การวิเคราะห์การโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

นาย ธนาวุฒิ เวชญานนท์



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2552

# BUCKLING AND VIBRATION ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES USING KANTOROVICH METHOD

Mr.Thanawut Wetchayanon

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2009

| | |
|---|---|
| หัวข้อวิทยานิพนธ์ | การวิเคราะห์การโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท ด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช |
| โดย | นาย ธนาวุฒิ เวชญานนท์ |
| สาขาวิชา | วิศวกรรมเครื่องกล |
| อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก | รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ |

---

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

เอม เหล่า ............................................ คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

............................................ ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.สุรินทร์ พงศ์ศุภสมิทธิ์)

ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ ............................................ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ)

............................................ กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ธัญญารัตน์ สิงหนาท)

............................................ กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.พิเชษฐ์ พินิจ)

ธนาวุฒิ เวชญานนท์ : การวิเคราะห์การโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช. (BUCKLING AND VIBRATION ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES USING KANTOROVICH METHOD) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : รศ.ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ , 163 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบลามิเนตสมมาตรที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และแบบ angle-ply โดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมากกว่า 1 พจน์ ระเบียบวิธีนี้ใช้หลักการการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ใช้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณของฟังก์ชันในทิศทาง x และ y โดยฟังก์ชันทั้งสองเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ การสมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ทำให้สามารถแก้ปัญหาแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ได้ โดยปัญหาดังกล่าวไม่สามารถแก้ได้โดยการสมมุติค่าฟังก์ชันเพียงพจน์เดียว สมการพลังงานที่ใช้คำนวณจะลดรูปให้อยู่ในรูปปัญหาค่าเจาะจง โดยค่าเจาะจงจากการแก้สมการเป็นค่าภาระการโก่งงอหรือค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง ส่วนเวกเตอร์เจาะจงแทนรูปร่างการโก่งงอหรือรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน จากการศึกษาพบว่าสำหรับแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply ใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเพียง 1 พจน์ก็ให้ผลเฉลยที่ลู่เข้าสู่คำตอบแล้ว แต่สำหรับแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ต้องใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันมากกว่า จึงจะทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าน่าเชื่อถือและลู่เข้าสู่คำตอบมากขึ้น ยิ่งไปกว่านั้นกรณีของแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวแบบ angle-ply จะต้องใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากกว่าในกรณีของแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply นอกจากการศึกษาปัญหาการโก่งงอแล้ว วิทยานิพนธ์นี้ยังได้ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่าง ๆ เมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาอื่น ๆ และผลที่ได้จากระเบียบวิธีริทซ์ ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชถือเป็นวิธีกึ่งวิเคราะห์กึ่งเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพ สามารถนำไปใช้ศึกษาปัญหาทางโครงสร้างอื่น ๆ ได้



ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ธนาวุฒิ เวชญานนท์

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ

ปีการศึกษา 2552

# # 507 02963 21 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: BUCKLING LOAD / VIBRATION / LAMINATED PLATE / KANTOROVICH METHOD

THANAWUT WETCHAYANON : BUCKLING AND VIBRATION ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES USING KANTOROVICH METHOD. THESIS ADVISOR: ASSOC. PROF. PAIROD SINGHATANADGID, Ph.D., 163 pp.

This thesis investigates the behavior of buckling and vibration of symmetrically cross-ply and angle-ply laminated rectangular plates using the multi-term Kantorovich method. The study utilizes the variational principle of total energy minimization. The out-of-plane displacement is assumed in form of a series of a sum of products of the function in x and y directions which are written in form of the infinite power series. With this form of assumed functions, it is possible to solve the problem of plate with angle-ply stacking sequence where the classical single-term extended Kantorovich method is ineffective. The energy formulation is finally reduced to be an eigenvalue problem where the eigenvalue represents either the buckling load or natural frequency of plates, while the eigenvector characterizes the buckling or vibration mode shape. It is found that, for problem of plate with cross-ply stacking sequence, only a single term displacement function is sufficient to obtain a converged solution. However, a higher number of terms in the displacement function are needed for angle-ply plates. Moreover, specimens with angle-ply stacking sequence require a higher number of coefficients compared with the cross-ply stacking sequence. In addition to the buckling problem, this thesis studies the natural frequency and vibration mode shape of composite plates with various aspect ratios and stacking sequences. Compared with solutions from other studies and solutions from the Ritz method, the extended Kantorovich is proven to be a powerful semi-analytical-numerical method which could potentially be used in other structural problems.

| | |
|---|---|
| Department: Mechanical Engineering | Student's signature Thanawut Wetchayanon |
| Field of study: Mechanical Engineering | Advisor's signature Pairod Singhatanadgid |
| Academic year: 2009 | |

# กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่เป็นผู้ให้โอกาส รวมทั้งให้ความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษาในขั้นตอนการดำเนินการจนวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงตามจุดประสงค์ นอกจากนั้นยังเป็นแบบอย่างที่ดีในการทำงานและการดำเนินชีวิต

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.สุรินทร์ พงศ์ศุภสมิทธิ์ ประธานกรรมการ อาจารย์ ดร.ธัญญารัตน์ สิงหนาท และอาจารย์ ดร.พิเชษฐ์ พินิจ กรรมการ ที่กรุณาให้ความอนุเคราะห์ รวมทั้งให้ความรู้ คำแนะนำ และถ่ายทอดประสบการณ์ในการทำงานวิจัยต่อตัวผู้วิจัย ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากขึ้น

ขอบคุณเพื่อน พี่ และน้องนิสิตทั้งระดับปริญญาโทและปริญญาเอกหลายท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือ คำปรึกษา ทำให้ผู้วิจัยรู้สึกถึงมิตรภาพ และความอบอุ่นตลอดเวลาที่ศึกษาอยู่

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา พี่ชายและครอบครัวของผู้วิจัย ที่ได้ให้การเลี้ยงดูทั้งกายและใจ ให้ความรัก ความช่วยเหลือ ให้การสนับสนุนในทุก ๆ ด้าน และเป็นกำลังใจแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอดจนสามารถทำวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จ อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดา มารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

# สารบัญ

หน้า

หน้า

# สารบัญตาราง



ตาราง หน้า

ตาราง หน้า

# สารบัญภาพ

รูปประกอบ หน้า

## คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | คือ | ความยาวของโครงสร้างแผ่นบางในทิศทางแกน $x$ |
| $A_{ij}$ | คือ | Laminate extensional stiffness |
| $\{AA\}_i$ | คือ | สัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของ $\xi$ ในพิกัดไร้มิติ |
| $b$ | คือ | ความยาวของโครงสร้างแผ่นบางในทิศทางแกน $y$ |
| $B_{ij}$ | คือ | Laminate coupling stiffness |
| $\{BB\}_i$ | คือ | สัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของ $\eta$ ในพิกัดไร้มิติ |
| $D_{ij}$ | คือ | Laminate bending stiffness |
| $E$ | คือ | ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น |
| $G$ | คือ | ค่าโมดูลัสเฉือน |
| $h$ | คือ | ความหนาของแผ่นคอมโพสิทบาง |
| $\kappa_x$ | คือ | ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $x-z$ |
| $\kappa_y$ | คือ | ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $y-z$ |
| $\kappa_{xy}$ | คือ | ค่าความโค้งบิดของการโก่งตัวนอกระนาบของระนาบกึ่งกลาง |
| $M_x$ | คือ | โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน $x$ |
| $M_y$ | คือ | โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน $y$ |
| $M_{xy}$ | คือ | โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นเฉือนบนระนาบ $x-y$ |
| $m$ | คือ | จำนวนคลื่นรูปซานย์ครึ่งลูกของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ |
| $N$ | คือ | จำนวนพจน์ที่ใช้ในค่าฟังก์ชันเริ่มต้น |
| $N_x$ | คือ | แรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน $x$ |
| $N_y$ | คือ | แรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน $y$ |
| $N_{xy}$ | คือ | แรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นเฉือนบนระนาบ $x-y$ |
| $N_x^{cr}$ | คือ | ค่าภาระการโก่งงอ |
| $n$ | คือ | จำนวนคลื่นรูปซานย์ครึ่งลูกของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ |
| $Q_x$ | คือ | แรงเฉือนในแนวดิ่งตลอดความยาวของขอบที่ยึดในแนวแกน $x$ |
| $Q_y$ | คือ | แรงเฉือนในแนวดิ่งตลอดความยาวของขอบที่ยึดในแนวแกน $y$ |
| $\left[\overline{Q}\right]$ | คือ | Transformed reduced stiffness matrix |
| $R$ | คือ | สัดส่วนของชิ้นงาน ( $a/b$ ) |

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | คือ | ความหนาของแผ่นลามินา |
| $T$ | คือ | พลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของแผ่น |
| $u$ | คือ | การเคลื่อนที่ในแนวแกน $x$ |
| $u^0$ | คือ | การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ $x$ |
| $U$ | คือ | พลังงานความเครียด |
| $v$ | คือ | การเคลื่อนที่ในแนวแกน $y$ |
| $v^0$ | คือ | การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ $y$ |
| $V$ | คือ | พลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงในแนวระนาบ |
| $w$ | คือ | การเคลื่อนที่ในแนวแกน $z$ |
| $w^0$ | คือ | การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ $z$ |
| $w(x,y)$ | คือ | ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ |
| $w(x,y,t)$ | คือ | ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบแสดงในรูปฟังก์ชันของเวลา |
| $X_i(x)$ | คือ | ฟังก์ชันของ $x$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ |
| $X_i(\xi)$ | คือ | ฟังก์ชันของ $\xi$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $\xi=0$ และ $\xi=1$ |
| $Y_i(y)$ | คือ | ฟังก์ชันของ $y$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$ |
| $Y_i(\eta)$ | คือ | ฟังก์ชันของ $\eta$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $\eta=0$ และ $\eta=1$ |
| $\Pi$ | คือ | พลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นบนแผ่นบาง |
| $\varepsilon_x$ | คือ | ความเครียดตั้งฉากในทิศ $x$ |
| $\varepsilon_y$ | คือ | ความเครียดตั้งฉากในทิศ $y$ |
| $\varepsilon_z$ | คือ | ความเครียดตั้งฉากในทิศ $z$ |
| $\gamma_{xy}$ | คือ | ความเครียดเฉือนบนระนาบ $x-y$ |
| $\gamma_{xz}$ | คือ | ความเครียดเฉือนบนระนาบ $x-z$ |
| $\gamma_{yz}$ | คือ | ความเครียดเฉือนบนระนาบ $y-z$ |
| $\sigma_x$ | คือ | ความเค้นในแนวแกน $x$ |
| $\sigma_y$ | คือ | ความเค้นในแนวแกน $y$ |
| $\sigma_z$ | คือ | ความเค้นในแนวแกน $z$ |
| $\tau_{xy}$ | คือ | ความเค้นเฉือนบนระนาบ $x-y$ |
| $\tau_{xz}$ | คือ | ความเค้นเฉือนบนระนาบ $x-z$ |
| $\tau_{yz}$ | คือ | ความเค้นเฉือนบนระนาบ $y-z$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\theta$ | คือ | มุมการวางตัวของเส้นใยในแผ่นคอมโพสิทเทียบกันแกน $x$ |
| $\upsilon$ | คือ | ค่าอัตราส่วนปัวร์ซอง |
| $\rho$ | คือ | ความหนาแน่นของแผ่น (มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร) |
| $\rho_0$ | คือ | มวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\rho h$ |
| $\beta$ | คือ | ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางในรูปไร้หน่วย |
| $\lambda$ | คือ | ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางในรูปไร้หน่วย |
| $\omega$ | คือ | ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบาง (rad/s) |

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

โครงสร้างในงานทางวิศวกรรมในปัจจุบันประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายประเภทที่มีความซับซ้อน ชิ้นส่วนประเภทหนึ่งที่เป็นชิ้นส่วนพื้นฐานในงานทางวิศวกรรมโครงสร้างคือ โครงสร้างแผ่นบาง (Thin Plates) ความเสียหายของโครงสร้างอาจเกิดจากความเค้น (stress) ที่ชิ้นส่วนได้รับมีค่าสูงกว่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุส่งผลให้ชิ้นส่วนแตกหักหรือฉีกขาด ความเสียหายของโครงสร้างอีกประเภทหนึ่งคือ ความเสียหายเนื่องจากโครงสร้างไม่สามารถอยู่ในสภาวะเสถียร (stability) ทำให้ชิ้นส่วนเกิดการโก่งงอ (buckling) โดยภาระที่ทำให้เกิดการโก่งงอเรียกว่าค่าภาระการโก่งงอ (Buckling Load) หรือภาระวิกฤต (Critical Load) และรูปร่างของโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงจากสภาวะเสถียรไปสู่เสถียรภาพอีกสถานะหนึ่งด้วยค่าภาระการโก่งงอเรียกว่ารูปร่างการโก่งงอ (Buckling Mode)

นอกจากความเสียหายของชิ้นส่วนจากการโก่งงอแล้วอีกปัญหาหนึ่งที่ผู้ออกแบบต้องคำนึงถึงในการออกแบบคือ การสั่นสะเทือนของโครงสร้าง โครงสร้างทางวิศวกรรมจัดเป็นระบบทางกลประเภทหนึ่งที่มีการตอบสนองต่อการสั่นสะเทือน ซึ่งความถี่ที่ทำให้เกิดการสั่นสะเทือนอย่างอิสระของโครงสร้างเรียกว่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) และรูปร่างของโครงสร้างที่เกิดขึ้นจากความถี่ธรรมชาตินี้เรียกว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน (Mode Shape)

เนื่องด้วยโครงสร้างทางวิศวกรรมประกอบด้วยชิ้นจำนวนมากและมีความซับซ้อนดังที่กล่าวไว้ข้างต้น วิศวกรโครงสร้างจึงให้ความสำคัญต่อน้ำหนักของโครงสร้างโดยรวมกล่าวคือต้องการชิ้นส่วนที่มีน้ำหนักเบาแต่ยังคงคุณสมบัติทางกลที่เหมาะสมตามที่ออกแบบไว้ด้วย วัสดุที่ตอบสนองต่อความต้องการนี้และเริ่มนำมาใช้กันมากขึ้นในปัจจุบันคือวัสดุคอมโพสิท (Composite Material)

จากเหตุผลต่าง ๆ ที่กล่าวมาจึงมีการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทอย่างแพร่หลายในหลายปีที่ผ่านมา โดยการหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางที่ทำจากวัสดุคอมโพสิทอาจทำได้โดยวิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method) วิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) และวิธีการทดลอง (Experimental Method) โดยแต่ละวิธีนั้นมีข้อได้เปรียบและข้อจำกัดที่แตกต่างกันไป วิธีการวิเคราะห์มีข้อดีที่สามารถหาค่า

ภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติในรูปผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ที่เป็น closed form ได้ โดยชิ้นงานนั้นต้องเป็นแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร (symmetric) ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90°(cross-ply) ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่าย (simple support, S) ทั้งสี่ด้านดังเอกสารอ้างอิง [1,2] แต่ถ้าชิ้นงานมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่น (clamped support, C) หรือแบบปลายอิสระ (free edge, F) ร่วมอยู่ด้วยหรือมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ (angle-ply) ก็จะไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติจากวิธีวิเคราะห์โดยตรงได้ สำหรับข้อดีของวิธีการทดลองคือสามารถหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานจริงที่มีความไม่สมบูรณ์ของชิ้นงานและความไม่สมบูรณ์ของเงื่อนไขขอบเขตได้ แต่มีข้อด้อยคือต้องเสียค่าใช้จ่ายค่อนข้างสูงและเสียเวลาในการเตรียมการทดลอง อีกทั้งถ้าต้องการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่มีขนาดใหญ่หรือเล็กมาก ๆ จะทำได้ยาก ส่วนวิธีการเชิงตัวเลขเป็นวิธีที่ได้รับการยอมรับและใช้อย่างกว้างขวางในปัจจุบัน ข้อได้เปรียบของวิธีการนี้คือสามารถหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างที่ไม่มีผลเฉลยแม่นตรงได้ แต่มีข้อเสียเปรียบคือยังไม่สามารถจำลองพฤติกรรมของชิ้นงานได้อย่างสมบูรณ์ และในบางระเบียบวิธียังมีข้อจำกัดในการหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิท เช่น กรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งเป็นแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ โดยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช (Kantorovich Method) ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ สำหรับตัวอย่างของชิ้นส่วนที่ต้องคำนึงถึงการเสียหายเนื่องจากการโก่งงอ เช่น โครงสร้างคล้ายคานรับแรงในระนาบที่มีลักษณะของการจับยึดแบบ CFCF ซึ่งจะมีภาระกดในแนวระนาบกระทำ หรือกรณีของกล่องบรรจุสินค้าที่มีการวางซ้อนกัน ในกรณีนี้ก็จะมีแรงกดกระทำต่อด้านข้างของกล่องซึ่งมีลักษณะการจับยึดแบบ CCCC ส่วนลักษณะของชิ้นส่วนที่ต้องคำนึงถึงผลจากการสั่นสะเทือน เช่น ชิ้นส่วนของรถยนต์เนื่องจากได้รับผลจากการสั่นของเครื่องยนต์ หรือกรณีชิ้นงานที่มีลักษณะการจับยึดแบบ Cantilever beam คือมีการจับยึดแบบ CCCF เช่น แผงของแผ่นโซล่าเซลล์ (Solar cell) ที่ยื่นออกนอกอาคารเพื่อรับแสงแดดหรือปีกของเครื่องบินที่ต่อออกจากลำตัวเครื่อง เป็นต้น ซึ่งชิ้นส่วนเหล่านี้ก็ต้องคำนึงถึงผลของลมที่กระทำด้วย

### 1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีวัตถุประสงค์หลักสองประเด็นคือ ก) ศึกษาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท และ ข) พิจารณาถึงข้อได้เปรียบ ข้อด้อย ข้อจำกัด และข้อแนะนำในการใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ไขปัญหาอื่น ๆ ประเด็นแรกที่เกี่ยวกับการศึกษาพฤติกรรมของแผ่นคอมโพสิทสามารถแบ่งหัวข้อตามลักษณะของปัญหาที่ต้องการศึกษาดังนี้

1. ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิท

ศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิท โดยเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในอดีต

2. ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท แบ่งหัวข้อย่อยในการศึกษาดังนี้

2.1 ศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นที่เพิ่มขึ้นว่ามีผลต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทอย่างไร

2.2 ศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ใช้ในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้า

2.3 ศึกษาผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ

2.4 ศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิทต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

### 1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้มีขอบเขตโดยสังเขปคือ ศึกษาการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคอมโพสิทแผ่นบางโดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช รวมถึงศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของแต่ละฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสำหรับปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยจะพิจารณาแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน (aspect ratio) ที่ศึกษามีทั้งหมดเจ็ดขนาดสัดส่วน คือ 0.5 1.0 1.5 2.0 3.0 4.0 และ 5.0 ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลาย ๆ ด้านมีการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระทั้งหมดสิบแบบคือ SSSS, CCCC, CCCF, CSSC, CCSS, SCSC, SCSF, CSCS, SFSF และ SSSF โดยในแต่ละหัวข้อการศึกษาได้ศึกษาแผ่นคอมโพสิทที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและการจับยึดของชิ้นงาน ดังต่อไปนี้

<u>ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิท</u>

<u>หัวข้อที่ 6.1</u> การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาของ Shufrin และคณะ [11]

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.0 ที่การจับยึดชิ้นงานสามแบบคือ SSSS, CCCC และ CSSC

<u>หัวข้อที่ 6.2</u> การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาอื่น ๆ

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.5 สำหรับกรณีการจับยึดชิ้นงานแบบ SSSS และศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.0 สำหรับกรณีการจับยึดชิ้นงานแบบ CCCC, CSCS และ SFSF

<u>ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท</u>

<u>หัวข้อที่ 7.2</u> โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.0 ที่การจับยึดชิ้นงานสามแบบคือ SSSF, SCSF และ SCSC

<u>หัวข้อที่ 7.3</u> ผลของจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.0 ที่การจับยึดชิ้นงานสามแบบคือ CCCC, CCSS และ SCSF

<u>หัวข้อที่ 7.4</u> ผลของจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นต่อการลู่เข้าของค่าเจาะจง

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 0.5, 1.0, 1.5 และ 2.0 ที่กรณีการจับยึดชิ้นงานสี่แบบคือ CCCC, CCSS, SCSF และ SSSS

<u>หัวข้อที่ 7.5.1</u> ผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.0 ที่การจับยึดชิ้นงานสามแบบคือ CCCF, SCSC และ CSSC

<u>หัวข้อที่ 7.5.2</u> ผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 และ 5.0 ที่กรณีการจับยึดชิ้นงานสองแบบคือ CCCC และ CSSC

<u>หัวข้อที่ 7.5.3</u> ผลขององศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

ศึกษาแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.0 ที่การจับยึดชิ้นงานสามแบบคือ CCCF, SCSC และ CSSC

### 1.4 เนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยเนื้อหา 8 บทและภาคผนวก 2 บท โดยมีลำดับเนื้อหาและรายละเอียดดังนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงความสำคัญ ที่มาของปัญหา ขอบเขต และจุดประสงค์ของวิทยานิพนธ์ รวมทั้งเนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับปริทัศน์วรรณกรรม ซึ่งกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อการศึกษาของวิทยานิพนธ์ โดยแบ่งกลุ่มของงานวิจัยเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และส่วนที่สองเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยงานวิจัยที่กล่าวถึงทั้งสองส่วนจะเน้นงานวิจัยที่ทำการศึกษาด้วยวิธีเชิงตัวเลข

บทที่ 3 กล่าวถึงพื้นฐานของวัสดุคอมโพสิท ทฤษฎีพื้นฐานของแผ่นลามิเนตบาง สมมุติฐานของแผ่นคอมโพสิทบาง รวมถึงการวิเคราะห์อิลิเมนต์ของแผ่นบางเพื่อหาสมการครอบคลุม (governing equation) ที่อยู่ในรูป closed form สำหรับการหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทบาง

บทที่ 4 แสดงขั้นตอนการวิเคราะห์การโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรโดยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ทำให้ได้สมการครอบคลุมและสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงขั้นตอนสำหรับการแก้ปัญหาทั้งสองของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยสังเขป

บทที่ 5 กล่าวถึงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น อธิบายลำดับขั้นตอนและสมการที่ใช้ในการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชจากการวิเคราะห์ในบทที่ 4 พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างขั้นตอนการแก้ปัญหาทั้งสอง

บทที่ 6 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ โดยสมมุติให้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับหรือมากกว่า 1 พจน์ เพื่อศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่ต่อค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอเทียบกับผลการศึกษาในอดีต

บทที่ 7 อธิบายรายละเอียดของแผ่นคอมโพสิทบางที่ใช้สำหรับศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือน จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการ

แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ โดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับหรือมากกว่า 1 พจน์ แล้วนำโปรแกรมที่ผ่านการตรวจสอบแล้วไปศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่การวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ ศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ใช้ในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้า ศึกษาผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ของโครงสร้างแผ่นบางต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือน และศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

บทที่ 8 นำเสนอข้อสรุปของวิทยานิพนธ์ ประโยชน์ของวิทยานิพนธ์และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในส่วนสุดท้ายของวิทยานิพนธ์เป็นส่วนของภาคผนวกซึ่งมีสองส่วน ภาคผนวก ก แสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับคำนวณค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอ และค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร ภาคผนวก ข แสดงบทความที่ได้รับการตีพิมพ์ซึ่งมีเนื้อหาเป็นส่วนหนึ่งในวิทยานิพนธ์นี้

# บทที่ 2

# ปริทัศน์วรรณกรรม

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช เนื้อหาโดยรวมเกี่ยวข้องกับสองหัวข้อคือการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อทั้งสองของวิทยานิพนธ์นี้ โดยแบ่งกลุ่มของงานวิจัยเป็นสองกลุ่มคืองานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและงานวิจัยที่เกี่ยวกับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยงานวิจัยในอดีตที่จะกล่าวถึงทั้งสองส่วนจะเน้นการศึกษาด้วยวิธีเชิงตัวเลข

## 2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากอดีตจนถึงปัจจุบันมีการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางอย่างกว้างขวาง การหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางสามารถทำได้โดยวิธีการทดลอง วิธีการวิเคราะห์ หรือวิธีการเชิงตัวเลข ในปี 1988 Iyengar [1] แสดงวิธีการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางโดยวิธีการวิเคราะห์ ซึ่งวิธีนี้มีข้อจำกัดคือชิ้นงานต้องเป็นแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านเท่านั้น จึงจะสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงที่อยู่ในรูป closed form ได้ แต่ถ้ามีการจับยึดแบบยึดแน่นหรือแบบปลายอิสระร่วมอยู่ด้วยหรือมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ จะไม่สามารถหาคำตอบโดยวิธีวิเคราะห์ได้ ต้องใช้วิธีการทดลองหรือเทคนิควิธีการเชิงตัวเลขในการประมาณค่าภาระการโก่งงอ

ในปี 1994 งานวิจัยของ Chai [3] ได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใย (stacking sequence) แบบต่าง ๆ ที่ความหนาของแผ่นแตกต่างกัน ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสามแบบ คือ จับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน (SSSS) จับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน (CCCC) และจับยึดแบบยึดแน่นสองด้านและจับยึดแบบง่ายอีกสองด้าน (CSCS) การศึกษานี้หาค่าภาระการโก่งงอจากวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีริทซ์ (Ritz Method) โดยใช้ฟังก์ชันซายน์ (sine function) เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ (out-of-plane displacement) ใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 144 พจน์ และแบ่งการศึกษาเป็นสองส่วน

คือส่วนแรกศึกษาที่กรณีเงื่อนไขการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านภายใต้ภาระกดในแนวระนาบทั้งแบบแกนเดียว (axial load) และแบบสองแกน (biaxial load) โดยชิ้นงานที่ศึกษาเป็นแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตไม่สมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ (Antisymmetric angle-ply) แตกต่างกันทั้งหมด 18 มุม เริ่มตั้งแต่มุม 0° ถึง 90° โดยเพิ่มมุมทีละ 5° จำนวนชั้นลามินาแตกต่างกันสามแบบ คือ 2 6 และ 20 ชั้น นำค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการศึกษามาเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่หาจากผลเฉลยแม่นตรง พบว่าที่จำนวนชั้นลามินาเท่ากับ 2 ชั้น ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีริทซ์เมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงมีค่าค่อนข้างต่างกัน แต่ที่จำนวนชั้นลามินาเท่ากับ 6 และ 20 ชั้น ค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน ส่วนที่สองเป็นการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านและการจับยึดแบบยึดแน่นสองด้านและจับยึดแบบง่ายอีกสองด้านภายใต้ภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว โดยเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีริทซ์กับผลการศึกษาในอดีตของ Ashton และ Love [4] พบว่า ความแตกต่างของค่าภาระการโก่งงอทั้งสองวิธีอยู่ในช่วง -0.21 ถึง +0.15 เปอร์เซ็นต์

ต่อมาในปี 1999 Tuttle และคณะ [5] นำเสนอผลการศึกษาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยทั้งหมด 4 แบบ คือ $[0]_8$ $[0/90]_{2S}$ $[45]_8$ และ $[\pm 45]_{2S}$ และมีขนาดสัดส่วนแตกต่างกันสามขนาดสัดส่วน คือ 1.0 1.5 และ 2.0 ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน โดยการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางที่ศึกษาด้วยวิธีการทดลองเกิดจากภาระกดในแนวขวางและมีภาระดึงขนาดคงที่ในทิศทางตั้งฉาก ค่าภาระการโก่งงอได้จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างภาระที่กระทำต่อชิ้นงานกับระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบ โหมดการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการทดลองถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีกาเลอคิน (Galerkin Method) พบว่า จากการทดลองทั้งหมด 51 การทดลองมีเพียงกรณีเดียวที่โหมดการโก่งงอของทั้งสองวิธีไม่ตรงกันซึ่งสันนิษฐานว่า อาจเกิดจากความไม่สมบูรณ์ของแผ่นคอมโพสิท ภาระกระทำ หรือเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในการทดลอง และค่าภาระการโก่งงอจากทั้งสองวิธีมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 1.61 เปอร์เซ็นต์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 15.4 เปอร์เซ็นต์

ในปี 2004 Darvizeh และคณะ [6] ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันสองแบบคือ แผ่นคอมโพสิทไม่สมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ และแผ่นคอมโพสิทแบบสมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ (Symmetric angle-ply) โดยหาค่าภาระการโก่งงอจากวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธี Generalized

Differential Quadrature Rule (GDQR) แบ่งการศึกษาออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางแบบไม่สมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ภายใต้ภาระกดในแนวระนาบทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน นำค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการศึกษาเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่หาจากระเบียบวิธีริทซ์และจากผลเฉลยแม่นตรง ผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากทั้งสามวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน ส่วนที่สองหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางแบบสมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ภายใต้ภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว โดยเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการศึกษากับค่าภาระการโก่งงอที่หาจากระเบียบวิธีริทซ์ พบว่า ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้นเป็นแก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางโดยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีต่าง ๆ กัน พบว่าค่าภาระการโก่งงอจากการประมาณค่าของแต่ละวิธีถือว่ามีความน่าเชื่อถือ เพราะเมื่อนำค่าภาระการโก่งงอที่ประมาณค่าได้ไปเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในอดีตพบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน ส่วนการแก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ มีความแตกต่างจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบอื่น ๆ กล่าวคือ ระเบียบวิธีนี้แก้ปัญหาจากสมการครอบคลุมโดยตรง เริ่มจากสมมุติคำตอบของสมการให้อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันของคำตอบนั้น จากนั้นสมมุติให้ทราบฟังก์ชันในทิศใดทิศหนึ่งแล้วใช้หลักการการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด (variational principle minimum total potential energy) ทำให้สมการครอบคลุมที่ได้ลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ซึ่งวิธีการนี้ถือว่าเป็น semi-analytical method โดยปัญหาที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของปัญหาค่าเจาะจง (eigenvalue problem) และการแก้สมการต้องอาศัยการทำซ้ำ (iterative procedure) เพื่อให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้า ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นผลเฉลยแม่นตรง และเนื่องจากในการหาผลเฉลยต้องอาศัยกระบวนการการทำซ้ำเพราะฉะนั้นข้อได้เปรียบอีกอย่างหนึ่งสำหรับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชคือ ฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมุติให้ทราบค่าในการคำนวณครั้งแรกไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของชิ้นงาน โดย Kerr [7] เป็นคนแรกที่ประสบความสำเร็จในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสำหรับแก้ปัญหาการดัด (bending) และปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิค (Isotropic) งานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีดังต่อไปนี้

