแตกกิ่งต่อ โดยตรวจสอบการเป็นฟาทอม 3 ข้อดังนี้

1. ค่าขอบเขตมีค่าไม่เกินค่าขอบเขตล่าง (current lower bound) ซึ่งค่าขอบเขตล่างเป็นค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์สำหรับปัญหาย่อยที่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มทุกตัว ที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด (candidate solution)

2. ปัญหาย่อยนั้นเป็นปัญหาที่ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ (infeasible region)

3. ผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มทุกตัวซึ่งอาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ถ้าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ของผลเฉลยที่ได้มีค่ามากกว่าค่าขอบเขตล่าง ผลเฉลยนั้นจะกลายเป็นผลเฉลยที่อาจเป็นผลเหมาะที่สุดใหม่ และกำหนดให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ของผลเฉลยนั้นเป็นค่าขอบเขตล่าง

การทดสอบความเหมาะที่สุด (optimality Test):

ขั้นตอนวิธีจะหยุดการประมวลผล เมื่อ

- ได้แก้ทุกปัญหาย่อยแล้ว
- ผลเฉลยที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด กลายเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดแล้ว

กรณีอื่น จะกลับไปทำขั้นตอน 1 ใหม่

ตัวอย่าง 2.5 [1]

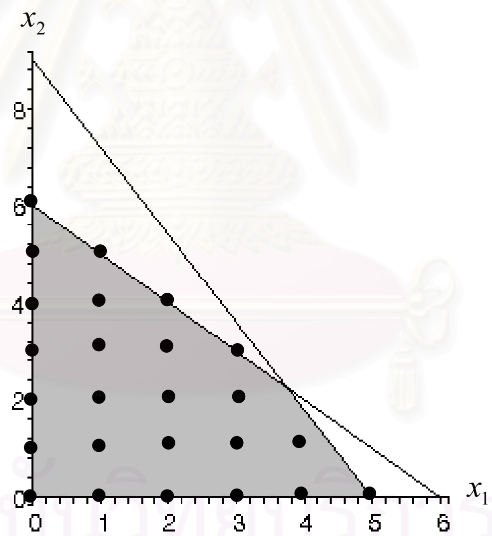
การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $8x_1 + 5x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$
$$x_1,\, x_2 \geq 0; x_1, x_2 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

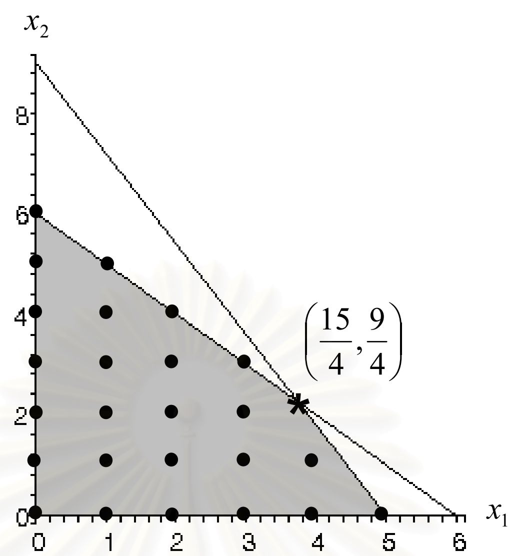
จากปัญหาสามารถวาดบริเวณที่เป็นไปได้ของกำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน ดังแสดงรูปที่ 2.1 ซึ่งจุดทึบแสดงผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม

ค่าขอบเขตล่างคือ $-\infty$ และค่าขอบเขตบนคือ $+\infty$



รูปที่ 2.1 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหา

เราแก้ปัญหาโดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งผลเฉลยที่ได้คือ $x_1 = \dfrac{15}{4}, x_2 = \dfrac{9}{4}$ ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์เท่ากับ $\dfrac{165}{4}$ และกำหนดค่าขอบเขตบนใหม่เป็น $\dfrac{165}{4}$ ดังรูปที่ 2.2

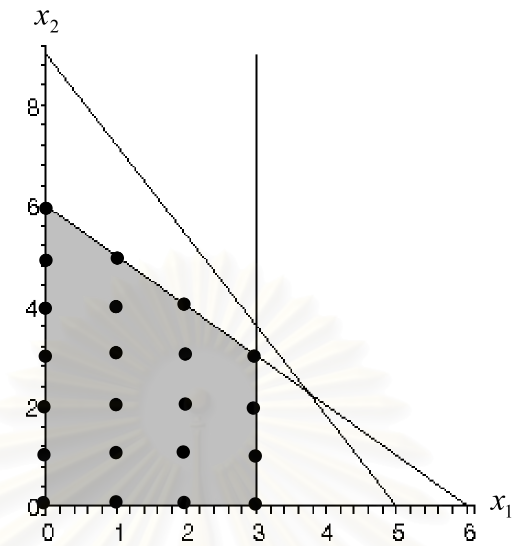


รูปที่ 2.2 ผลเฉลยของปัญหา

ผลเฉลยที่ได้ไม่เป็นจำนวนเต็มทุกตัว เราจึงทำการแตกกิ่งตัวแปรตัดสินใจที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม จากปัญหานี้เราสามารถเลือกแตกกิ่งตัวแปรตัดสินใจตัวใดก็ได้เพราะไม่เป็นทั้งคู่จำนวนเต็ม เราเลือกแตกกิ่ง x_1 ดังนั้นเราจะมีปัญหาย่อยเพิ่มอีก 2 ปัญหา

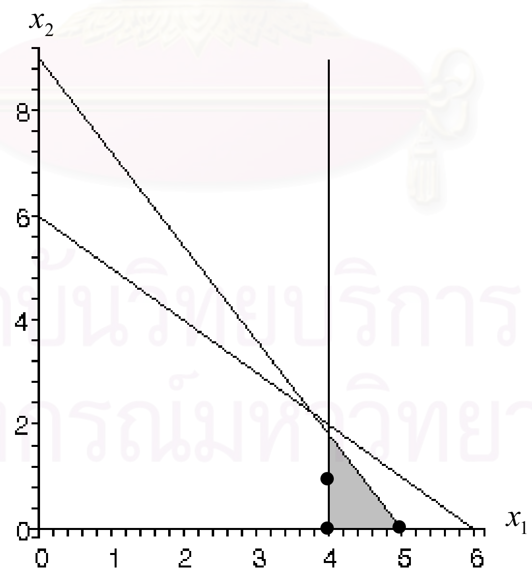
ให้ปัญหาเดิมเป็นปัญหาย่อย 1 ดังนั้นจะได้

ปัญหาย่อย 2 คือ ปัญหาย่อย 1 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \le 3$ ดังแสดงรูปที่ 2.3



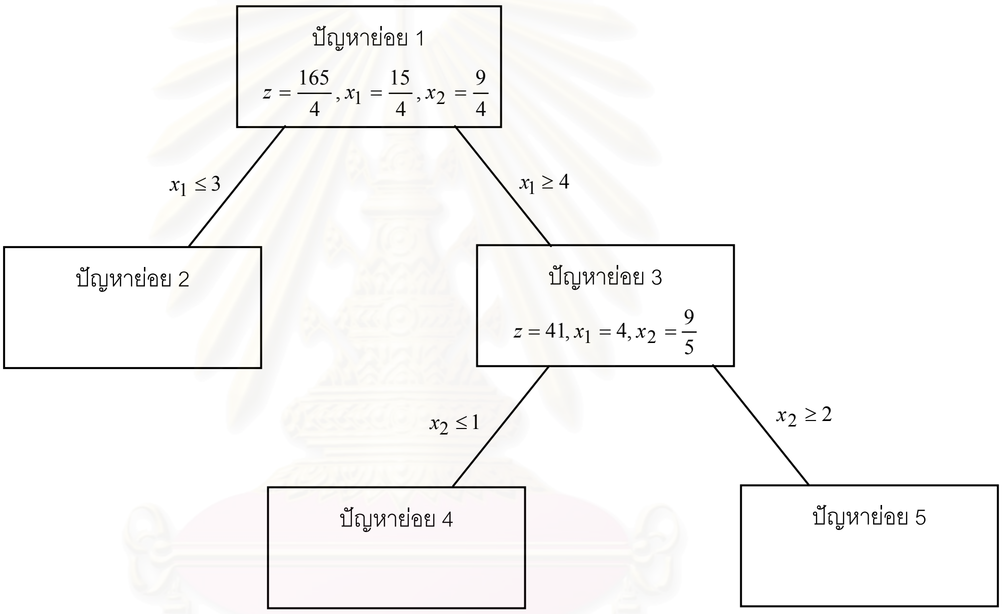
รูปที่ 2.3 ปัญหาย่อย 1 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \leq 3$

ปัญหาย่อย 3 คือ ปัญหาย่อย 1 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \geq 4$ ดังแสดงรูปที่ 2.4



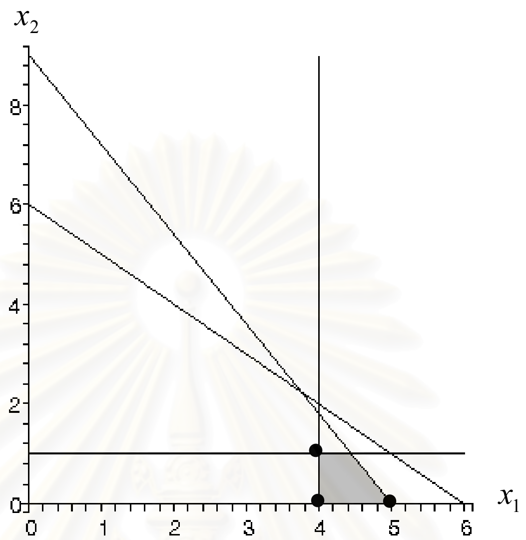
รูปที่ 2.4 ปัญหาย่อย 1 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \geq 4$

การเลือกว่าควรแก้ปัญหาใดก่อนหลัง เราเลือกใช้วิธีเข้าหลังออกก่อน (last-in-first-out) ดังนั้นเราจึงแก้ปัญหาย่อย 3 ก่อน ผลเฉลยที่ได้คือ $x_1 = 4, x_2 = \frac{9}{5}$ จะเห็นได้ว่าผลเฉลยทั้งหมดไม่เป็นจำนวนเต็ม เราต้องทำการแตกกิ่งต่อ เราแตกกิ่ง x_2 เพราะไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเราจึงมีปัญหาย่อยเพิ่มอีก 2 ปัญหา และปรับค่าขอบเขตบนเป็น 41 ดังแสดงรูปที่ 2.5



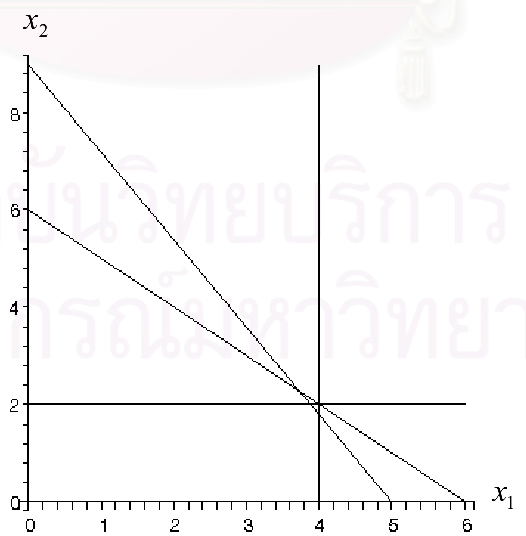
รูปที่ 2.5 การแตกกิ่งของปัญหาย่อย 3

ปัญหาย่อย 4 คือ ปัญหาย่อย 3 ที่เพิ่มอสมการ $x_2 \le 1$ ดังแสดงรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ปัญหาย่อย 3 ที่เพิ่มอสมการ $x_2 \le 1$

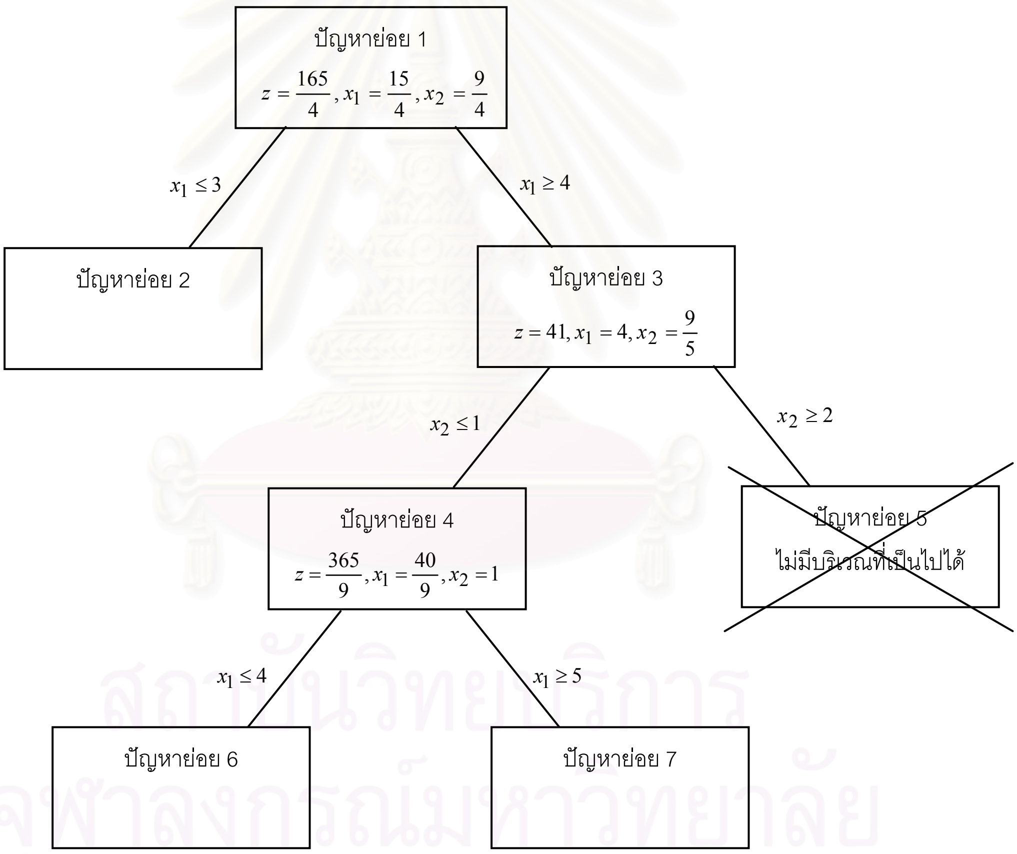
ปัญหาย่อย 5 คือ ปัญหาย่อย 3 ที่เพิ่มอสมการ $x_2 \ge 2$ ดังแสดงรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ปัญหาย่อย 3 ที่เพิ่มอสมการ $x_2 \ge 2$

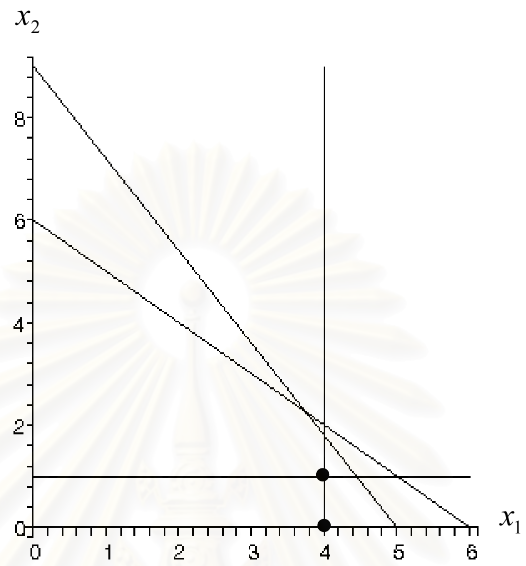
เราแก้ปัญหาย่อย 5 ซึ่งไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ (infeasible region) ดังนั้น ปัญหาย่อยนี้จึงเป็นฟาทอมและถูกตัดทิ้ง จะไม่มีการแตกกิ่งต่อ

เราแก้ปัญหาย่อย 4 ผลเฉลยที่ได้คือ $x_1 = \frac{40}{9}, x_2 = 1$ จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยทั้งหมดไม่เป็นจำนวนเต็ม เราต้องทำการแตกกิ่งต่อ เราแตกกิ่ง x_1 เพราะไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเราจึงมีปัญหาย่อยเพิ่มอีก 2 ปัญหา และปรับค่าขอบเขตบนเป็น $\frac{365}{9}$ ดังแสดงรูปที่ 2.8



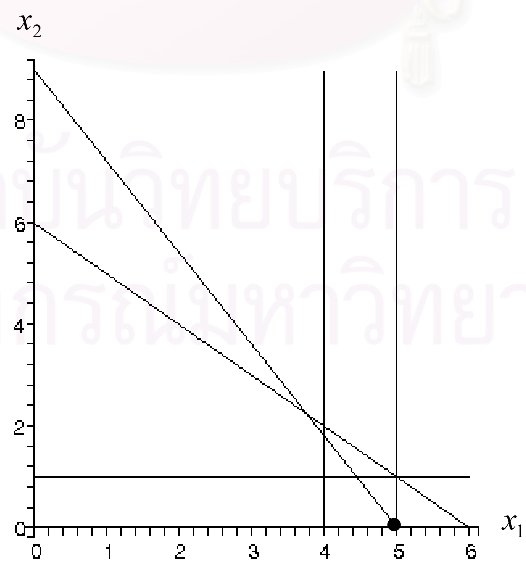
รูปที่ 2.8 การแตกกิ่งของปัญหาย่อย 4

ปัญหาย่อย 6 คือ ปัญหาย่อย 4 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \leq 4$ ดังแสดงรูปที่ 2.9



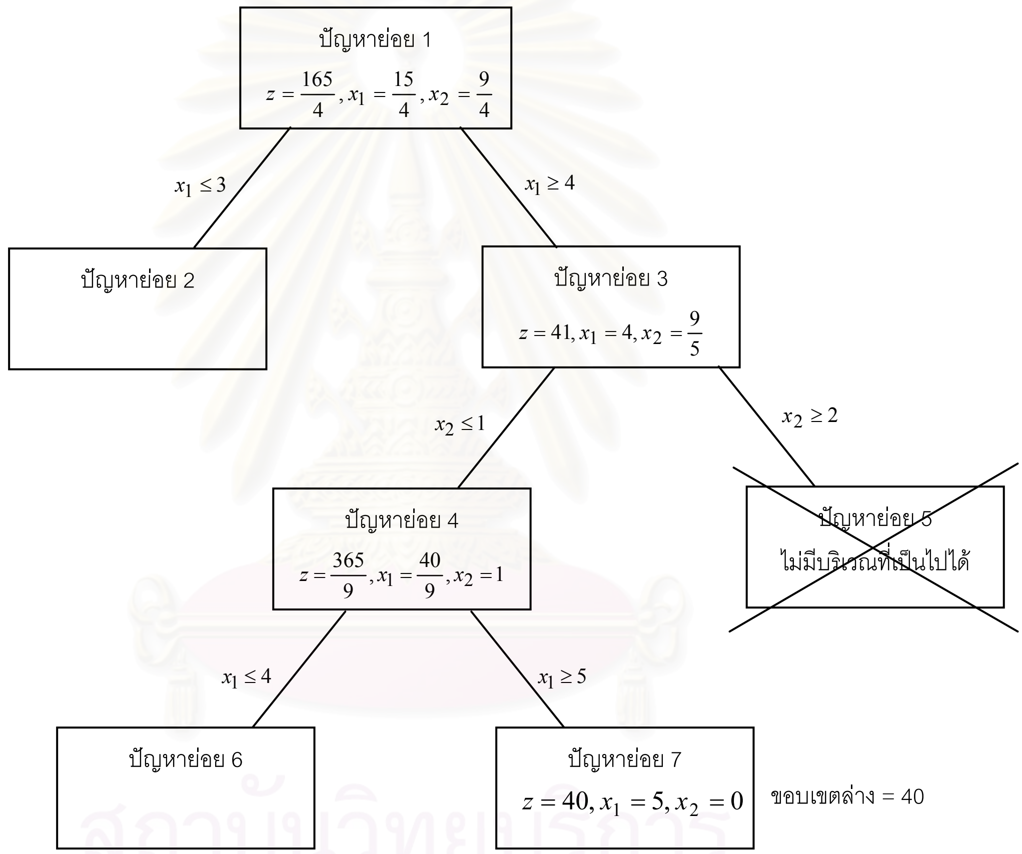
รูปที่ 2.9 ปัญหาย่อย 4 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \leq 4$

ปัญหาย่อย 7 คือ ปัญหาย่อย 4 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \geq 5$ ดังแสดงรูปที่ 2.10



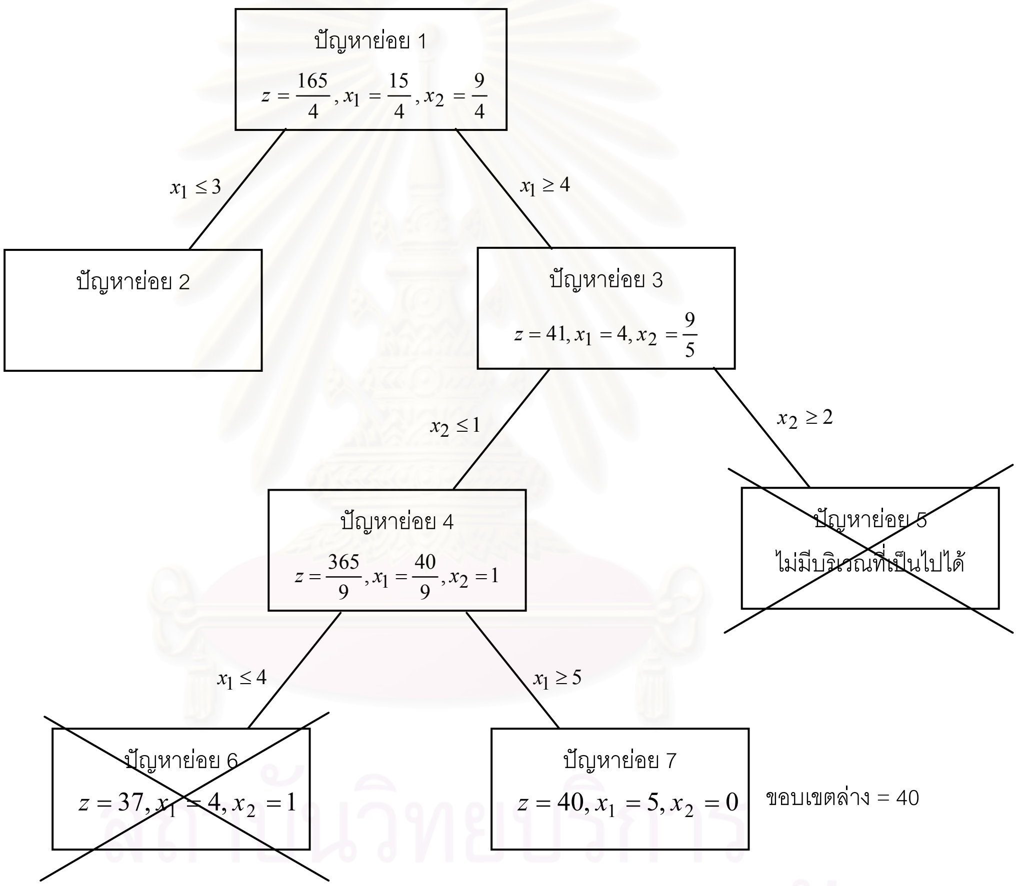
รูปที่ 2.10 ปัญหาย่อย 4 ที่เพิ่มอสมการ $x_1 \geq 5$

เราแก้ปัญหาย่อย 7 ผลเฉลยที่ได้คือ $x_1 = 5, x_2 = 0$ จะเห็นได้ว่าผลเฉลยทั้งหมดเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นปัญหาย่อยนี้จึงเป็นฟาทอม และเป็นผลเฉลยที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด จะไม่มีการแตกกิ่งต่อและกำหนดค่าขอบเขตล่างของทั้งต้นไม้เป็น 40 ดังแสดงรูปที่ 2.11



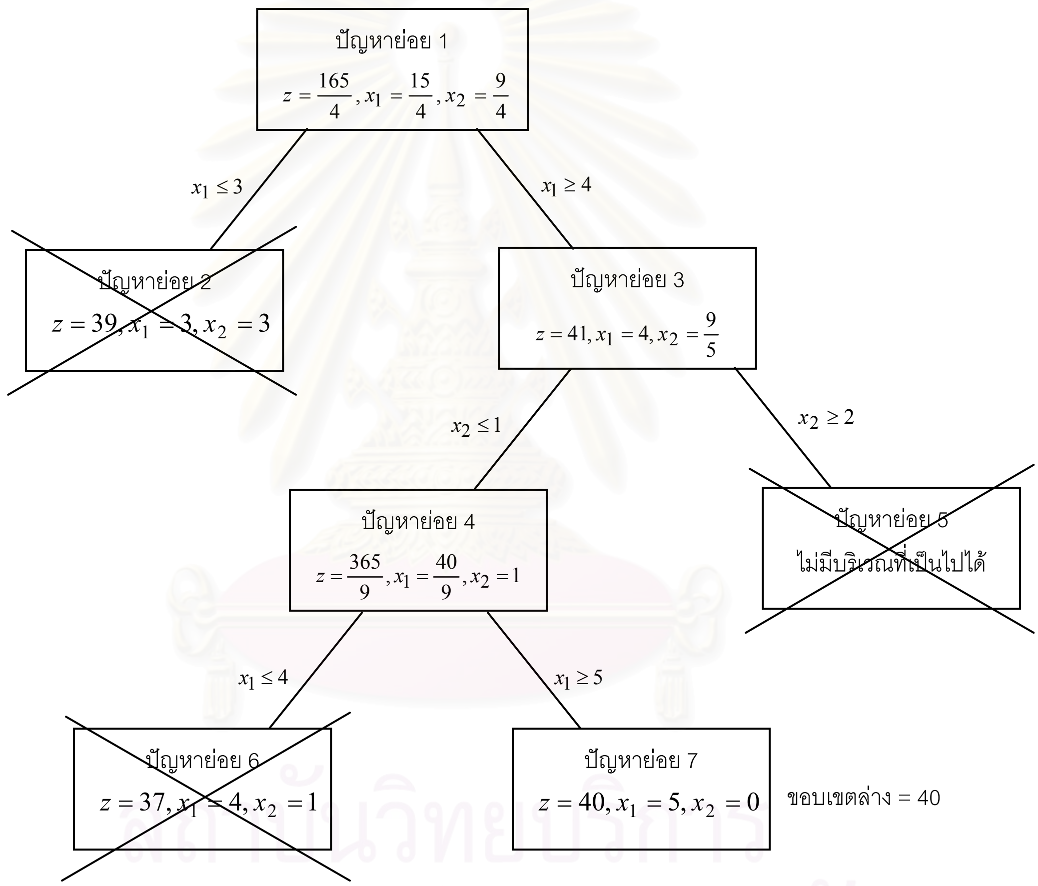
รูปที่ 2.11 ผลเฉลยและกำหนดขอบเขตล่างของปัญหาย่อย 7

เราแก้ปัญหาย่อย 6 ผลเฉลยที่ได้คือ $x_1 = 4, x_2 = 1$ จะเห็นได้ว่าผลเฉลยทั้งหมดเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นปัญหาย่อยนี้จึงเป็นฟาทอมและเป็นผลเฉลยที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดที่มีค่าฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น 32+5 = 37 แต่ถูกตัดทิ้งเนื่องจากค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าน้อยกว่าค่าขอบเขตล่าง ดังแสดงรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 ผลเฉลยของปัญหาย่อย 6

เราแก้ปัญหาย่อย 2 ซึ่งเป็นปัญหาย่อยสุดท้ายที่ยังไม่มีข้อสรุป ผลเฉลยที่ได้คือ $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ จะเห็นได้ว่าผลเฉลยทั้งหมดเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นปัญหาย่อยนี้จึงเป็นฟาทอมและเป็นผลเฉลยที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดที่มีค่าฟังก์ชันเท่ากับ 39 แต่ถูกตัดทิ้งเนื่องจากค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าน้อยกว่าค่าขอบเขตล่าง ดังแสดงรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 ผลเฉลยของปัญหาย่อย 2

ดังนั้นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหานี้คือ $x_1 = 5, x_2 = 0$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์เท่ากับ 40 ซึ่งได้จากการแก้ปัญหาย่อย 7

2.5 อสมการสมเหตุสมผล

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป มีรูปย่อดังนี้
ให้ $M = \{1, 2, ..., m\}$ และ $N = \{1, 2, ..., n\}$

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i \in M$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \qquad j \in N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i \in M; j \in N$$

บทนิยาม 2.1 [9]

อสมการ $\pi \mathbf{x}_i^T \le \pi_0$ เป็นอสมการสมเหตุสมผล สำหรับปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป ถ้า $\pi \mathbf{x}_i^T \le \pi_0$ สอดคล้องกับทุก $\mathbf{x}_i$ ของปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป โดย $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ และ $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}); i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นเวกเตอร์แถว (row vector) n มิติ และ π_0 เป็นสเกลาร์ (scalar)