ในปี 1998 Yuan และ Jin [8] ศึกษาการแก้ปัญหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 4 พจน์ โครงสร้างแผ่นบางที่ศึกษามีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิครับภาระในแนวระนาบสองแบบ โดยแบบแรกรับภาระแบบกดทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้งหมดเจ็ดแบบคือ SSSS, SFSS, SCSF, SCSC, SFSF, CCCC และ CCCF และแบบที่สองคือรับภาระแบบภาระเฉือน มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสองแบบคือ SSSS และ CCCC จากนั้นนำผลการศึกษาที่ได้มาเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่หาจากระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite Element Method) ผลการเปรียบเทียบพบว่าสำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่รับภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS, SFSS, SCSF, SCSC และ SFSF ค่าภาระการโก่งงอที่หาได้เมื่อใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ 1 พจน์และ 2 พจน์มีค่าแตกต่างกันสูงสุด 0.0005 เปอร์เซ็นต์ ส่วนเงื่อนไขการจับยึดแบบ CCCC และ CCCF ค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าลู่เข้าใกล้เคียงกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เมื่อจำนวนพจน์ที่ใช้ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชตั้งแต่ 2 พจน์ขึ้นไป ทางด้านโครงสร้างแผ่นบางที่รับภาระในแนวระนาบแบบเฉือนทั้งสองเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดพบว่า ค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าลู่เข้าใกล้เคียงกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เมื่อจำนวนพจน์ที่ใช้ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชตั้งแต่ 3 พจน์ขึ้นไป

ในปี 2006 Ungbhakorn และ Singhatanadgid [9] นำเสนอผลการศึกษาการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตในกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลาย ๆ ด้านมีการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระทั้งหมดเจ็ดแบบคือ SSSF, SCSF, SCSC, CCCC, CCCF, CSSC และ CSCS ด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ ภายใต้ภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว แบ่งการศึกษาออกเป็นสี่ส่วนคือ ส่วนแรกเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชกับวิธี Levy Solution [10] ที่เงื่อนไขการจับยึดแบบ SSSF, SCSF และ SCSC ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานทั้งหมด 10 ขนาด เริ่มตั้งแต่ 0.5 ถึง 5.0 โดยเพิ่มทีละ 0.5 ผลการเปรียบเทียบพบว่า ค่าภาระการโก่งงอจากทั้งสองวิธีมีค่าแตกต่างกันสูงสุด 0.01 เปอร์เซ็นต์ ส่วนที่สองเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชกับระเบียบวิธีริทซ์จากงานวิจัยของ Chai [3] ที่เงื่อนไขการจับยึดแบบ CCCC และ CSCS ผลการเปรียบเทียบพบว่า ค่าภาระการโก่งงอจากทั้ง

สองวิธีมีค่าแตกต่างกันในช่วง 0.55 ถึง 0.60 เปอร์เซ็นต์ ส่วนที่สามศึกษาจำนวนรอบการทำซ้ำในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้า ของเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ ทั้งหมดเจ็ดแบบ พบว่าโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSF, SCSF และ SCSC ต้องการจำนวนรอบการทำซ้ำเพียงรอบเดียว ส่วนเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC, CCCF, CSSC และ CSCS ต้องการจำนวนรอบการทำซ้ำสามรอบ และส่วนที่สี่นำเสนอค่าภาระการโก่งงอของเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF, CSSC และ CSCS ที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานทั้งหมด 10 ขนาด เริ่มตั้งแต่ 0.5 ถึง 5.0 โดยเพิ่มทีละ 0.5 และมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใย 2 แบบคือ $[0]_8$ และ $[0/90]_{2S}$

ในปี 2008 งานวิจัยของ Shufrin และคณะ [11] ได้ศึกษาการแก้ปัญหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับหรือมากกว่า 1 พจน์ แบ่งการศึกษาออกเป็นสามส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางแบบสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC และ CCCF ภายใต้ภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว โดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 2 และ 3 พจน์ เปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้กับผลการศึกษาในอดีตของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [9] พบว่า ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 2 และ 3 พจน์ ของทั้งสองเงื่อนไขมีค่าใกล้เคียงกัน และเมื่อนำค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 พจน์ เปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ พบว่ากรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC มีค่าความแตกต่างอยู่ในช่วง -0.08 ถึง +0.18 เปอร์เซ็นต์และกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF มีค่าความแตกต่างอยู่ในช่วง -0.19 ถึง +0.33 เปอร์เซ็นต์ ส่วนที่สองศึกษาผลของจำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชต่อค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ โดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 8 พจน์ พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสองแบบ คือ การจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านที่การวางตัวของเส้นใยแบบ 30° และการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านที่การวางตัวของเส้นใยแบบ 45° พบว่า ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการใช้จำนวนพจน์เท่ากับ 2 จะมีค่าแตกต่างกับการใช้เพียงพจน์เดียวค่อนข้างมากและมีค่าเริ่มลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธี Finite Strip Method เมื่อนำค่าภาระการโก่งงอของเงื่อนไขการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านมาเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธี Finite Strip Method พบว่าที่การสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ ค่าภาระ

การโก่งงอมีค่าแตกต่างกันถึง 48.672 และ 74.924 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ แต่เมื่อเปรียบเทียบที่การสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 5 พจน์ พบว่า ค่าภาระการโก่งงอมีค่าแตกต่างกันน้อยลงมาก คือ 0.155 และ -0.015 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ ส่วนที่สามเสนอผลการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° และในมุมใด ๆ โดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเท่ากับ 6 พจน์ ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ ทั้งหมด 8 แบบ ภายใต้ภาระกดในแนวระนาบทั้งแบบแกนเดียว แบบสองแกนและแบบเฉือน

## 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางเป็นอีกหัวข้อหนึ่งที่มีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง โดยมีงานวิจัยที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ดังต่อไปนี้

การศึกษาของ Leissa [12] ถือเป็นการศึกษาที่เกี่ยวกับการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางในช่วงต้น ๆ โดย Leissa ศึกษาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิค ภายใต้สมมุติฐานทฤษฎีแผ่นบาง (Thin Plate Theory) โดยรูปร่างของแผ่นบางที่ศึกษา ได้แก่ รูปวงกลม รูปวงรี รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูปสามเหลี่ยม ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบด้านใดด้านหนึ่งหรือหลาย ๆ ด้านมีการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ ทั้งหมด 21 แบบ ในการศึกษาการสั่นสะเทือนของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้จะหาค่าความถี่ธรรมชาติในรูปของผลเฉลยเจาะจง (eigenvalue solution) และรูปร่างการสั่นสะเทือนโดยวิธีการวิเคราะห์สมการครอบคลุมร่วมกับวิธีการเชิงตัวเลขเพื่อลดรูปสมการและขั้นตอนในการคำนวณ นอกจากนี้ยังได้เสนอแนวทางการวิเคราะห์เบื้องต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความซับซ้อนของสมการครอบคลุมเช่น โครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นแอนไอโซโทรปิค โครงสร้างแผ่นบางที่รับภาระในแนวระนาบ และโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาตลอดทั้งแผ่นไม่คงที่

นอกจากการศึกษาของ Leissa ในปี 1969 แล้ว ผลการศึกษาที่สำคัญและถูกใช้อ้างอิงในปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางอยู่บ่อย ๆ คืองานวิจัยของ Gorman [13] งานวิจัยดังกล่าวศึกษาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิค ภายใต้สมมุติฐานทฤษฎีแผ่นบาง โดยนำเสนอผลเฉลยของโครงสร้างที่มีการจับยึดแบบจุด (point support) ด้วยวิธีการวิเคราะห์สมการครอบคลุมโดยใช้หลักการ superposition ผลการวิเคราะห์ได้นำเสนอในรูปผลเฉลยค่าเจาะจง ซึ่งมีจำนวนหลายค่าและแสดงในรูปแบบ

ตารางพร้อมทั้งรูปร่างการสั่นสะเทือนตามเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ที่การจับยึดแบบด้านใดด้านหนึ่งหรือหลาย ๆ ด้านมีการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ ทั้งหมด 21 แบบ เช่นเดียวกับการวิจัยของ Leissa [12] และการจับยึดแบบอื่น ๆ เพิ่มเติมอีก 12 กรณี รวมขอบเขตการจับยึดทั้งหมดจำนวน 33 แบบ

ในปี 2007 Aydogdo และ Timarci [14] ศึกษาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตไม่สมมาตรที่การวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ตั้งแต่ 0° ถึง 90° ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดกรณีที่สองด้านคู่ติดกันจับยึดแบบปลายอิสระ ส่วนด้านที่เหลือผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบปลายอิสระ มีเงื่อนไขขอบเขตที่ศึกษาทั้งหมดหกแบบคือ CCFF, SSFF, FFFF, CSFF, SFFF และ CFFF ในการศึกษานี้หาค่าภาระการโก่งงอจากวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีริทซ์โดยใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 108 พจน์ แบ่งการศึกษาออกเป็นสามส่วนคือ ส่วนแรกหาค่าพารามิเตอร์ความถี่ (frequency parameter) ของแผ่นทดลองที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบอิสระทั้งสี่ด้าน จำนวนชั้นลามินาเท่ากับ 2 และ 10 ชั้น มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta]$ และ $[\theta/-\theta]_5$ ตามลำดับ ที่มุม 0° 15° 30° และ 45° เปรียบเทียบผลที่ได้กับผลการทดลองของ Messina และ Soldatos [15] พบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่มีค่าเท่ากัน ส่วนที่สองศึกษาผลของจำนวนชั้นลามินาที่การวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่โดยศึกษาการสั่นสะเทือนที่โหมดแรกของแผ่นทดลอง จำนวนชั้นลามินาเท่ากับ 4 และ 10 ชั้น มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta]_2$ และ $[\theta/-\theta]_5$ ตามลำดับ โดยเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCFF, SSFF และ FFFF ศึกษาที่มุม 0° 15° 30° และ 45° ส่วนการจับยึดแบบ CSFF, SFFF และ CFFF ศึกษาตั้งแต่มุม 0° ถึง 90° โดยเพิ่มมุมทีละ 15° จากการศึกษาพบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดเกิดขึ้นที่มุม 45° ทุกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดยกเว้นเงื่อนไขการจับยึดแบบ CSFF ซึ่งค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดที่มุม 30° และเงื่อนไขการจับยึดแบบ CFFF จะมีค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดที่มุม 0° โดยการเพิ่มจำนวนชั้นลามินาของทุกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดจะไม่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ที่มุม 0° และ 90° แต่ที่มุมใด ๆ ค่าพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่ามากขึ้นตามจำนวนชั้นที่เพิ่มขึ้น ส่วนที่สามศึกษาค่าพารามิเตอร์ความถี่ของการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ของการสั่นสะเทือนสี่โหมดแรก โดยใช้จำนวนชั้นลามินาเท่ากับ 2 ชั้น การวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta]$ เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดและมุมที่ศึกษาเหมือนกับในส่วนที่สอง จากการศึกษาพบว่าที่โหมดการสั่นสะเทือนสูง ๆ ค่าพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่าสูงสุดที่มุมการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ และที่การสั่นสะเทือนในโหมดที่สี่ ค่าพารามิเตอร์ความถี่มีค่าสูงสุดที่มุม 45° ทุกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ยกเว้นเงื่อนไขการจับยึดแบบ CFFF จะมีค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดที่มุม 15°

สำหรับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถสรุปได้ต่อไปนี้ ปี 1996 Bercin [16] ศึกษาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบออโทรทรอปิก โดยหาค่าเจาะจงด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ ที่เงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน แบ่งการศึกษาออกเป็นสองส่วนคือ ในส่วนแรกศึกษาจำนวนรอบการทำซ้ำในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้าโดยพิจารณาการสั่นสะเทือนที่โหมดแรก พบว่าค่าเจาะจงจะเริ่มลู่เข้าในการทำซ้ำครั้งที่สาม และเมื่อนำค่าเจาะจงที่ลู่เข้าดังกล่าวไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Gorman [16] พบว่า มีความแตกต่างกันเท่ากับ 0.03 เปอร์เซ็นต์ ในส่วนที่สองหาค่าเจาะจงของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเป็น 1.5 และ 2.0 นำผลการศึกษาที่ได้มาเปรียบเทียบผลการทดลองในอดีตของ Gorman [17] และ Marangoni [18] พบว่า ที่ขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1.5 ค่าเจาะจงที่ได้จากการศึกษามีค่าเท่ากับผลการทดลองทั้งสองในอดีต ส่วนที่ขนาดสัดส่วนเท่ากับ 2.0 ค่าเจาะจงที่ได้จากการศึกษามีค่าเท่ากับผลการทดลองของ Marangoni แต่แตกต่างกับผลการทดลองของ Gorman โดยมีความแตกต่างเท่ากับ 0.48 เปอร์เซ็นต์

ในปี 2001 Der-Chen Chang และคณะ [19] ศึกษาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคภายใต้การรับภาระในแนวระนาบ ในการศึกษาจะหาค่าความถี่ธรรมชาติ 6 โหมดแรกด้วยวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสามแบบคือ จับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน (CCCC) จับยึดแบบยึดแน่นสามด้านร่วมกับแบบปลายอิสระอีกหนึ่งด้าน (CCCF) และจับยึดแบบยึดแน่นสองด้านคู่ตรงกันข้ามร่วมกับแบบปลายอิสระอีกสองด้าน (CFCF) นำผลการศึกษาที่ได้มาเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมนาสแทรน (NASTRAN) และผลการศึกษาในอดีตของ Farag และ Pan [20] พบว่า สำหรับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC มีค่าความแตกต่างมากสุดเท่ากับ 1.6 และ 4.6 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ ส่วนในกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF มีค่าความแตกต่างมากสุดเท่ากับ 3.9 และ 8.4 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ กรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CFCF เป็นเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่มีค่าความถี่ธรรมชาติแตกต่างกับผลที่ใช้เปรียบเทียบมากที่สุดคือ มีค่าความแตกต่างมากสุดเท่ากับ 4.5 และ 12.0 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ โดยคณะวิจัยคาดว่าผลกระทบของรูปร่างการสั่นสะเทือนในกรณีที่มีการจับยึดแบบปลายอิสระทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น

จากงานวิจัยที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นว่าการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางด้วยวิธีเชิงตัวเลขสามารถทำได้หลายระเบียบวิธีและผลเฉลยของแต่ละระเบียบวิธีก็มีความคลาดเคลื่อนกับผลการศึกษาในอดีตที่ใช้เปรียบเทียบมากน้อยแตกต่างกันไป ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชซึ่งใช้สำหรับการแก้ปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ ก็เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่สามารถประมาณค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางของปัญหาทั้งสองได้ โดยข้อได้เปรียบของระเบียบวิธีนี้คือผลเฉลยที่ได้ถือเป็นผลเฉลยแม่นตรงเนื่องจากเป็นแก้ปัญหาจากสมการครอบคลุมโดยตรง และในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณครั้งแรกก็ไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ซึ่งเป็นข้อได้เปรียบที่สำคัญเนื่องจากจะช่วยลดความยุ่งยากในการหาฟังก์ชันเริ่มต้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ต้องการศึกษา

จากงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช จะเห็นว่าในส่วนของปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ได้มีผู้ศึกษาโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับหรือมากกว่า 1 พจน์ ซึ่งได้ศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอ ส่วนงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการสั่นสะเทือนมีการศึกษาโดยจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ และคุณสมบัติทางกลของโครงสร้างแผ่นบางที่ศึกษาเป็นวัสดุแบบไอโซโทรปิคและออโทรทรอปิกเท่านั้น ทำให้ยังไม่ทราบถึงพฤติกรรมและข้อจำกัดในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเมื่อใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับและมากกว่า 1 พจน์ ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงเน้นการศึกษาในส่วนของปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทโดยหัวข้อที่ต้องการศึกษา ได้แก่ ศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นในการใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ ศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ใช้ในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา ศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท สำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทจะศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอเท่านั้น โดยเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในอดีต ทั้งนี้เพื่อให้เห็นความชัดเจนในการพิจารณาถึงข้อด้อยและข้อจำกัดของการแก้ปัญหาทั้งสองด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ และเพื่อเป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีนี้ในการแก้ไขปัญหาอื่น ๆ ต่อไป

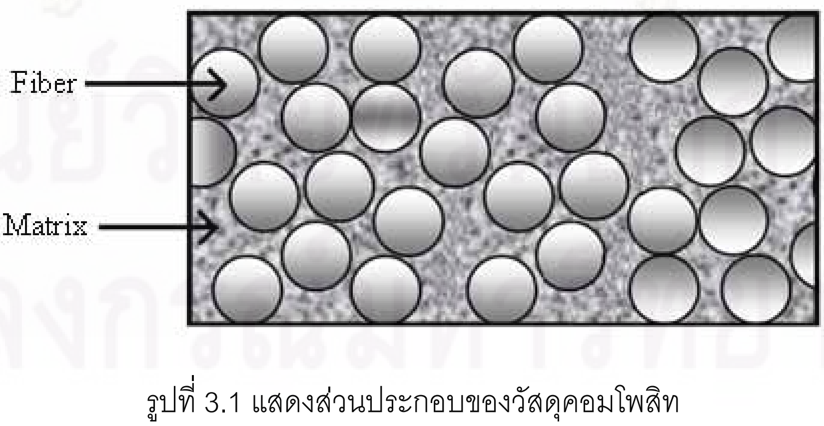
# บทที่ 3

# ทฤษฎีพื้นฐาน

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งเป็นแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ดังนั้นเนื้อหาของบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานของวัสดุคอมโพสิท ทฤษฎีพื้นฐานของแผ่นลามิเนตบาง สมมุติฐานของแผ่นคอมโพสิทบาง รวมถึงการหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยวิธีการวิเคราะห์

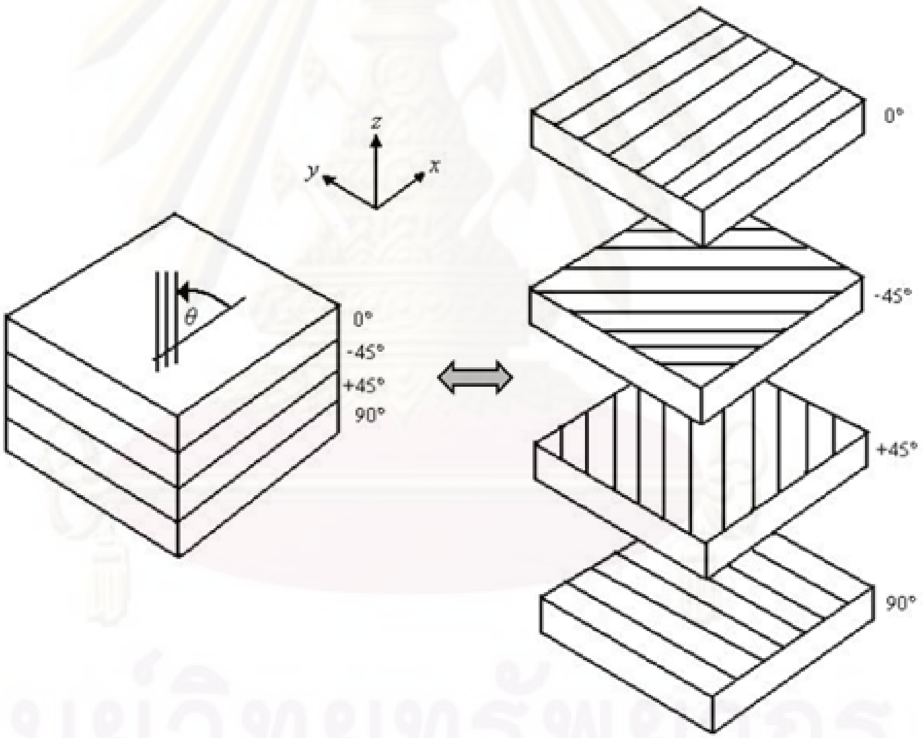
## 3.1 พื้นฐานของวัสดุคอมโพสิท

วัสดุคอมโพสิทเกิดจากการรวมกันของวัสดุตั้งแต่สองชนิดขึ้นไป เพื่อให้ได้วัสดุที่มีคุณสมบัติทางกลดีขึ้น โดยโครงสร้างภายในของวัสดุคอมโพสิทจะประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนของเส้นใย (Fiber) ทำหน้าที่รับภาระจากภายนอกที่มากระทำกับวัสดุคอมโพสิท ตัวอย่างเส้นใยที่เป็นส่วนประกอบของวัสดุคอมโพสิทคือ เส้นใยกราไฟต์ (Graphite Fiber) เส้นใยแก้ว (Glass Fiber) หรือเส้นใยโพลิเมอร์ (Polymer Fiber) เป็นต้น และส่วนที่สองคือ เมตริกซ์ (Matrix) ซึ่งเป็นส่วนที่ประสานเส้นใยให้มีรูปร่างการวางตัวที่แน่นอน ตัวอย่างเมทริกซ์ เช่น อีพอกซี่ (Epoxy) หรือเทอร์โมพลาสติก (Thermoplastics) ชนิดต่าง ๆ รูปที่ 3.1 แสดงภาพตัดขวางของวัสดุคอมโพสิทซึ่งประกอบด้วยส่วนของเส้นใยที่ฝังตัวอยู่ในเมทริกซ์



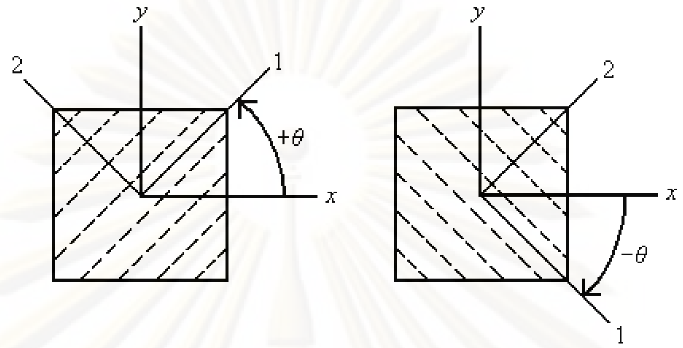

รูปที่ 3.1 แสดงส่วนประกอบของวัสดุคอมโพสิท

นอกจากชนิดของเส้นใยและชนิดของเมตริกซ์แล้ว ยังมีปัจจัยอื่น ๆ อีกหลายอย่างที่มีผลต่อคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิทอาทิเช่น อัตราส่วนผสมระหว่างเส้นใยกับเมตริกซ์ ปริมาณของเส้นใย การกระจายตัวของเส้นใยและการวางตัวของเส้นใย เป็นต้น รูปที่ 3.1 แสดงวัสดุคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยในทิศทางเดียว (unidirectional) ซึ่งในทางปฏิบัติวัสดุคอมโพสิทจะสามารถรับภาระภายนอกที่กระทำในทิศทางเดียวกับทิศทางของเส้นใยได้ดีกว่าภาระที่กระทำในทิศทางอื่น ๆ ดังนั้นเพื่อเพิ่มความแข็งแรงให้กับแผ่นคอมโพสิทจึงนำแผ่นคอมโพสิทมาวางซ้อนกันเป็นชั้น ๆ ซึ่งเรียกว่าลามิเนต (laminate) และในแต่ละชั้นของลามิเนตเรียกว่าลามินา (lamina) หรือพาย (ply) ในรูปที่ 3.2 แสดงการเรียงตัวของลามินาในชั้นต่าง ๆ ของแผ่นคอมโพสิทโดยมีการวางตัวของเส้นใยแบบ [90°/+45°/-45°/0°]




รูปที่ 3.2 การเรียงตัวของลามินาในชั้นต่าง ๆ ซึ่งทำมุม $\theta$ กับแกน $x$

เนื่องจากลามินาแต่ละชั้นมีการวางตัวของเส้นใยในมุมที่แตกต่างกัน ทำให้การคำนวณหาค่าความเค้นและความเครียดที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของโครงสร้างแผ่นบางมีความซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดพิกัดของแผ่นคอมโพสิทให้เป็นพิกัดรวม ดังแสดงในรูปที่ 3.3




รูปที่ 3.3 เครื่องหมายของมุม $\theta$ เมื่อเปลี่ยนพิกัดของแผ่นคอมโพสิทไปเป็นพิกัดรวม

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นลามินาในระบบพิกัดรวมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3-1}$$

โดย $\sigma_i$ คือ ค่าความเค้นของแผ่นลามินาในทิศ $i$

$\varepsilon_i$ คือ ค่าความเครียดของแผ่นลามินาในทิศ $i$

$\left[\overline{Q}_{ij}\right]$ เรียกว่า transformed reduced stiffness matrix

ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\
\overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)
\end{aligned} \tag{3-2}$$

เมื่อ $\theta$ คือ มุมระหว่างการวางตัวเส้นใยในแต่ละชั้นของแผ่นลามินาเทียบกับแกน $x$ ในระบบพิกัดรวม

$Q_{ij}$ เป็นคุณสมบัติของวัสดุซึ่งหาได้จาก

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-v_{12}v_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{v_{12}E_2}{1-v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1-v_{12}v_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-v_{12}v_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \tag{3-3}$$

โดย $E_1$ คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศตามการวางตัวของเส้นใย

$E_2$ คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศตั้งฉากกับการวางตัวของเส้นใย

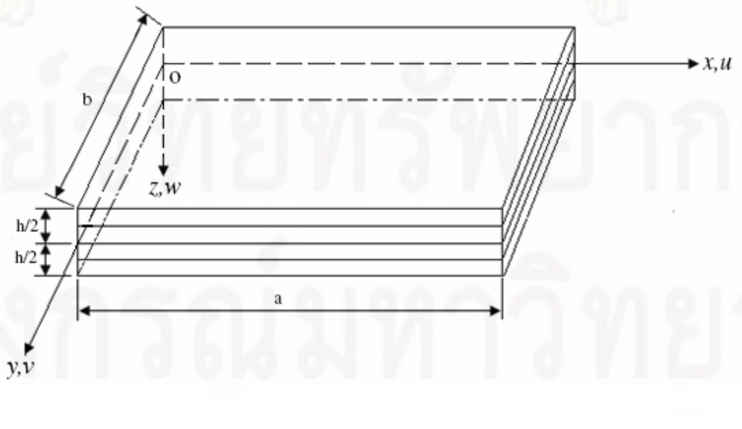
$v_{12}$ และ $v_{21}$ คือ อัตราส่วนปัวร์ซอง

$G_{12}$ คือ ค่าโมดูลัสเฉือน

คุณสมบัติของวัสดุทั้ง 4 ค่านี้ สามารถหาได้จากการทดสอบตามมาตรฐานที่มีอยู่

## 3.2 ทฤษฎีพื้นฐานของแผ่นลามิเนตบาง

แผ่นลามิเนตบางที่ศึกษามีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 3.4 โดยกำหนดให้การเคลื่อนที่ในทิศทาง $x, y$ และ $z$ เท่ากับ $u, v$ และ $w$ ตามลำดับ และมีระนาบ $x-y$ เป็นระนาบในแนวราบที่อยู่กึ่งกลางความหนา $h$ ซึ่งเรียกว่า ระนาบกึ่งกลาง (mid-plane)




รูปที่ 3.4 ระบบพิกัดของแผ่นลามิเนตบาง

สมมุติฐานเบื้องต้นที่ใช้ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของโครงสร้างแผ่นบางที่ทำจากวัสดุคอมโพสิทมีดังต่อไปนี้

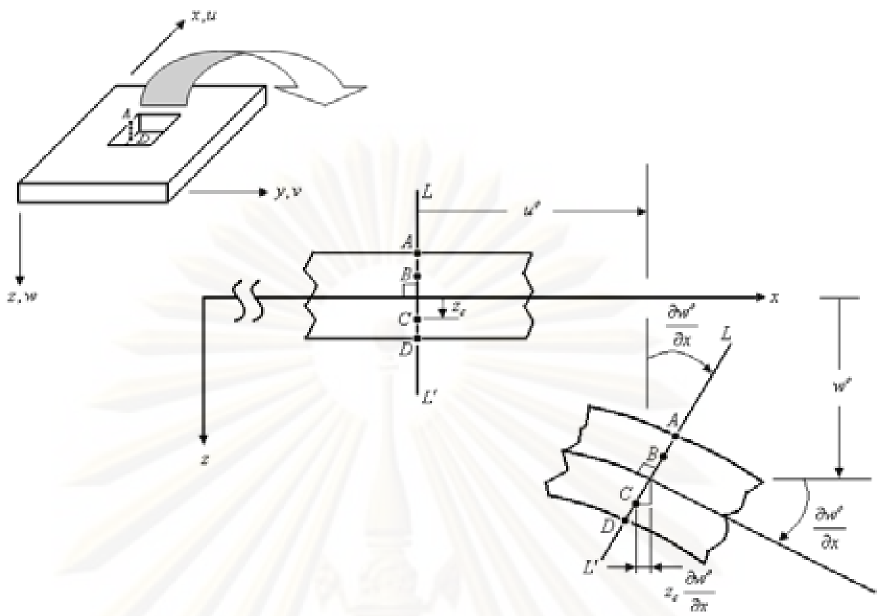
1. แผ่นบางที่ใช้ศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้เป็นแผ่นวัสดุที่เกิดจากการนำวัสดุคอมโพสิทเส้นใยต่อเนื่องทิศทางเดียวมาเรียงกันเป็นชั้น ๆ โดยคุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้นอาจจะเหมือนหรือต่างกันก็ได้
2. สมมุติให้ความหนาของแผ่นลามิเนต $(h)$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวและความกว้างของแผ่นลามิเนต
3. การเคลื่อนที่ของแผ่นลามิเนต ในทิศ $x, y$ และ $z$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $u, v$ และ $w$ ตามลำดับมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนา $h$
4. ความเครียดในระนาบ $x-y$ $\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\right)$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ 1
5. ไม่คำนึงถึงความเครียดเฉือนนอกระนาบ หรือ $\gamma_{xz}$ และ $\gamma_{yz} = 0$
6. ค่าการเคลื่อนที่ในระนาบ $u$ และ $v$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของพิกัด $z$
7. ไม่คำนึงถึงความเครียดในทิศทาง $z$ $(\varepsilon_z = 0)$ นั่นคือความหนาของแผ่นวัสดุไม่เปลี่ยนแปลง
8. วัสดุมีพฤติกรรมตามกฎของฮุค (Hooke's Law)
9. ความหนาของแผ่นลามิเนตมีค่าคงที่ทั้งแผ่น
10. ไม่มีความเค้นเฉือน $\tau_{xz}$ และ $\tau_{yz}$ ที่ระยะ $z = \pm h/2$

เมื่อมีภาระภายนอกมากระทำต่อแผ่นลามิเนต ส่งผลให้แผ่นลามิเนตเปลี่ยนรูปไปจากเดิมตามสมมุติฐานการเปลี่ยนรูปของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff Deformation Hypothesis) กล่าวว่า "เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นนั้นจะยังคงตั้งฉากอยู่แม้ว่าแผ่นนั้นจะเปลี่ยนรูปแล้วก็ตาม" ดังแสดงในรูปที่ 3.5 เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนรูปของแผ่นในระนาบ $x-z$ พบว่าการกระจัดที่จุด $C$ ในทิศ $x$ คือ

$$u = u^o - z_c \sin\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right) \tag{3-4}$$