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปเป็นปัญหาขนาดใหญ่ จึงไม่สามารถวาดรูปแสดงอสมการสมเหตุสมผลได้ ดังนั้นเราจึงยกตัวอย่างปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม 2 มิติ เพื่อแสดงอสมการสมเหตุสมผล ดังแสดงตัวอย่าง 2.6

ตัวอย่าง 2.6

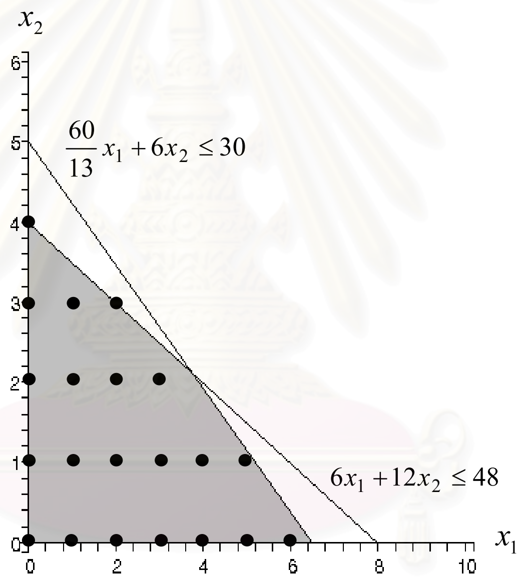
พิจารณาเงื่อนไขบังคับต่อไปนี้ สำหรับปัญหากำหนดการจำนวนเต็ม

$$\frac{60}{13}x_1 + 6x_2 \le 30$$

$$6x_1 + 12x_2 \le 48$$

$x_1, x_2 \ge 0$; x_1, x_2 เป็นจำนวนเต็ม

สามารถแสดงดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหา

เมื่อเราเพิ่มอสมการ $x_2 \le 6$ เข้าไป จะได้

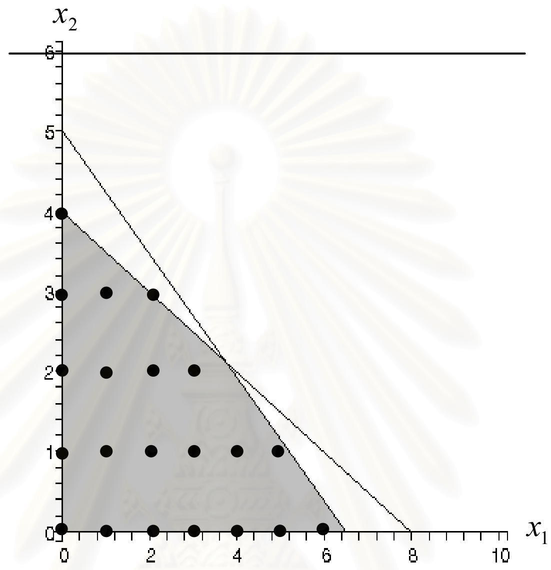
$$\frac{60}{13}x_1 + 6x_2 \le 30$$

$$6x_1 + 12x_2 \le 48$$

$$x_2 \le 6$$

$x_1, x_2 \ge 0$; x_1, x_2 เป็นจำนวนเต็ม

จะเห็นได้ว่า อสมการนี้สอดคล้องกับทุก x ของปัญหา แต่ไม่ช่วยลดบริเวณที่เป็นไปได้ของกำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน ดังนั้นอสมการนี้ไม่มีประโยชน์ในการหาผลเฉลย เราจึงไม่นำอสมการสมเหตุสมผลในลักษณะนี้มาใช้ในงานวิจัย ดังแสดงรูปที่ 2.15

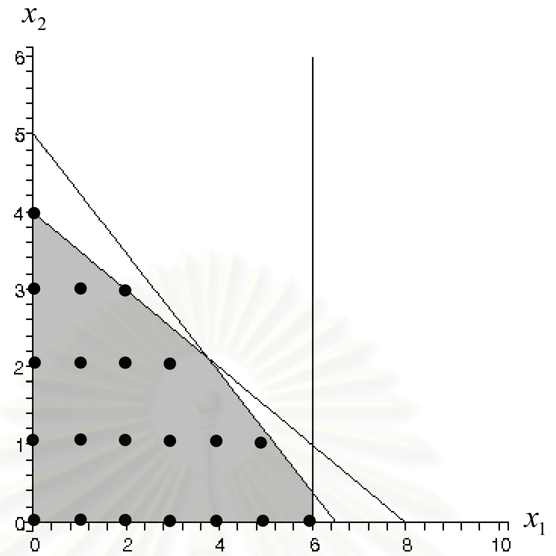


รูปที่ 2.15 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาที่เพิ่มอสมการ $x_2 \le 6$

แต่เมื่อเราเพิ่มอสมการ $x_1 \le 6$ เข้าไป

$$\begin{aligned}
&\frac{60}{13}x_1 + 6x_2 \le 30 \\
&6x_1 + 12x_2 \ \ \le 48 \\
&\qquad\quad x_1 \le 6 \\
&x_1, x_2 \ge 0 \ ; \ x_1, x_2
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า อสมการนี้สอดคล้องกับทุก x ของปัญหาและช่วยลดบริเวณที่เป็นไปได้ของกำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรนโดยไม่กำจัดผลเฉลยจำนวนเต็ม ซึ่งอาจช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณลงได้ เราจึงนำอสมการสมเหตุสมผลลักษณะนี้มาใช้ในงานวิจัย ดังแสดงรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาที่เพิ่มอสมการ $x_1 \le 6$

การใช้อสมการสมเหตุสมผล จะทำให้ปัญหาเกิดบริเวณที่เป็นไปได้เพียงด้านใดด้านหนึ่ง ซึ่งต่างกับการแตกกิ่งของวิธีขยายและจำกัดเขต ที่แบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อยเพิ่มอีก 2 ปัญหา ทำให้เกิดการแบ่งบริเวณที่เป็นไปได้ออกเป็น 2 ด้าน

บทที่ 3
ขั้นตอนงานวิจัย

ในบทนี้ จะกล่าวถึงขั้นตอนการทำงานวิจัย ซึ่งมีทั้งหมด 3 ขั้นตอนด้วยกัน ประกอบด้วย การจำลองปัญหา การสร้างอสมการสมเหตุสมผลจากอสมการเงื่อนไขบังคับ และการแปลงปัญหาโดยใช้ขอบเขตของตัวแปรตัดสินใจ

3.1 การจำลองปัญหา

ปัญหาที่ใช้ในงานวิจัย เกิดจากการจำลองปัญหาขึ้น เนื่องจากไม่สามารถหาตัวอย่างปัญหาจากงานวิจัยอื่นได้ หรือปัญหามีขนาดใหญ่จนเกินไป เราจึงทำการจำลองปัญหา โดยเลือกจำลองเฉพาะปัญหาที่มีบริเวณที่เป็นไปได้และมีผลเฉลยเท่านั้น ซึ่งปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปเป็นปัญหาที่เกิดขึ้น ค่าของขีดจำกัดในการทำงานคนที่ $i(b_i)$ จะน้อยกว่าผลรวมเวลาที่ใช้ในการทำงาน j ของคนที่ $i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$ ดังนั้นเราจึงจำลองปัญหาให้สอดคล้องกับสถานการณ์จริง โดยการคิดค่าของขีดจำกัดในการทำงานของคนที่ i เป็น 60, 70 และ 80% ของผลรวมเวลาที่ใช้ในการทำงาน j ของคนที่ i โดยจำลองปัญหาออกเป็น 3 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1. สุ่ม c_{ij} ตั้งแต่ 1-100 และสุ่ม a_{ij} ตั้งแต่ 1-50 และ $b_i = 0.6\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

แบบที่ 2. c_{ij} และ a_{ij} เหมือนกับแบบที่ 1 และ $b_i = 0.7\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

แบบที่ 3. c_{ij} และ a_{ij} เหมือนกับแบบที่ 1 และ $b_i = 0.8\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

โดยแต่ละแบบแบ่งเป็นปัญหาขนาดต่าง ๆ ดังนี้ กำหนด จำนวนคน (m) = 20 และจำนวนงาน (n) = 20, 50, 100, 200 ดังนั้นปัญหาจึงมีขนาด $m \times n$ = 20$\times$20, 20$\times$50, 20$\times$100, 20$\times$200

3.2 การสร้างอสมการสมเหตุสมผล

งานวิจัยนี้ เราใช้อสมการสมเหตุสมผลจาก [8] ซึ่งในแต่ละชุดจะมีอสมการที่ช่วยลดบริเวณที่เป็นไปได้ของกำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรน โดยไม่กำจัดผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหา ทั้งนี้เพราะบริเวณที่เป็นไปได้บางส่วนไม่จำเป็นต่อการหาผลเฉลย ดังนั้นถ้าเราสามารถตัดบริเวณที่ไม่จำเป็นต่อการหาผลเฉลยทิ้ง อาจช่วยลดเวลาและจำนวนรอบการคำนวณได้

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป มีรูปย่อดังนี้

ให้ $M = \{1, 2, ..., m\}$ และ $N = \{1, 2, ..., n\}$

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i \in M$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \qquad j \in N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i \in M; j \in N$$

งานวิจัยนี้ เราใช้ทฤษฎีบทจาก [8] ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1

ให้ $J \subseteq N$ และ $t \in M$ ซึ่ง $\sum_{j \in J} a_{tj} > b_t$ และ $\sum_{j \in J - \{r\}} a_{tj} < b_t$ สำหรับบาง $r \in J$ จะได้ว่า

$$\sum_{j \in J} a_{tj} x_{tj} + \sum_{j \in J} \left(\left(\max\left\{0, b_t - \sum_{j' \in J - \{j\}} a_{tj'} \right\} \right) \sum_{i \in M - \{t\}} x_{ij} \right) \le b_t \qquad (3.1)$$

เป็นชุดอสมการสมเหตุสมผลของปัญหาข้างต้น

โดยที่ J คือ เซตของดัชนีใน N ซึ่งถูกเลือกนำมาตรวจสอบกับเงื่อนไข

t คือ ดัชนีของแถวที่ถูกเลือกนำมาตรวจสอบกับเงื่อนไข

r คือ ดัชนีที่อยู่ใน J ซึ่งถูกเลือกเพื่อนำไปลบออกจากผลรวมสัมประสิทธิ์ $\left(\sum_{j\in J} a_{tj}\right)$ ของแถวที่ t

ก่อนที่เราจะใช้ทฤษฎีบทนี้ เราจะทำการเรียงค่าของสัมประสิทธิ์ในแต่ละแถวจากน้อยไปมาก และเลือก J ตามหลักที่เรียงใหม่ โดยเริ่มจากเลือก J สองตัวแรก ซึ่งถ้าไม่เป็นไปตามทฤษฎีเราจะเพิ่ม J ทีละตัวจนถึง $n-1$ ตัว

จากทฤษฎีบท ถ้าผลรวมของสัมประสิทธิ์ในแถวที่ t หลักใน J มีค่ามากกว่าค่าทางด้านขวา (b_t) และเมื่อหักค่าสัมประสิทธิ์ในแถวที่ t หลักที่ r ออกแล้วน้อยกว่าค่าทางด้านขวา จะได้ว่า เราจะนำอสมการแถวที่ t มาสร้างอสมการสมเหตุสมผลตามอสมการ (3.1) ซึ่งการใช้อสมการสมเหตุสมผลในงานวิจัย เราเลือกใช้อสมการสมเหตุสมผลเพียง 1 อสมการเท่านั้นกับแต่ละปัญหา

ตัวอย่าง 3.1

ให้ $m=3, n=3, a_{11}=a_{21}=a_{31}=4, a_{12}=a_{22}=a_{32}=7, a_{13}=a_{23}=a_{33}=9$
และ $b_1=b_2=b_3=15$

จะได้ $M=\{1,2,3\}$ และ $N=\{1,2,3\}$
และสามารถเขียนเป็นปัญหาได้ดังนี้

$$
\begin{array}{llllllllllr}
4x_{11}+7x_{12}+9x_{13} & & & & & & & & & \le 15 & (3.2)\\
 & & & 4x_{21}+7x_{22}+9x_{23} & & & & & & \le 15 & (3.3)\\
 & & & & & & 4x_{31}+7x_{32}+9x_{33} & & & \le 15 & (3.4)\\
x_{11} & & & +x_{21} & & & +x_{31} & & & =1 & (3.5)\\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & & +x_{32} & & =1 & (3.6)\\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & & & +x_{33} & =1 & (3.7)
\end{array}
$$

จากโจทย์ มีกลุ่มของอสมการอยู่ 3 อสมการ ซึ่งในการสร้างอสมการสมเหตุสมผลนั้นจะต้องนำอสมการทั้ง 3 มาตรวจสอบกับเงื่อนไขตามทฤษฎีบท (3.1) ถ้าอสมการใดสอดคล้องกับเงื่อนไข เราจะนำอสมการนั้นมาสร้างเป็นอสมการสมเหตุสมผล แต่ถ้าอสมการใดไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข เราจะไม่นำอสมการนั้นมาใช้

เลือก $t=1$ และ $J=\{2,3\}$
ให้ตัวแปรทุกตัวมีค่าเป็น 0 ยกเว้น x_{12} และ x_{13}
จาก (3.2) จะได้อสมการดังนี้

$$7x_{12}+9x_{13} \leq 15 \qquad (3.8)$$

จาก (3.6), เมื่อ $x_{22}>0$ จะได้ $x_{12}=0$ และจาก (3.8), $9x_{13}\leq 15$ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ $x_{22}=15-9=6$ ส่วนสัมประสิทธิ์ของ x_{32} เราสามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$7x_{12}+9x_{13}+6x_{22}+6x_{32} \leq 15 \qquad (3.9)$$

ในทำนองเดียวกัน สัมประสิทธิ์ของ x_{23} และ x_{33} คือ 8 จะได้

$$7x_{12}+9x_{13}+6x_{22}+6x_{32}+8x_{23}+8x_{33} \leq 15 \qquad (3.10)$$

ดังนั้น อสมการ (3.10) เป็นอสมการสมเหตุสมผลของปัญหา

เลือก $t=2$ และ $J=\{2,3\}$ จะได้

$$7x_{22}+9x_{23}+6x_{12}+6x_{32}+8x_{13}+8x_{33} \leq 15 \qquad (3.11)$$

เลือก $t=3$ และ $J=\{2,3\}$ จะได้

$$7x_{32}+9x_{33}+6x_{12}+6x_{22}+8x_{13}+8x_{23} \leq 15 \qquad (3.12)$$

ดังนั้น ปัญหานี้จะมีอสมการสมเหตุสมผล 3 อสมการ คือ (3.10), (3.11) และ (3.12)