โดย $\frac{\partial w^0}{\partial x}$ คือ มุมของเส้นตรง $LL'$ ที่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นก่อนและหลังการเปลี่ยนรูปซึ่งมีค่าน้อยมาก ๆ สามารถเขียนได้ว่า

$$\sin\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right) \approx \left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)$$




รูปที่ 3.5 ส่วนตัดของแผ่นลามิเนตบางในระนาบ $x-z$ เมื่อเกิดการเปลี่ยนรูป

ดังนั้นจะได้การกระจัด $u$ ในทิศ $x$ เท่ากับ

$$u = u^o - z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3-5}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนรูปของแผ่นในระนาบ $y-z$ จะได้การกระจัด $v$ ในทิศ $y$ คือ

$$v = v^o - z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3-6}$$

โดย $u^o, v^o$ เป็นการกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ $x$ และ $y$ ตามลำดับ ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด สามารถเขียนได้ในรูป

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3-7a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3-7b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3-7c}$$

เมื่อแทนค่า $u$ และ $v$ จากสมการ (3-5) และ (3-6) ลงในสมการ (3-7) จะได้

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u^o}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v^o}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u^o}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial v^o}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)
\end{aligned} \tag{3-8}$$

จัดรูปสมการ (3-8) ใหม่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^o + z\kappa_x \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^o + z\kappa_y \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^o + z\kappa_{xy}
\end{aligned} \tag{3-9}$$

ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นลามินาที่ชั้น $k$ ในระบบพิกัดรวมได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o + z\kappa_x \\ \varepsilon_y^o + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^o + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k \tag{3-10}$$

เมื่อ $\varepsilon_x^o$ ,$\varepsilon_y^o$ และ $\gamma_{xy}^o$ เป็นค่าของความเครียดที่ระนาบกึ่งกลางซึ่งนิยามว่า

$$\varepsilon_x^o = \frac{\partial u^o}{\partial x} \;,\; \varepsilon_y^o = \frac{\partial v^o}{\partial y} \;,\; \gamma_{xy}^o = \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \tag{3-11}$$

และค่า $\kappa_x$ ,$\kappa_y$ และ $\kappa_{xy}$ เป็นค่าความโค้ง (curvature) ซึ่งมีค่าดังนี้

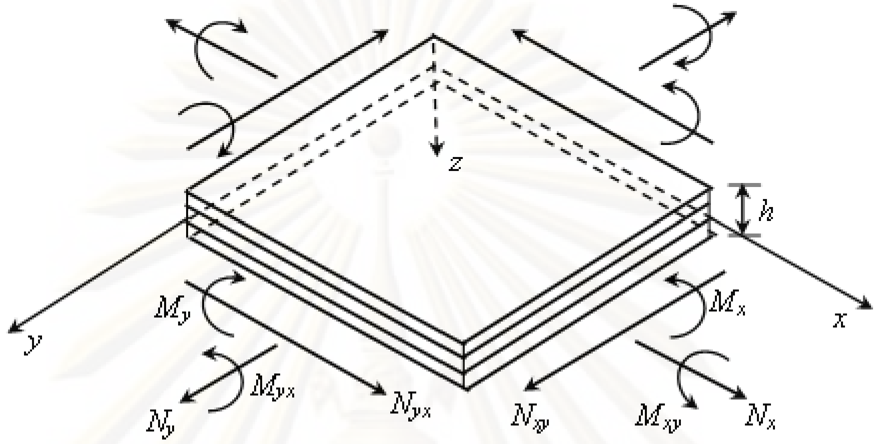
$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \;,\; \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \;,\; \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3-12}$$

โดย ค่า $\kappa_x$ คือ ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $x-z$

ค่า $\kappa_y$ คือ ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $y-z$

ค่า $\kappa_{xy}$ คือ ค่าความโค้งบิดของการโก่งตัวนอกระนาบของระนาบกึ่งกลาง

สามารถหาแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ (force and moment resultant) ที่กระทำต่อแผ่นวัสดุดังแสดงในรูปที่ 3.6 ได้จากการรวมค่าผลของความเค้นและค่าโมเมนต์ของความเค้นที่เกิดขึ้นตลอดความหนาในแต่ละชั้นของแผ่นวัสดุคอมโพสิท ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้




รูปที่ 3.6 แรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำต่อแผ่นลามิเนต

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{3-13a}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} zdz \tag{3-13b}$$

เมื่อ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ = ความเค้น

$N_x, N_y, N_{xy}$ = แรงลัพธ์ที่กระทำต่อหนึ่งหน่วยความยาว (force resultant)

$M_x, M_y, M_{xy}$ = โมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำต่อหนึ่งหน่วยความยาว (moment resultant)

$h$ = ความหนาของแผ่นวัสดุคอมโพสิทบาง

และสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับค่าความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิทในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3-14}$$

โดย $A_{ij}$ คือ Laminate extensional stiffness ซึ่งหาได้จาก

$$A_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k \, dz = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \tag{3-15}$$

$B_{ij}$ คือ Laminate coupling stiffness ซึ่งหาได้จาก

$$B_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k \, zdz = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \tag{3-16}$$

$D_{ij}$ คือ Laminate bending stiffness ซึ่งหาได้จาก

$$D_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k \, z^2 dz = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{3-17}$$

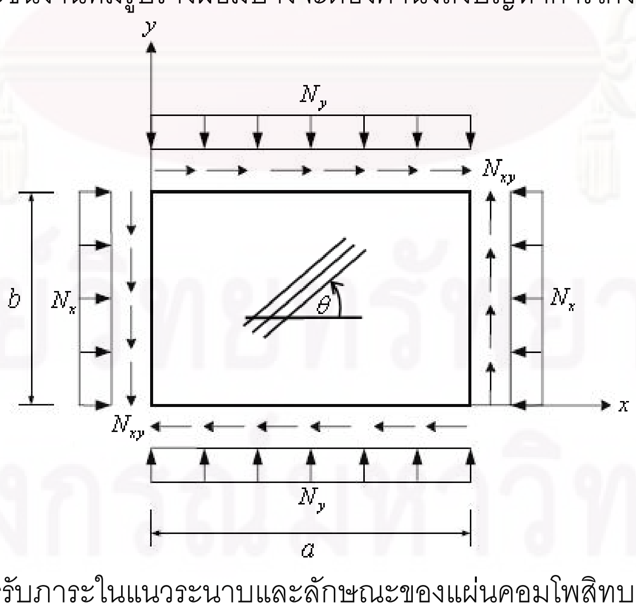
โดย $i, j$ คือ 1, 2 or 6 ซึ่งแสดงถึงตำแหน่งของค่า stiffness ใน laminate stiffness matrix

$N$ คือ จำนวนชั้นของแผ่น

$k$ คือ ตำแหน่งชั้นของลามินา

### 3.3 การหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยวิธีการวิเคราะห์

แผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระในแนวระนาบและมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 3.7 จะเกิดการโก่งงอเมื่อรับภาระกดถึงค่าค่าหนึ่งซึ่งเรียกว่าค่าภาระการโก่งงอ โดยปกติค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าน้อยกว่าค่าภาระที่ทำให้วัสดุเกิดการเสียหายแบบฉีกขาด ดังนั้นในการออกแบบชิ้นงานโดยเฉพาะชิ้นงานที่มีรูปร่างผอมบางจะต้องคำนึงถึงปัญหาการโก่งงอด้วย




รูปที่ 3.7 การรับภาระในแนวระนาบและลักษณะของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

รูปที่ 3.8 แสดงความเค้นลัพธ์ต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วยแรงลัพธ์ โมเมนต์ลัพธ์และแรงเฉือนลัพธ์ที่เกิดขึ้นในแผ่นคอมโพสิท สามารถหาผลรวมของแรงในทิศต่าง ๆ ได้จากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้ผลรวมของแรงในแกน $x$ คือ

$$N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dxdy + N_{xy} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dxdy - N_x dy - N_{xy} dx = 0 \tag{3-18}$$

เขียนให้อยู่ในรูปแบบง่าย ๆ คือ

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{3-19}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ผลรวมของแรงในแกน $y$ ในรูป

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{3-20}$$

และผลรวมของแรงในแกน $z$ คือ

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \tag{3-21}$$

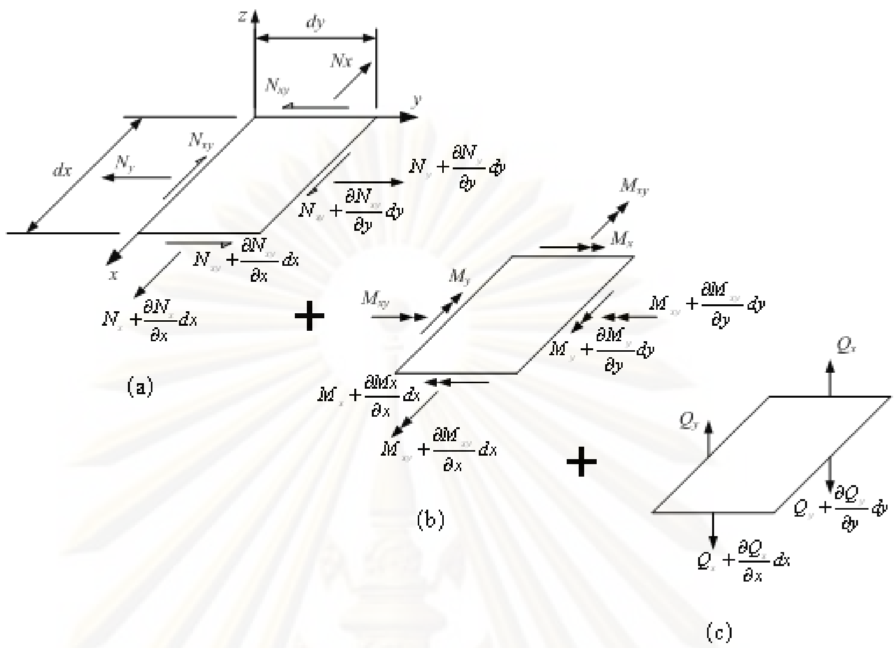
เมื่อพิจารณาผลรวมของโมเมนต์รอบแกน $x$ และ $y$ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \tag{3-22a}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \tag{3-22b}$$

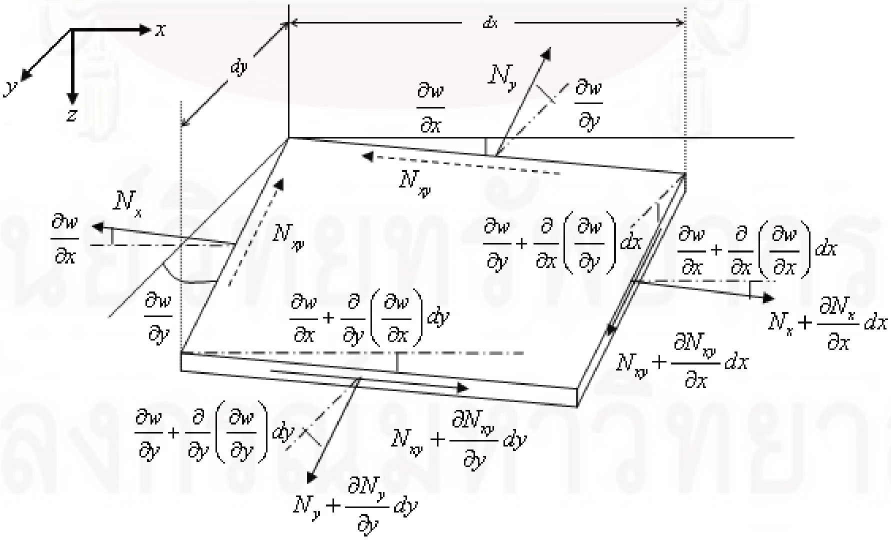
แทนสมการ (3-22) ลงในสมการ (3-21) จะได้

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0 \tag{3-23}$$




รูปที่ 3.8 ความเค้นลัพธ์และภาระภายนอกที่กระทำต่อแผ่นคอมโพสิท

ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางภายใต้ภาระในแนวระนาบ จะต้องพิจารณาอิลิเมนต์ของแผ่นบางในขณะที่มีการโก่งงอในทิศทางนอกระนาบ (out-of–plane position) ซึ่งจะทำให้แรงในระนาบเอียงและมีส่วนประกอบบางส่วนอยู่ในทิศนอกระนาบดังแสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 แรงในแนวระนาบที่กระทำต่ออิลิเมนต์ของโครงสร้างแผ่นบางขณะที่โก่งตัว

จะได้ผลรวมของแรงในแกน $z$ คือ

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{3-24}$$

แทนค่าสมการ (3-22) ลงในสมการ (3-24) จะได้

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{3-25}$$

ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับค่าความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิท สมการ (3-14) ร่วมกับสมการ (3-11) และ (3-12) สามารถเขียนสมการ (3-25) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
&D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}\\
&+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-B_{11}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 u^0}{\partial x\partial y^2}\\
&-B_{26}\frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3}-B_{16}\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2\partial y}-3B_{26}\frac{\partial^3 v^0}{\partial x\partial y^2}\\
&-B_{22}\frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3}=N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{3-26}$$

เมื่อพิจารณาในกรณีของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° (specially orthotropic plate) ที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านภายใต้ภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว $(N_x=-N)$ ค่า $D_{16}$=$D_{26}=0$ เนื่องจากมีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และค่า $B_{ij}=0$ เพราะมีการวางตัวลามิเนตแบบสมมาตร ดังนั้นสมการ (3-26) จะลดรูปเป็น

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3-27}$$

สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดเป็นแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ของการเคลื่อนที่บริเวณที่จับยึดมีลักษณะดังนี้

บนขอบ $x=0$ และ $x=a$ ไม่มีการเคลื่อนที่นอกระนาบและไม่มีโมเมนต์เกิดขึ้น

นั้นคือ $w=0$

และ $$M_x = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

และบนขอบ $y=0$ และ $y=b$ ไม่มีการเคลื่อนที่นอกระนาบและไม่มีโมเมนต์เกิดขึ้น

นั่นคือ $w=0$

และ $$M_y = -D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตนี้ คือ

$$w(x,y) \;=\; w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{3-28}$$

โดย $w_{mn}$ คือ แอมปลิจูดของฟังก์ชัน

$m,n$ คือ เป็นจำนวนคลื่นรูปซายน์ครึ่งลูก (half-sine wave) ของระยะเคลื่อนที่นอกระนาบในแกน $x$ และ $y$ ตามลำดับ (โดย $m,n$ เป็นจำนวนเต็มบวก)

เมื่อแทนค่า $w(x,y)$ จากสมการที่ (3-28) ลงในสมการที่ (3-27) จะได้สมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการโก่งงอ ซึ่งอยู่ในรูปของผลเฉลยแม่นตรงเป็น

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{a^2m^2}\left[\left(D_{11}m^4 + 2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\left(mnR\right)^2 + D_{22}\left(nR\right)^4\right)\right] \tag{3-29}$$

โดย $R$ เป็นสัดส่วนของชิ้นงานสามารถหาได้จาก $R=a/b$

### 3.4 การหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยวิธีการวิเคราะห์

ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบาง สามารถแก้ได้โดยการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอิลิเมนต์ของแผ่นบางในขณะที่มีการสั่นสะเทือน ซึ่งในระหว่างการสั่นสะเทือนจะทำให้เกิดแรงเฉื่อย จากรูปที่ 3.8 เมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันจะได้ผลรวมของแรงในแกน $x$ มีค่าเท่ากับ

$$N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x}dxdy + N_{xy}dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}dxdy - N_x dy - N_{xy}dx = \rho_0 dxdy\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \tag{3-30}$$

เขียนให้อยู่ในรูปแบบง่าย ๆ คือ

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\rho_0\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \tag{3-31}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ผลรวมของแรงในแกน $y$ เท่ากับ

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\rho_0\frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} \tag{3-32}$$

และผลรวมของแรงในแกน $z$ คือ

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3-33}$$

โดย $\rho_0$ คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\rho h$

$\rho$ คือ ความหนาแน่นของแผ่น (มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร)

$h$ คือ ความหนาของแผ่น

$u^0, v^0$ คือ การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ $x$ และ $y$ ตามลำดับ สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนจะเป็นฟังก์ชันของระยะในแกน $x$ ระยะในแกน $y$ และเวลา

$w$ คือ ระยะเคลื่อนที่ในทิศ $z$ และสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนจะเป็นฟังก์ชันของระยะในแกน $x$ ระยะในแกน $y$ และเวลา

โมเมนต์รอบแกน $x$ และ $y$ มีค่าเท่ากับ

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=Q_y \tag{3-34a}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=Q_x \tag{3-34b}$$

แทนสมการ (3-34) ลงในสมการ (3-33) จะได้

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3-35}$$

ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับค่าความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิท สมการ (3-14) ร่วมกับสมการ (3-11) และ (3-12) สามารถเขียนสมการ (3-35) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
&D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}\\
&+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-B_{11}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 u^0}{\partial x\partial y^2}\\
&-B_{26}\frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3}-B_{16}\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2\partial y}-3B_{26}\frac{\partial^3 v^0}{\partial x\partial y^2}\\
&-B_{22}\frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3}+\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,y)
\end{aligned}\qquad (3\text{-}36)$$

ในทำนองเดียวกับปัญหาการโก่งงอเมื่อพิจารณาแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° ที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ค่า $D_{16}=D_{26}=0$ เนื่องจากมีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และค่า $B_{ij}=0$ เพราะมีการวางตัวลามิเนตแบบสมมาตร ดังนั้นสมการ (3-36) จะลดรูปเป็น

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (3\text{-}37)$$

ผลเฉลยของสมการ (3-37) สามารถหาได้โดยวิธีแยกตัวแปร (separation of variable) โดยกำหนด $w(x,y,t)$ อยู่ในรูปฟังก์ชันของตำแหน่งและฟังก์ชันของเวลาดังนี้

$$w(x,y,t)=W(x,y)e^{i\omega t} \qquad (3\text{-}38)$$

แทนสมการ (3-38) ลงในสมการ (3-37) จะได้

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-\rho_0\omega^2 W=0 \qquad (3\text{-}39)$$

และสำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดเป็นแบบง่ายทั้งสี่ด้าน จะมีลักษณะของการเคลื่อนที่บริเวณที่จับยึดดังนี้

บนขอบ $x=0$ และ $x=a$ ไม่มีการเคลื่อนที่นอกระนาบและไม่มีโมเมนต์เกิดขึ้น

ดังนั้น $W(x,y)=0$

และ $M_x = -D_{11}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_{12}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$

และบนขอบ $y = 0$ และ $y = b$ ไม่มีการเคลื่อนที่นอกระนาบและไม่มีโมเมนต์เกิดขึ้น

นั่นคือ $W(x, y) = 0$

และ $M_y = -D_{12}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_{22}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตนี้ คือ

$$W(x, y) = A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{3-40}$$

โดย $A_{mn}$ คือ แอมปลิจูดของการสั่น

$m, n$ คือ เป็นจำนวนคลื่นรูปซายน์ครึ่งลูก (half-sine wave) แสดงรูปร่างโหมดของการสั่นที่เกิดขึ้นในแกน $x$ และ $y$ ตามลำดับ (โดย $m, n$ เป็นจำนวนเต็มบวก)

เมื่อแทนค่า $w(x, y)$ จากสมการ (3-40) ลงในสมการ (3-39) จะได้สมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือน ซึ่งอยู่ในรูปของผลเฉลยแม่นตรงเป็น

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\rho_0 a^4}\left[\left(D_{11}m^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left(mnR\right)^2 + D_{22}\left(nR\right)^4\right)\right] \tag{3-41}$$

โดย $R$ เป็นสัดส่วนของชิ้นงานสามารถหาได้จาก $R = a/b$

$\omega_{mn}$ คือ ค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับโหมด $(m, n)$

สมการ (3-29) และสมการ (3-41) เป็นผลเฉลยแม่นตรงที่อยู่ในรูป closed form สำหรับปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $0^\circ$ หรือ $90^\circ$ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ตามลำดับ แต่สำหรับชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นหรือแบบปลายอิสระร่วมอยู่ด้วยหรือมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ จะไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานในรูปของผลเฉลยแม่นตรงที่อยู่ในรูป closed form ได้ ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาทั้งสอง ซึ่งในบทต่อไปจะแสดงการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรโดยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

# บทที่ 4

# การวิเคราะห์การโก่งงอและการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ในบทที่ 3 พบว่า วิธีการวิเคราะห์สามารถหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางได้จากผลเฉลยแม่นตรงที่อยู่ในรูป closed form โดยมีข้อจำกัดว่าชิ้นงานนั้นต้องเป็นแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านเท่านั้น โดยโครงสร้างแผ่นบางที่ไม่ได้อยู่ในเงื่อนไขดังกล่าวจะไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอในรูปของผลเฉลยแม่นตรงที่อยู่ในรูป closed form ได้ จะต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขในการประมาณค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติรวมถึงรูปร่างการโก่งงอและโหมดการสั่นสะเทือน ดังนั้นในบทนี้จะแสดงวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรโดยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้

## 4.1 การวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่สามารถประมาณค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางได้ ดังแสดงในเอกสารอ้างอิง [8,9,11] ระเบียบวิธีนี้ใช้หลักการการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด ซึ่งทำให้สมการครอบคลุมที่ใช้ในการคำนวณลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ในการคำนวณต้องอาศัยการทำซ้ำเพื่อให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้า พลังงานศักย์รวมที่ใช้กับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางประกอบด้วยพลังงานศักย์ที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุหรือที่เรียกว่าพลังงานความเครียด (Strain energy, $U$) และพลังงานศักย์ที่เกิดเนื่องจากภาระในแนวระนาบ (Potential energy from in-plane loads, $V$) โดยพลังงานศักย์รวมของแผ่นคอมโพสิทบางสามารถหาได้ดังนี้

1. พลังงานความเครียด [21]

สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่รับภาระในแนวระนาบสามารถหาค่าพลังงานความเครียดในรูป

$$U=\frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dxdydz \qquad (4\text{-}1)$$

จากสมมุติฐานเบื้องต้นที่ใช้ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของโครงสร้างแผ่นบาง ในหัวข้อ 3.2 ข้อที่ 5 และ 7 จะได้ $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นลามินาที่ชั้น $k$ สมการ (3-1) สามารถเขียนพลังงานความเครียดใหม่ได้เป็น

$$U = \frac{1}{2}\iiint (\overline{Q}_{11}^{(k)}\varepsilon_x^2 + \overline{Q}_{22}^{(k)}\varepsilon_y^2 + \overline{Q}_{66}^{(k)}\gamma_{xy}^2 + 2\overline{Q}_{12}^{(k)}\varepsilon_x\varepsilon_y + 2\overline{Q}_{16}^{(k)}\varepsilon_x\gamma_{xy} + 2\overline{Q}_{26}^{(k)}\varepsilon_y\gamma_{xy})dxdydz \tag{4-2}$$

เมื่อแทนค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดลงในสมการ (4-2) แล้วอินทิเกรตในทิศ $z$ จะได้

$$\begin{aligned}U = \frac{1}{2}\iint \Bigg\{ & A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(A_{16}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ & + A_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - 2B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2B_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - 2B_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & - 2B_{16}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] - 2B_{26}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] \\ & - 4B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \\ & + 4\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 \Bigg\} dxdy\end{aligned} \tag{4-3}$$

โดย $A_{ij}$ $B_{ij}$ และ $D_{ij}$ นิยามตามสมการ (3-15), (3-16) และ (3-17) ตามลำดับ

2. พลังงานศักย์ที่เกิดเนื่องจากภาระในแนวระนาบ [21]

สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่รับภาระในแนวระนาบสามารถหาค่าพลังงานศักย์ที่เกิดเนื่องจากภาระในแนวระนาบกระทำต่อวัสดุในรูป

$$V = \frac{1}{2}\iint N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy \tag{4-4}$$

สำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร มีค่า $B_{ij} = 0$ นอกจากนี้การเคลื่อนที่ในแนวระนาบ $u, v$ เป็นค่าคงที่ [2] และไม่มีผลกับการหาค่าภาระการโก่งงอ ทำให้พจน์ $A_{ij}$ หายไปด้วย ดังนั้นพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นคือ $\Pi = U + V$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right.$$
$$\left.+4\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dxdy$$
(4-5)

โดย $w$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดจากสมการ (4-5) เมื่อพิจารณาให้โครงสร้างแผ่นบางรับภาระกดในแนวระนาบ สามารถเขียนพลังงานศักย์รวมให้ง่ายขึ้นได้ดังนี้

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[D_{11}w_{,xx}^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}w_{,yy}^2 + 4D_{66}w_{,xy}^2\right.$$
$$\left.+4\left(D_{16}w_{,xx} + D_{26}w_{,yy}\right)w_{,xy}\right]dxdy - \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[N_x w_{,x}^2 + N_y w_{,y}^2 + 2N_{xy}w_{,x}w_{,y}\right]dxdy$$
(4-6)

ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช จะสมมุติให้ผลเฉลยของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x,y)$ อยู่ในรูป [11]

$$w\left(x,y\right) = \sum_{i=1}^{N} X_i\left(x\right)Y_i\left(y\right) = \left\{X\right\}^T\left\{Y\right\} \qquad (4\text{-}7)$$

โดย $w(x,y)$ คือ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ

$N$ คือ จำนวนพจน์

$X_i(x)$ คือ ฟังก์ชันของ $x$ อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$

$Y_i(y)$ คือ ฟังก์ชันของ $y$ อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$

ฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ แสดงลักษณะรูปร่างการโก่งงอที่เกิดขึ้น โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด

ในการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอและฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ สามารถทำได้โดยสมมุติให้ฟังก์ชันในทิศ $y$ หรือ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า เพื่อหาค่าฟังก์ชัน $X_i(x)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (4-7) ลงในสมการ (4-6) จะได้

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \Big( D_{11}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{X_{,xx}\right\} + 2D_{12}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_2\right]\left\{X\right\} + D_{22}\left\{X\right\}^T\left[S_4\right]\left\{X\right\}$$
$$+4D_{66}\left\{X_{,x}\right\}^T\left[S_6\right]\left\{X_{,x}\right\} + 4D_{16}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_3\right]\left\{X_{,x}\right\} + 4D_{26}\left\{X\right\}^T\left[S_5\right]\left\{X_{,x}\right\}$$
$$-N_x\left\{X_{,x}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{X_{,x}\right\} - N_y\left\{X\right\}^T\left[S_6\right]\left\{X\right\} - 2N_{xy}\left\{X_{,x}\right\}^T\left[S_3\right]\left\{X\right\}\Big)dx$$

(4-8)

โดย

$$\left[S_1\right] = \int_0^b \left\{Y\right\}\left\{Y\right\}^T dy \qquad \left[S_4\right] = \int_0^b \left\{Y_{,yy}\right\}\left\{Y_{,yy}\right\}^T dy$$
$$\left[S_2\right] = \int_0^b \left\{Y\right\}\left\{Y_{,yy}\right\}^T dy \qquad \left[S_5\right] = \int_0^b \left\{Y_{,yy}\right\}\left\{Y_{,y}\right\}^T dy \qquad (4\text{-}9)$$
$$\left[S_3\right] = \int_0^b \left\{Y\right\}\left\{Y_{,y}\right\}^T dy \qquad \left[S_6\right] = \int_0^b \left\{Y_{,y}\right\}\left\{Y_{,y}\right\}^T dy$$

จากพลังงานศักย์รวมสามารถใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมโดยการแปรผันของพลังงานศักย์รวม นั่นคือ $\delta\Pi = 0$ ตัวอย่างการพิจารณาการแปรผันของพลังงานศักย์รวมเทอมแรกภายในเครื่องหมายอินทิเกรตของสมการ (4-8) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\int_{x=0}^{x=a}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{X_{,xx}\right\}dx$$

$$\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{X_{,xx}\right\} = \left\{X_{1,xx} \quad X_{2,xx}\right\}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_{1,xx} \\ X_{2,xx} \end{Bmatrix}$$
$$= aX_{1,xx}X_{1,xx} + bX_{1,xx}X_{2,xx} + cX_{2,xx}X_{1,xx} + dX_{2,xx}X_{2,xx}$$

$$\delta\left(\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{X_{,xx}\right\}\right) = a(X_{1,xx}\delta X_{1,xx} + X_{1,xx}\delta X_{1,xx}) + b(X_{1,xx}\delta X_{2,xx} + X_{2,xx}\delta X_{1,xx})$$
$$+c(X_{2,xx}\delta X_{1,xx} + X_{1,xx}\delta X_{2,xx}) + d(X_{2,xx}\delta X_{2,xx} + X_{2,xx}\delta X_{2,xx})$$
$$= X_{1,xx}(a\delta X_{1,xx} + b\delta X_{2,xx}) + X_{2,xx}(c\delta X_{1,xx} + d\delta X_{2,xx})$$
$$+X_{1,xx}(a\delta X_{1,xx} + c\delta X_{2,xx}) + X_{2,xx}(b\delta X_{1,xx} + d\delta X_{2,xx})$$
$$= \left\{X_{1,xx} \quad X_{2,xx}\right\}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta X_{1,xx} \\ \delta X_{2,xx} \end{Bmatrix} + \left\{X_{1,xx} \quad X_{2,xx}\right\}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta X_{1,xx} \\ \delta X_{2,xx} \end{Bmatrix}$$
$$= \left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{\delta X_{,xx}\right\} + \left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]^T\left\{X_{,xx}\right\}$$

$\left[S_i\right] = \left[S_i\right]^T$ ; $i = 1, 4, 6$

ดังนั้น $\delta\left(\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{X_{,xx}\right\}\right) = 2\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{\delta X_{,xx}\right\}$

$$\therefore \delta\left(\int_{x=0}^{x=a} D_{11}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{X_{,xx}\right\}dx\right) = \int_{x=0}^{x=a} 2\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right]\left\{\delta X_{,xx}\right\}dx$$