เมื่อเรานำอสมการสมเหตุสมผลมาใช้ในงานวิจัย พบว่าบางอสมการช่วยลดบริเวณที่เป็นไปได้ เราแทน $x_{11} = \frac{3}{5}, x_{22} = 1, x_{23} = \frac{5}{7}, x_{31} = \frac{2}{5}, x_{33} = \frac{2}{7}, x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{32} = 0$ ลงในปัญหา ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$4x_{11} + 7x_{12} + 9x_{13} = \left(4 \times \frac{3}{5}\right) + (7 \times 0) + (9 \times 0) = \frac{12}{5} \leq 15$$

$$4x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23} = (4 \times 0) + (7 \times 1) + \left(9 \times \frac{5}{7}\right) = \frac{94}{7} \leq 15$$

$$4x_{31} + 7x_{32} + 9x_{33} = \left(4 \times \frac{2}{5}\right) + (7 \times 0) + \left(9 \times \frac{2}{7}\right) = \frac{146}{35} \leq 15$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = \frac{3}{5} + 0 + \frac{2}{5} = 1 \qquad 1 = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0 + 1 + 0 = 1 \qquad 1 = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 0 + \frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1 \qquad 1 = 1$$

เมื่อนำค่าดังกล่าวแทนลงในปัญหา พบว่าสอดคล้องกับปัญหา แต่เมื่อนำไปแทนลงในอสมการสมเหตุสมผล (3.11) พบว่าค่าดังกล่าวไม่สอดคล้องกับอสมการ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$7x_{22} + 9x_{23} + 6x_{12} + 6x_{32} + 8x_{13} + 8x_{33}$$

$$= (7 \times 1) + \left(9 \times \frac{5}{7}\right) + (6 \times 0) + (6 \times 0) + (8 \times 0) + \left(8 \times \frac{2}{7}\right) = \frac{110}{7} \nleq 15$$

จากการแทนค่าดังกล่าว ทำให้พบว่า อสมการสมเหตุสมผล (3.11) ช่วยลดบริเวณที่เป็นไปได้ของกำหนดการเชิงเส้นผ่อนปรนของปัญหา ซึ่งอสมการนี้อาจช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณได้

3.3 การแปลงปัญหา

แนวคิดสำหรับการแปลงปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป มาจากการแปลงปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีขอบเขตจาก [13] ซึ่งศึกษาขนาดขอบเขตของตัวแปรตัดสินใจที่มีผลกระทบต่อประสิทธิภาพของการแปลงปัญหาควบคู่ ก่อนที่จะแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์ โดยใช้ปัญหาจาก Netlib ที่สามารถดาวน์โหลดจากเวบไซต์ ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่ใช้ในงานวิจัยมีตัวแปรตัดสินใจที่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง ซึ่งสามารถปรับขนาดค่าขอบเขตบนและล่างให้แคบลงและกำหนดจุดเริ่มต้นใหม่ของปัญหา ทำให้การหาคำตอบมีประสิทธิภาพ ดังแสดงตัวอย่างที่ 3.2

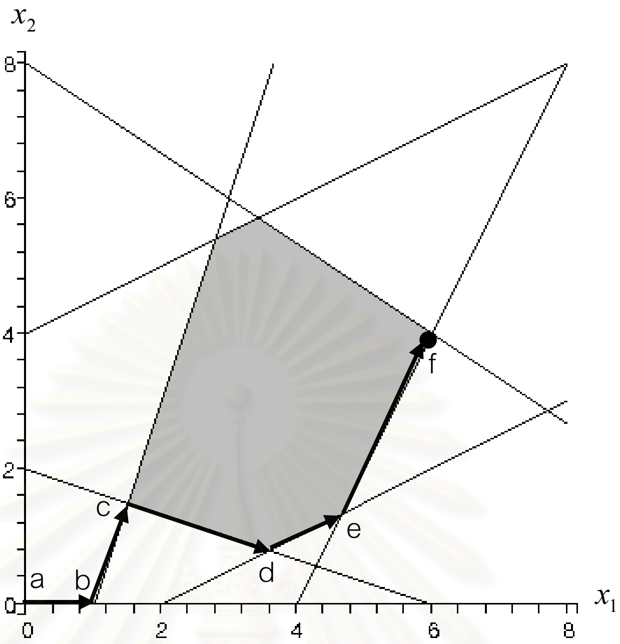
ตัวอย่าง 3.2 [13]

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $x_1 + x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\le 24 \\
2x_1 - x_2 &\le 8 \\
x_1 - 2x_2 &\le 2 \\
-x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
x_1 + 3x_2 &\ge 6 \\
3x_1 - x_2 &\ge 3 \\
0 \le x_1, x_2 &\le 7
\end{aligned}$$

จากปัญหาสามารถวาดบริเวณที่เป็นไปได้ ดังแสดงรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหา

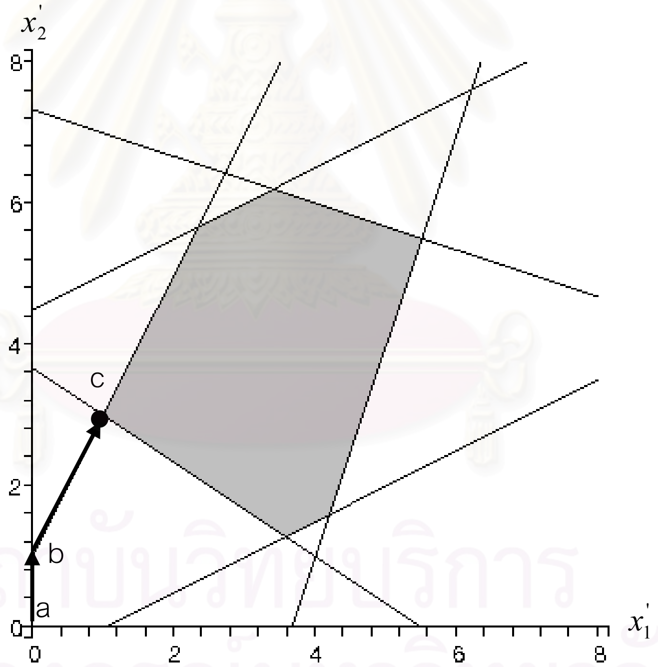
การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์แบบสองเฟส (two phase) จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ เฟสหนึ่ง (phase I) และ เฟสสอง (phase II) ซึ่งเฟสหนึ่ง จะเริ่มต้นจากจุด (0,0) และเปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด (extreme point) อื่น ๆ จนกว่าจะเจอบริเวณที่เป็นไปได้ ส่วนเฟสสอง จะเริ่มจากจุดสุดขีดที่เป็นบริเวณที่เป็นไปได้จากเฟสหนึ่ง และเปลี่ยนไปยังจุดสุดขีดในบริเวณที่เป็นไปได้อื่น จนกว่าจะเจอผลเฉลยที่เหมาะที่สุด จากรูปที่ 3.1 เฟสหนึ่ง จะเริ่มต้นจากจุด a (0,0) เปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด b และเปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด c จะเห็นได้ว่าเฟสหนึ่ง ใช้จำนวนรอบการคำนวณ 2 รอบ ส่วนเฟสสอง จะเริ่มจากจุดสุดขีด c เปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด d เปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด e และเปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด f ซึ่งเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด จะเห็นได้ว่า เฟสสอง ใช้จำนวนรอบการคำนวณ 3 รอบ ในการหาผลเฉลยใช้จำนวนรอบการคำนวณทั้งหมด 5 รอบ ดังนั้นงานวิจัย [13] จึงกำหนดจุดเริ่มต้นใหม่ให้กับปัญหา เพื่อลดจำนวนรอบการคำนวณ โดยใช้ค่าขอบเขตของปัญหามาช่วยในการแปลง เราแทน $x_1 = -x_1' + 7$ และ $x_2 = -x_2' + 7$ จะได้ปัญหาใหม่ดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $-x_1^{'} - x_2^{'} + 14$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
-2x_1^{'} - 3x_2^{'} &\le -11 \\
-2x_1^{'} + x_2^{'} &\le 1 \\
-x_1^{'} + 2x_2^{'} &\le 9 \\
x_1^{'} - 2x_2^{'} &\le 1 \\
-x_1^{'} - 3x_2^{'} &\ge -22 \\
-3x_1^{'} + x_2^{'} &\ge -11 \\
0 \le x_1^{'},\ x_2^{'} &\le 7
\end{aligned}
$$

จากปัญหาสามารถวาดบริเวณที่เป็นไปได้ ดังแสดงรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาที่แปลงแล้ว

จากรูป เฟสหนึ่ง จะเริ่มต้นจาก a (0,0) เปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด b และเปลี่ยนไปยังจุดสุดขีด c ซึ่งเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ดังนั้นจึงไม่ต้องทำเฟสสอง การหาผลเฉลยใช้จำนวนรอบการคำนวณทั้งหมด 2 รอบ ซึ่งน้อยกว่าการหาผลเฉลยแบบเดิม การแปลงปัญหาในงานวิจัย ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ ซึ่งจุดเริ่มต้นใหม่อยู่ใกล้กับผลเฉลยที่เหมาะที่สุดมากกว่าจุดเริ่มต้นเดิม

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปมีค่าขอบเขตบนของตัวแปรตัดสินใจ คือ 1 เพราะค่าของตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น ในการแปลงปัญหา เราใช้แนวคิดเดียวกับ [13] แต่ไม่ปรับขนาดค่าของขอบเขต โดยจะกำหนดจุดเริ่มต้นใหม่ของปัญหา ซึ่งใช้เฉพาะค่าขอบเขตบนเท่านั้น ในการแปลงปัญหา เราทำการแปลงปัญหาเดิมไปพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลที่ได้มาจากหัวข้อ 3.2

ปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปมีรูปแบบดังนี้

ให้ $M = \{1, 2, ..., m\}$ และ $N = \{1, 2, ..., n\}$

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i \in M$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \qquad j \in N$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i \in M; j \in N$$

จากรูปแบบของปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไปเมื่อเพิ่มอสมการสมเหตุสมผลจากหัวข้อ 3.2 เข้าไป และแทน $x_{ij} = -x_{ij}^{'} + 1$ จะได้รูปแบบใหม่ ดังนี้

ให้ $M = \{1, 2, ..., m\}$ และ $N = \{1, 2, ..., n\}$

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\left(\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} \left(- x_{ij}^{'} \right) \right) + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j \in N} a_{ij} \left(- x_{ij}^{'} \right) \quad \leq \quad b_i - \sum_{j \in N} a_{ij}, \quad i \in M$$

$$\sum_{i \in M} \left(- x_{ij}^{'} \right) \quad = \quad 1 - m, \quad j \in N$$

$$\sum_{j \in J} a_{tj} \left(- x_{tj}^{'} \right) + \sum_{j \in J} \left(\left(\max\left\{ 0, b_t - \sum_{j' \in J - \{j\}} a_{tj'} \right\} \right) \sum_{i \in M - \{t\}} \left(- x_{ij}^{'} \right) \right)$$
$$\leq \quad b_t - \sum_{j \in J} a_{tj} - (M - 1) \left(\sum_{j \in J} \max\left\{ 0, b_t - \sum_{j' \in J - \{j\}} a_{tj'} \right\} \right)$$

$x_{ij}^{'} \leq 1,\ x$ เป็นจำนวนเต็ม $i \in M;\ j \in N$

ให้ x^* เป็นคำตอบของปัญหาเดิม และ x^{**} เป็นคำตอบของปัญหาใหม่

สำหรับการหาคำตอบสำหรับปัญหาเดิม x^* ทำได้โดยแทนค่า x^{**} ในสูตร $x^* = 1 - x^{**}$ คำตอบที่ได้จากปัญหาเดิม และคำตอบที่ได้จากปัญหาใหม่เมื่อแทนค่ากลับแล้ว ผลลัพธ์ที่ได้เหมือนกัน

บทที่ 4
ผลการทดลอง

ในบทนี้ จะกล่าวถึงผลการทดลอง ซึ่งเราจะแสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาทั้ง 3 แบบ ที่กล่าวถึงในบทที่ 3 ขนาด 20×20, 20×50, 20×100, 20×200 ของวิธีขยายและจำกัดเขต วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา พร้อมทั้งแสดงค่าสัมพัทธ์และค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของปัญหา ซึ่งในการทดลอง เราทดลองโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ประกอบด้วย

1. หน่วยประมวลผลกลาง Intel Pentium 4
2. ความเร็วของหน่วยประมวลผลกลางเท่ากับ 2 GHz
3. ระบบปฏิบัติการวินโดว์ XP service pack 2
4. หน่วยความจำสำรอง (Random Access Memory: RAM) เท่ากับ 512 MB

เราใช้ซอฟต์แวร์เปิด GLPK (GNU Linear Programming Kit) [16] เวอร์ชัน 4.8 ที่เป็นซอฟต์แวร์สำหรับแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น เพื่อใช้ในการทดลองและแบ่งวิธีทดลองออกเป็น 4 วิธีดังนี้

1. ใช้วิธีขยายและจำกัดเขตเพียงอย่างเดียว (BB)
2. ใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล (VI)
3. ใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา (TF)
4. ใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา (VI&TF)

ในแต่ละวิธี เราใช้ข้อมูลนำเข้าที่มีรูปแบบแตกต่างกัน โดยเราจำลองข้อมูลด้วยโปรแกรมภาษาเพิร์ล (perl: Practical Extraction and Reporting Language) ซึ่งแสดงในภาคผนวก ก และหาผลเฉลยโดยใช้ซอฟต์แวร์เปิด GLPK

งานวิจัยนี้ เราวัดผลจากจำนวนรอบการคำนวณของแต่ละวิธี เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขต ซึ่งเราจะแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย (average relative gain) สามารถหาได้ดังนี้

ค่าสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย =

$$\frac{\text{จำนวนรอบการคำนวณของวิธีขยายและจำกัดเขต - จำนวนรอบการคำนวณของวิธีที่ต้องการเปรียบเทียบ}}{\text{จำนวนรอบการคำนวณของวิธีขยายและจำกัดเขต}}$$

ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย =

$$\frac{\text{ผลรวมค่าสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของแต่ละปัญหาจำนวน } N \text{ ปัญหา}}{N}$$

ถ้าค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายเป็นลบ หมายถึง วิธีที่ต้องการเปรียบเทียบจะใช้จำนวนรอบการคำนวณมากกว่าวิธีขยายและจำกัดเขต เช่น -0.015032 หมายถึง วิธีที่ต้องการเปรียบเทียบจะใช้จำนวนรอบการคำนวณมากกว่าวิธีขยายและจำกัดเขต 1.5032% หรือกล่าวได้ว่าวิธีที่ต้องการเปรียบเทียบช้ากว่าวิธีขยายและจำกัดเขต 1.5032%

ถ้าค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายเป็นศูนย์ หมายถึง วิธีที่ต้องการเปรียบเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากัน

ถ้าค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายเป็นบวก หมายถึง วิธีที่ต้องการเปรียบเทียบจะใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขต เช่น 0.345032 หมายถึง วิธีที่ต้องการเปรียบเทียบจะใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขต 34.5032% หรือกล่าวได้ว่าวิธีที่ต้องการเปรียบเทียบเร็วกว่าวิธีขยายและจำกัดเขต 34.5032%

ตารางที่ 4.1 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ซึ่งปัญหามีขนาด 20×20 จำนวน 10 ปัญหาของวิธีขยายและจำกัดเขต วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ซึ่งผลดังแสดงในตาราง

ตารางที่ 4.1 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×20

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	49	42	26	23
2	46	38	26	20
3	52	46	26	25
4	47	43	26	25
5	51	43	27	25
6	45	37	25	21
7	55	54	29	28
8	48	*48	26	26
9	48	*48	25	25
10	50	41	27	22

* ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต

จากตารางที่ 4.1 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย แต่ปัญหา 8 และ 9 ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต แสดงให้เห็นว่าอสมการสมเหตุสมผลบางอสมการไม่ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาและวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตทุกปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×20

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.142857	0.469388	0.530612
2	0.173913	0.434783	0.565217
3	0.115385	0.500000	0.519231
4	0.085106	0.446809	0.468085
5	0.156863	0.470588	0.509804
6	0.177778	0.444444	0.533333
7	0.018182	0.472727	0.490909
8	0.000000	0.458333	0.458333
9	0.000000	0.479167	0.479167
10	0.180000	0.460000	0.560000
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.105008	0.463624	0.511469

จากตารางที่ 4.2 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 10.5008% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 46.3624% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 51.1469%

ตารางที่ 4.3 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×50

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	124	122	66	64
2	131	108	65	57
3	125	108	61	58
4	121	115	62	58
5	124	123	66	63
6	127	119	68	64
7	128	119	66	61
8	123	121	63	62
9	122	115	60	57
10	121	108	61	57

จากตารางที่ 4.3 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×50

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.016129	0.467742	0.483871
2	0.175573	0.503817	0.564885
3	0.136000	0.512000	0.536000
4	0.049587	0.487603	0.520661
5	0.008065	0.467742	0.491935
6	0.062992	0.464567	0.496063
7	0.070313	0.484375	0.523438
8	0.016260	0.487805	0.495935
9	0.057377	0.508197	0.532787
10	0.107438	0.495868	0.528926
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.069973	0.487972	0.517450

จากตารางที่ 4.4 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 6.9973% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 48.7972% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 51.7450%

ตารางที่ 4.5 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×100

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	245	199	129	109
2	251	239	130	118
3	246	245	127	126
4	235	205	120	110
5	242	223	127	121
6	248	223	127	118
7	242	236	129	125
8	239	*239	125	123
9	249	*249	125	125
10	234	192	121	101

* ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต

จากตารางที่ 4.5 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย แต่ปัญหา 8 และ 9 ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต แสดงให้เห็นว่าอสมการสมเหตุสมผลบางอสมการไม่ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาและวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตทุกปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×100

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.187755	0.473469	0.555102
2	0.047809	0.482072	0.529880
3	0.004065	0.483740	0.487805
4	0.127660	0.489362	0.531915
5	0.078512	0.475207	0.500000
6	0.100806	0.487903	0.524194
7	0.024793	0.466942	0.483471
8	0.000000	0.476987	0.485356
9	0.000000	0.497992	0.497992
10	0.179487	0.482906	0.568376
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.075089	0.481658	0.516409

จากตารางที่ 4.6 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 7.5089% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 48.1658% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 51.6409%

ตารางที่ 4.7 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×200

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	487	398	249	213
2	489	486	256	256
3	498	497	260	260
4	489	485	251	251
5	469	440	242	233
6	486	476	246	243
7	494	470	257	237
8	498	491	255	254
9	485	458	256	246
10	511	497	256	253

จากตารางที่ 4.7 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.8

ตารางที่ 4.8 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ปัญหาขนาด 20×200

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.182752	0.488706	0.562628
2	0.006135	0.476483	0.476483
3	0.002008	0.477912	0.477912
4	0.008180	0.486708	0.486708
5	0.061834	0.484009	0.503198
6	0.020576	0.493827	0.500000
7	0.048583	0.479757	0.520243
8	0.014056	0.487952	0.489960
9	0.055670	0.472165	0.492784
10	0.027397	0.499022	0.504892
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.042719	0.484654	0.501481

จากตารางที่ 4.8 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 4.2719% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 48.4654% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 50.1481%

ตารางที่ 4.9 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×20

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	45	42	22	22
2	49	45	24	23
3	50	45	27	25
4	48	38	25	21
5	52	*52	28	28
6	47	34	24	19
7	47	39	25	21
8	50	45	26	23
9	47	43	24	22
10	40	39	22	22

* ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต

จากตารางที่ 4.9 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย แต่ปัญหา 5 ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขตแสดงให้เห็นว่าอสมการสมเหตุสมผลบางอสมการไม่ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตทุกปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.10

ตารางที่ 4.10 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×20

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.066667	0.511111	0.511111
2	0.081633	0.510204	0.530612
3	0.100000	0.460000	0.500000
4	0.208333	0.479167	0.562500
5	0.000000	0.461538	0.461538
6	0.276596	0.489362	0.595745
7	0.170213	0.468085	0.553191
8	0.100000	0.480000	0.540000
9	0.085106	0.489362	0.531915
10	0.025000	0.450000	0.450000
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.111355	0.479883	0.523661

จากตารางที่ 4.10 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 11.1355% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 47.9883% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 52.3661%

ตารางที่ 4.11 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×50

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	113	90	63	46
2	112	94	61	48
3	118	85	63	44
4	111	104	59	56
5	112	108	58	57
6	115	104	58	55
7	112	92	61	48
8	112	106	57	57
9	114	101	60	54
10	113	100	60	52

จากตารางที่ 4.11 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.12

ตารางที่ 4.12 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×50

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.203540	0.442478	0.592920
2	0.160714	0.455357	0.571429
3	0.279661	0.466102	0.627119
4	0.063063	0.468468	0.495495
5	0.035714	0.482143	0.491071
6	0.095652	0.495652	0.521739
7	0.178571	0.455357	0.571429
8	0.053571	0.491071	0.491071
9	0.114035	0.473684	0.526316
10	0.115044	0.469027	0.539823
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.129957	0.469934	0.542841

จากตารางที่ 4.12 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 12.9957% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 46.9934% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 54.2841%

ตารางที่ 4.13 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×100

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	233	183	122	95
2	235	220	119	115
3	229	204	118	107
4	234	201	118	102
5	237	223	121	114
6	226	177	114	90
7	228	211	119	113
8	226	207	119	110
9	228	185	120	95
10	238	234	120	118

จากตารางที่ 4.13 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.14

ตารางที่ 4.14 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×100

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.214592	0.476395	0.592275
2	0.063830	0.493617	0.510638
3	0.109170	0.484716	0.532751
4	0.141026	0.495726	0.564103
5	0.059072	0.489451	0.518987
6	0.216814	0.495575	0.601770
7	0.074561	0.478070	0.504386
8	0.084071	0.473451	0.513274
9	0.188596	0.473684	0.583333
10	0.016807	0.495798	0.504202
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.116854	0.485649	0.542572

จากตารางที่ 4.14 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 11.6854% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 48.5649% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 54.2572%

ตารางที่ 4.15 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×200

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	450	433	234	229
2	444	436	230	229
3	456	385	235	203
4	473	402	242	209
5	457	436	238	227
6	466	437	244	221
7	448	398	235	209
8	451	450	233	232
9	462	431	238	228
10	475	403	245	217

จากตารางที่ 4.15 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.16

ตารางที่ 4.16 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 ปัญหาขนาด 20×200

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต พร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขต พร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต พร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.037778	0.480000	0.491111
2	0.018018	0.481982	0.484234
3	0.155702	0.484649	0.554825
4	0.150106	0.488372	0.558140
5	0.045952	0.479212	0.503282
6	0.062232	0.476395	0.525751
7	0.111607	0.475446	0.533482
8	0.002217	0.483370	0.485588
9	0.067100	0.484848	0.506494
10	0.151579	0.484211	0.543158
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.080229	0.481849	0.518606

จากตารางที่ 4.16 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 8.0229% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 48.1849% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 51.8606%

ตารางที่ 4.17 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×20

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	44	42	26	24
2	42	41	23	22
3	45	41	23	23
4	43	39	23	21
5	39	*39	22	22
6	46	44	25	25
7	42	*42	26	25
8	43	39	23	21
9	43	42	23	23
10	44	40	23	22

* ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต

จากตารางที่ 4.17 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย แต่ปัญหา 5 และ 7 ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต แสดงให้เห็นว่าอสมการสมเหตุสมผลบางอสมการไม่ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาและวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตทุกปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.18

ตารางที่ 4.18 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×20

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.045455	0.409091	0.454545
2	0.023810	0.452381	0.476190
3	0.088889	0.488889	0.488889
4	0.093023	0.465116	0.511628
5	0.000000	0.435897	0.435897
6	0.043478	0.456522	0.456522
7	0.000000	0.380952	0.404762
8	0.093023	0.465116	0.511628
9	0.023256	0.465116	0.465116
10	0.090909	0.477273	0.500000
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.050184	0.449635	0.470518

จากตารางที่ 4.18 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 5.0184% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 44.9635% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 47.0518%

ตารางที่ 4.19 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×50

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	99	86	53	44
2	113	111	57	56
3	101	99	52	50
4	105	90	55	48
5	104	98	55	51
6	109	94	54	49
7	103	*103	59	59
8	105	95	55	48
9	112	103	58	55
10	105	104	55	55

* ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต

จากตารางที่ 4.19 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย แต่ปัญหา 7 ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขตแสดงให้เห็นว่าอสมการสมเหตุสมผลบางอสมการไม่ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตทุกปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.20

ตารางที่ 4.20 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×50

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.131313	0.464646	0.555556
2	0.017699	0.495575	0.504425
3	0.019802	0.485149	0.504950
4	0.142857	0.476190	0.542857
5	0.057692	0.471154	0.509615
6	0.137615	0.504587	0.550459
7	0.000000	0.427184	0.427184
8	0.095238	0.476190	0.542857
9	0.080357	0.482143	0.508929
10	0.009524	0.476190	0.476190
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.069210	0.475901	0.512302

จากตารางที่ 4.20 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 6.9210% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 47.5901% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 51.2302%

ตารางที่ 4.21 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×100

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	215	189	113	98
2	208	196	108	103
3	221	200	114	105
4	210	198	110	103
5	210	185	113	95
6	217	181	112	94
7	211	191	106	98
8	209	180	109	94
9	210	184	109	94
10	207	184	107	94

จากตารางที่ 4.21 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.22

ตารางที่ 4.22 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×100

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.120930	0.474419	0.544186
2	0.057692	0.480769	0.504808
3	0.095023	0.484163	0.524887
4	0.057143	0.476190	0.509524
5	0.119048	0.461905	0.547619
6	0.165899	0.483871	0.566820
7	0.094787	0.497630	0.535545
8	0.138756	0.478469	0.550239
9	0.123810	0.480952	0.552381
10	0.111111	0.483092	0.545894
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.108420	0.480146	0.538190

จากตารางที่ 4.22 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 10.8420% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 48.0146% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 53.8190%

ตารางที่ 4.23 แสดงจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×200

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขต	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	428	407	222	208
2	427	*427	220	218
3	404	365	215	190
4	421	374	219	194
5	431	361	227	188
6	419	416	218	215
7	441	436	225	222
8	419	366	220	188
9	421	374	219	190
10	387	*387	206	201

* ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต

จากตารางที่ 4.23 จะเห็นว่า เมื่อใช้วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย แต่ปัญหา 10 ใช้จำนวนรอบการคำนวณเท่ากับวิธีขยายและจำกัดเขต แสดงให้เห็นว่าอสมการสมเหตุสมผลบางอสมการไม่ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตทุกปัญหา ซึ่งสามารถแสดงเป็นค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณดังแสดงตารางที่ 4.24

ตารางที่ 4.24 แสดงค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 ปัญหาขนาด 20×200

ปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา	วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา
1	0.049065	0.481308	0.514019
2	0.000000	0.484778	0.489461
3	0.096535	0.467822	0.529703
4	0.111639	0.479810	0.539192
5	0.162413	0.473318	0.563805
6	0.007160	0.479714	0.486874
7	0.011338	0.489796	0.496599
8	0.126492	0.474940	0.551313
9	0.111639	0.479810	0.548694
10	0.000000	0.467700	0.480620
ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยาย	0.067628	0.477900	0.520028

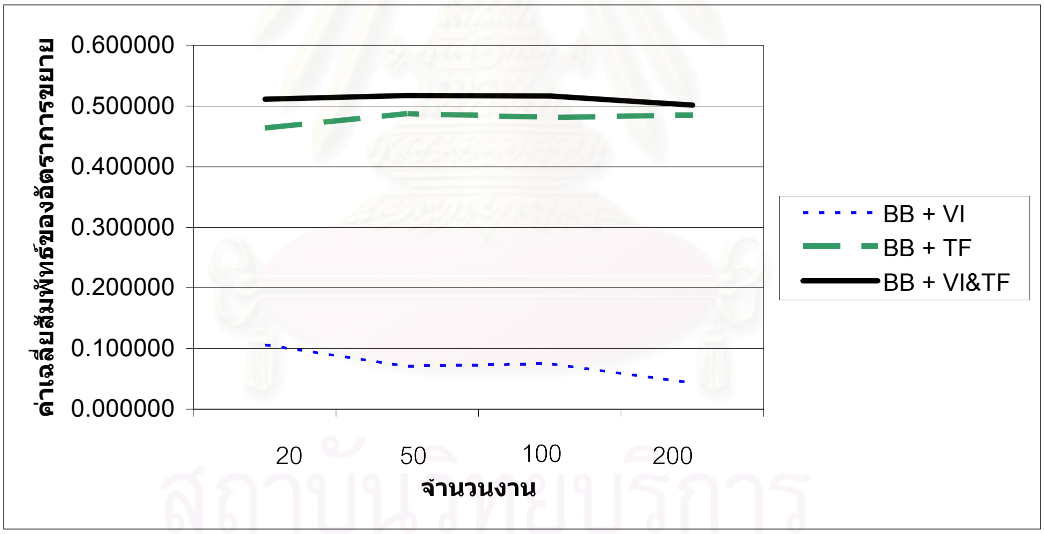
จากตารางที่ 4.24 จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 6.7628% ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 47.7900% และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเฉลี่ย 52.0028%