สำหรับเทอมที่สองสามารถหาค่าการแปรผันในทำนองเดียวกันได้ดังนี้

$$\int_{x=0}^{x=a} \{X_{,xx}\}^T [S_2]\{X\} dx$$

$$\{X_{,xx}\}^T [S_2]\{X\} = \{X_{1,xx} \quad X_{2,xx}\} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$= aX_{1,xx}X_1 + bX_{1,xx}X_2 + cX_{2,xx}X_1 + dX_{2,xx}X_2$$

$$\delta\left(\{X_{,xx}\}^T [S_2]\{X\}\right) = a(X_{1,xx}\delta X_1 + X_1\delta X_{1,xx}) + b(X_{1,xx}\delta X_2 + X_2\delta X_{1,xx})$$
$$+c(X_{2,xx}\delta X_1 + X_1\delta X_{2,xx}) + d(X_{2,xx}\delta X_2 + X_2\delta X_{2,xx})$$
$$= X_{1,xx}(a\delta X_1 + b\delta X_2) + X_{2,xx}(c\delta X_1 + d\delta X_2)$$
$$+X_1(a\delta X_{1,xx} + c\delta X_{2,xx}) + X_2(b\delta X_{1,xx} + d\delta X_{2,xx})$$
$$= \{X_{1,xx} \quad X_{2,xx}\} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \end{Bmatrix} + \{X_1 \quad X_2\} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta X_{1,xx} \\ \delta X_{2,xx} \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $\delta\left(\{X_{,xx}\}^T [S_2]\{X\}\right) = \{X_{,xx}\}^T [S_2]\{\delta X\} + \{X\}^T [S_2]^T \{\delta X_{,xx}\}$

$$\therefore \delta\left(\int_{x=0}^{x=a} 2D_{12} \{X_{,xx}\}^T [S_2]\{X\} dx\right) = \int_{x=0}^{x=a} 2D_{12} \left(\{X_{,xx}\}^T [S_2]\{\delta X\} + \{X\}^T [S_2]^T \{\delta X_{,xx}\}\right) dx$$

ดังนั้นเมื่อพิจารณาการแปรผันของพลังงานศักย์รวมของทุก ๆ เทอมเข้าด้วยกันและจัดสมการใหม่จะได้ $\delta\Pi = 0$ ในรูป

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = \int_0^a \Big( & \left(D_{11}\{X_{,xx}\}^T [S_1] + D_{12}\{X\}^T [S_2]^T + 2D_{16}\{X_{,x}\}^T [S_3]^T\right)\{\delta X_{,xx}\} \\
& + \left(4D_{66}\{X_{,x}\}^T [S_6] + 2D_{16}\{X_{,xx}\}^T [S_3] + 2D_{26}\{X\}^T [S_5]\right. \\
& \left. - N_x\{X_{,x}\}^T [S_1] - N_{xy}\{X\}^T [S_3]^T\right)\{\delta X_{,x}\} \\
& + \left(D_{12}\{X_{,xx}\}^T [S_2] + D_{22}\{X\}^T [S_4] + 2D_{26}\{X_{,x}\}^T [S_5]^T - N_y\{X\}^T [S_6]\right. \\
& \left. - N_{xy}\{X_{,x}\}^T [S_3]\right)\{\delta X\}\Big) dx = \{0\}
\end{aligned} \tag{4-10}$$

จากนั้นอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) สมการ (4-10) แล้วจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขต ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& D_{11}[S_1]^T\{X_{,xxxx}\} + 2D_{16}\left([S_3] - [S_3]^T\right)\{X_{,xxx}\} \\
& + \left(D_{12}[S_2] - 4D_{66}[S_6]^T + N_x[S_1]^T + D_{12}[S_2]^T\right)\{X_{,xx}\} \\
& + \left(2D_{26}\left([S_5] - [S_5]^T\right) + N_{xy}\left([S_3] - [S_3]^T\right)\right)\{X_{,x}\} \\
& + \left(D_{22}[S_4]^T - N_y[S_6]^T\right)\{X\} = \{0\}
\end{aligned} \tag{4-11}$$

โดยเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ คือ

$$\left(D_{11}\left[S_1\right]^T\left\{X_{,xx}\right\}+2D_{16}\left[S_3\right]\left\{X_{,x}\right\}+D_{12}\left[S_2\right]\left\{X\right\}\right)\Big|_{x=0}^{x=a}=\left\{0\right\} \tag{4-12}$$

หรือ

$$\left\{X_{,x}\right\}\Big|_{x=0}^{x=a}=\left\{0\right\} \tag{4-13}$$

และ

$$\begin{aligned}&\left(D_{11}\left[S_1\right]^T\left\{X_{,xxx}\right\}+2D_{16}\left(\left[S_3\right]-\left[S_3\right]^T\right)\left\{X_{,xx}\right\}\right.\\&+\left(D_{12}\left[S_2\right]-4D_{66}\left[S_6\right]^T+N_x\left[S_1\right]^T\right)\left\{X_{,x}\right\}\\&\left.-\left(2D_{26}\left[S_5\right]^T-N_{xy}\left[S_3\right]\right)\left\{X\right\}\right)\Big|_{x=0}^{x=a}=\left\{0\right\}\end{aligned} \tag{4-14}$$

หรือ

$$\left\{X\right\}\Big|_{x=0}^{x=a}=\left\{0\right\} \tag{4-15}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-12) และ (4-15)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-13) และ (4-15)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-12) และ (4-14)

เมื่อพิจารณาในพิกัดไร้มิติ (dimensionless coordinate) โดยกำหนดให้ $\xi=\dfrac{x}{a}$ สามารถเขียนสมการ (4-11) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}&\left\{X_{,\xi\xi\xi\xi}\right\}+\left[A_1\right]\left\{X_{,\xi\xi\xi}\right\}+\left[A_2\right]\left\{X_{,\xi\xi}\right\}+\left[A_3\right]\left\{X_{,\xi}\right\}+\left[A_4\right]\left\{X\right\}\\&-\lambda_x\left[A_5\right]\left\{X_{,\xi\xi}\right\}-\lambda_{xy}\left[A_6\right]\left\{X_{,\xi}\right\}-\lambda_y\left[A_7\right]\left\{X\right\}=\left\{0\right\}\end{aligned} \tag{4-16}$$

โดย

$$\begin{aligned}\left[A_1\right]&=\frac{2D_{16}}{D_{11}}a\left[S_1\right]^{-1}\left(\left[S_3\right]-\left[S_3\right]^T\right)\\\left[A_2\right]&=\frac{a^2}{D_{11}}\left[S_1\right]^{-1}\left(D_{12}\left(\left[S_2\right]+\left[S_2\right]^T\right)-4D_{66}\left[S_6\right]^T\right)\\\left[A_3\right]&=\frac{2D_{26}a^3}{D_{11}}\left[S_1\right]^{-1}\left(\left[S_5\right]-\left[S_5\right]^T\right)\\\left[A_4\right]&=\frac{D_{22}a^4}{D_{11}}\left[S_1\right]^{-1}\left[S_4\right]^T\\\left[A_5\right]&=-\left[I\right]\\\left[A_6\right]&=-\left[S_1\right]^{-1}\left(\left[S_3\right]-\left[S_3\right]^T\right)a\\\left[A_7\right]&=\left[S_1\right]^{-1}\left[S_6\right]^T a^2\end{aligned} \tag{4-17}$$

และ $\lambda_x, \lambda_y$ และ $\lambda_{xy}$ เป็นค่าภาระในแนวระนาบไร้มิติ (normalized in-plane forces) นิยามไว้ดังนี้

$$\lambda_x = \frac{N_x a^2}{D_{11}} \qquad \lambda_y = \frac{N_y a^2}{D_{11}} \qquad \lambda_{xy} = \frac{N_{xy} a^2}{D_{11}} \tag{4-18}$$

ในลักษณะคล้าย ๆ กัน จะได้เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\xi = 0$ และ $\xi = 1$ ดังนี้

$$\left([A_8]\{X_{,\xi\xi}\} + [A_9]\{X_{,\xi}\} + [A_{10}]\{X\}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{4-19}$$

หรือ

$$\{X_{,\xi}\}\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{4-20}$$

และ

$$\begin{aligned}&\left([A_{11}]\{X_{,\xi\xi\xi}\} + [A_{12}]\{X_{,\xi\xi}\} + \left([A_{13}] - \lambda_x [A_{14}]\right)\{X_{,\xi}\}\right. \\ &\left. + \left([A_{15}] - \lambda_{xy}[A_{16}]\right)\{X\}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\}\end{aligned} \tag{4-21}$$

หรือ

$$\{X\}\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{4-22}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-19) และ (4-22)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-20) และ (4-22)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-19) และ (4-21)

โดย

$$\begin{aligned}
[A_8] &= \frac{D_{11}[S_1]}{a^2} & [A_{13}] &= \frac{4D_{66}[S_6]^T - D_{12}[S_2]}{a} \\
[A_9] &= \frac{2D_{16}[S_3]}{a} & [A_{14}] &= \frac{D_{11}[S_1]}{a^3} \\
[A_{10}] &= D_{12}[S_2] & [A_{15}] &= 2D_{26}[S_5]^T \\
[A_{11}] &= \frac{-D_{11}[S_1]}{a^3} & [A_{16}] &= \frac{D_{11}[S_3]}{a^2} \\
[A_{12}] &= \frac{-2D_{16}\left([S_3] - [S_3]^T\right)}{a^2}
\end{aligned} \tag{4-23}$$

และสมมุติค่าภาระในแนวระนาบไร้มิติให้อยู่ภายใต้พารามิเตอร์เดียวกัน ดังนี้

$$\lambda_x = \lambda\beta_x \qquad \lambda_y = \lambda\beta_y \qquad \lambda_{xy} = \lambda\beta_{xy} \tag{4-24}$$

โดยค่า $\beta_x, \beta_y$ และ $\beta_{xy}$ เป็นค่าคงที่ที่ทราบค่า

ในการแก้ปัญหาการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ลักษณะของสมการจะอยู่ในรูปแบบของปัญหาค่าเจาะจง (eigenvalue problem) โดยมีค่า $\lambda$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) และ $\{X\}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจง (eigenvector) ในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงเริ่มจากสมมุติให้ค่า $\{X\}$ อยู่ในรูปแบบของอนุกรมกำลังอนันต์ (infinite power series) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1(\xi) \\ * \\ X_N(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} aa_{1,i}\xi^i \\ * \\ \sum_{i=0}^{\infty} aa_{N,i}\xi^i \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} aa_1 \\ * \\ aa_N \end{Bmatrix}_i \xi^i = \sum_{i=0}^{\infty} \{AA\}_i \xi^i \tag{4-25}$$

ตัวอย่าง เช่น $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa_{1,0} + aa_{1,1}\xi + aa_{1,2}\xi^2 + aa_{1,3}\xi^3 + \ldots + aa_{1,i}\xi^i \\ aa_{2,0} + aa_{2,1}\xi + aa_{2,2}\xi^2 + aa_{2,3}\xi^3 + \ldots + aa_{2,i}\xi^i \end{Bmatrix}$

โดย $\{AA\}_i$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของ $\xi$ ในพิกัดไร้มิติ

เมื่อแทนสมการ (4-25) ลงในสมการ (4-16) แล้วจัดใหม่ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\{AA\}_i$ ในรูป

$$\begin{aligned} \{AA\}_{i+4} = &-\frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}\Big([A_1]\{AA\}_{i+3}(i+1)(i+2)(i+3) \\ &+\big([A_2]-\lambda\beta_x[A_5]\big)\{AA\}_{i+2}(i+1)(i+2) \\ &+\big([A_3]-\lambda\beta_{xy}[A_6]\big)\{AA\}_{i+1}(i+1) \\ &+\big([A_4]-\lambda\beta_y[A_7]\big)\{AA\}_i\Big) \end{aligned} \tag{4-26}$$

สมการ (4-26) เรียกว่า recurrence formula ซึ่งจะทำให้สามารถเขียนค่า $\{AA\}_{i+4}$ ให้อยู่ในรูปของ $\{AA\}_{i+3}, \{AA\}_{i+2}, \{AA\}_{i+1}$ และ $\{AA\}_i$ ได้ โดยเวกเตอร์เจาะจงในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงมีจำนวนเท่ากับ $4N$ ตัว และค่าเจาะจงจะได้จากการแทนสมการ (4-26) ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในด้านแกน $x$ สมการ (4-19 ถึง 4-22) ของปัญหาที่สนใจ แล้วนำค่าเจาะจงที่ได้ไปหาเวกเตอร์เจาะจงต่อไป

ในทำนองเดียวกัน จากสมการพลังงานศักย์รวมหากสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $x$ จะสามารถแก้ปัญหาและหาค่าภาระการโก่งงอได้ในทำนองเดียวกับการสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $y$ โดยสมมุติให้ผลเฉลยของฟังก์ชันสมการการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x,y)$ อยู่ในรูป [11]

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{N} X_i(x) Y_i(y) = \{Y\}^T \{X\} \tag{4-27}$$

เมื่อแทน $w(x, y)$ จากสมการ (4-27) ลงในสมการ (4-6) จะได้

$$
\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2}\int_0^b \Big( & D_{11}\{Y\}^T[R_4]\{Y\} + 2D_{12}\{Y\}^T[R_2]^T\{Y_{,yy}\} + D_{22}\{Y_{,yy}\}^T[R_1]\{Y_{,yy}\} \\
& + 4D_{66}\{Y_{,y}\}^T[R_6]\{Y_{,y}\} + 4D_{16}\{Y\}^T[R_5]\{Y_{,y}\} + 4D_{26}\{Y_{,yy}\}^T[R_3]\{Y_{,y}\} \\
& - N_x\{Y\}^T[R_6]\{Y\} - N_y\{Y_{,y}\}^T[R_1]\{Y_{,y}\} - 2N_{xy}\{Y\}^T[R_3]^T\{Y_{,y}\}\Big) dy
\end{aligned} \tag{4-28}
$$

โดย

$$
\begin{aligned}
[R_1] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X\}\{X\}^T dx & [R_4] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X_{,xx}\}\{X_{,xx}\}^T dx \\
[R_2] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X\}\{X_{,xx}\}^T dx & [R_5] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X_{,xx}\}\{X_{,x}\}^T dx \\
[R_3] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X\}\{X_{,x}\}^T dx & [R_6] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X_{,x}\}\{X_{,x}\}^T dx
\end{aligned} \tag{4-29}
$$

จากพลังงานศักย์รวมสมการ (4-28) เมื่อใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมโดยการแปรผันของพลังงานศักย์รวม นั่นคือ $\delta\Pi = 0$ โดยแยกคิดทีละเทอมเหมือนด้านที่สมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $y$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi = \int_0^b \Big( & \Big(D_{22}\{Y_{,yy}\}^T[R_1] + D_{12}\{Y\}^T[R_2]^T + 2D_{26}\{Y_{,y}\}^T[R_3]^T\Big)\{\delta Y_{,yy}\} \\
& + \Big(4D_{66}\{Y_{y}\}^T[R_6] + 2D_{16}\{Y\}^T[R_5] + 2D_{26}\{Y_{,yy}\}^T[R_3] \\
& - N_y\{Y_{,y}\}^T[R_1] - N_{xy}\{Y\}^T[R_3]^T\Big)\{\delta Y_{,y}\} \\
& + \Big(D_{11}\{Y\}^T[R_4] + D_{12}\{Y_{,yy}\}^T[R_2] + 2D_{16}\{Y_{,y}\}^T[R_5]^T - N_x\{Y\}^T[R_6] \\
& - N_{xy}\{Y_{,y}\}^T[R_3]\Big)\{\delta Y\}\Big) dy = \{0\}
\end{aligned} \tag{4-30}
$$

จากนั้นอินทิเกรตทีละส่วนแล้วจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขต ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
& D_{22}[R_1]^T\{Y_{,yyyy}\} + 2D_{26}\Big([R_3]-[R_3]^T\Big)\{Y_{,yyy}\} \\
& + \Big(D_{12}\Big([R_2]+[R_2]^T\Big) - 4D_{66}[R_6]^T + N_y[R_1]^T\Big)\{Y_{,yy}\} \\
& + \Big(2D_{16}\Big([R_5]-[R_5]^T\Big) + N_{xy}\Big([R_3]-[R_3]^T\Big)\Big)\{Y_{,y}\} \\
& + \Big(D_{11}[R_4]^T - N_x[R_6]^T\Big)\{Y\} = \{0\}
\end{aligned} \tag{4-31}
$$

โดยเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$ คือ

$$\left(D_{22}\left[R_1\right]^T\left\{Y_{,yy}\right\}+2D_{26}\left[R_3\right]\left\{Y_{,y}\right\}+D_{12}\left[R_2\right]\left\{Y\right\}\right)\Big|_{y=0}^{y=b}=\{0\} \tag{4-32}$$

หรือ

$$\left\{Y_{,y}\right\}\Big|_{y=0}^{y=b}=\{0\} \tag{4-33}$$

และ

$$\begin{aligned}&\left(D_{22}\left[R_1\right]^T\left\{Y_{,yyy}\right\}+2D_{26}\left(\left[R_3\right]-\left[R_3\right]^T\right)\left\{Y_{,yy}\right\}\right.\\&+\left(D_{12}\left[R_2\right]-4D_{66}\left[R_6\right]^T+N_y\left[R_1\right]^T\right)\left\{Y_{,y}\right\}\\&\left.-\left(2D_{16}\left[R_5\right]^T-N_{xy}\left[R_3\right]\right)\left\{Y\right\}\right)\Big|_{y=0}^{y=b}=\{0\}\end{aligned} \tag{4-34}$$

หรือ

$$\left\{Y\right\}\Big|_{y=0}^{y=b}=\{0\} \tag{4-35}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-32) และ (4-35)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-33) และ (4-35)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-32) และ (4-34)

เมื่อพิจารณาในพิกัดไร้มิติ กำหนดให้ $\eta=\dfrac{y}{b}$ สามารถเขียนสมการ (4-31) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}&\left\{Y_{,\eta\eta\eta\eta}\right\}+\left[B_1\right]\left\{Y_{,\eta\eta\eta}\right\}+\left[B_2\right]\left\{Y_{,\eta\eta}\right\}+\left[B_3\right]\left\{Y_{,\eta}\right\}+\left[B_4\right]\left\{Y\right\}\\&-\alpha_y\left[B_5\right]\left\{Y_{,\eta\eta}\right\}-\alpha_{xy}\left[B_6\right]\left\{Y_{,\eta}\right\}-\alpha_x\left[B_7\right]\left\{Y\right\}=\{0\}\end{aligned} \tag{4-36}$$

โดย

$$\begin{aligned}\left[B_1\right]&=\frac{2D_{26}}{D_{22}}b\left[R_1\right]^{-1}\left(\left[R_3\right]-\left[R_3\right]^T\right)\\\left[B_2\right]&=\frac{b^2}{D_{22}}\left[R_1\right]^{-1}\left(D_{12}\left(\left[R_2\right]+\left[R_2\right]^T\right)-4D_{66}\left[R_6\right]^T\right)\\\left[B_3\right]&=\frac{2D_{16}b^3}{D_{22}}\left[R_1\right]^{-1}\left(\left[R_5\right]-\left[R_5\right]^T\right)\\\left[B_4\right]&=\frac{D_{11}b^4}{D_{22}}\left[R_1\right]^{-1}\left[R_4\right]^T\\\left[B_5\right]&=-\left[I\right]\\\left[B_6\right]&=-\left[R_1\right]^{-1}\left(\left[R_3\right]-\left[R_3\right]^T\right)b\\\left[B_7\right]&=\left[R_1\right]^{-1}\left[R_6\right]^T b^2\end{aligned} \tag{4-37}$$

และ $\alpha_x,\alpha_y$ และ $\alpha_{xy}$ นิยามไว้ดังนี้

$$\alpha_x = \frac{N_x b^2}{D_{22}} \qquad \alpha_y = \frac{N_y b^2}{D_{22}} \qquad \alpha_{xy} = \frac{N_{xy} b^2}{D_{22}} \tag{4-38}$$

เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\eta = 0$ และ $\eta = 1$ ดังนี้

$$\left([B_8]\{Y_{,\eta\eta}\} + [B_9]\{Y_{,\eta}\} + [B_{10}]\{Y\}\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{4-39}$$

หรือ

$$\{Y_{,\eta}\}\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{4-40}$$

และ

$$\begin{aligned}&\left([B_{11}]\{Y_{,\eta\eta\eta}\} + [B_{12}]\{Y_{,\eta\eta}\} + \left([B_{13}] - \alpha_y [B_{14}]\right)\{Y_{,\eta}\}\right.\\ &\left. + \left([B_{15}] - \alpha_{xy}[B_{16}]\right)\{Y\}\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\}\end{aligned} \tag{4-41}$$

หรือ

$$\{Y\}\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{4-42}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-39) และ (4-42)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-40) และ (4-42)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-39) และ (4-41)

โดย

$$\begin{aligned}
[B_8] &= \frac{D_{22}[R_1]}{b^2} & [B_{13}] &= \frac{4D_{66}[R_6]^T - D_{12}[R_2]}{b}\\
[B_9] &= \frac{2D_{26}[R_3]}{b} & [B_{14}] &= \frac{D_{22}[R_1]}{b^3}\\
[B_{10}] &= D_{12}[R_2] & [B_{15}] &= 2D_{16}[R_5]^T\\
[B_{11}] &= \frac{-D_{22}[R_1]}{b^3} & [B_{16}] &= \frac{D_{22}[R_3]}{b^2}\\
[B_{12}] &= \frac{-2D_{26}\left([R_3] - [R_3]^T\right)}{b^2}
\end{aligned} \tag{4-43}$$

และสมมุติค่าภาระในแนวระนาบไร้มิติให้อยู่ภายใต้พารามิเตอร์เดียวกัน ดังนี้

$$\alpha_x = \alpha\gamma_x \qquad \alpha_y = \alpha\gamma_y \qquad \alpha_{xy} = \alpha\gamma_{xy} \tag{4-44}$$

โดยค่า $\gamma_x,\gamma_y$ และ $\gamma_{xy}$ เป็นค่าคงที่ที่ทราบค่า

ค่า $\{Y\}$ ที่อยู่ในรูปแบบของอนุกรมกำลังอนันต์ คือ

$$\{Y\}=\begin{Bmatrix} Y_1(\eta) \\ * \\ Y_N(\eta) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} bb_{1,i}\eta^i \\ * \\ \sum_{i=0}^{\infty} bb_{N,i}\eta^i \end{Bmatrix}=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} bb_1 \\ * \\ bb_N \end{Bmatrix}_i \eta^i=\sum_{i=0}^{\infty}\{BB\}_i\,\eta^i \tag{4-45}$$

ตัวอย่าง เช่น $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} aa_{1,0}+aa_{1,1}\xi+aa_{1,2}\xi^2+aa_{1,3}\xi^3+...+aa_{1,i}\xi^i \\ aa_{2,0}+aa_{2,1}\xi+aa_{2,2}\xi^2+aa_{2,3}\xi^3+...+aa_{2,i}\xi^i \end{Bmatrix}$

โดย $\{BB\}_i$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของ $\eta$ ในพิกัดไร้มิติ

และ recurrence formula สำหรับ $\{BB\}_{i+4}$ สำหรับการสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $x$ คือ

$$\begin{aligned}\{BB\}_{i+4} &= -\frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}\Big([B_1]\{BB\}_{i+3}(i+1)(i+2)(i+3) \\ &+([B_2]-\alpha\gamma_y[B_5])\{BB\}_{i+2}(i+1)(i+2) \\ &+([B_3]-\alpha\gamma_{xy}[B_6])\{BB\}_{i+1}(i+1) \\ &+([B_4]-\alpha\gamma_x[B_7])\{BB\}_i\Big)\end{aligned} \tag{4-46}$$

จากการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชดังแสดงข้างต้น สามารถใช้เป็นแนวทางสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชได้ เนื่องจากสมการครอบคลุมของปัญหาการสั่นสะเทือนและปัญหาการโก่งงออยู่ในรูปของพลังงานศักย์รวมเหมือนกัน

## 4.2 การวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

การแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางสามารถทำได้โดยวิเคราะห์พลังงานศักย์รวมเช่นเดียวกับปัญหาการโก่งงอ โดยพลังงานศักย์รวมสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนประกอบด้วยพลังงานศักย์ที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุหรือพลังงานความเครียด เช่นเดียวกับสมการ (4-1) และพลังงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง (Kinetic energy, $T$) [21] ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$T=\frac{1}{2}\iint \rho h\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dxdy \tag{4-47}$$

เมื่อเป็นโครงสร้างแผ่นบางการเคลื่อนที่ในแนวระนาบ $u, v$ จะไม่มีผลต่อการสั่นสะเทือน และระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w$ แสดงในรูปฟังก์ชันของเวลาคือ

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{i\omega t} \tag{4-48}$$

สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร ค่า $B_{ij} = 0$ เมื่อแทนสมการ (4-48) ลงในสมการ (4-47) จะได้พลังงานศักย์รวม ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^b \Big[ & D_{11}w_{,xx}^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}w_{,yy}^2 + 4D_{66}w_{,xy}^2 \\ & +4\left(D_{16}w_{,xx} + D_{26}w_{,yy}\right)w_{,xy} - \rho h\omega^2 w^2 \Big] dxdy\end{aligned} \tag{4-49}$$

โดย $w$ คือ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ

$\rho$ คือ ความหนาแน่นของแผ่น (มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร)

$h$ คือ ความหนาของแผ่น

$\omega$ คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ

สำหรับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช จะมีลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาเช่นเดียวกับการแก้ปัญหาการโก่งงอ โดยเริ่มจากสมมุติให้ผลเฉลยของฟังก์ชันสมการการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x, y)$ เท่ากับสมการ (4-7) และถ้าสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $y$ หรือฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ในสมการ (4-7) ก็ต้องหาค่าฟังก์ชัน $X_i(x)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = a$ ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (4-7) ลงในสมการ (4-49) จะได้

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \Big( & D_{11}\{X_{,xx}\}^T[S_1]\{X_{,xx}\} + 2D_{12}\{X_{,xx}\}^T[S_2]\{X\} + D_{22}\{X\}^T[S_4]\{X\} \\ & +4D_{66}\{X_{,x}\}^T[S_6]\{X_{,x}\} + 4D_{16}\{X_{,xx}\}^T[S_3]\{X_{,x}\} + 4D_{26}\{X\}^T[S_5]\{X_{,x}\} \\ & -\rho h\omega^2\{X\}^T[S_1]\{X\}\Big)dx\end{aligned} \tag{4-50}$$

โดย

$$\begin{aligned}[S_1] &= \int_0^b \{Y\}\{Y\}^T dy & [S_4] &= \int_0^b \{Y_{,yy}\}\{Y_{,yy}\}^T dy \\ [S_2] &= \int_0^b \{Y\}\{Y_{,yy}\}^T dy & [S_5] &= \int_0^b \{Y_{,yy}\}\{Y_{,y}\}^T dy \\ [S_3] &= \int_0^b \{Y\}\{Y_{,y}\}^T dy & [S_6] &= \int_0^b \{Y_{,y}\}\{Y_{,y}\}^T dy\end{aligned} \tag{4-51}$$

จากสมการ (4-50) เมื่อใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมโดยการแปรผันของพลังงานศักย์รวมคือ $\delta\Pi = 0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \int_0^a \Big( \big( D_{11}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_1\right] + D_{12}\left\{X\right\}^T\left[S_2\right]^T + 2D_{16}\left\{X_{,x}\right\}^T\left[S_3\right]^T \big)\left\{\delta X_{,xx}\right\} \\ + \big(4D_{66}\left\{X_{,x}\right\}^T\left[S_6\right] + 2D_{16}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_3\right] + 2D_{26}\left\{X\right\}^T\left[S_5\right]\big)\left\{\delta X_{,x}\right\} \\ + \big(D_{12}\left\{X_{,xx}\right\}^T\left[S_2\right] + D_{22}\left\{X\right\}^T\left[S_4\right] + 2D_{26}\left\{X_{,x}\right\}^T\left[S_5\right]^T \\ - \rho h\omega^2\left\{X\right\}^T\left[S_1\right]\big)\left\{\delta X\right\}\Big)dx = \left\{0\right\}\end{aligned} \tag{4-52}$$

จากนั้นอินทิเกรตทีละส่วนสมการ (4-52) แล้วจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขต ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}D_{11}\left[S_1\right]^T\left\{X_{,xxxx}\right\} + 2D_{16}\left(\left[S_3\right] - \left[S_3\right]^T\right)\left\{X_{,xxx}\right\} \\ + \left(D_{12}\left(\left[S_2\right] + \left[S_2\right]^T\right) - 4D_{66}\left[S_6\right]^T\right)\left\{X_{,xx}\right\} \\ + \left(2D_{26}\left(\left[S_5\right] - \left[S_5\right]^T\right)\right)\left\{X_{,x}\right\} + \left(D_{22}\left[S_4\right]^T - \rho h\omega^2\left[S_1\right]^T\right)\left\{X\right\} = \left\{0\right\}\end{aligned} \tag{4-53}$$

โดยเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = a$ คือ

$$\left(D_{11}\left[S_1\right]^T\left\{X_{,xx}\right\} + 2D_{16}\left[S_3\right]\left\{X_{,x}\right\} + D_{12}\left[S_2\right]\left\{X\right\}\right)\Big|_{x=0}^{x=a} = \left\{0\right\} \tag{4-54}$$

หรือ

$$\left\{X_{,x}\right\}\Big|_{x=0}^{x=a} = \left\{0\right\} \tag{4-55}$$

และ

$$\begin{aligned}\Big(-D_{11}\left[S_1\right]^T\left\{X_{,xxx}\right\} - 2D_{16}\left(\left[S_3\right] - \left[S_3\right]^T\right)\left\{X_{,xx}\right\} \\ -\left(D_{12}\left[S_2\right] - 4D_{66}\left[S_6\right]^T\right)\left\{X_{,x}\right\} + \left(2D_{26}\left[S_5\right]^T\right)\left\{X\right\}\Big)\Big|_{x=0}^{x=a} = \left\{0\right\}\end{aligned} \tag{4-56}$$

หรือ

$$\left\{X\right\}\Big|_{x=0}^{x=a} = \left\{0\right\} \tag{4-57}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-54) และ (4-57)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-55) และ (4-57)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-54) และ (4-56)

เมื่อพิจารณาในพิกัดไร้มิติโดยกำหนดให้ $\xi = \dfrac{x}{a}$ สามารถเขียนสมการ (4-53) ใหม่ได้เป็น

$$\left\{X_{,\xi\xi\xi\xi}\right\} + \left[A_1\right]\left\{X_{,\xi\xi\xi}\right\} + \left[A_2\right]\left\{X_{,\xi\xi}\right\} + \left[A_3\right]\left\{X_{,\xi}\right\} + \left(\left[A_4\right] - \omega^2\left[A_5\right]\right)\left\{X\right\} = \left\{0\right\} \qquad (4\text{-}58)$$

โดย

$$\begin{aligned}
\left[A_1\right] &= \frac{2D_{16}}{D_{11}} a\left[S_1\right]^{-1}\left(\left[S_3\right] - \left[S_3\right]^T\right) \\
\left[A_2\right] &= \frac{a^2}{D_{11}}\left[S_1\right]^{-1}\left(D_{12}\left(\left[S_2\right] + \left[S_2\right]^T\right) - 4D_{66}\left[S_6\right]^T\right) \\
\left[A_3\right] &= \frac{2D_{26}a^3}{D_{11}}\left[S_1\right]^{-1}\left(\left[S_5\right] - \left[S_5\right]^T\right) \\
\left[A_4\right] &= \frac{D_{22}a^4}{D_{11}}\left[S_1\right]^{-1}\left[S_4\right]^T \\
\left[A_5\right] &= \frac{\rho h a^4}{D_{11}}\left[I\right]
\end{aligned} \qquad (4\text{-}59)$$

และจะได้เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\xi = 0$ และ $\xi = 1$ ดังนี้

$$\left(\left[A_6\right]\left\{X_{,\xi\xi}\right\} + \left[A_7\right]\left\{X_{,\xi}\right\} + \left[A_8\right]\left\{X\right\}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \left\{0\right\} \qquad (4\text{-}60)$$

หรือ

$$\left\{X_{,\xi}\right\}\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \left\{0\right\} \qquad (4\text{-}61)$$

และ

$$\left(\left[A_9\right]\left\{X_{,\xi\xi\xi}\right\} + \left[A_{10}\right]\left\{X_{,\xi\xi}\right\} + \left[A_{11}\right]\left\{X_{,\xi}\right\} + \left[A_{12}\right]\left\{X\right\}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \left\{0\right\} \qquad (4\text{-}62)$$

หรือ

$$\left\{X\right\}\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \left\{0\right\} \qquad (4\text{-}63)$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-60) และ (4-63)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-61) และ (4-63)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-60) และ (4-62)

โดย

$$\begin{aligned}
\left[A_6\right] &= \frac{D_{11}\left[S_1\right]}{a^2} & \left[A_{10}\right] &= \frac{-2D_{16}\left(\left[S_3\right] - \left[S_3\right]^T\right)}{a^2} \\
\left[A_7\right] &= \frac{2D_{16}\left[S_3\right]}{a} & \left[A_{11}\right] &= \frac{4D_{66}\left[S_6\right]^T - D_{12}\left[S_2\right]}{a} \\
\left[A_8\right] &= D_{12}\left[S_2\right] & \left[A_{12}\right] &= 2D_{26}\left[S_5\right]^T \\
\left[A_9\right] &= \frac{-D_{11}\left[S_1\right]}{a^3}
\end{aligned} \qquad (4\text{-}64)$$

สำหรับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ลักษณะของสมการก็จะอยู่ในรูปแบบของปัญหาค่าเจาะจง เช่นเดียวกับปัญหาการโก่งงอ โดยมีค่า $\omega^2$ เป็นค่าเจาะจง และ $\{X\}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจง ในการแก้ปัญหาจะเริ่มจาก สมมุติค่าเจาะจงให้อยู่ในรูปแบบของอนุกรมกำลังอนันต์ ซึ่งมีรูปแบบดังสมการ (4-25) และเมื่อแทนสมการ (4-25) ลงในสมการ (4-58) แล้วจัดใหม่จะได้ความสัมพันธ์ของ $\{AA\}_i$ ในรูป

$$\begin{aligned}\{AA\}_{i+4} &= -\frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}\Big([A_1]\{AA\}_{i+3}(i+1)(i+2)(i+3) \\ &+[A_2]\{AA\}_{i+2}(i+1)(i+2)+[A_3]\{AA\}_{i+1}(i+1)+\big([A_4]-\omega^2[A_5]\big)\{AA\}_i\Big)\end{aligned} \qquad (4\text{-}65)$$

โดยสมการ (4-65) เรียกว่า recurrence formula ซึ่งสามารถเขียนค่า $\{AA\}_{i+4}$ ให้อยู่ในรูปของ $\{AA\}_{i+3},\{AA\}_{i+2},\{AA\}_{i+1}$ และ $\{AA\}_i$ ได้ โดยจะพบว่าเวกเตอร์เจาะจงในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงมีจำนวน $4N$ ตัว และค่าเจาะจงจะได้จากการแทนสมการ (4-25) ที่จัดรูปใหม่ตามสมการ (4-65) ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในด้านแกน $x$ สมการ (4-60 ถึง 4-63) ของปัญหาที่สนใจ แล้วนำค่าเจาะจงที่ได้ไปหาเวกเตอร์เจาะจงต่อไป

จากสมการพลังงานศักย์รวมหากสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $x$ จะสามารถแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนได้ในทำนองเดียวกับการสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $y$ โดยสมมุติให้ผลเฉลยของฟังก์ชันสมการการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x,y)$ อยู่ในรูปดังสมการ (4-27) และเมื่อแทน $w(x,y)$ จากสมการ (4-27) ลงในสมการ (4-49) จะได้

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2}\int_0^b\Big(D_{11}\{Y\}^T[R_4]\{Y\}+2D_{12}\{Y\}^T[R_2]^T\{Y_{,yy}\}+D_{22}\{Y_{,yy}\}^T[R_1]\{Y_{,yy}\} \\ &+4D_{66}\{Y_{,y}\}^T[R_6]\{Y_{,y}\}+4D_{16}\{Y\}^T[R_5]\{Y_{,y}\}+4D_{26}\{Y_{,yy}\}^T[R_3]\{Y_{,y}\} \\ &-\rho h\omega^2\{Y\}^T[R_1]\{Y\}\Big)dy\end{aligned} \qquad (4\text{-}66)$$

โดย

$$\begin{aligned}[R_1] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X\}\{X\}^T dx & [R_4] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X_{,xx}\}\{X_{,xx}\}^T dx \\ [R_2] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X\}\{X_{,xx}\}^T dx & [R_5] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X_{,xx}\}\{X_{,x}\}^T dx \\ [R_3] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X\}\{X_{,x}\}^T dx & [R_6] &= \int_{x=0}^{x=a}\{X_{,x}\}\{X_{,x}\}^T dx\end{aligned} \qquad (4\text{-}67)$$

จากพลังงานศักย์รวมสมการ (4-66) เมื่อใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมโดยการแปรผันของพลังงานศักย์รวม นั่นคือ $\delta\Pi = 0$ เหมือนด้านที่สมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $y$ จะได้

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \int_0^b \Big( & \left( D_{22} \{Y_{,yy}\}^T [R_1] + D_{12} \{Y\}^T [R_2]^T + 2D_{26} \{Y_{,y}\}^T [R_3]^T \right) \{\delta Y_{,yy}\} \\ & + \left( 4D_{66} \{Y_y\}^T [R_6] + 2D_{16} \{Y\}^T [R_5] + 2D_{26} \{Y_{,yy}\}^T [R_3]^T \right) \{\delta Y_{,y}\} \\ & + \left( D_{11} \{Y\}^T [R_4] + D_{12} \{Y_{,yy}\}^T [R_2] + 2D_{16} \{Y_{,y}\}^T [R_5]^T \right. \\ & \left. - \rho h \omega^2 \{Y\}^T [R_1] \right) \{\delta Y\} \Big) dy = \{0\}\end{aligned} \quad (4\text{-}68)$$

จากนั้นอินทิเกรตทีละส่วนแล้วจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขต ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & D_{22} [R_1]^T \{Y_{,yyyy}\} + 2D_{26} \left( [R_3] - [R_3]^T \right) \{Y_{,yyy}\} \\ & + \left( D_{12} \left( [R_2] + [R_2]^T \right) - 4D_{66} [R_6]^T \right) \{Y_{,yy}\} \\ & + \left( 2D_{16} \left( [R_5] - [R_5]^T \right) \right) \{Y_{,y}\} + \left( D_{11} [R_4]^T - \rho h \omega^2 [R_1]^T \right) \{Y\} = \{0\} \end{aligned} \quad (4\text{-}69)$$

โดยเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องที่ตำแหน่ง $y = 0$ และ $y = b$ คือ

$$\left( D_{22} [R_1]^T \{Y_{,yy}\} + 2D_{26} [R_3] \{Y_{,y}\} + D_{12} [R_2] \{Y\} \right) \Big|_{y=0}^{y=b} = \{0\} \quad (4\text{-}70)$$

หรือ

$$\{Y_{,y}\} \Big|_{y=0}^{y=b} = \{0\} \quad (4\text{-}71)$$

และ

$$\begin{aligned} & \left( -D_{22} [R_1]^T \{Y_{,yyy}\} - 2D_{26} \left( [R_3] - [R_3]^T \right) \{Y_{,yy}\} \right. \\ & \left. - \left( D_{12} [R_2] - 4D_{66} [R_6]^T \right) \{Y_{,y}\} + 2D_{16} [R_5]^T \{Y\} \right) \Big|_{y=0}^{y=b} = \{0\} \end{aligned} \quad (4\text{-}72)$$

หรือ

$$\{Y\} \Big|_{y=0}^{y=b} = \{0\} \quad (4\text{-}73)$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-70) และ (4-73)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-71) และ (4-73)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-70) และ (4-72)

เมื่อพิจารณาในพิกัดไร้มิติ กำหนดให้ $\eta = \dfrac{y}{b}$ สามารถเขียนสมการ (4-69) ใหม่ได้เป็น

$$\left\{Y_{,\eta\eta\eta\eta}\right\} + \left[B_1\right]\left\{Y_{,\eta\eta\eta}\right\} + \left[B_2\right]\left\{Y_{,\eta\eta}\right\} + \left[B_3\right]\left\{Y_{,\eta}\right\} + \left(\left[B_4\right] - \omega^2\left[B_5\right]\right)\left\{Y\right\} = \left\{0\right\} \tag{4-74}$$

โดย

$$\begin{aligned}
\left[B_1\right] &= \frac{2D_{26}}{D_{22}} b\left[R_1\right]^{-1}\left(\left[R_3\right] - \left[R_3\right]^T\right) \\
\left[B_2\right] &= \frac{b^2}{D_{22}}\left[R_1\right]^{-1}\left(D_{12}\left(\left[R_2\right] + \left[R_2\right]^T\right) - 4D_{66}\left[R_6\right]^T\right) \\
\left[B_3\right] &= \frac{2D_{16}b^3}{D_{22}}\left[R_1\right]^{-1}\left(\left[R_5\right] - \left[R_5\right]^T\right) \\
\left[B_4\right] &= \frac{D_{11}b^4}{D_{22}}\left[R_1\right]^{-1}\left[R_4\right]^T \\
\left[B_5\right] &= \frac{\rho h b^4}{D_{22}}\left[I\right]
\end{aligned} \tag{4-75}$$

เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\eta = 0$ และ $\eta = 1$ ดังนี้

$$\left(\left[B_6\right]\left\{Y_{,\eta\eta}\right\} + \left[B_7\right]\left\{Y_{,\eta}\right\} + \left[B_8\right]\left\{Y\right\}\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \left\{0\right\} \tag{4-76}$$

หรือ

$$\left\{Y_{,\eta}\right\}\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \left\{0\right\} \tag{4-77}$$

และ

$$\left(\left[B_9\right]\left\{Y_{,\eta\eta\eta}\right\} + \left[B_{10}\right]\left\{Y_{,\eta\eta}\right\} + \left[B_{11}\right]\left\{Y_{,\eta}\right\} + \left[B_{12}\right]\left\{Y\right\}\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \left\{0\right\} \tag{4-78}$$

หรือ

$$\left\{Y\right\}\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \left\{0\right\} \tag{4-79}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-76) และ (4-79)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-77) และ (4-79)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (4-76) และ (4-78)

โดย

$$\begin{aligned}
\left[B_6\right] &= \frac{D_{22}\left[R_1\right]}{b^2} & \left[B_{10}\right] &= \frac{-2D_{26}\left(\left[R_3\right] - \left[R_3\right]^T\right)}{b^2} \\
\left[B_7\right] &= \frac{2D_{26}\left[R_3\right]}{b} & \left[B_{11}\right] &= \frac{4D_{66}\left[R_6\right]^T - D_{12}\left[R_2\right]}{b} \\
\left[B_8\right] &= D_{12}\left[R_2\right] & \left[B_{12}\right] &= 2D_{16}\left[R_5\right]^T \\
\left[B_9\right] &= \frac{-D_{22}\left[R_1\right]}{b^3} & &
\end{aligned} \tag{4-80}$$

สำหรับค่า $\{Y\}$ ที่อยู่ในรูปแบบของอนุกรมกำลังอนันต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปดังสมการ (4-45) และ recurrence formula สำหรับ $\{BB\}_{i+4}$ สำหรับการสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $x$ ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน คือ

$$\begin{aligned}\{BB\}_{i+4} &= -\frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}\Big([B_1]\{BB\}_{i+3}(i+1)(i+2)(i+3) \\ &+[B_2]\{BB\}_{i+2}(i+1)(i+2)+[B_3]\{BB\}_{i+1}(i+1)+\big([B_4]-\omega^2[B_5]\big)\{BB\}_i\Big)\end{aligned} \tag{4-81}$$

ในบทนี้ได้แสดงการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชรวมถึงได้อธิบายขั้นตอนในการแก้ปัญหาของทั้งสองไว้พอสังเขป แต่เนื่องด้วยสมการที่ได้จากการวิเคราะห์มีจำนวนค่อนข้างมากซึ่งอาจทำให้เกิดความสับสนหรือความเข้าใจที่ไม่ชัดเจนในขั้นตอนการแก้ปัญหาทั้งสองได้ ดังนั้นในบทต่อไปจะอธิบายลำดับขั้นตอนสำหรับการแก้ปัญหาทั้งสองโดยละเอียดพร้อมทั้งแสดงตัวอย่างขั้นตอนและรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาทั้งสองด้วย

# บทที่ 5

# ตัวอย่างการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือน ด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ในบทที่ 4 ได้กล่าวถึงสมการครอบคลุม สมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ และขั้นตอนการแก้สมการพอสังเขปสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ขั้นตอนการแก้ปัญหาทั้งสองนี้อาจทำให้เกิดความสับสนอยู่บ้างเนื่องจากจำนวนสมการของปัญหาทั้งสองมีค่อนข้างมาก ดังนั้นในบทนี้จะอธิบายลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาทั้งสองอย่างละเอียดเพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้นและแสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาทั้งสอง

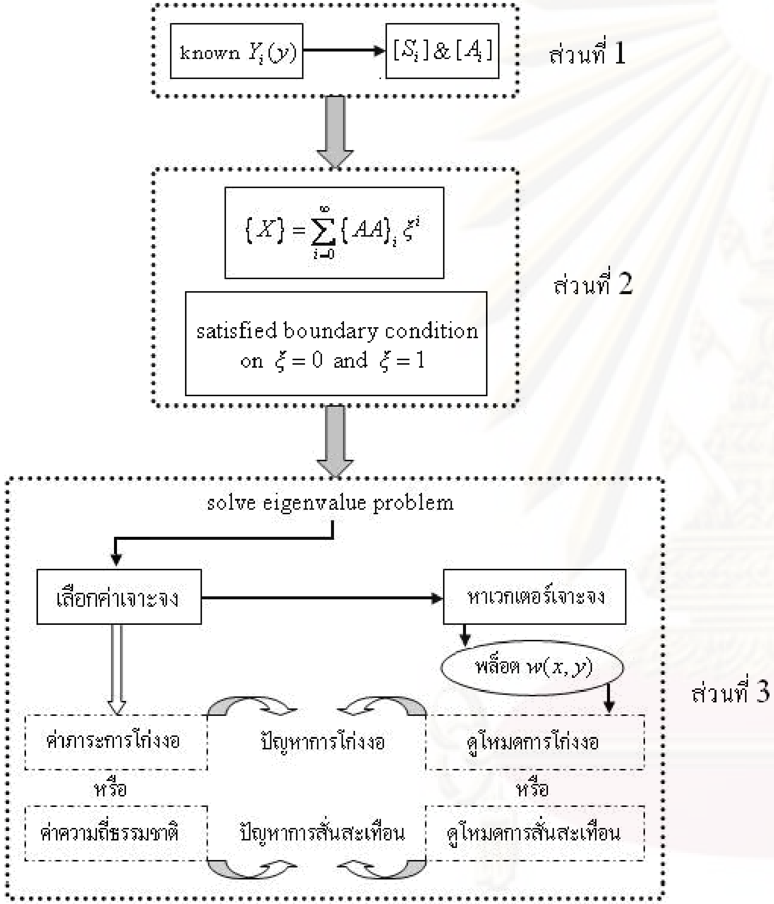
## 5.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับใช้ในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็นสองส่วนหลัก ๆ คือ ส่วนที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอและแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางในแต่ละส่วนแบ่งการแก้ปัญหาออกเป็นสองกรณี คือ กรณีที่กำหนดให้ฟังก์ชัน $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าและกรณีที่กำหนดให้ฟังก์ชัน $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันทราบค่าสำหรับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช สำหรับการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้ในการคำนวณรอบแรกกำหนดให้ฟังก์ชัน $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันทราบค่าเริ่มต้น จากสมการและลำดับขั้นตอนที่ได้กล่าวในบทที่ 4 สามารถแบ่งส่วนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นออกเป็นสามส่วน ดังแสดงในแผนผังในรูปที่ 5.1 คือ

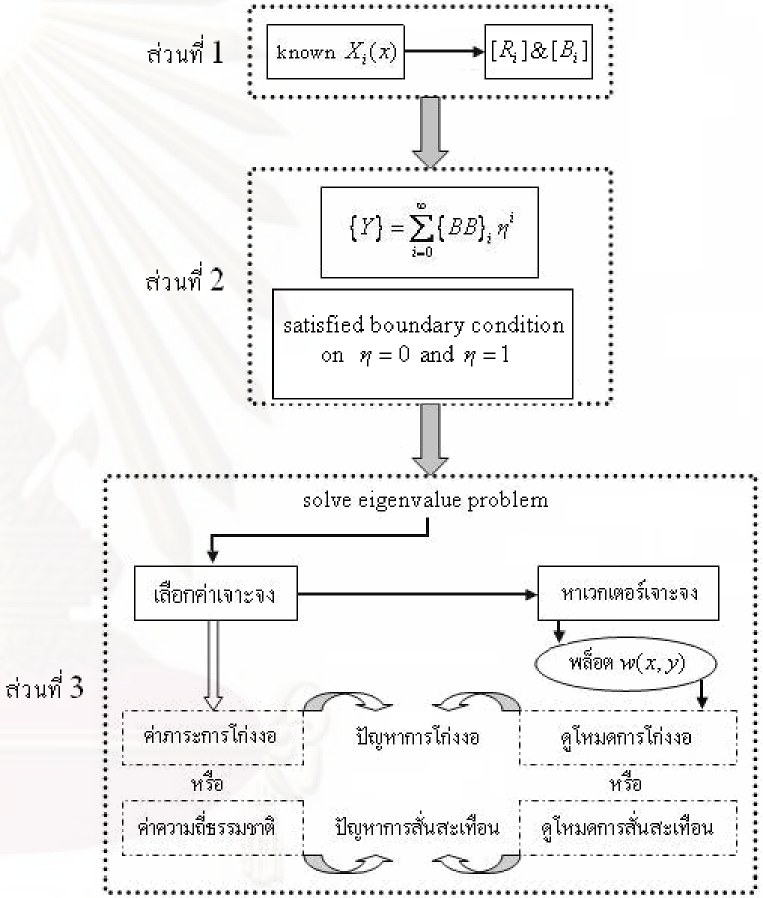
ส่วนที่ 1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่หาค่าเมตริกซ์ทราบค่าจากฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่า ในสมการ (4-7)

ส่วนที่ 2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่หาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของขอบที่ไม่ทราบฟังก์ชันเริ่มต้น

ส่วนที่ 3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่แก้ปัญหาค่าเจาะจง โดยพล็อตกราฟหาค่าเจาะจงที่ทำให้พลังงานรวมมีค่าต่ำสุด แล้วนำค่าเจาะจงที่ได้ไปหาเวกเตอร์เจาะจง สำหรับใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการทำซ้ำในรอบต่อไป




(a) ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยฟังก์ชัน $Y_i(y)$ เป็นตัวทราบค่า




(b) ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยฟังก์ชัน $X_i(x)$ เป็นตัวทราบค่า

รูปที่ 5.1 ขั้นตอนการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น



52

ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางตามแผนผังในรูปที่ 5.1 ได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 5.2 และ 5.3 ตามลำดับ ส่วนรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาทั้งสอง แสดงไว้ในภาคผนวก ก

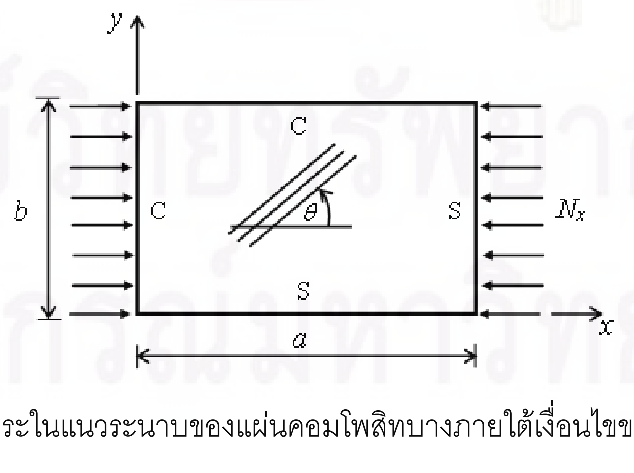
## 5.2 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบาง

ในหัวข้อนี้อธิบายขั้นตอนการหาค่าภาระการโก่งงอที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ แผ่นคอมโพสิทที่ต้องการหาค่าภาระการโก่งงอในหัวข้อนี้มีลักษณะเช่นเดียวกับการศึกษาที่ผ่านมาในอดีตของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [9] มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว คือ $N_x$ ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC ดังแสดงในรูปที่ 5.2 โดยอักษรย่อของการจับยึดชิ้นงานและระบบแกนพิกัดที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.3 รูปที่ 5.3 (a) แสดงลำดับการเรียกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด รูปที่ 5.3 (b) แสดงการจับยึดชิ้นงานแบบ CSFC โดยตัวอักษร C ตัวแรกและตัวที่สี่แสดงเงื่อนไขขอบเขตที่ $x=0$ และ $y=b$ ตามลำดับ ส่วนตัวอักษร S ตัวที่สองแสดงเงื่อนไขขอบเขตที่ $y=0$ และตัวอักษร F ตัวที่สามแสดงเงื่อนไขขอบเขตที่ $x=a$ ส่วนระบบแกนพิกัดและความยาวของชิ้นงานมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.3 (c) สำหรับค่าภาระการโก่งงอในการศึกษานี้นำเสนอในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย (nondimensional buckling load) ซึ่งคำนวณได้จาก

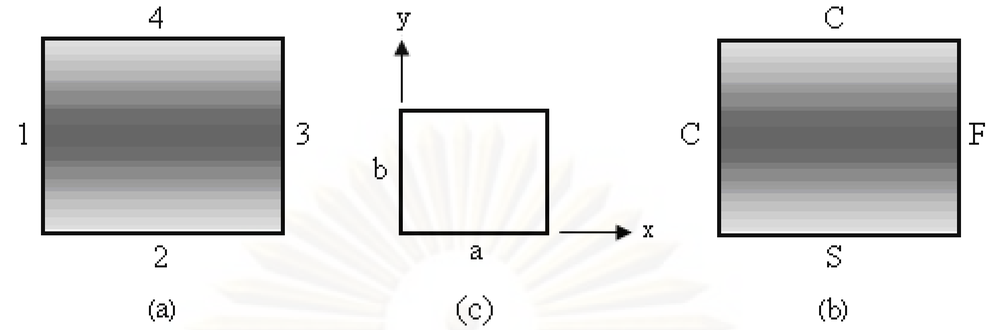
$$K_{cr} = (N_x^{cr} b^2 / \pi^2 D_{22}) \tag{5-1}$$

คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ศึกษา คือ

$$E_1/E_2 = 3 \qquad G_{12}/E_2 = 0.5 \qquad \nu_{12} = 0.25$$




รูปที่ 5.2 การรับภาระในแนวระนาบของแผ่นคอมโพสิทบางภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบ CSSC




รูปที่ 5.3 อักษรย่อแสดงลักษณะการจับยึดและระบบแกนพิกัด

(a) ลำดับการเรียกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด BC = 1-2-3-4

(b) ตัวอย่างเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSFC

(c) ระบบแกนพิกัดและความยาวของชิ้นงาน

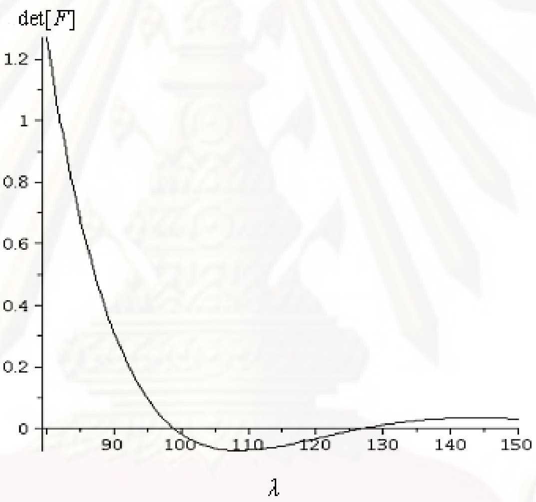
ขั้นตอนการคำนวณแสดงดังแผนผังในรูปที่ 5.1(a) โปรแกรมส่วนแรกทำหน้าที่หาค่าเมตริกซ์ทราบค่าจากฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมุติขึ้น การคำนวณรอบแรกเริ่มจากสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $y$ หรือฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ในสมการ (4-7) โดยฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ที่สมมุติขึ้นไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$ ตัวอย่างนี้ใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในสมการ (4-7) เท่ากับ 1 ($N=1$) โดยสมมุติค่า $Y_1(y)=y^6$ จากนั้นนำฟังก์ชันเริ่มต้น $Y_1(y)$ ที่สมมุติขึ้นไปหาเมตริกซ์ทราบค่า $[S_i]$ ตามสมการ (4-9) และเมตริกซ์ทราบค่า $[A_i]$ ตามสมการ (4-17) และ (4-23) จากนั้นโปรแกรมในส่วนที่สองจะหาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของขอบที่ไม่ทราบฟังก์ชันเริ่มต้นคือ ที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ โดยกำหนดฟังก์ชัน $X_i(x)$ ที่ต้องหาให้อยู่ในรูปแบบของอนุกรมกำลังอนันต์ตามสมการ (4-25) จากนั้นแทนฟังก์ชัน $X_i(x)$ ที่กำหนดขึ้นลงในสมการ (4-16) และเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสมการ (4-26) ทำให้สามารถเขียนค่า $\{AA\}_{i+4}$ ให้อยู่ในรูปของ $\{AA\}_{i+3}$, $\{AA\}_{i+2}$, $\{AA\}_{i+1}$ และ $\{AA\}_i$ ได้ ดังนั้นจะมีจำนวนเวกเตอร์เจาะจงสำหรับการแก้ปัญหาค่าเจาะจงมีเพียง $4N$ ตัวเท่านั้น เมื่อแทนสมการ (4-25) ที่จัดรูปใหม่โดยใช้สมการ (4-26) ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในด้านที่ไม่ทราบฟังก์ชันเริ่มต้น ซึ่งในที่นี้คือด้าน $x$ โดยที่ตำแหน่ง $x=0$ มีการจับยึดแบบยึดแน่น และที่ตำแหน่ง $x=a$ มีการจับยึดแบบง่าย ตามเงื่อนไขในสมการ (4-19 ถึง 4-22) แล้วจัดรูปแบบสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของขอบที่ไม่ทราบฟังก์ชันเริ่มต้นให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ในรูป

$$[F]\times[G]=0 \qquad (5\text{-}2)$$

โดย $[F]$ คือ เมตริกซ์จัตุรัสขนาด $[4N \times 4N]$ ที่มีค่าเจาะจงเป็นตัวแปรไม่ทราบค่าอยู่ เมตริกซ์นี้ได้จากเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ตำแหน่งขอบของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า

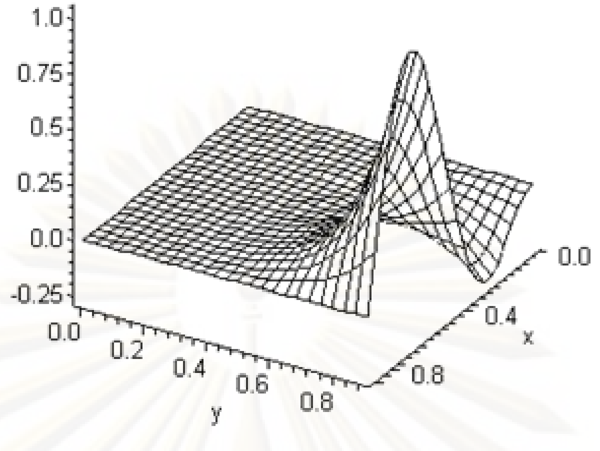
$[G]$ คือ เมตริกซ์หลักของค่าเวกเตอร์เจาะจงที่ไม่ทราบค่ามีจำนวนเท่ากับ $4N$ ตัว

ส่วนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ส่วนสุดท้ายทำหน้าที่แก้ปัญหาค่าเจาะจง จากสมการ (5-2) พบว่าสมาชิกของ $[G]$ จะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน เมื่อค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ $[F]$ มีค่าเป็นศูนย์ นั้นคือค่าภาระการโก่งงอสามารถหาได้จากการแก้สมการ $\det[F]=0$ ซึ่งเมื่อเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\det[F]$ กับค่าเจาะจง $\lambda$ จะได้ดังรูปที่ 5.4




รูปที่ 5.4 การหารากคำตอบของปัญหาค่าเจาะจง

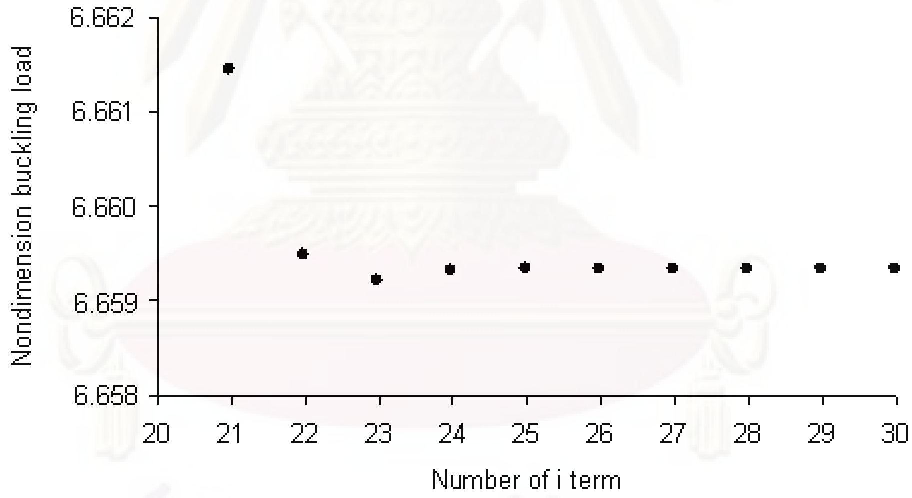
จากรูปที่ 5.4 จะเห็นว่าได้ค่า $\lambda$ หลายค่าจากการแก้สมการ ซึ่งค่า $\lambda$ แต่ละค่าเป็นค่าที่ทำให้พลังงานรวมมีค่าต่ำสุดตามเงื่อนไขที่ได้ตั้งไว้ โดยค่าภาระการโก่งงอคือค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุด จากกราฟในรูปที่ 5.4 จะได้ค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับ 98.920 ซึ่งหาได้โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน และเมื่อใช้ความสัมพันธ์ของสมการ (4-24) และ (4-18) สามารถหาค่าภาระการโก่งงอรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $K_{cr}$ มีค่าเท่ากับ 14.649 จากนั้นแก้สมการ (5-2) เพื่อหาค่าเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นตัวไม่ทราบค่าของฟังก์ชัน $X_i(x)$ โดยรูปร่างโหมดการโก่งงอจะได้จากการพล็อตสมการ (4-7) ดังแสดงในรูปที่ 5.5 ซึ่งจะเห็นได้ว่ารูปร่างโหมดการโก่งงอที่ได้จากการคำนวณครั้งแรกจะยังไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของแผ่นคอมโพสิท เนื่องจากฟังก์ชันเริ่มต้น $Y_1(y)$ ที่สมมุติไม่สอดคล้องกับการจับยึดในด้าน $y$