บทที่ 5
สรุปผลและงานในอนาคต

ในบทนี้ จะกล่าวถึงผลสรุปการทดลองซึ่งจะแสดงกราฟของค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตของการจำลองปัญหาทั้ง 3 แบบ รวมทั้งงานในอนาคต

5.1 สรุปผล

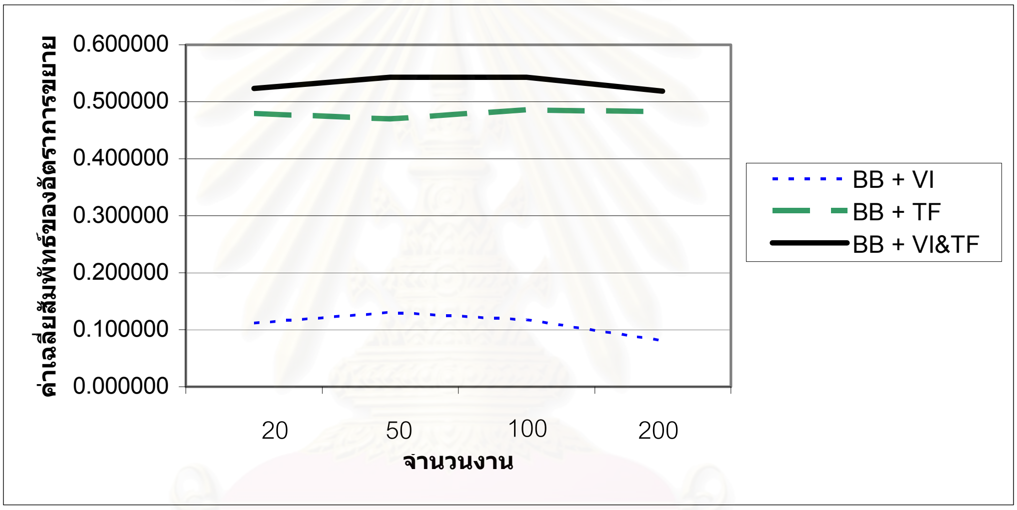
จากการหาค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขตในบทที่ 4 สามารถนำมาแสดงกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 5.1 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 จำนวนคน 20 คน

จากกราฟข้างต้น จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล (BB+VI) ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟมีแนวโน้มลดลง แสดงว่าจำนวนงานมีผลต่อจำนวนรอบการคำนวณที่ใช้การหาผลเฉลย ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา (BB+TF) ใช้จำนวนรอบ

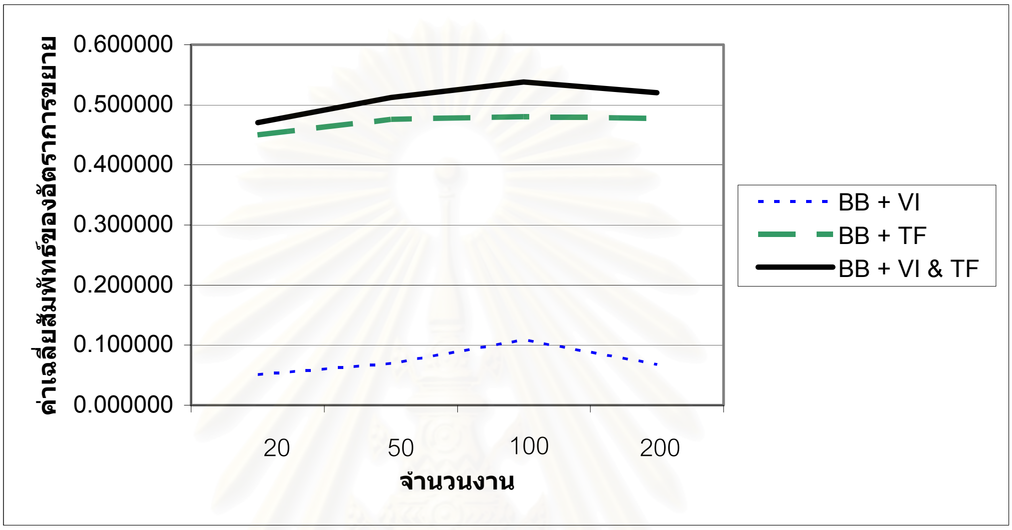
การคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตไม่ต่ำกว่า 40 % ซึ่งเมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟไม่มีแนวโน้มลดลง แสดงว่าจำนวนงานไม่มีผลต่อจำนวนรอบการคำนวณที่ใช้ในการหาผลเฉลย วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา (BB+ VI&TF) ซึ่งเป็นวิธีในงานวิจัยของเรา ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตไม่ต่ำกว่า 50 % ซึ่งเมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟมีแนวโน้มลดลง แสดงว่าจำนวนงานมีผลต่อจำนวนรอบการคำนวณที่ใช้ในการหาผลเฉลย



รูปที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 จำนวนคน 20 คน

จากกราฟข้างต้น จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นและลดลง อาจเป็นเพราะในงานวิจัย เราจำลองปัญหา 10 ปัญหา ซึ่งอาจยังไม่มากพอ จึงทำให้มีผลต่อการหาค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตไม่ต่ำกว่า 40 % ให้ผลไม่ต่างจากการจำลองปัญหาแบบที่ 1 ซึ่งเมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟไม่มีแนวโน้มลดลง แสดงว่าจำนวนงานไม่มีผลต่อจำนวนรอบการคำนวณที่ใช้ในการหาผลเฉลย วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและ

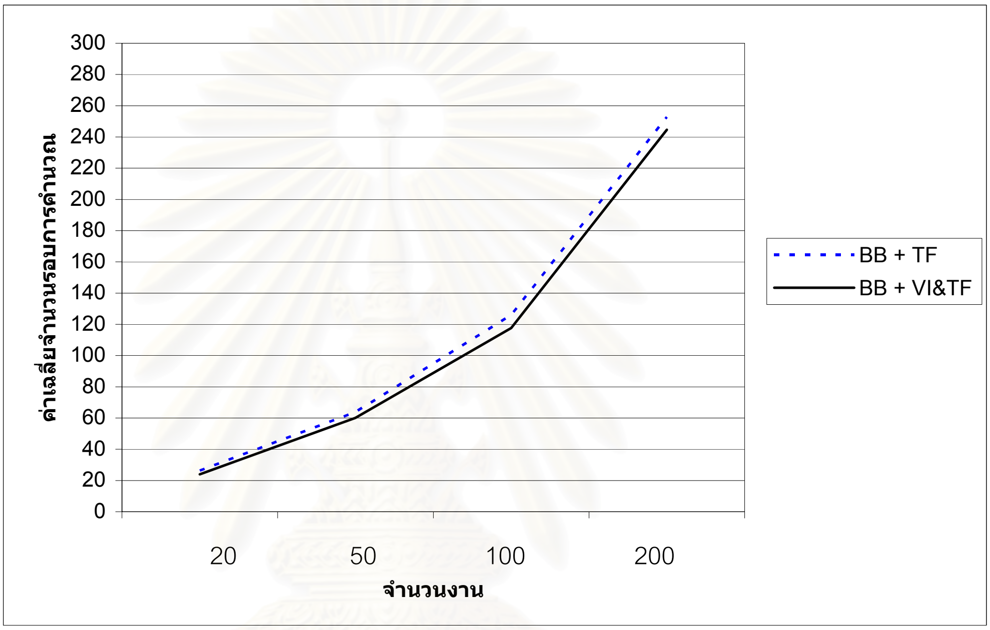
การแปลง ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตไม่ต่ำกว่า 50 % เมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นและลดลง ซึ่งอาจเป็นผลมาจากข้อมูลที่เราจำลอง



รูปที่ 5.3 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 จำนวนคน 20 คน

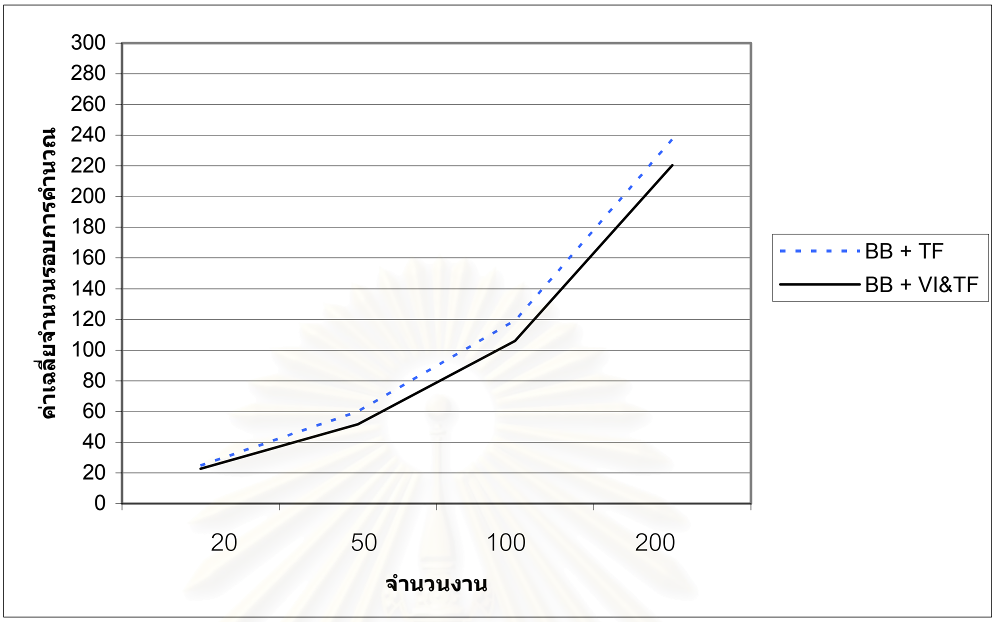
จากกราฟข้างต้น จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงเล็กน้อย เมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นและลดลง อาจเป็นเพราะในงานวิจัย เราจำลองปัญหา 10 ปัญหา ซึ่งอาจยังไม่มากพอ จึงทำให้มีผลต่อการหาค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของอัตราการขยายของจำนวนรอบการคำนวณ ส่วนวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตไม่ต่ำกว่า 40 % ให้ผลไม่ต่างจากการจำลองปัญหาแบบที่ 1 และ 2 เมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟไม่มีแนวโน้มลดลง แสดงว่าจำนวนงานไม่มีผลต่อจำนวนรอบการคำนวณที่ใช้ในการหาผลเฉลย วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตไม่ต่ำกว่า 50 % เมื่อจำนวนงานมากขึ้น เราจะเห็นว่ากราฟมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นและลดลง ซึ่งอาจเป็นผลมาจากข้อมูลที่เราจำลอง

จากผลการทดลอง แสดงให้เห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา และวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยมากกว่าวิธีขยายและจำกัดเขต ซึ่งทั้ง 2 วิธี สามารถแสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาทั้ง 3 แบบ ดังนี้



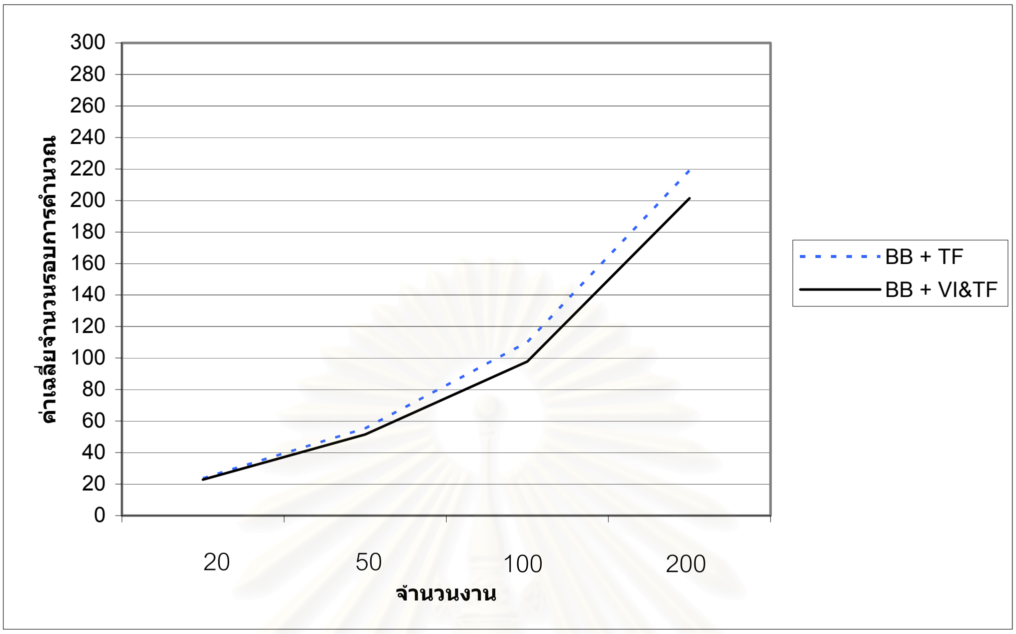
รูปที่ 5.4 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 1 จำนวนคน 20 คน

จากกราฟข้างต้น จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา สำหรับจำนวนงานขนาดเล็ก อาจจะไม่เห็นความแตกต่างของจำนวนรอบการคำนวณ แต่เมื่อจำนวนงานมากขึ้น จะเห็นได้ว่าวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าอย่างชัดเจน



รูปที่ 5.5 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 2 จำนวนคน 20 คน

จากกราฟข้างต้น จะเห็นว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา ใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหาอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งการจำลองปัญหาแบบที่ 2 มีความแตกต่างของจำนวนรอบการคำนวณของทั้ง 2 วิธีมากกว่าการจำลองปัญหาแบบที่ 1



รูปที่ 5.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยจำนวนรอบการคำนวณของการจำลองปัญหาแบบที่ 3 จำนวนคน 20 คน

จากกราฟข้างต้น จะเห็นว่า ลักษณะกราฟคล้ายกับการจำลองปัญหาแบบที่ 1 สำหรับจำนวนงานขนาดเล็ก อาจจะไม่เห็นความแตกต่างของจำนวนรอบการคำนวณ แต่เมื่อจำนวนงานมากขึ้น จะเห็นได้ว่าวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าอย่างชัดเจน