รูปที่ 5.5 รูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทจากการคำนวณรอบแรก

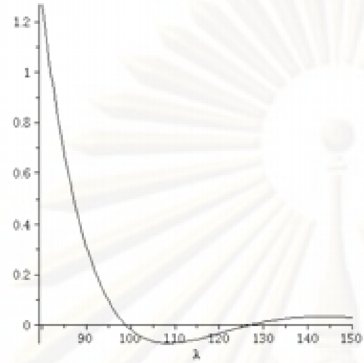
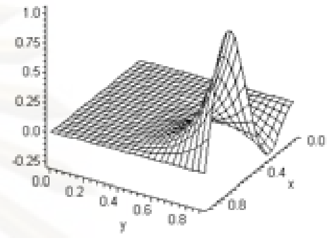
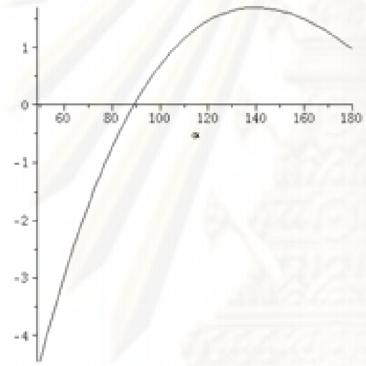
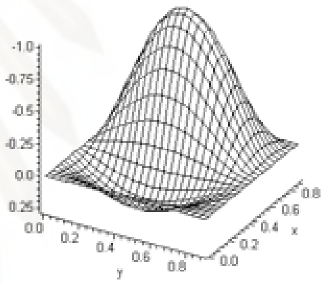
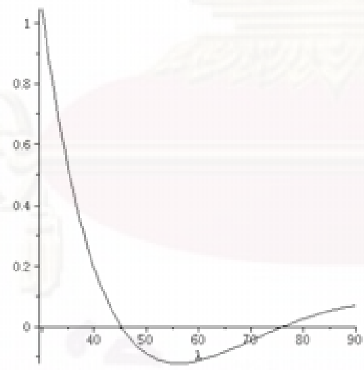
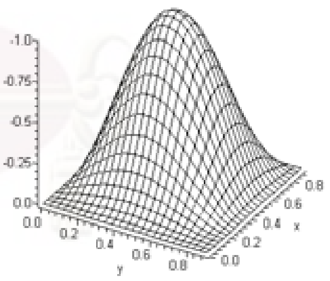
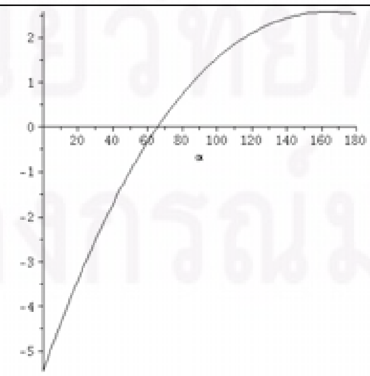
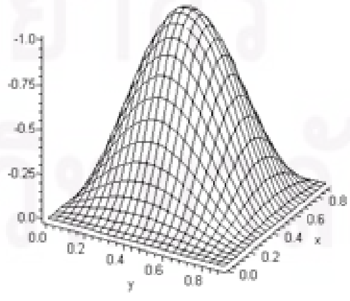
จากการคำนวณรอบแรกจะได้ฟังก์ชัน $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณรอบที่สองและจากแผนผังในรูปที่ 5.1(b) พบว่าลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาจากด้านที่กำหนดให้ฟังก์ชัน $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันทราบค่าจะมีกระบวนการคล้ายกับด้านที่กำหนดให้ฟังก์ชัน $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันทราบค่า การคำนวณรอบที่สองเริ่มจากนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ ที่ได้จากการคำนวณรอบแรกไปหาเมตริกซ์ทราบค่า $[R_i]$ ตามสมการ (4-29) และเมตริกซ์ทราบค่า $[B_i]$ ตามสมการ (4-37) และ (4-43) จากนั้นหาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของขอบที่ไม่ทราบฟังก์ชันเริ่มต้น โดยกำหนดฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ที่ต้องการทราบให้อยู่ในรูปแบบของอนุกรมกำลังอนันต์ตามสมการ (4-45) แทนฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ที่กำหนดขึ้นลงในสมการ (4-36) ได้สมการดังสมการ (4-46) ทำให้สามารถเขียนค่า $\{BB\}_{i+4}$ ให้อยู่ในรูปของ $\{BB\}_{i+3}$, $\{BB\}_{i+2}$, $\{BB\}_{i+1}$ และ $\{BB\}_i$ ได้ เวกเตอร์เจาะจงในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงมีจำนวนเท่ากับ $4N$ ตัวเช่นเดียวกับการคำนวณรอบแรก โดยในการคำนวณรอบนี้มี $\alpha$ เป็นค่าเจาะจง จากนั้นหาค่าเจาะจง $\alpha$ และเวกเตอร์เจาะจงของฟังก์ชัน $Y_i(y)$ โดยแทนสมการ (4-45) ที่จัดรูปใหม่โดยใช้สมการ (4-46) ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในด้านที่ไม่ทราบฟังก์ชันเริ่มต้น คือ ด้าน $y$ โดยที่ตำแหน่ง $y=0$ มีการจับยึดแบบง่าย และที่ตำแหน่ง $y=b$ มีการจับยึดแบบยึดแน่น ตามเงื่อนไขในสมการ (4-39 ถึง 4-42) ในแก้ปัญหาค่าเจาะจงรอบที่สองได้ค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับ 88.997 และจากความสัมพันธ์ของสมการ (4-44) และ (4-38) ได้ค่าภาระการโก่งงอรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $K_{cr}$ มีค่าเท่ากับ 9.017 ในการคำนวณรอบที่สองจะได้ฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ที่ใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณรอบที่สามต่อไป โดยในการคำนวณรอบที่สามจะมีลำดับขั้นตอนเช่นเดียวกับการคำนวณรอบแรก ตารางที่ 5-1 แสดงค่าเจาะจงจากการแก้ปัญหา

ค่าเจาะจง ค่าภาระการโก่งงอรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $K_{cr}$ รูปร่างโหมดการโก่งงอ และกราฟที่ได้จากการแก้ปัญหาค่าเจาะจงในแต่ละรอบการคำนวณ โดยกระบวนการในการคำนวณซ้ำจะทำจนกระทั่งค่าเจาะจงมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าการคำนวณในรอบที่สี่และห้าจะได้ค่าเจาะจงที่มีค่าเท่ากัน ดังนั้นค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอของชิ้นงานที่ศึกษาคือผลที่ได้จากการคำนวณในรอบที่ห้า ซึ่งได้ค่าภาระการโก่งงอรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $K_{cr}$ เท่ากับ 6.659 และเนื่องจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นวิธีเชิงตัวเลข ดังนั้นจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นจึงมีผลต่อการลู่เข้าของผลลัพธ์ รูปที่ 5.6 แสดงค่าภาระการโก่งงอรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $K_{cr}$ จากการใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณระหว่าง 20 ถึง 30 พจน์ จากรูปพบว่าค่าภาระการโก่งงอจะเริ่มลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เมื่อใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 26 พจน์ขึ้นไป แต่ถ้าใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นน้อยกว่า 26 พจน์ จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้คลาดเคลื่อนจากผลเฉลยที่ต้องการ ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นจะมีผลต่อการลู่เข้าของค่าเจาะจง

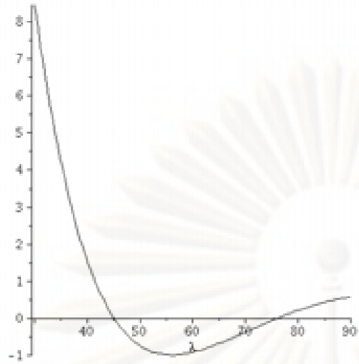
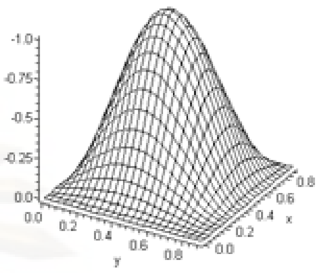



รูปที่ 5.6 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าภาระการโก่งงอและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ตารางที่ 5-1 ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอในแต่ละรอบการคำนวณ

| Iteration no. | graph | Eigenvalue ( $K_{cr}$ ) | Buckling mode |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 98.920 (14.649) |  |
| 2 |  | 88.997 ( 9.017 ) |  |
| 3 |  | 45.157 ( 6.687 ) |  |
| 4 |  | 65.728 ( 6.659 ) |  |

ตารางที่ 5-1 (ต่อ)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 |  | 44.971<br>( 6.659 ) |  |

## 5.3 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบาง

ขั้นตอนการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนมีลักษณะคล้ายกับปัญหาการโก่งงอซึ่งแสดงไว้ดังแผนผังในรูปที่ 5.1 ตัวอย่างปัญหาที่ใช้แสดงขั้นตอนการหาค่าความถี่ธรรมชาติมีลักษณะเช่นเดียวกับการศึกษาของ Chen และคณะ [22] ซึ่งศึกษาแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ [0/90/0] ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS โดยคุณสมบัติของวัสดุที่ศึกษา มีดังนี้

$$E_1/E_2 = 2.45 \qquad G_{12}/E_2 = 0.48 \qquad v_{12} = 0.23$$
$$a = b = 10\ \ m \qquad h = 0.06\ \ m \qquad \rho = 8000\ \ kg/m^3$$

การศึกษาในตัวอย่างนี้แสดงค่าความถี่ธรรมชาติในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย (dimensionless frequency parameter) ซึ่งนิยามว่า

$$\beta = (\rho h \omega^2 a^4 / D_0)^{1/2} \quad \text{โดย} \quad D_0 = E_1 h^3 / 12(1 - v_{12} v_{21}) \tag{5-3}$$

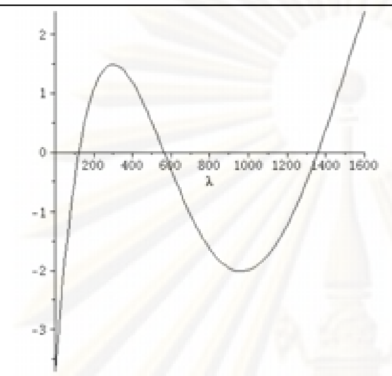
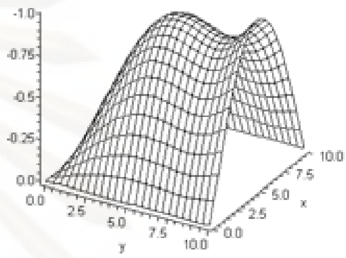
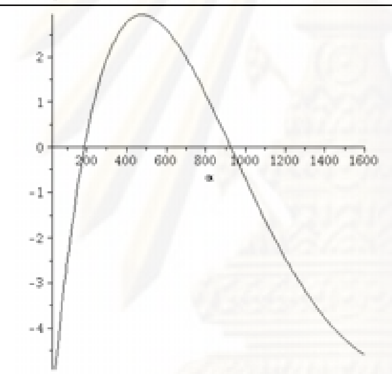
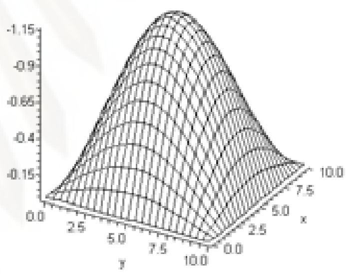
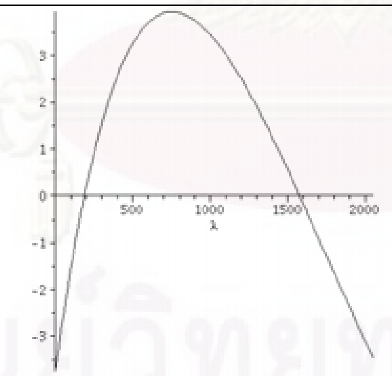
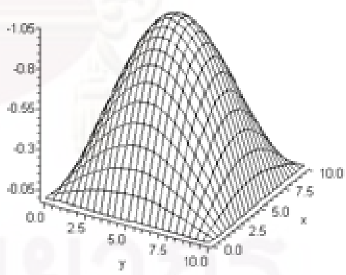
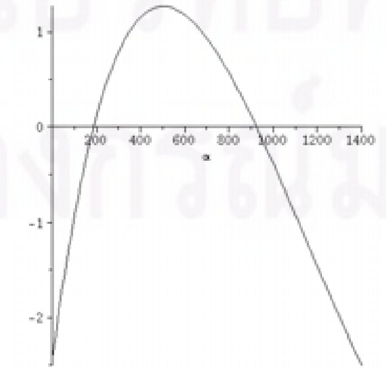
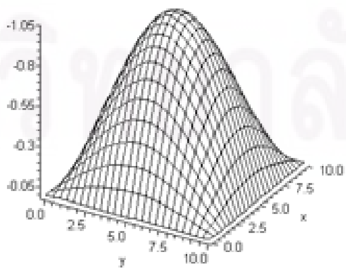
ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนนี้จะใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในสมการ (4-7) เท่ากับ 3 ( $N = 3$ ) ทั้งนี้เพื่อต้องการให้เห็นกระบวนการในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเมื่อใช้จำนวนพจน์ที่สมมุติค่าฟังชันก์เริ่มต้นแตกต่างกัน โดยในการคำนวณรอบแรกสมมุติค่า $Y_1(y) = y^6$ , $Y_2(y) = \sin(\pi y / b)$ , $Y_3(y) = y^{15}$ การสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นให้อยู่ในฟังก์ชันที่ต่างกันก็เพราะต้องการแสดงให้เห็นว่าในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถคำนวณหาคำตอบที่แม่นยำได้แม้จะใช้ฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณที่แตกต่างกัน จากนั้นนำฟังก์ชันเริ่มต้น $Y_i(y)$ ที่สมมุติไปหาเมตริกซ์ทราบค่า $[S_i]$ ตามสมการ (4-51) และ

เมตริกซ์ทราบค่า $[A_i]$ ตามสมการ (4-59) และ (4-64) และกำหนดฟังก์ชัน $X_i(x)$ ที่ต้องการทราบอยู่ในรูปแบบของอนุกรมกำลังอนันต์ตามสมการ (4-25) ทำให้ได้เวกเตอร์เจาะจงในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงจำนวนเท่ากับ $4N$ ตัวเช่นเดียวกับปัญหาการโก่งงอ แทนสมการ (4-25) ที่จัดรูปใหม่โดยใช้สมการ (4-65) ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้าน $x$ แล้วจัดรูปแบบสมการให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นตามสมการ (5-2) โดยค่าเจาะจงสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนคือ $\omega^2$ จากนั้นแก้สมการหาค่าเจาะจงและค่าเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นตัวไม่ทราบค่าของฟังก์ชัน $X_i(x)$ เพื่อจะใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณรอบที่สอง ซึ่งขั้นตอนในการคำนวณรอบที่สองนี้มีลักษณะคล้ายกับการแก้ปัญหาการโก่งงอแต่สมการที่ใช้คำนวณจะเปลี่ยนไปคือนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ ที่ได้จากการคำนวณรอบแรกไปหาค่า $[R_i]$ จากสมการ (4-67) และ $[B_i]$ จากสมการ (4-75) และ (4-80) และกำหนดฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ที่ต้องการทราบให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ตามสมการ (4-45) ซึ่งทำให้การแก้ปัญหาอยู่ในรูปการแก้ปัญหาค่าเจาะจงโดยมีค่าเจาะจงคือ $\omega^2$ และจำนวนเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นตัวไม่ทราบค่าของฟังก์ชัน $Y_i(y)$ เท่ากับ $4N$ ตัวเช่นเดียวกับการคำนวณรอบแรก จากการคำนวณรอบที่สองจะได้ฟังก์ชัน $Y_i(y)$ สำหรับใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณรอบต่อไป รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนในแต่ละรอบการคำนวณหาได้จากการพล็อตสมการ (4-7) สำหรับกรณีของปัญหาการสั่นสะเทือนค่าเจาะจงที่หาได้คือค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนซึ่งมีหลายค่า ตารางที่ 5-2 5-3 และ 5-4 แสดงค่าเจาะจงจากการแก้ปัญหาค่าเจาะจง ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\beta$ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน รวมถึงกราฟที่ใช้สำหรับแก้ปัญหาค่าเจาะจงในแต่ละรอบการคำนวณของค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนสามโหมดแรก ตามลำดับ

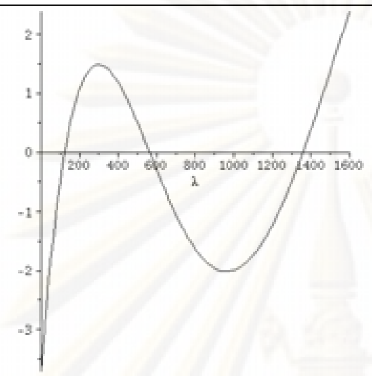
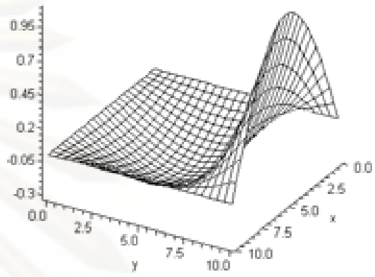
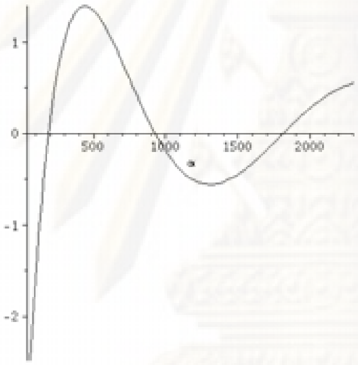
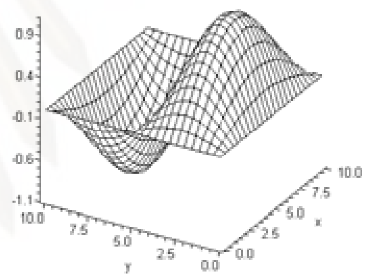
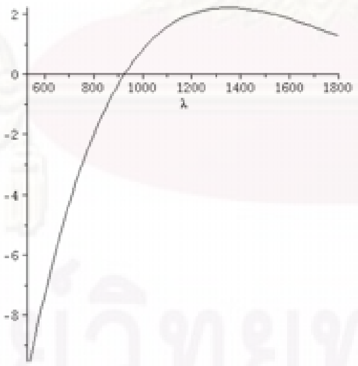
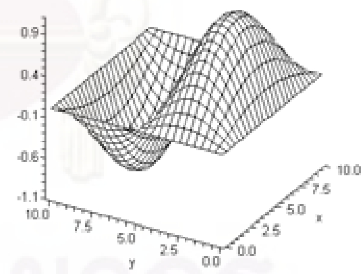
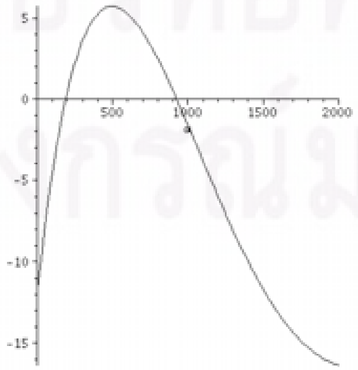
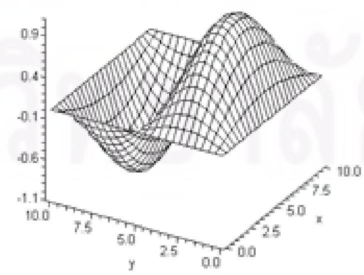
ตารางที่ 5-2 แสดงการหาค่าความถี่ธรรมชาติโหมดแรก การคำนวณรอบแรกเลือกค่าเจาะจงที่น้อยที่สุดก่อนเพราะเป็นค่าที่ทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าน้อยที่สุด โดยค่าเจาะจงที่เลือกมีค่าเท่ากับ 122.280 ซึ่งได้ค่าความถี่ธรรมชาติรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\beta$ เท่ากับ 12.261 ในการคำนวณครั้งที่สองก็เลือกค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 187.197 และในคำนวณครั้งต่อ ๆ ไปก็ยังคงเลือกค่าเจาะจงที่น้อยที่สุดเช่นเดียวกัน โดยกระบวนการในการทำซ้ำจะทำจนกระทั่งค่าเจาะจงมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกับปัญหาการโก่งงอ ซึ่งในการหาค่าความถี่ธรรมชาติโหมดแรกใช้จำนวนรอบในการคำนวณจำนวนสี่รอบ โดยในรอบที่สามและรอบที่สี่ได้ค่าเจาะจงเท่ากันคือ 187.197 และได้ค่าความถี่ธรรมชาติรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\beta$ เท่ากับ 15.170 จากการหาค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดนี้สังเกตุได้ว่า ค่าเจาะจงในการคำนวณครั้งที่พิจารณาจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าเจาะจงในการคำนวณครั้งก่อนหน้านี้ เนื่องจากต้องการให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้า

จากข้อสังเกตุดังกล่าวได้นำไปหาค่าความถี่ธรรมชาติโหมดที่สอง ซึ่งผลการคำนวณได้แสดงในตารางที่ 5-3 โดยจะพิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าถัดจากโหมดแรก ในการคำนวณรอบแรกเลือกค่าเจาะจงเท่ากับ 562.808 ซึ่งมีค่าถัดจากค่าเจาะจงของโหมดแรก ได้ค่าความถี่ธรรมชาติรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\beta$ เท่ากับ 26.304 ในการคำนวณรอบที่สองจากกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\det[F]$ กับค่าเจาะจง พบว่าที่ค่าเจาะจงตัวที่น้อยที่สุดจะมีค่าประมาณ 200 ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับค่าเจาะจงของค่าความถี่ธรรมชาติโหมดแรก ดังนั้นจึงเลือกค่าเจาะจงค่าถัดมาซึ่งมีค่าเท่ากับ 925.223 เพื่อหลีกเลี่ยงการหาค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดที่ทราบค่าแล้ว ในการคำนวณรอบที่สามจะพิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณรอบที่สอง โดยในการคำนวณรอบนี้ได้ค่าเจาะจงเท่ากับ 925.219 และในการคำนวณรอบที่สี่ก็จะพิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณรอบที่สาม โดยได้ค่าเจาะจงเท่ากับ 925.219 ซึ่งเท่ากับการคำนวณครั้งที่สาม ทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\beta$ ของโหมดที่สองมีค่าเท่ากับ 33.726 จากการหาค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดนี้สังเกตุได้ว่าถ้าเป็นค่าความถี่ธรรมชาติค่าที่ยังไม่ทราบค่าลักษณะของโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากค่าเจาะจงที่กำลังพิจารณาจะมีรูปร่างไม่เหมือนกับโหมดที่ทราบค่าแล้ว ซึ่งโหมดการสั่นสะเทือนของความถี่ธรรมชาติโหมดที่สองมีค่า [m=1,n=2] ส่วนโหมดการสั่นสะเทือนของความถี่ธรรมชาติโหมดแรกมีค่า [m=1,n=1] และการหาค่าความถี่ธรรมชาติโหมดที่สาม แสดงในตารางที่ 5-4 การคำนวณรอบแรกเลือกค่าเจาะจงเท่ากับ 562.808 ซึ่งค่าเดียวกับการหาค่าความถี่ธรรมชาติโหมดที่สอง การคำนวณครั้งที่สองพิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าถัดจากค่าเจาะจงที่พิจารณาค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดที่สอง ในการคำนวณรอบที่สองนี้เลือกค่าเจาะจงที่มีค่าเท่ากับ 1814.265 การคำนวณรอบที่สามจะพิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณครั้งที่สองซึ่งได้ค่าเท่ากับ 1576.497 ในการคำนวณรอบที่สี่ก็พิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณในรอบที่สาม โดยได้ค่าเจาะจงมีค่าเท่ากับ 1576.497 ซึ่งเท่ากับการคำนวณรอบที่สาม ดังนั้นค่าความถี่ธรรมชาติในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\beta$ ของการสั่นสะเทือนโหมดที่สามมีค่าเท่ากับ 44.024 และมีโหมดการสั่นสะเทือนคือ [m=2,n=1] โดยลักษณะโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท แสดงในรูปที่ 5.7 ซึ่งค่า m, n คือ จำนวนโหมดที่เกิดขึ้นตลอดความยาวด้านแกน $x$ และ $y$ ตามลำดับ

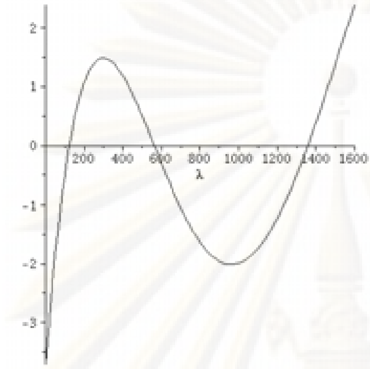
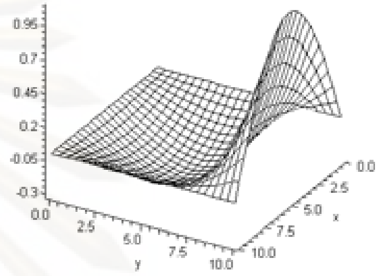
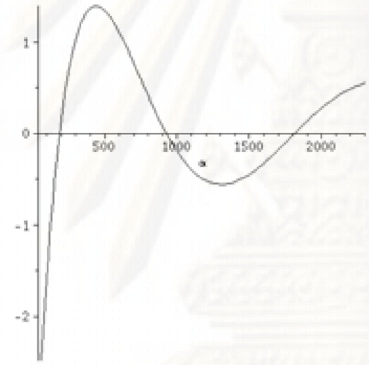
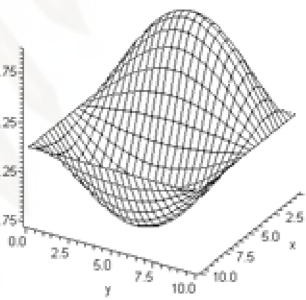
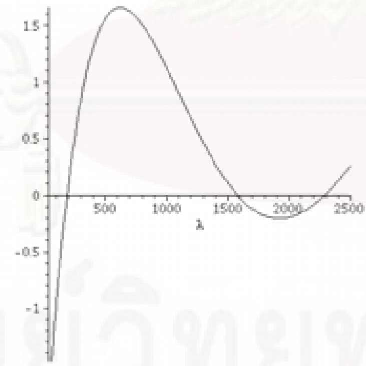
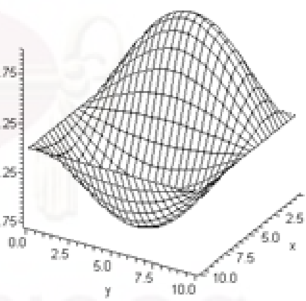
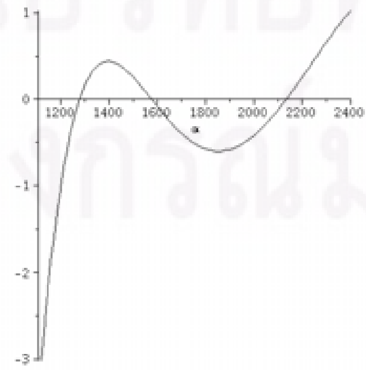
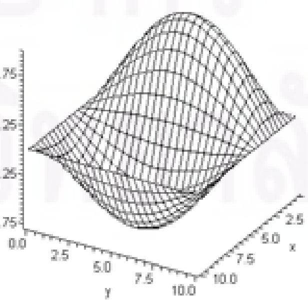
ตารางที่ 5-2 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนในแต่ละรอบการคำนวณของการสั่นสะเทือนในโหมดที่หนึ่ง

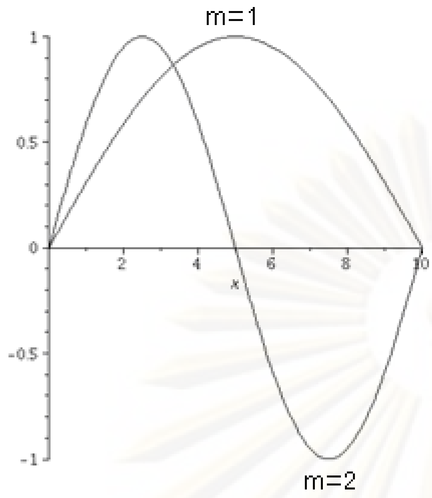
| Iteration no. | graph | Eigenvalue ( $\beta$ ) | Mode shape |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 122.280<br>(12.261) |  |
| 2 |  | 187.197<br>(15.170) |  |
| 3 |  | 187.197<br>(15.170) |  |
| 4 |  | 187.197<br>(15.170) |  |

ตารางที่ 5-3 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนในแต่ละรอบการคำนวณของการสั่นสะเทือนในโหมดที่สอง

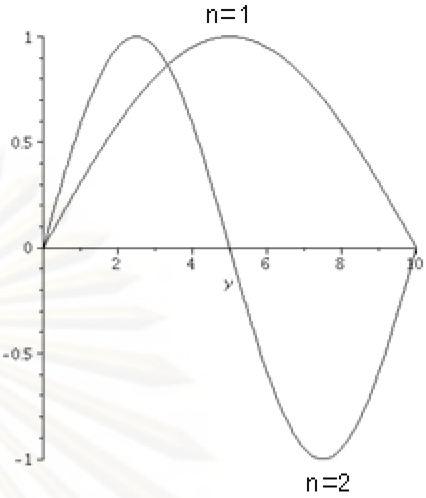
| Iteration no. | graph | Eigenvalue ( $\beta$ ) | Mode shape |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 562.808<br>(26.304) |  |
| 2 |  | 925.223<br>(33.728) |  |
| 3 |  | 925.219<br>(33.726) |  |
| 4 |  | 925.219<br>(33.726) |  |

ตารางที่ 5-4 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนในแต่ละรอบการคำนวณของการสั่นสะเทือนในโหมดที่สาม

| Iteration no. | graph | Eigenvalue ( $\beta$ ) | Mode shape |
|---|---|---|---|
| 1 |   | 562.808<br>(26.304) |   |
| 2 |   | 1814.265<br>(47.228) |   |
| 3 |   | 1576.497<br>(44.024) |   |
| 4 |   | 1576.497<br>(44.024) |   |




(a)




(b)

รูปที่ 5.7 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

(a) รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนบนแกน $x$ (S-S)

(b) รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนบนแกน $y$ (S-S)

ในบทนี้ได้แสดงให้เห็นลำดับขั้นตอนรวมถึงสมการที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาทั้งสองอย่างละเอียด จากตัวอย่างการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอ รูปร่างโหมดการโก่งงอ ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน จะเห็นได้ว่าการแก้ปัญหาการโก่งงอมีความซับซ้อนน้อยกว่าการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน เนื่องจากค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทจะพิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุดจากการหาคำตอบของปัญหาค่าเจาะจงเท่านั้น ส่วนปัญหาการสั่นสะเทือนจะพิจารณาค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุดสำหรับการสั่นสะเทือนโหมดแรกเท่านั้น ส่วนการสั่นสะเทือนในโหมดที่สูงขึ้นจะต้องพิจารณาค่าความถี่ธรรมชาติที่ไม่ซ้ำกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ทราบค่าแล้ว ดังแสดงในหัวข้อที่ 5.2 สำหรับปัญหาการโก่งงอและหัวข้อที่ 5.3 สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือน จากการศึกษาพบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้หลักการของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถหาค่าภาระการโก่งงอ รูปร่างโหมดการโก่งงอ ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้ ดังนั้นในบทที่ 6 และ 7 จะได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางต่อไป

# บทที่ 6

# การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในบทที่ 5 ได้กล่าวถึงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นและอธิบายลำดับขั้นตอนพร้อมทั้งตัวอย่างการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช จะเห็นได้ว่าในการหาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอมีลำดับขั้นตอนเหมือนกับการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนโหมดแรกของปัญหาการสั่นสะเทือน สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะเป็นการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับหรือมากกว่า 1 พจน์ การตรวจสอบแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาของ Shufrin และคณะ [11] ซึ่งแก้ปัญหาการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเช่นเดียวกันและตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาอื่น ๆ นอกจากเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นแล้วยังทำให้ทราบถึงผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอ

### 6.1 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาของ Shufrin และคณะ [11]

การศึกษาส่วนในหัวข้อนี้จะเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับผลการศึกษาในอดีตของ Shufrin และคณะ [11] ที่ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเช่นเดียวกัน การตรวจสอบแบ่งออกเป็นสองกรณีคือ กรณีแผ่นคอมโพสิทรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และแบบ angle-ply ในกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply ศึกษาชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0]_8$ และ $[0/90]_{2S}$ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC ส่วนกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ศึกษาชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ [30/-30/30] ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสองแบบคือ SSSS และ CCCC โดยค่าภาระการโก่งงอจะแสดงในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย ในกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply สามารถหาค่าภาระการโก่งงอในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วยได้ตามสมการ (5-1) ส่วนกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply หาค่าภาระการโก่งงอในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วยได้จาก

$$K_{cr} = N_x b^2 / D_0 \quad \text{โดย} \quad D_0 = E_1 h^3 / 12(1 - v_{12} v_{21}) \qquad (6\text{-}1)$$

คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ศึกษาแยกตามลักษณะการวางตัวของเส้นใยคือ

กรณีแบบ cross-ply $G_{12}/E_2 = 0.5 \quad v_{12} = 0.25$

และกรณีแบบ angle-ply $E_1/E_2 = 2.45 \quad G_{12}/E_2 = 0.48 \quad v_{12} = 0.23$

การตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นทำได้โดยนำค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอของการวางตัวของเส้นใยทั้งสองกรณีที่ได้เปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Shufrin และคณะ [11] ผลการเปรียบเทียบของกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply แสดงในตารางที่ 6-1 และ 6-2 ตามลำดับ โดยผลการศึกษาของ Shufrin แสดงในช่อง Ref. [11] ส่วนผลที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์แสดงในช่อง Present

ตารางที่ 6-1 ผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply

| Case Study | Aspect ratio | N=2 | | | N=3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $K_{cr}$ | | Buckling Mode | $K_{cr}$ | | Buckling Mode |
| | | Ref. [11] | Present | Ref. [11]/ Present | Ref. [11] | Present | Ref. [11]/ Present |
| $[0]_8$ | 1.0 | 10.9041 | 10.9041 | 1/1 | 10.9040 | 10.9040 | 1/1 |
| | 1.5 | 9.5839 | 9.5839 | 1/1 | 9.5839 | 9.5839 | 1/1 |
| $E_1/E_2=3$ | 2.0 | 9.0013 | 9.0013 | 2/2 | 9.0011 | 9.0011 | 2/2 |
| $[0]_8$ | 1.0 | 25.2792 | 25.2792 | 1/1 | 25.2791 | 25.2791 | 1/1 |
| | 1.5 | 16.3397 | 16.3397 | 1/1 | 16.3396 | 16.3396 | 1/1 |
| $E_1/E_2=10$ | 2.0 | 15.2220 | 15.2220 | 1/1 | 15.2220 | 15.2220 | 1/1 |
| $[0/90]_{2S}$ | 1.0 | 6.6556 | 6.6556 | 1/1 | 6.6556 | 6.6556 | 1/1 |
| | 1.5 | 6.2900 | 6.2900 | 2/2 | 6.2899 | 6.2899 | 2/2 |
| $E_1/E_2=3$ | 2.0 | 5.8398 | 5.8398 | 2/2 | 5.8398 | 5.8398 | 2/2 |
| $[0/90]_{2S}$ | 1.0 | 6.5568 | 6.5568 | 1/1 | 6.5568 | 6.5568 | 1/1 |
| | 1.5 | 6.0553 | 6.0553 | 2/2 | 6.0553 | 6.0553 | 2/2 |
| $E_1/E_2=10$ | 2.0 | 5.4598 | 5.4598 | 2/2 | 5.4598 | 5.4598 | 2/2 |

ตารางที่ 6-2 ผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply

| Number of N term | Boundary condition | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | SSSS | | | CCCC | | |
| | Ref. [11] | Present | Ref. [11] / Present | Ref. [11] | Present | Ref. [11] / Present |
| 1 | 26.6767 | 26.6767 | 1/1 | 65.2666 | 65.2666 | 1/1 |
| 2 | 25.3194 | 25.3194 | 1/1 | 62.0520 | 62.0520 | 1/1 |
| 3 | 25.2926 | 25.2926 | 1/1 | 62.0471 | 62.0471 | 1/1 |
| 4 | 25.2594 | 25.2594 | 1/1 | 62.0449 | 62.0449 | 1/1 |
| 5 | 25.2551 | 25.2551 | 1/1 | 62.0447 | 62.0447 | 1/1 |
| 6 | 25.2514 | 25.2514 | 1/1 | 62.0446 | 62.0446 | 1/1 |

จากการเปรียบเทียบพบว่าค่าภาระโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับผลการศึกษาที่มีในอดีตมีค่าเท่ากันทุกกรณีศึกษา ดังนั้นแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในส่วนปัญหาการโก่งงอสามารถคำนวณค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอได้อย่างแม่นยำเมื่อเปรียบเทียบกับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเช่นเดียวกัน

## 6.2 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาอื่น ๆ

จากการตรวจสอบโปรแกรมในส่วนแรกพบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถประมาณค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอได้อย่างแม่นยำเมื่อเทียบกับผลการศึกษาในอดีตที่แก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเช่นเดียวกัน และเพื่อยืนยันว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถน่าเชื่อถือได้ การตรวจสอบโปรแกรมในส่วนนี้จะนำค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาในอดีตที่แก้ปัญหาด้วยวิธีอื่น ๆ กรณีแรกที่เปรียบเทียบคือกรณีของแผ่นคอมโพสิทที่มีผลการศึกษาที่สามารถหาผลเฉลยในรูปของผลเฉลยแม่นตรงได้ โดยเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Tuttle และคณะ [5] ที่ศึกษาค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยสี่แบบ คือ $[0/90]_{2S}$, $[0]_8$, $[\pm45]_{2S}$ และ $[45]_8$ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานแบบง่ายทั้งสี่ด้าน โดยวิธีทดลองและ

จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีกาเลอคิน ผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับผลการศึกษาของ Tuttle และคณะ [5] แสดงในตารางที่ 6-3 สำหรับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการศึกษานี้จะใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น (N) ตั้งแต่ 1 ถึง 4 พจน์ ซึ่งค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการใช้จำนวนพจน์แต่ละค่าแสดงไว้ในช่อง Kantorovich Method ของตารางที่ 6-3 โดยการศึกษาของ Tuttle ได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอกรณีที่แผ่นคอมโพสิททำจากกราไฟต์-อีพอกซี่ ซึ่งมีลักษณะและคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$E_1 = 155 \;\; GPa \qquad E_2 = 7.6 \;\; GPa \qquad G_{12} = 4.4 \;\; GPa \qquad v_{12} = 0.34$$
$$a = b = 15.2\times10^{-2} \;\; m \qquad t = 1.9\times10^{-4} \;\; m$$

ตารางที่ 6-3 ค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Tuttle และคณะ [5] เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

| Stacking sequence | Method | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Experiment | Galerkin Method | Kantorovich Method | | | |
| | | | N=1 | N=2 | N=3 | N=4 |
| $[0/90]_{2S}$ | 28.2 | 24.2 | 24.1 | 24.1 | 24.1 | 24.1 |
| $[0]_8$ | 12.6 | 13.7 | 13.7 | 13.7 | 13.7 | 13.7 |
| $[\pm45]_{2S}$ | 41.0 | 40.4 | 42.9 | 40.1 | 40.1 | 40.0 |
| $[45]_8$ | 20.0 | 19.1 | 42.9 | 19.7 | 17.7 | 17.3 |

จากตารางที่ 6.3 พบว่าชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ และ $[0]_8$ มีค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเท่ากันตั้งแต่การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ขึ้นไป และเมื่อเปรียบเทียบกับผลจากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีกาเลอคินพบว่า ที่มุมการวางตัวแบบ $[0]_8$ จะได้ค่าภาระการโก่งงอเท่ากัน แต่ที่มุมการวางตัวแบบ $[0/90]_{2S}$ ค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีค่าแตกต่างกัน 0.4 เปอร์เซ็นต์ ส่วนในกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply เมื่อเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีกาเลอคินพบว่า ที่มุมการวางตัวแบบ $[\pm45]_{2S}$ ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าน้อยกว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีกาเลอคิน ตั้งแต่การใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 2 พจน์ขึ้นไป ส่วนที่มุมการวางตัวแบบ

$[45]_8$ ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชจะมีค่าน้อยกว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีกาเลอคิน ตั้งแต่การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 3 พจน์ขึ้นไป และค่าภาระการโก่งงอที่มุมการวางตัวทั้งสี่แบบที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์จากระเบียบวิธีทั้งสองมีค่าแตกต่างจากค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการทดลองไม่มากนัก จากผลการเปรียบเทียบกรณีแผ่นคอมโพสิทที่สามารถหาภาระการโก่งงอจากผลเฉลยแม่นตรงได้พบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกัน ส่วนกรณีของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ และ $[45]_8$ พบว่า ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าต่ำลงและมีแนวโน้มลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ของคำตอบเมื่อเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นขึ้น

เนื่องด้วยการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นที่ผ่านมาข้างต้นเป็นการหาค่าภาระการโก่งงอภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบเดียวคือการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านเท่านั้น ดังนั้นเพื่อให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความน่าเชื่อถือยิ่งขึ้นจึงได้นำโปรแกรมดังกล่าวไปคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ โดยศึกษาที่ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ [30/-30/30] ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบผสมสามแบบ ได้แก่ CCCC, CSCS และ SFSF นำค่าภาระการโก่งงอที่ได้เปรียบเทียบกับการศึกษาของ Turvey และ Marshall [23] ซึ่งหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีริทซ์ โดยสมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้วยฟังก์ชันโพลีโนเมียล (polynomials function) และใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 100 พจน์ ผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอแสดงในตารางที่ 6-4 โดยค่าภาระการโก่งงอแสดงอยู่ในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วยตามสมการ (6-1) ผลการศึกษาของ Turvey และ Marshall แสดงไว้ในช่อง Ref. [23] ส่วนผลที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 5 พจน์ แสดงไว้ในช่อง Kantorovich Method เพื่อให้เห็นผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบาง ส่วนตารางที่ 6-5 แสดงรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่หาได้จากการใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 5 พจน์ สำหรับชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC เพื่อแสดงให้เห็นผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบาง และตารางที่ 6-6 แสดงรูปร่างโหมดการโก่งงอของขอบเขตการจับยึดทั้งสามแบบ ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 5 พจน์ โดยรูปร่างโหมดการโก่งงอที่แสดงในตารางที่ 6-5 และ 6-6 ได้

นำเสนอในลักษณะแบบกรอบพื้นผิว (surface with wireframe) และแบบเส้นรูปร่าง (contour) เพื่อให้เห็นลักษณะของรูปร่างการโก่งงอที่ชัดเจน แผ่นคอมโพสิทรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ใช้ในการศึกษาทำจากกราไฟต์-อีพอกซี่ ซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

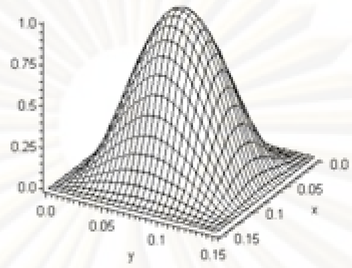
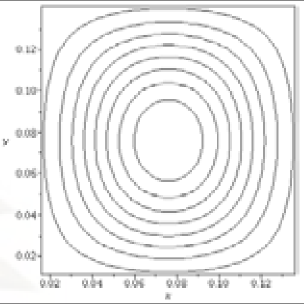
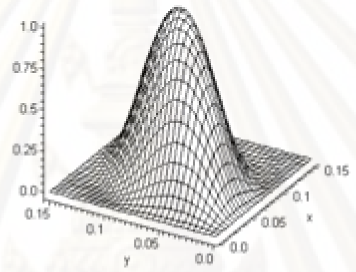
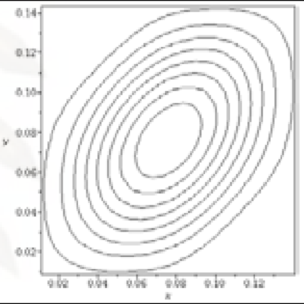
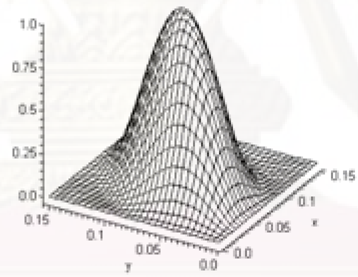
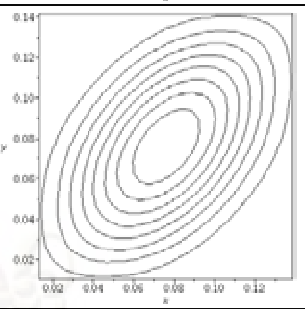
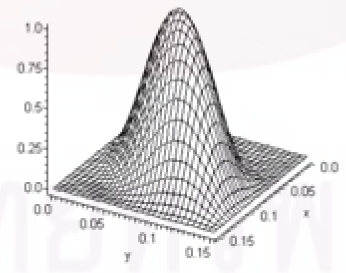
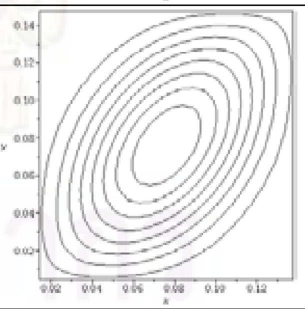
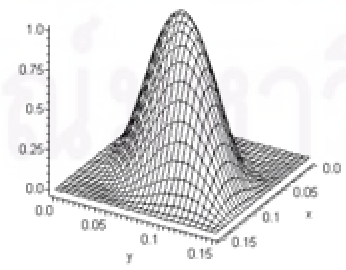
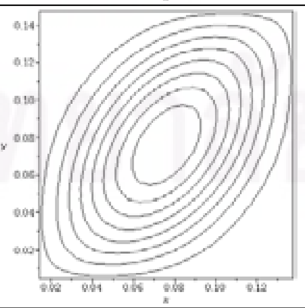
$$E_1 = 138 \;\; GPa \qquad E_2 = 8.96 \;\; GPa \qquad G_{12} = 7.1 \;\; GPa \qquad v_{12} = 0.30$$

จากผลการเปรียบเทียบในตารางที่ 6-4 พบว่าค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางที่มีขอบเขตการจับยึดทั้งสามแบบที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะมีค่าต่ำลงและมีแนวโน้มลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ของคำตอบเมื่อใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพิ่มขึ้น การลู่เข้าของคำตอบมีลักษณะเช่นเดียวกับการศึกษาที่แสดงในตารางที่ 6-3 ในกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply และเมื่อนำฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากการใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 5 พจน์ สำหรับกรณีการจับยึดแบบ CCCC มาพล็อตดูรูปร่างโหมดการโก่งงอดังแสดงในตารางที่ 6-5 พบว่ารูปร่างโหมดการโก่งงอจากการใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ ไม่ถูกต้องเนื่องจากลักษณะการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทไม่ได้รับผลของการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ แต่จะมีลักษณะคล้ายกับการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply เมื่อใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นมากกว่า 1 พจน์ รูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทจะสมเหตุสมผลขึ้นเนื่องจากมีผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ซึ่งทำให้รูปร่างการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทเกิดการดัดพร้อมกับบิด (bending-twisting coupling) ตามลักษณะของการวางตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิทที่กำลังพิจารณามากขึ้นและทำให้ค่าภาระการโก่งงอลู่เข้ามากขึ้นด้วย ส่วนตารางที่ 6-6 พบว่ารูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทจากการจับยึดทั้งสามแบบมีความน่าเชื่อถือ เพราะรูปร่างโหมดการโก่งงอของทั้งสามแบบมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดและรูปร่างการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทมีลักษณะเอียงสอดคล้องกับลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยที่กำลังศึกษา

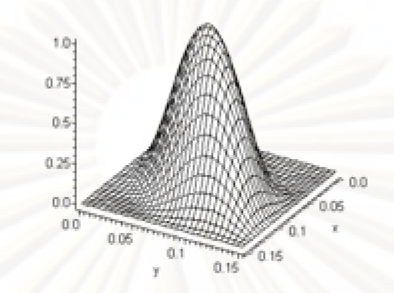
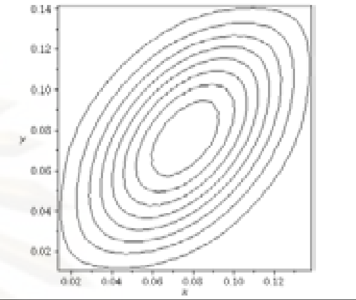
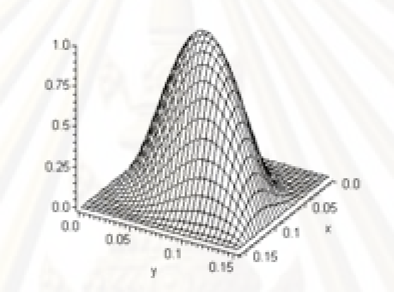
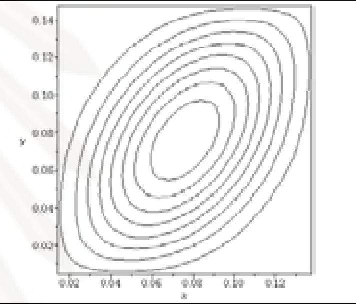
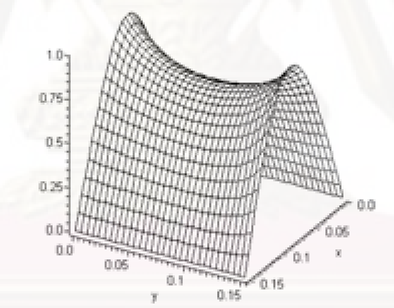
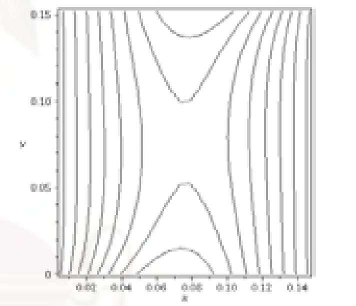
ตารางที่ 6-4 ค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Turvey และ Marshall [23] เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

| Boundary condition | Ref. [23] | Kantorovich Method | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N=1 | N=2 | N=3 | N=4 | N=5 |
| CCCC | 30.78 | 43.35 | 32.34 | 30.90 | 30.80 | 30.78 |
| CSCS | 27.20 | 36.76 | 28.71 | 27.48 | 27.28 | 27.24 |
| SFSF | 5.176 | 5.434 | 5.253 | 5.213 | 5.187 | 5.183 |

ตารางที่ 6-5 โหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่การจับยึดแบบ CCCC จากการใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 5 พจน์

| Number of N term | surface with wireframe | contour |
|---|---|---|
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |

ตารางที่ 6-6 โหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่การจับยึดแบบ CCCC, CSCS และ SFSF คำนวณโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 5 พจน์

| Boundary condition | surface with wireframe | contour |
|---|---|---|
| CCCC |  |  |
| CSCS |  |  |
| SFSF |  |  |

จากการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช พบได้ว่าโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความน่าเชื่อถือเนื่องจากให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่มีความใกล้เคียงกับผลการศึกษาในอดีต และเมื่อพิจารณาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอ พบว่าในการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอในกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 และ 2 พจน์ จะได้ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก เนื่องจากค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ในกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นในกรณีนี้การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพียง 1 หรือ 2 พจน์ ก็ให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ถูกต้องแล้ว ส่วนกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น

เพียง 1 พจน์ ยังไม่สามารถให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ถูกต้องได้ เนื่องจากค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับผลการศึกษาในอดีต แต่เมื่อใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นมากขึ้นทำให้ได้ค่าภาระการโก่งงอที่มีค่าลู่เข้ามากขึ้นและทำให้รูปร่างโหมดการโก่งงอมีความถูกต้องมากขึ้นด้วย ซึ่งผลการศึกษาการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอนี้สอดคล้องกับการศึกษาของ Shufrin และคณะ [11] ดังนั้นเมื่อได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้สำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางที่มีความน่าเชื่อถือแล้ว จะได้นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบาง เพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางตามที่ได้กล่าวไว้ในวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ ดังจะได้แสดงในบทต่อไป

# บทที่ 7

# การสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในบทที่ 6 ได้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ พบว่าสามารถหาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอได้อย่างน่าเชื่อถือ ดังนั้นในบทนี้จะได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้จากการศึกษาในบทที่ 6 มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการสั่นสะเทือน โดยหัวข้อที่ต้องการศึกษาในบทนี้ได้แก่ การศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นในฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทว่ามีผลต่อคำตอบที่ได้อย่างไร ศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ใช้ในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้า ศึกษาผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ และศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

## 7.1 รายละเอียดของโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้ศึกษา

รายละเอียดของโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในวิทยานิพนธ์นี้ มีลักษณะดังนี้

1. คุณสมบัติทางกลของวัสดุ

   1.1 กรณีโครงสร้างแผ่นบางเป็นแผ่นคอมโพสิท กำหนดวัสดุเป็นกราไฟต์-อีพอกซี่ (T300/5208) ตามเอกสารอ้างอิง [24] ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

   $E_1 = 132\ GPa \qquad E_2 = 10.8\ GPa \qquad G_{12} = 5.65\ GPa$

   $v_{12} = 0.24 \qquad \rho = 1540\ kg/m^3$

   1.2 กรณีโครงสร้างเป็นวัสดุไอโซโทรปิค กำหนดให้มีคุณสมบัติดังนี้

   $E = 70\ GPa \qquad v_{12} = 0.3 \qquad \rho = 1540\ kg/m^3$

2. กำหนดให้ขนาดความยาวของแผ่นคอมโพสิทในแนวแกน $x$ เท่ากับ $a$ และความกว้างตามแนวแกน $y$ เท่ากับ $b$ ความหนาของแผ่นลามิเนตเท่ากับ $t$ โดยขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ $a/b$ ซึ่งกำหนดให้ความกว้างคงที่เสมอคือ $b = 0.3\ m$ และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยเทียบกันแกน $x$ เท่ากับ $\theta$ ดังรูปที่ 3.3 ก

3. เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ใช้ศึกษาสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท จะอักษรย่อแสดงลักษณะการจับยึดและระบบแกนพิกัด ดังแสดงในรูปที่ 5.3

### 7.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน

เพื่อความน่าเชื่อถือสำหรับการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท จึงต้องตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนที่ประยุกต์มาจากปัญหาการโก่งงอก่อน วิธีการตรวจสอบทำโดยหาค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประยุกต์ใช้สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติของการศึกษาที่ผ่านมาในอดีตของ Leissa [12] ซึ่งถือว่าเป็นผลการศึกษาที่มีความน่าเชื่อถือและถูกใช้อ้างอิงในการศึกษาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางในหลาย ๆ การศึกษา Leissa ศึกษาแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบด้านใดด้านหนึ่งหรือหลาย ๆ ด้าน ผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ โดยวิธีการวิเคราะห์สมการครอบคลุมร่วมกับวิธีการเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีริทซ์ ในการศึกษานี้จะพิจารณาชิ้นงานภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสามแบบคือ SSSF, SCSF และ SCSC โดยพิจารณาการสั่นสะเทือนหกโหมดแรก ค่าความถี่ธรรมชาติแสดงในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\lambda = \omega a^2(\rho / D)^{1/2}$ ผลการเปรียบเทียบแสดงไว้ในตารางที่ 7-1 โดยผลการศึกษาของ Leissa แสดงไว้ในช่อง Leissa ส่วนผลที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นแสดงในช่อง KM โดย N คือจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น ในการศึกษานี้ใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 4 พจน์ จากตารางที่ 7-1 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าเท่ากันตั้งแต่การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 พจน์ขึ้นไปทุกโหมดที่ศึกษา เมื่อนำค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Leissa พบว่า ในกรณีการจับยึดแบบ SSSF และ SCSF ได้ค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากันทุกโหมดที่ศึกษา ส่วนในกรณีการจับยึดแบบ SCSC ยังมีบางโหมดการสั่นสะเทือนที่มีค่าความถี่ธรรมชาติต่างกัน โดยการสั่นสะเทือนในโหมดที่หกมีความแตกต่างกันมากที่สุดโดยมีค่าเพียง 0.007 เปอร์เซ็นต์เท่านั้น ซึ่งถือว่ามีความคลาดเคลื่อนน้อยมาก แสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความน่าเชื่อถือสำหรับการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับและมากกว่า 1 พจน์ อย่างไรก็ตามวิทยานิพนธ์นี้ต้องการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท ดังนั้นก่อนที่จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้จากหัวข้อนี้ไปใช้สำหรับกรณีของแผ่นคอมโพสิท จึงควรศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทเสียก่อนเพื่อให้ได้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทต่อไป

ตารางที่ 7-1 ค่าความถี่ธรรมชาติ ($\lambda$) จากการศึกษาของ Leissa [12] เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยใช้ $\upsilon = 0.3$

| Boundary condition | Solution | | Mode 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SSSF | Leissa | | 11.68 | 27.76 | 41.20 | 59.07 | 61.86 | 90.29 |
| | KM | N=1 | 11.68 | 27.76 | 41.20 | 59.07 | 61.86 | 90.29 |
| | | N=2 | 11.68 | 27.76 | 41.20 | 59.07 | 61.86 | 90.29 |
| | | N=3 | 11.68 | 27.76 | 41.20 | 59.07 | 61.86 | 90.29 |
| | | N=4 | 11.68 | 27.76 | 41.20 | 59.07 | 61.86 | 90.29 |
| SCSF | Leissa | | 12.69 | 33.06 | 41.70 | 63.01 | 72.40 | 90.61 |
| | KM | N=1 | 12.69 | 33.06 | 41.70 | 63.01 | 72.40 | 90.61 |
| | | N=2 | 12.69 | 33.06 | 41.70 | 63.01 | 72.40 | 90.61 |
| | | N=3 | 12.69 | 33.06 | 41.70 | 63.01 | 72.40 | 90.61 |
| | | N=4 | 12.69 | 33.06 | 41.70 | 63.01 | 72.40 | 90.61 |
| SCSC | Leissa | | 28.946 | 54.743 | 69.320 | 94.584 | 102.213 | 129.086 |
| | KM | N=1 | 28.950 | 54.743 | 69.327 | 94.585 | 102.216 | 129.095 |
| | | N=2 | 28.950 | 54.743 | 69.327 | 94.585 | 102.216 | 129.095 |
| | | N=3 | 28.950 | 54.743 | 69.327 | 94.585 | 102.216 | 129.095 |
| | | N=4 | 28.950 | 54.743 | 69.327 | 94.585 | 102.216 | 129.095 |

### 7.3 ผลของจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

การศึกษาในหัวข้อนี้ต้องการทราบผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบาง เพื่อจะได้ใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันเริ่มต้นอย่างเหมาะสมในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทสำหรับการวางตัวของเส้นใยในแต่ละกรณี ในการศึกษาจะใช้ค่าฟังก์ชันที่มีจำนวนพจน์เริ่มต้นเท่ากับ 1 ถึง 5 พจน์ เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนพจน์กับค่าความถี่ธรรมชาติ โดยโครงสร้างแผ่นบางที่ศึกษาเป็นแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้งหมดสามแบบคือ CCCC, CCSS และ SCSF ซึ่งเป็นการจับยึดที่มีเงื่อนไขการจับยึดเหมือนกันทั้งสี่ด้าน การจับยึดที่มีเงื่อนไขการจับยึดแบบผสมสองเงื่อนไข และการจับยึดที่มีเงื่อนไขการจับยึดแบบผสมสามเงื่อนไขตามลำดับ ทั้งนี้เพื่อให้

การศึกษามีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่หลากหลายรูปแบบ ในแต่ละเงื่อนไขการจับยึดจะหาค่าความถี่ธรรมชาติที่อยู่ในหน่วย rad/s ของแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$, $[\pm45]_{2S}$ และ [45/-45/45] และแผ่นบางที่มีคุณสมบัติแบบไอโซโทรปิค โดยคุณสมบัติทางกลของโครงสร้างแผ่นบางที่ศึกษาเป็นไปตามหัวข้อที่ 7.1 และพิจารณาการสั่นสะเทือนโหมดแรกของแผ่นบาง ผลการศึกษาแสดงในตารางที่ 7-2