กล่าวโดยสรุป กราฟของการจำลองปัญหาทั้ง 3 แบบของ 3 วิธี มีลักษณะที่คล้ายกัน ซึ่งการจำลองปัญหาทั้ง 3 แบบแตกต่างกันที่การกำหนดค่าขีดจำกัดในการทำงานคนที่ $i\,(b_i)$ โดยนำค่าสัมประสิทธิ์ (0.6, 0.7, 0.8) คูณกับผลรวมเวลาที่ใช้ในการทำงาน j ของคนที่ $i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$ แสดงว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่นำมาคูณไม่มีผลต่อจำนวนรอบการคำนวณในการหาผลเฉลย และจากการทดลองพบว่า วิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหาซึ่งเป็นวิธีของเรามีประสิทธิภาพมากที่สุด เมื่อเทียบกับอีก 2 วิธีที่เหลือ และใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าวิธีขยายและจำกัดเขตไม่ต่ำกว่า 40 %

5.2 งานในอนาคต

งานวิจัยนี้ เราเลือกใช้อสมการสมเหตุสมผลเพียง 1 อสมการเท่านั้นกับแต่ละปัญหา เนื่องจากเรายังไม่มีหลักการเลือกอสมการสมเหตุสมผลที่ดีพอ ซึ่งถ้าเราเลือกใช้อสมการสมเหตุสมผลในทุกกรณี จะมีจำนวนวิธีที่มากเกินไป

ในงานวิจัย เราจำลองปัญหาที่มีคนจำนวน 20 คน ซึ่งสามารถสร้างอสมการสมเหตุสมผลได้ 20 อสมการ และมีจำนวนวิธีในการเลือกใช้อสมการทั้งหมด $=\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\binom{20}{3}+\ldots+\binom{20}{20}$ วิธี จะเห็นได้ว่า จำนวนวิธีมีมากจนเกินไป ดังนั้นเราจึงเลือกใช้อสมการอย่างสมเหตุผลเพียง 1 อสมการกับแต่ละปัญหา

งานในอนาคต เราจึงต้องการหาหลักการเลือกอสมการสมเหตุสมผลที่เหมาะสมกับแต่ละปัญหา ซึ่งการใช้อสมการสมเหตุสมผลที่เป็นชุดอาจให้ผลดีกว่าการใช้อสมการสมเหตุสมผลเพียง 1 อสมการ

รายการอ้างอิง

[1] Winston, W.L. Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. 2nd ed. California: Wadsworth,1995.

[2] Ecker, J.G. and Kupferschmid, M. Introduction to operations research. Canada: John Wiley & Sons, 1988.

[3] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., and Sherali, *H.D.* Linear programming and network Flows. 2nd ed. New York: John Wiley, 1990.

[4] James, P.L. Linear Programming in single- & multiple-objective systems. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

[5] Ross, G.T. and Soland, R.M. A branch and bound algorithm for the generalized assignment problem. Mathematical Programming 8 (1985): 91-103.

[6] Chu, P.C.H. and Beasley, J.E. A genetic algorithm for the generalized assignment problem. Computer & Operations Research 24 (1997): 17-23.

[7] Nemhauser, G L. and Wolsey, L.A., Integer and Combinatorial Optimization. Canada: John Wiley & Sons, 1988.

[8] de Farias, I.R., Jr. and Nemhauser, G.L. A family of inequalities for the generalized assignment polytope. Operations Research Letters 29 (2001): 49-55.

[9] Feltl, H. and Raidl, G.R. An Improved Hybrid Genetic Algorithm for the Generalized Assignment Problem. Institute of Computer Graphics and Algorithms, Vienna University of Technology, Vienna, Austria, 2004.

[10] Wilson, J.M. A genetic algorithm for the generalized assignment problem. Journal of the Operational Research Society (1997): 804-809.

[11] Wolsey, L.A. Facets and strong valid inequalities for integer programs. Operations Research 24 (1976): 367-372.

[12] Gottlieb, E.S. and Rao, M.R. The generalized assignment problem: Valid inequalities and facets. Mathematical Programming 46 (1990): 31-52.

[13] ชานินทร์ ศรีสุวรรณนภา. ขนาดขอบเขตค่าตัวแปรตัดสินใจที่มีผลต่อประสิทธิภาพของการแปลงควบคู่สำหรับแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง: กรณีประยุกต์ใช้กับปัญหา Netlib. การประชุมวิชาการด้านการวิจัยการดำเนินการ ประจำปี พ.ศ.2549.

[14] Foulds, L.R. and Wilson , J.M. A variation of the generalized assignment problem arising in the New Zealand dairy industry. Operations Research 69 (1997): 105-114.

[15] Hillier, F.S. and Lieberman , G.J. Introduction to Operations Research. 5^{th} ed. Singapore: McGraw-Hill, 1990.

[16] Makhorin, A. *GNU Linear Programming Kit*. Available from: http: //www.gnu.org/software/glpk/.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ภาคผนวก ก จะกล่าวถึงปัญหากำหนดการนัยทั่วไปที่นำมาใช้ทดสอบในงานวิจัย ซึ่งเราจำลองด้วยโปรแกรมภาษาเพิร์ล (perl: Practical Extraction and Reporting Language) โดยแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 แบบด้วยกัน คือ

1. ใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงอย่างเดียว
2. ใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล
3. ใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา
4. ใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผลและการแปลงปัญหา

เราจำลองข้อมูลเพื่อทดสอบกับโปรแกรม GLPK โดยบันทึกไฟล์ด้วยนามสกุล .dat ข้อมูลที่เราใช้ในงานวิจัยมีขนาดใหญ่ ดังนั้นเราจึงสมมติปัญหาขนาด 5×10 ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

ข้อมูลนำเข้าแบบที่ 1 สำหรับใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตเพียงอย่างเดียว

เราจำลองปัญหาตามหัวข้อ 3.1

```
data;
param M: = 5;                                        //จำนวนคน
param N: = 10;                                       //จำนวนงาน

param C: =     [1,1] 13, [1,2] 31, [1,3] 58, [1,4] 17, [1,5] 83,
               [1,6] 67, [1,7] 13, [1,8] 5, [1,9] 4, [1,10] 49,
               [2,1] 93, [2,2] 7, [2,3] 35, [2,4] 54, [2,5] 56,
               [2,6] 18, [2,7] 98, [2,8] 95, [2,9] 79, [2,10] 45,
               [3,1] 56, [3,2] 64, [3,3] 13, [3,4] 91, [3,5] 49,
               [3,6] 53, [3,7] 2, [3,8] 97, [3,9] 85, [3,10] 23,
               [4,1] 56, [4,2] 49, [4,3] 6, [4,4] 45, [4,5] 96,
```

[4,6] 48, [4,7] 8, [4,8] 1, [4,9] 58, [4,10] 40,

[5,1] 25, [5,2] 45, [5,3] 54, [5,4] 11, [5,5] 77,

[5,6] 29, [5,7] 8, [5,8] 45, [5,9] 79, [5,10] 90;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $c_{11}, c_{12,}, \ldots, c_{5\,10}$ ตามลำดับ

param A: = [1,1] 23, [1,2] 31, [1,3] 45, [1,4] 40, [1,5] 28,

[1,6] 29, [1,7] 14, [1,8] 38, [1,9] 4, [1,10] 13,

[2,1] 43, [2,2] 13, [2,3] 11, [2,4] 10, [2,5] 6,

[2,6] 9, [2,7] 37, [2,8] 32, [2,9] 28, [2,10] 32,

[3,1] 43, [3,2] 44, [3,3] 4, [3,4] 26, [3,5] 12,

[3,6] 1, [3,7] 22, [3,8] 10, [3,9] 46, [3,10] 30,

[4,1] 1, [4,2] 16, [4,3] 33, [4,4] 26, [4,5] 25,

[4,6] 36, [4,7] 13, [4,8] 50, [4,9] 38, [4,10] 23,

[5,1] 46, [5,2] 36, [5,3] 49, [5,4] 3, [5,5] 46,

[5,6] 50, [5,7] 34, [5,8] 37, [5,9] 16, [5,10] 13;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{5\,10}$ ตามลำดับ

param b: = 1 159, 2 132, 3 142, 4 156, 5 198, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ ตามลำดับ

end;

ข้อมูลนำเข้าแบบที่ 2 สำหรับใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล

เราใช้ปัญหาจากข้อมูลแบบที่ 1 และเพิ่มอสมการสมเหตุสมผลจากหัวข้อ 3.2

data;

param M: = 5; //จำนวนคน

param N: = 10; //จำนวนงาน

param C: = [1,1] 13, [1,2] 31, [1,3] 58, [1,4] 17, [1,5] 83,
[1,6] 67, [1,7] 13, [1,8] 5, [1,9] 4, [1,10] 49,
[2,1] 93, [2,2] 7, [2,3] 35, [2,4] 54, [2,5] 56,
[2,6] 18, [2,7] 98, [2,8] 95, [2,9] 79, [2,10] 45,
[3,1] 56, [3,2] 64, [3,3] 13, [3,4] 91, [3,5] 49,
[3,6] 53, [3,7] 2, [3,8] 97, [3,9] 85, [3,10] 23,
[4,1] 56, [4,2] 49, [4,3] 6, [4,4] 45, [4,5] 96,
[4,6] 48, [4,7] 8, [4,8] 1, [4,9] 58, [4,10] 40,
[5,1] 25, [5,2] 45, [5,3] 54, [5,4] 11, [5,5] 77,
[5,6] 29, [5,7] 8, [5,8] 45, [5,9] 79, [5,10] 90;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $c_{11}, c_{12,}, \ldots, c_{5\,10}$ ตามลำดับ

param A: = [1,1] 23, [1,2] 31, [1,3] 45, [1,4] 40, [1,5] 28,
[1,6] 29, [1,7] 14, [1,8] 38, [1,9] 4, [1,10] 13,
[2,1] 43, [2,2] 13, [2,3] 11, [2,4] 10, [2,5] 6,
[2,6] 9, [2,7] 37, [2,8] 32, [2,9] 28, [2,10] 32,
[3,1] 43, [3,2] 44, [3,3] 4, [3,4] 26, [3,5] 12,
[3,6] 1, [3,7] 22, [3,8] 10, [3,9] 46, [3,10] 30,
[4,1] 1, [4,2] 16, [4,3] 33, [4,4] 26, [4,5] 25,
[4,6] 36, [4,7] 13, [4,8] 50, [4,9] 38, [4,10] 23,
[5,1] 46, [5,2] 36, [5,3] 49, [5,4] 3, [5,5] 46,

[5,6] 50, [5,7] 34, [5,8] 37, [5,9] 16, [5,10] 13;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ตามลำดับ

param b: = 1 159, 2 132, 3 142, 4 156, 5 198, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1;

//ค่าคงที่ทางขวามือ $b_1, b_2, ..., b_{10}$ ตามลำดับ

param A_strong1: = [1,1] 23, [1,2] 31, [1,3] 0, [1,4] 0, [1,5] 28,
[1,6] 29, [1,7] 14, [1,8] 38, [1,9] 4, [1,10] 13,
[2,1] 2, [2,2] 10, [2,3] 0, [2,4] 0, [2,5] 7,
[2,6] 8, [2,7] 0, [2,8] 17, [2,9] 0, [2,10] 0,
[3,1] 2, [3,2] 10, [3,3] 0, [3,4] 0, [3,5] 7,
[3,6] 8, [3,7] 0, [3,8] 17, [3,9] 0, [3,10] 0,
[4,1] 2, [4,2] 10, [4,3] 0, [4,4] 0, [4,5] 7,
[4,6] 8, [4,7] 0, [4,8] 17, [4,9] 0, [4,10] 0,
[5,1] 2, [5,2] 10, [5,3] 0, [5,4] 0, [5,5] 7,
[5,6] 8, [5,7] 0, [5,8] 17, [5,9] 0, [5,10] 0;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 1 ตามลำดับ

param b_strong1: = 159;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 1

param A_strong2: = [1,1] 0, [1,2] 4, [1,3] 2, [1,4] 1, [1,5] 0,
[1,6] 0, [1,7] 0, [1,8] 23, [1,9] 19, [1,10] 23,
[2,1] 0, [2,2] 13, [2,3] 11, [2,4] 10, [2,5] 6,
[2,6] 9, [2,7] 0, [2,8] 32, [2,9] 28, [2,10] 32,
[3,1] 0, [3,2] 4, [3,3] 2, [3,4] 1, [3,5] 0,
[3,6] 0, [3,7] 0, [3,8] 23, [3,9] 19, [3,10] 23,
[4,1] 0, [4,2] 4, [4,3] 2, [4,4] 1, [4,5] 0,
[4,6] 0, [4,7] 0, [4,8] 23, [4,9] 19, [4,10] 23,

[5,1] 0, [5,2] 4, [5,3] 2, [5,4] 1, [5,5] 0,
[5,6] 0, [5,7] 0, [5,8] 23, [5,9] 19, [5,10] 23;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 2 ตามลำดับ

param b_strong2: = 132;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 2

param A_strong3: = [1,1] 37, [1,2] 0, [1,3] 0, [1,4] 20, [1,5] 6,
[1,6] 0, [1,7] 16, [1,8] 4, [1,9] 0, [1,10] 24,
[2,1] 37, [2,2] 0, [2,3] 0, [2,4] 20, [2,5] 6,
[2,6] 0, [2,7] 16, [2,8] 4, [2,9] 0, [2,10] 24,
[3,1] 43, [3,2] 0, [3,3] 4, [3,4] 26, [3,5] 12,
[3,6] 1, [3,7] 22, [3,8] 10, [3,9] 0, [3,10] 30,
[4,1] 37, [4,2] 0, [4,3] 0, [4,4] 20, [4,5] 6,
[4,6] 0, [4,7] 16, [4,8] 4, [4,9] 0, [4,10] 24,
[5,1] 37, [5,2] 0, [5,3] 0, [5,4] 20, [5,5] 6,
[5,6] 0, [5,7] 16, [5,8] 4, [5,9] 0, [5,10] 24;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 3 ตามลำดับ

param b_strong3: = 142;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 3

param A_strong4: = [1,1] 0, [1,2] 0, [1,3] 16, [1,4] 9, [1,5] 8,
[1,6] 19, [1,7] 0, [1,8] 0, [1,9] 0, [1,10] 6,
[2,1] 0, [2,2] 0, [2,3] 16, [2,4] 9, [2,5] 8,
[2,6] 19, [2,7] 0, [2,8] 0, [2,9] 0, [2,10] 6,
[3,1] 0, [3,2] 0, [3,3] 16, [3,4] 9, [3,5] 8,
[3,6] 19, [3,7] 0, [3,8] 0, [3,9] 0, [3,10] 6,
[4,1] 1, [4,2] 16, [4,3] 33, [4,4] 26, [4,5] 25,

[4,6] 36, [4,7] 13, [4,8] 0, [4,9] 0, [4,10] 23,

[5,1] 0, [5,2] 0, [5,3] 16, [5,4] 9, [5,5] 8,

[5,6] 19, [5,7] 0, [5,8] 0, [5,9] 0, [5,10] 6;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 4 ตามลำดับ

param b_strong4: = 156;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 4

param A_strong5: = [1,1] 13, [1,2] 3, [1,3] 0, [1,4] 0, [1,5] 13,

[1,6] 0, [1,7] 1, [1,8] 4, [1,9] 0, [1,10] 0,

[2,1] 13, [2,2] 3, [2,3] 0, [2,4] 0, [2,5] 13,

[2,6] 0, [2,7] 1, [2,8] 4, [2,9] 0, [2,10] 0,

[3,1] 13, [3,2] 3, [3,3] 0, [3,4] 0, [3,5] 13,

[3,6] 0, [3,7] 1, [3,8] 4, [3,9] 0, [3,10] 0,

[4,1] 13, [4,2] 3, [4,3] 0, [4,4] 0, [4,5] 13,

[4,6] 0, [4,7] 1, [4,8] 4, [4,9] 0, [4,10] 0,

[5,1] 46, [5,2] 36, [5,3] 0, [5,4] 3, [5,5] 46,

[5,6] 0, [5,7] 34, [5,8] 37, [5,9] 16, [5,10] 13;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 5 ตามลำดับ

param b_strong5: = 198;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 5

end;

ข้อมูลนำเข้าแบบที่ 3 สำหรับใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับการแปลงปัญหา

เราใช้ปัญหาจากข้อมูลแบบที่ 1 และแทนค่า $x_{ij} = -x_{ij}^{'} + 1$

data;

param M: = 5; //จำนวนคน

param N: = 10; //จำนวนงาน

param C: = [1,1] -13, [1,2] -31, [1,3] -58, [1,4] -17, [1,5] -83,
[1,6] -67, [1,7] -13, [1,8] -5, [1,9] -4, [1,10] -49,
[2,1] -93, [2,2] -7, [2,3] -35, [2,4] -54, [2,5] -56,
[2,6] -18, [2,7] -98, [2,8] -95, [2,9] -79, [2,10] -45,
[3,1] -56, [3,2] -64, [3,3] -13, [3,4] -91, [3,5] -49,
[3,6] -53, [3,7] -2, [3,8] -97, [3,9] -85, [3,10] -23,
[4,1] -56, [4,2] -49, [4,3] -6, [4,4] -45, [4,5] -96,
[4,6] -48, [4,7] -8, [4,8] -1, [4,9] -58, [4,10] -40,
[5,1] -25, [5,2] -45, [5,3] -54, [5,4] -11, [5,5] -77,
[5,6] -29, [5,7] -8, [5,8] -45, [5,9] -79, [5,10] -90;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $c_{11}, c_{12,}, \ldots, c_{5\,10}$ ตามลำดับ

param A: = [1,1] -23, [1,2] -31, [1,3] -45, [1,4] -40, [1,5] -28,
[1,6] -29, [1,7] -14, [1,8] -38, [1,9] -4, [1,10] -13,
[2,1] -43, [2,2] -13, [2,3] -11, [2,4] -10, [2,5] -6,
[2,6] -9, [2,7] -37, [2,8] -32, [2,9] -28, [2,10] -32,
[3,1] -43, [3,2] -44, [3,3] -4, [3,4] -26, [3,5] -12,
[3,6] -1, [3,7] -22, [3,8] -10, [3,9] -46, [3,10] -30,
[4,1] -1, [4,2] -16, [4,3] -33, [4,4] -26, [4,5] -25,
[4,6] -36, [4,7] -13, [4,8] -50, [4,9] -38, [4,10] -23,
[5,1] -46, [5,2] -36, [5,3] -49, [5,4] -3, [5,5] -46,

[5,6] -50, [5,7] -34, [5,8] -37, [5,9] -16, [5,10] -13;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ตามลำดับ

param b: = 1 -106, 2 -89, 3 -96, 4 -105, 5 -132, 6 -4, 7 -4, 8 -4, 9 -4, 10 -4;

//ค่าคงที่ทางขวามือ $b_1, b_2, ..., b_{10}$ ตามลำดับ

param sum_c: = 2323;

//ค่าผลรวมของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

param bound: = 1;

//ค่าขอบเขตบนของปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป

end;

ข้อมูลนำเข้าแบบที่ 4 สำหรับใช้กับวิธีขยายและจำกัดเขตพร้อมกับอสมการสมเหตุสมผล และการแปลงปัญหา

เราใช้ปัญหาจากข้อมูลแบบที่ 1 โดยเพิ่มอสมการสมเหตุสมผลจากหัวข้อ 3.2 และ แทนค่า $x_{ij} = -x_{ij}^{'} + 1$

data;

param M: = 5; //จำนวนคน

param N: = 10; //จำนวนงาน

param C: = [1,1] -13, [1,2] -31, [1,3] -58, [1,4] -17, [1,5] -83,
[1,6] -67, [1,7] -13, [1,8] -5, [1,9] -4, [1,10] -49,
[2,1] -93, [2,2] -7, [2,3] -35, [2,4] -54, [2,5] -56,
[2,6] -18, [2,7] -98, [2,8] -95, [2,9] -79, [2,10] -45,
[3,1] -56, [3,2] -64, [3,3] -13, [3,4] -91, [3,5] -49,
[3,6] -53, [3,7] -2, [3,8] -97, [3,9] -85, [3,10] -23,
[4,1] -56, [4,2] -49, [4,3] -6, [4,4] -45, [4,5] -96,
[4,6] -48, [4,7] -8, [4,8] -1, [4,9] -58, [4,10] -40,
[5,1] -25, [5,2] -45, [5,3] -54, [5,4] -11, [5,5] -77,
[5,6] -29, [5,7] -8, [5,8] -45, [5,9] -79, [5,10] -90;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $c_{11}, c_{12,}, \ldots, c_{5\,10}$ ตามลำดับ

param A: = [1,1] -23, [1,2] -31, [1,3] -45, [1,4] -40, [1,5] -28,
[1,6] -29, [1,7] -14, [1,8] -38, [1,9] -4, [1,10] -13,
[2,1] -43, [2,2] -13, [2,3] -11, [2,4] -10, [2,5] -6,
[2,6] -9, [2,7] -37, [2,8] -32, [2,9] -28, [2,10] -32,
[3,1] -43, [3,2] -44, [3,3] -4, [3,4] -26, [3,5] -12,
[3,6] -1, [3,7] -22, [3,8] -10, [3,9] -46, [3,10] -30,
[4,1] -1, [4,2] -16, [4,3] -33, [4,4] -26, [4,5] -25,

[4,6] -36, [4,7] -13, [4,8] -50, [4,9] -38, [4,10] -23,

[5,1] -46, [5,2] -36, [5,3] -49, [5,4] -3, [5,5] -46,

[5,6] -50, [5,7] -34, [5,8] -37, [5,9] -16, [5,10] -13;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ตามลำดับ

param b: = 1 -106, 2 -89, 3 -96, 4 -105, 5 -132, 6 -4, 7 -4, 8 -4, 9 -4, 10 -4;

//ค่าคงที่ทางขวามือ $b_1, b_2, ..., b_{10}$ ตามลำดับ

param A_strong1: = [1,1] -23, [1,2] -31, [1,3] 0, [1,4] 0, [1,5] -28,

[1,6] -29, [1,7] -14, [1,8] -38, [1,9] -4, [1,10] -13,

[2,1] -2, [2,2] -10, [2,3] 0, [2,4] 0, [2,5] -7,

[2,6] -8, [2,7] 0, [2,8] -17, [2,9] 0, [2,10] 0,

[3,1] -2, [3,2] -10, [3,3] 0, [3,4] 0, [3,5] -7,

[3,6] -8, [3,7] 0, [3,8] -17, [3,9] 0, [3,10] 0,

[4,1] -2, [4,2] -10, [4,3] 0, [4,4] 0, [4,5] -7,

[4,6] -8, [4,7] 0, [4,8] -17, [4,9] 0, [4,10] 0,

[5,1] -2, [5,2] -10, [5,3] 0, [5,4] 0, [5,5] -7,

[5,6] -8, [5,7] 0, [5,8] -17, [5,9] 0, [5,10] 0;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 1 ตามลำดับ

param b_strong1: = -197;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 1

param A_strong2: = [1,1] 0, [1,2] -4, [1,3] -2, [1,4] -1, [1,5] 0,

[1,6] 0, [1,7] 0, [1,8] -23, [1,9] -19, [1,10] -23,

[2,1] 0, [2,2] -13, [2,3] -11, [2,4] -10, [2,5] -6,

[2,6] -9, [2,7] 0, [2,8] -32, [2,9] -28, [2,10] -32,

[3,1] 0, [3,2] -4, [3,3] -2, [3,4] -1, [3,5] 0,

[3,6] 0, [3,7] 0, [3,8] -23, [3,9] -19, [3,10] -23,

[4,1] 0, [4,2] -4, [4,3] -2, [4,4] -1, [4,5] 0,
[4,6] 0, [4,7] 0, [4,8] -23, [4,9] -19, [4,10] -23,
[5,1] 0, [5,2] -4, [5,3] -2, [5,4] -1, [5,5] 0,
[5,6] 0, [5,7] 0, [5,8] -23, [5,9] -19, [5,10] -23;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 2 ตามลำดับ

param b_strong2: = -297;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 2

param A_strong3: = [1,1] -37, [1,2] 0, [1,3] 0, [1,4] -20, [1,5] -6,
[1,6] 0, [1,7] -16, [1,8] -4, [1,9] 0, [1,10] -24,
[2,1] -37, [2,2] 0, [2,3] 0, [2,4] -20, [2,5] -6,
[2,6] 0, [2,7] -16, [2,8] -4, [2,9] 0, [2,10] -24,
[3,1] -43, [3,2] 0, [3,3] -4, [3,4] -26, [3,5] -12,
[3,6] -1, [3,7] -22, [3,8] -10, [3,9] 0, [3,10] -30,
[4,1] -37, [4,2] 0, [4,3] 0, [4,4] -20, [4,5] -6,
[4,6] 0, [4,7] -16, [4,8] -4, [4,9] 0, [4,10] -24,
[5,1] -37, [5,2] 0, [5,3] 0, [5,4] -20, [5,5] -6,
[5,6] 0, [5,7] -16, [5,8] -4, [5,9] 0, [5,10] -24;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 3 ตามลำดับ

param b_strong3: = -434;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 3

param A_strong4: = [1,1] 0, [1,2] 0, [1,3] -16, [1,4] -9, [1,5] -8,
[1,6] -19, [1,7] 0, [1,8] 0, [1,9] 0, [1,10] -6,
[2,1] 0, [2,2] 0, [2,3] -16, [2,4] -9, [2,5] -8,
[2,6] -19, [2,7] 0, [2,8] 0, [2,9] 0, [2,10] -6,
[3,1] 0, [3,2] 0, [3,3] -16, [3,4] -9, [3,5] -8,

[3,6] -19, [3,7] 0, [3,8] 0, [3,9] 0, [3,10] -6,
[4,1] -1, [4,2] -16, [4,3] -33, [4,4] -26, [4,5] -25,
[4,6] -36, [4,7] -13, [4,8] 0, [4,9] 0, [4,10] -23,
[5,1] 0, [5,2] 0, [5,3] -16, [5,4] -9, [5,5] -8,
[5,6] -19, [5,7] 0, [5,8] 0, [5,9] 0, [5,10] -6;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 4 ตามลำดับ

param b_strong4: = -249;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 4

param A_strong5: = [1,1] -13, [1,2] -3, [1,3] 0, [1,4] 0, [1,5] -13,
[1,6] 0, [1,7] -1, [1,8] -4, [1,9] 0, [1,10] 0,
[2,1] -13, [2,2] -3, [2,3] 0, [2,4] 0, [2,5] -13,
[2,6] 0, [2,7] -1, [2,8] -4, [2,9] 0, [2,10] 0,
[3,1] -13, [3,2] -3, [3,3] 0, [3,4] 0, [3,5] -13,
[3,6] 0, [3,7] -1, [3,8] -4, [3,9] 0, [3,10] 0,
[4,1] -13, [4,2] -3, [4,3] 0, [4,4] 0, [4,5] -13,
[4,6] 0, [4,7] -1, [4,8] -4, [4,9] 0, [4,10] 0,
[5,1] -46, [5,2] -36, [5,3] 0, [5,4] -3, [5,5] -46,
[5,6] 0, [5,7] -34, [5,8] -37, [5,9] -16, [5,10] -13;

//ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{5\,10}$ ของอสมการสมเหตุสมผล 5 ตามลำดับ

param b_strong5: = -169;

//ค่าคงที่ทางขวามือของอสมการสมเหตุสมผล 5

param sum_c: = 2323;

//ค่าผลรวมของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

param bound: = 1;

//ค่าขอบเขตบนของปัญหาการกำหนดงานนัยทั่วไป

end;

ข้อมูลนำเข้าทั้ง 4 แบบ เป็นรูปแบบที่ใช้สำหรับโปรแกรม GLPK เพื่อใช้วัดจำนวนรอบการคำนวณของแต่ละแบบเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีขยายและจำกัดเขต

GLPK (GNU Linear Programming Kit)

GLPK คือกลุ่มของชุดคำสั่งภาษาซีที่บรรจุไว้ในไฟล์คลังโปรแกรม ซึ่งผู้ใช้สามารถเรียกใช้ได้ ชุดคำสั่งดังกล่าวสร้างขึ้นมาเพื่อวัตถุประสงค์ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น ปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม และปัญหาอื่นๆ ที่เกี่ยวกับปัญหากำหนดการเชิงเส้น

สำหรับซอฟต์แวร์ GLPK ดาวน์โหลดได้จากเวบไซต์

http: //www.gnu.org/directory/glpk.html

สำหรับการติดตั้ง ตัวอย่างและคำอธิบายชุดคำสั่ง GLPK สามารถอ่านได้จากคู่มือการติดตั้งซึ่งดาวน์โหลดได้จากเวบไซต์ http: //ftp.gnu.org/gnu/glpk

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ-นามสกุล : นางสาวสายฝน เทียมแก้ว

วัน-เดือน-ปีเกิด : 13 กรกฎาคม พ.ศ.2522

ภูมิลำเนา : ต.เขาทราย อ.ทับคล้อ จ.พิจิตร

สำเร็จการศึกษา : วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ปี 2543

ทุนการศึกษา : มูลนิธิเพื่อการศึกษาคอมพิวเตอร์และการสื่อสาร