ตารางที่ 7-2 ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/s) ของโครงสร้างแผ่นบางเมื่อใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 5 พจน์

| Boundary condition | Stacking sequence | Number of N term | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| CCCC | Isotropic | 103.64 | 103.60 | 103.60 | 103.60 | 103.60 |
| | $[0/90]_{2S}$ | 723.95 | 723.93 | 723.93 | 723.93 | 723.93 |
| | $[\pm45]_{2S}$ | 703.36 | 693.78 | 693.60 | 693.59 | 693.58 |
| | [45/-45/45] | 263.26 | 238.30 | 236.87 | 236.75 | 236.71 |
| CCSS | Isotropic | 77.90 | 77.89 | 77.89 | 77.89 | 77.89 |
| | $[0/90]_{2S}$ | 510.31 | 513.30 | 513.30 | 513.30 | 513.30 |
| | $[\pm45]_{2S}$ | 560.05 | 551.83 | 551.65 | 551.64 | 551.62 |
| | [45/-45/45] | 210.02 | 186.98 | 184.65 | 184.03 | 183.84 |
| SCSF | Isotropic | 36.53 | 36.53 | 36.53 | 36.53 | 36.53 |
| | $[0/90]_{2S}$ | 272.18 | 272.18 | 272.18 | 272.18 | 272.18 |
| | $[\pm45]_{2S}$ | 248.74 | 246.03 | 245.95 | 245.93 | 245.92 |
| | [45/-45/45] | 85.50 | 77.98 | 77.25 | 77.03 | 76.95 |

จากผลการศึกษาในตารางที่ 7-2 พบว่ากรณีแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีค่าลู่เข้าสู่คำตอบตั้งแต่การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพียง 1 หรือ 2 พจน์เท่านั้น เช่นเดียวกับกรณีของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply คือ แผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ ส่วนในกรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply คือ แผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวแบบ $[\pm45]_{2S}$ และแบบ [45/-45/45] จะต้องใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อให้คำตอบมีค่าลู่เข้ามากกว่ากรณีที่ชิ้นงานมีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคและกรณีชิ้นงานเป็นแผ่นคอมโพสิทที่มีการ

วางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply เนื่องจากค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้แก้ปัญหาค่าเจาะจงตามสมการ (4-58) และสมการ (4-60 ถึง 4-63) สำหรับด้านที่สมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $y$ และสมการ (4-74) และสมการ (4-76 ถึง 4-79) สำหรับด้านที่สมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ $x$ มีความซับซ้อนมากกว่า

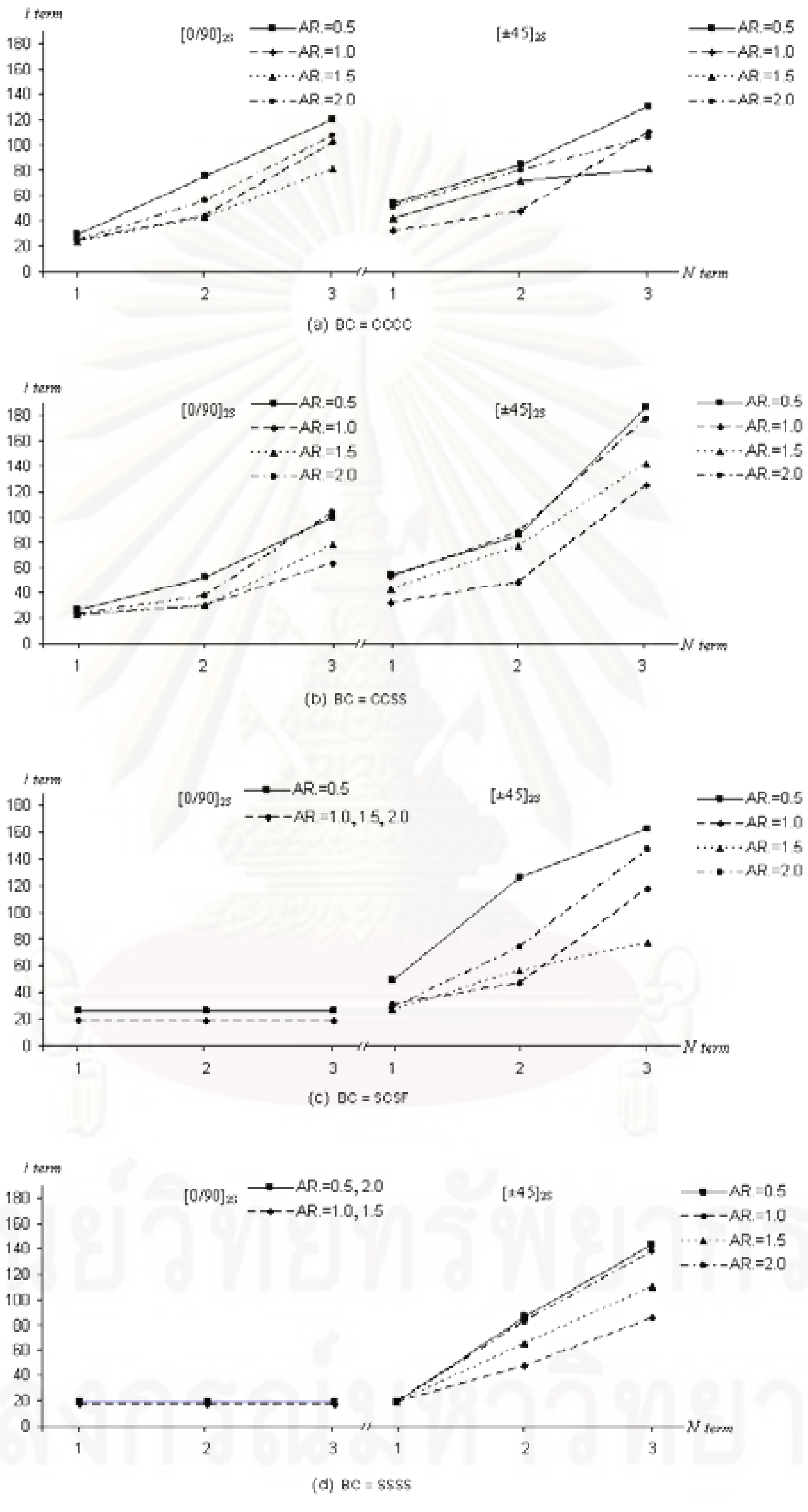
แม้ว่าการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติลู่เข้าสู่คำตอบมากขึ้น แต่การเพิ่มจำนวนพจน์ดังกล่าวก็ทำให้สมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหามีจำนวนมากขึ้นและมีความซับซ้อนมากตามไปด้วย ส่งผลให้การประมวลผลจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต้องใช้เวลาและใช้หน่วยความจำมากขึ้น ดังนั้นในการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทในวิทยานิพนธ์นี้ จะใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์ สำหรับการศึกษาแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply ซึ่งเพียงพอที่จะให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ลู่เข้าสู่คำตอบแล้ว แต่สำหรับการศึกษาแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply จะใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 พจน์ ด้วยเหตุผลคือ เวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละรอบสำหรับการใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 พจน์ ไม่มากนักคือประมาณ 10 นาที แต่ถ้าใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 4 พจน์ จะใช้เวลาในการคำนวณแต่ละรอบประมาณ 30 นาที ซึ่งถือว่าค่อนข้างมาก เนื่องจากในการหาผลเฉลยของปัญหาแต่ละค่าจะต้องใช้การคำนวณมากกว่าหนึ่งรอบ และอีกประเด็นหนึ่งก็คือค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 และ 4 พจน์นั้นมีความแตกต่างกันไม่มากนัก จากตารางที่ 7-2 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของการใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นทั้งสองค่า มีความแตกต่างมากสุดในกรณีการจับยึดแบบ CCSS ที่ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ [45/-45/45] ซึ่งมีค่าความแตกต่างเท่ากับ 0.34 เปอร์เซ็นต์ ส่วนค่าความแตกต่างน้อยสุดคือกรณีการจับยึดแบบ CCCC ที่ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ โดยมีค่าความแตกต่างกันเพียง 0.001 เปอร์เซ็นต์เท่านั้น อย่างไรก็ตามฟังก์ชันเริ่มต้นที่มีจำนวนพจน์หนึ่ง ๆ จะมีจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นต่ำสุดค่าหนึ่งที่ทำให้ค่าเจาะจงของปัญหาเจาะจงมีค่าลู่เข้า ซึ่งตัวอย่างของจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นต่อการลู่เข้าของผลลัพธ์จะมีลักษณะดังแสดงไว้ในรูปที่ 5.6 ดังนั้นเพื่อความถูกต้องของคำตอบจึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้าด้วย

### 7.4 ผลของจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นต่อการลู่เข้าของค่าเจาะจง

หัวข้อนี้จะศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้าเพื่อให้ได้จำนวนสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทในแต่ละกรณี แต่เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดและขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีหลายกรณี จึงยากต่อการศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้าได้ครบทุกกรณี ดังนั้นการศึกษาในหัวข้อนี้จึงเลือกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดเช่นเดียวกับการศึกษาจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในหัวข้อที่ผ่านมา ด้วยเหตุผลเดียวกันคือเพื่อศึกษาชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่หลากหลาย และได้เพิ่มการศึกษาในกรณีขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านด้วย สำหรับแผ่นคอมโพสิทที่ใช้ศึกษามีลักษณะการวางตัวของเส้นใยสองแบบคือ การวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply โดยแต่ละแบบศึกษาที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานทั้งหมดสี่ขนาดสัดส่วนคือ 0.5 1.0 1.5 และ 2.0 ทั้งนี้เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ของขนาดสัดส่วนต่อจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้าของแต่ละลักษณะการวางตัวของเส้นใย โดยศึกษาที่การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 3 พจน์ ผลการศึกษาของแต่ละกรณีแสดงไว้ในกราฟรูปที่ 7.1 ซึ่งประกอบด้วยกราฟทั้งหมดสี่กราฟตามเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดคือ CCCC, CCSS, SCSF และ SSSS แต่ละกราฟแบ่งการศึกษาออกเป็นสองส่วนคือ กรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply ซึ่งศึกษาชิ้นงานที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ และแบบ angle-ply ศึกษาชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ จากกราฟพบว่าสำหรับการใช้จำนวนฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากันกรณีของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply มีแนวโน้มการใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อให้ได้ค่าเจาะจงที่มีค่าลู่เข้ามากกว่าในกรณีที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply ด้วยเหตุผลคล้ายกับกรณีการศึกษาจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นกล่าวคือ ในกรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงของปัญหา สมาชิกในแต่ละตำแหน่งของเมตริกซ์ $[F]$ ในสมการที่ (5-2) จะมีขนาดใหญ่กว่ากรณีที่ค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ทำให้ในกรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ต้องการจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากกว่าเพื่อให้ได้ค่าเจาะจงที่ทำให้สมการสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในปัญหาที่กำลังศึกษาอยู่ การศึกษายังพบอีกว่าเมื่อจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพิ่มขึ้นจะต้องใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากขึ้นด้วย ทั้งนี้เนื่องจากผลคูณของฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ ในสมการ (4-7) มีจำนวนพจน์เพิ่มขึ้นตามจำนวนพจน์ที่

ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น ซึ่งทำให้เมตริกซ์ $[F]$ ในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงมีขนาดของเมตริกซ์เพิ่มขึ้นเป็น $4N \times 4N$ ดังนั้นจึงต้องการจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากขึ้นเพื่อให้ได้ค่าเจาะจงที่ทำให้สมการสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต

อีกข้อสรุปหนึ่งที่ได้จากการศึกษาในหัวข้อนี้คือการเพิ่มจำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นไม่ทำให้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้าของขนาดสัดส่วนหนึ่ง ๆ มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าเสมอไป ดังเช่นในกรณีชิ้นงานที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ ของเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSF เมื่อจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์สำหรับขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1.5 จะใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากกว่าชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 2.0 แต่เมื่อใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพิ่มขึ้นเป็น 3 พจน์ สำหรับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1.5 จะใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นน้อยกว่าชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 2.0 ดังนั้นในการกำหนดจำนวนสัมประสิทธ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อใช้ในการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติหรือค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชจึงควรเผื่อจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นไว้ด้วย อย่างไรก็ตามการใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากเกินไปก็ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น การเลือกจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่เหมาะสมและเพียงพอต่อการลู่เข้าของค่าเจาะจง จะต้องพิจารณาลักษณะต่าง ๆ ของชิ้นงานประกอบกัน ได้แก่ เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของชิ้นงาน ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใย รวมถึงขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน โดยในการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทในวิทยานิพนธ์นี้ จะใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 150 ตัว สำหรับแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 200 ตัว สำหรับแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply




รูปที่ 7.1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของขนาดสัดส่วนและมุมการวางตัวของเส้นใยของเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ต่อจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้า

## 7.5 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทในหัวข้อนี้แบ่งออกเป็นสามส่วน คือ ศึกษาผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ ศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิทที่มีต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท อันดับแรกเพื่อแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นรวมถึงข้อสรุปที่ได้จากการศึกษาจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นในสองหัวข้อที่ผ่านมาสามารถนำมาคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทได้อย่างน่าเชื่อถือ ทำได้โดยนำค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [22, 25, 26] ซึ่งได้ศึกษาการสั่นสะเทือนห้าโหมดแรกของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยทั้งแบบ cross-ply และแบบ angle-ply ผลการศึกษาในเอกสารอ้างอิงหาค่าความถี่ธรรมชาติด้วยวิธีเชิงตัวเลข โดยการศึกษาของเอกสารอ้างอิง [22] ใช้ระเบียบวิธี Element free Galerkin Method ส่วนการศึกษาของเอกสารอ้างอิง [25, 26] ใช้ระเบียบวิธีริทซ์เหมือนกันแต่สมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกัน โดยการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [25] ใช้ฟังก์ชันของอนุกรมซายน์ ส่วนการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [26] จะใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียล ค่าความถี่ธรรมชาติที่เปรียบเทียบอยู่ในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วยตามสมการ (5-3) ผลการศึกษาแสดงในตารางที่ 7-3 และ 7-4 โดยตารางที่ 7-3 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ผลการศึกษาจากเอกสารอ้างอิง [22, 25, 26] แสดงในช่อง Ref.[22], Ref.[25] และ Ref.[26] ตามลำดับ ตารางที่ 7-8 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ผลการศึกษาจากเอกสารอ้างอิง [22, 26] แสดงในช่อง Ref.[22] และ Ref.[26] ตามลำดับ ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แสดงในช่อง Present ของทั้งสองตาราง

จากตารางที่ 7-3 และ 7-4 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้ในกรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply จะมีค่าน้อยกว่าผลการศึกษาที่นำมาเปรียบเทียบทุกโหมดการสั่นสะเทือน ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติในกรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply โดยส่วนมากค่าที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าสูงกว่าผลการศึกษาที่นำมาเปรียบเทียบในโหมดการสั่นสะเทือนสูง ๆ แต่ยังมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นแสดงว่าการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของ

แผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบต่าง ๆ ได้อย่างน่าเชื่อถือ ในลำดับถัดไปจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ไปศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

ตารางที่ 7-3 ค่าความถี่ธรรมชาติภายใต้การจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน จากการศึกษาของเอกสารอ้างอิง [22, 25, 26] เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

| Stacking sequence | Solution | Mode | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $[0]_3$ | Ref. [22] | 15.18 | 33.34 | 44.51 | 60.79 | 64.80 |
| | Ref. [25] | 15.19 | 33.30 | 44.42 | 60.77 | 64.53 |
| | Ref. [26] | 15.19 | 33.31 | 44.52 | 60.78 | 64.55 |
| | Present | 15.17 | 33.25 | 44.39 | 60.68 | 64.46 |
| [15/-15/15] | Ref. [22] | 15.41 | 34.15 | 43.93 | 60.91 | 66.94 |
| | Ref. [25] | 15.43 | 34.09 | 43.87 | 60.85 | 66.67 |
| | Ref. [26] | 15.37 | 34.03 | 43.80 | 60.80 | 66.56 |
| | Present | 15.40 | 34.03 | 43.83 | 60.75 | 66.62 |
| [30/-30/30] | Ref. [22] | 15.88 | 35.95 | 42.63 | 61.54 | 72.12 |
| | Ref. [25] | 15.90 | 35.86 | 42.62 | 61.45 | 71.71 |
| | Ref. [26] | 15.86 | 35.77 | 42.48 | 61.27 | 71.41 |
| | Present | 15.86 | 35.77 | 42.58 | 61.31 | 71.88 |
| [45/-45/45] | Ref. [22] | 16.11 | 37.04 | 41.80 | 61.94 | 78.03 |
| | Ref. [25] | 16.14 | 36.93 | 41.81 | 61.85 | 77.04 |
| | Ref. [26] | 16.08 | 36.83 | 41.67 | 61.65 | 76.76 |
| | Present | 16.10 | 36.87 | 41.82 | 61.68 | 78.57 |
| [0/90/0] | Ref. [22] | 15.18 | 33.82 | 44.14 | 60.79 | 66.12 |
| | Ref. [25] | N/A | N/A | N/A | N/A | N/A |
| | Ref. [26] | N/A | N/A | N/A | N/A | N/A |
| | Present | 15.17 | 33.73 | 44.02 | 60.68 | 65.77 |

ตารางที่ 7-4 ค่าความถี่ธรรมชาติภายใต้การจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน จากการศึกษาของเอกสารอ้างอิง [22, 26] เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

| Stacking sequence | Solution | Mode | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $[0]_3$ | Ref. [22] | 29.27 | 51.21 | 67.94 | 86.25 | 87.97 |
| | Ref. [26] | 29.13 | 50.82 | 67.29 | 85.67 | 87.14 |
| | Present | 29.08 | 50.78 | 67.26 | 85.59 | 87.06 |
| [15/-15/15] | Ref. [22] | 29.07 | 51.82 | 66.54 | 85.17 | 90.56 |
| | Ref. [26] | 28.92 | 51.43 | 65.92 | 84.55 | 89.76 |
| | Present | 28.89 | 51.39 | 65.89 | 84.49 | 89.68 |
| [30/-30/30] | Ref. [22] | 28.69 | 53.57 | 63.24 | 84.43 | 96.13 |
| | Ref. [26] | 28.55 | 53.15 | 62.71 | 83.83 | 95.21 |
| | Present | 28.51 | 53.11 | 62.67 | 83.79 | 95.42 |
| [45/-45/45] | Ref. [22] | 28.50 | 55.11 | 60.91 | 84.25 | 103.2 |
| | Ref. [26] | 28.38 | 54.65 | 60.45 | 83.65 | 102.0 |
| | Present | 28.33 | 54.64 | 60.47 | 83.62 | 103.9 |
| [0/90/0] | Ref. [22] | 29.27 | 51.93 | 67.40 | 86.25 | 89.76 |
| | Ref. [26] | N/A | N/A | N/A | N/A | N/A |
| | Present | 29.08 | 51.48 | 66.72 | 85.59 | 88.82 |

7.5.1 ผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ

ในหัวข้อที่ 7.3 และ 7.4 ได้ศึกษาจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง พบว่าค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ของโครงสร้างแผ่นบางมีผลต่อจำนวนพจน์และจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้น โดยกรณีที่โครงสร้างมีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ไม่เท่ากับศูนย์ จะต้องใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อทำให้ได้ค่าเจาะจงที่มีค่าลู่เข้ามากกว่ากรณีโครงสร้างที่มีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ เท่ากับศูนย์ เนื่องจากค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ จะส่งผลทำให้รูปร่างการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทเกิดการดัดพร้อมกับบิด (bending-twisting coupling) และจากผลการศึกษาในตารางที่ 7-3 และ 7-4 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply มีแนวโน้มไม่ลู่เข้าสู่คำตอบมากขึ้น ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงศึกษาผลกระทบของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ของโครงสร้างแผ่นบางต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ โดยศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนห้าโหมดแรกของชิ้นงานที่มีคุณสมบัติสองแบบคือ โครงสร้างแผ่นบางที่เป็นวัสดุไอโซโทรปิคและแผ่นบางที่เป็นคอมโพสิท โดยพิจารณาชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับหนึ่ง ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสามแบบคือ CCCF, SCSC และ CSSC ในกรณีแผ่นคอมโพสิทศึกษาชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแตกต่างกันสามแบบคือ $[0/90]_{2S}$, $[\pm45]_{2S}$ และ $[45]_8$ ซึ่งค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ของโครงสร้างที่มีการวางตัวแบบ $[0/90]_{2S}$ และโครงสร้างแผ่นบางที่เป็นวัสดุไอโซโทรปิคมีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ สำหรับกรณีการวางตัวแบบ $[45]_8$ มีค่าสูงกว่ากรณีการวางตัวแบบ $[\pm45]_{2S}$ ตารางที่ 7-5 ถึง 7-7 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติในหน่วย rad/s สำหรับชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF, SCSC และ CSSC ตามลำดับ ช่อง KM เป็นค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 3 พจน์ ส่วนช่อง Ritz Method คือค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีริทซ์ ที่ใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 100 พจน์ เพื่อเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติจากทั้งสองวิธี

ตารางที่ 7-5 ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/s) ของโครงสร้างแผ่นบางภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF ที่กรณีศึกษาแบบต่าง ๆ

| Case study | Solution | Mode | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Isotropic | KM | 68.89 | 115.19 | 182.03 | 220.87 | 232.00 |
| | Ritz Method | 69.06 | 115.23 | 182.57 | 220.89 | 232.26 |
| $[0/90]_{2S}$ | KM | 581.76 | 746.21 | 1332.78 | 1584.60 | 1698.81 |
| | Ritz Method | 581.77 | 746.21 | 1332.78 | 1584.65 | 1698.83 |
| $[\pm 45]_{2S}$ | KM | 423.38 | 811.65 | 1093.31 | 1461.34 | 1642.47 |
| | Ritz Method | 428.81 | 812.97 | 1108.09 | 1459.29 | 1684.13 |
| $[45]_8$ | KM | 360.24 | 641.00 | 970.48 | 1076.88 | 1484.44[a] |
| | Ritz Method | 365.84 | 646.06 | 982.68 | 1080.80 | 1477.78 |

ตารางที่ 7-6 ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/s) ของโครงสร้างแผ่นบางภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึด แบบ SCSC ที่กรณีศึกษาแบบต่าง ๆ

| Case study | Solution | Mode | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Isotropic | KM | 83.35 | 157.60 | 199.59 | 272.31 | 294.28 |
| | Ritz Method | 83.35 | 157.61 | 199.59 | 272.32 | 294.29 |
| $[0/90]_{2S}$ | KM | 505.52 | 1130.15 | 1197.22 | 1626.72 | 2276.08 |
| | Ritz Method | 505.52 | 1130.15 | 1197.22 | 1626.72 | 2276.08 |
| $[\pm 45]_{2S}$ | KM | 575.22 | 1080.75 | 1329.40 | 1841.83 | 2039.31 |
| | Ritz Method | 575.79 | 1082.20 | 1329.92 | 1842.04 | 2039.01 |
| $[45]_8$ | KM | 500.39 | 833.13 | 1275.34 | 1859.57[b] | 1966.47[c] |
| | Ritz Method | 504.85 | 842.59 | 1265.07 | 1301.94 | 1822.51 |

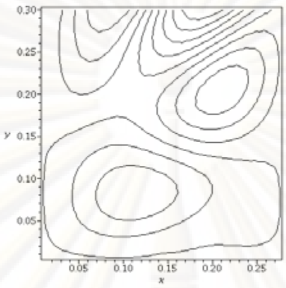
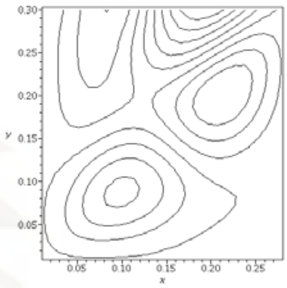
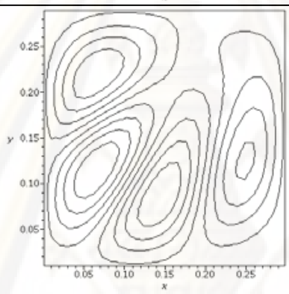
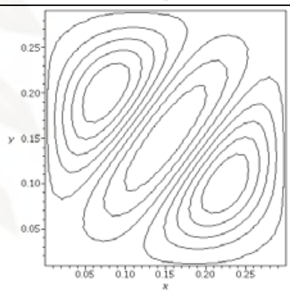
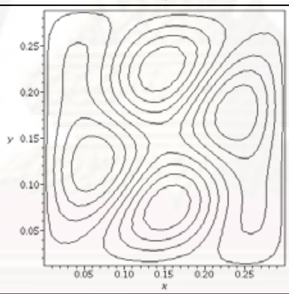
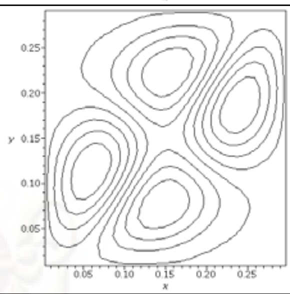
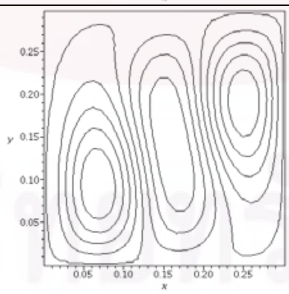
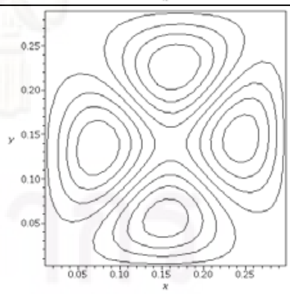
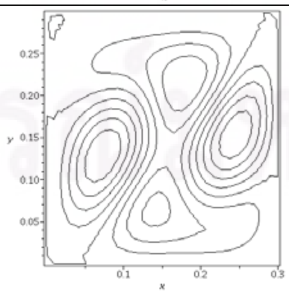
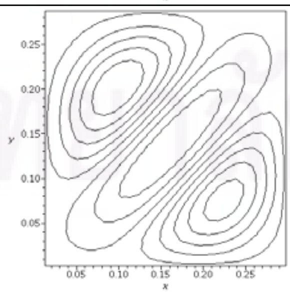
ตารางที่ 7-7 ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/s) ของโครงสร้างแผ่นบางภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึด แบบ CSSC ที่กรณีศึกษาแบบต่าง ๆ

| Case study | Solution | Mode | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Isotropic | KM | 77.89 | 174.29 | 175.02 | 267.28 | 330.02 |
| | Ritz Method | 77.89 | 174.29 | 175.00 | 267.29 | 329.81 |
| $[0/90]_{2S}$ | KM | 510.30 | 1044.37 | 1342.16 | 1679.86 | 2005.97 |
| | Ritz Method | 510.30 | 1044.37 | 1342.15 | 1679.85 | 2005.96 |
| $[\pm 45]_{2S}$ | KM | 549.16 | 1129.09 | 1240.65 | 1870.16 | 2176.81[d] |
| | Ritz Method | 549.96 | 1129.53 | 1239.86 | 1871.29 | 2124.69 |
| $[45]_8$ | KM | 465.48 | 845.45 | 1218.48 | 1922.97[e] | 2101.11[f] |
| | Ritz Method | 471.90 | 855.45 | 1202.84 | 1309.23 | 1843.83 |

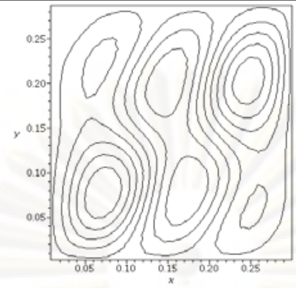
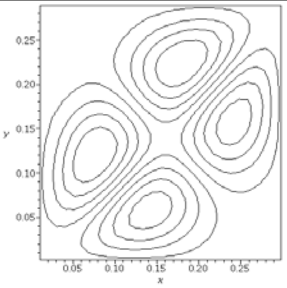
หมายเหตุ: superscript ที่ a ถึง f ในตารางที่ 7-5 ถึง 7-7 คือ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่แตกต่างกันจากการคำนวณทั้งสองระเบียบวิธี โดยรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่แตกต่างกันนี้ได้แสดงในตารางที่ 7-8

จากตารางที่ 7-5 ถึง 7-7 พบว่าโครงสร้างแผ่นบางที่มีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ เท่ากับศูนย์ ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ ที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีความน่าเชื่อถือเนื่องจากค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีริทซ์ สำหรับแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ พบว่าการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดสูงขึ้นส่วนใหญ่ยังคงมีความน่าเชื่อถือเนื่องจากค่าความถี่ธรรมชาติจากการคำนวณทั้งสองระเบียบวิธียังคงมีค่าใกล้เคียงกัน มีบางเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดสูง ๆ จากการคำนวณทั้งสองระเบียบวิธีมีค่าแตกต่างกันพอสมควร ได้แก่ การสั่นสะเทือนโหมดที่ห้าสำหรับชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบ CSSC ซึ่งรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนในกรณีนี้จากการคำนวณทั้งสองวิธีมีลักษณะแตกต่างกันด้วย ดังแสดงในกรณี d ในตารางที่ 7-8 สำหรับแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ ซึ่งมีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ มากที่สุดในการศึกษานี้ พบว่าเมื่อโหมดการสั่นสะเทือนสูงขึ้นการหาค่าความถี่ธรรมชาติด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีความน่าเชื่อถือน้อยลงเนื่องจากเมื่อนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีริทซ์จะมีค่าแตกต่างกันค่อนข้างมาก และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนก็มีลักษณะแตกต่างกัน ได้แก่ การสั่นสะเทือนโหมดที่ห้าสำหรับชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบ CCCF แสดงในกรณี a การสั่นสะเทือนโหมดที่สี่และห้าสำหรับชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบ SCSC แสดงในกรณี b และ c และการสั่นสะเทือนโหมดที่สี่และห้าสำหรับชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบ CSSC แสดงในกรณี e และ f โดยลักษณะรูปร่างการสั่นสะเทือนที่แตกต่างกันจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีทั้งสองแสดงในตารางที่ 7-8 จากผลการศึกษาในหัวข้อนี้สามารถสรุปได้ว่าโครงสร้างแผ่นบางที่มีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ สูงทำให้การหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่โหมดการสั่นสะเทือนสูง ๆ ทำได้ยากขึ้น การจะใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ที่โหมดการสั่นสะเทือนสูง ๆ ให้แม่นยำ จะต้องใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากขึ้นกว่าที่ได้กำหนดในหัวข้อที่ 7.3 และ 7.4 ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply หรือแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ที่โหมดการสั่นสะเทือนต่ำ ๆ ยังให้ผลเฉลยที่มีค่าน่าเชื่อถืออยู่ โดยการศึกษาในหัวข้อถัดไปจะใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นตามที่ได้กำหนดในหัวข้อที่ 7.3 และ 7.4 เนื่องจากจะศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่สามโหมดแรกเท่านั้น

ตารางที่ 7-8 รูปร่างการสั่นสะเทือนที่แตกต่างกันจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชกับระเบียบวิธีริทซ์

| case | Mode shape | |
|---|---|---|
| | Kantorovich Method | Ritz Method |
| a |  |  |
| b |  |  |
| c |  |  |
| d |  |  |
| e |  |  |

ตารางที่ 7-8 (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| f |   |   |

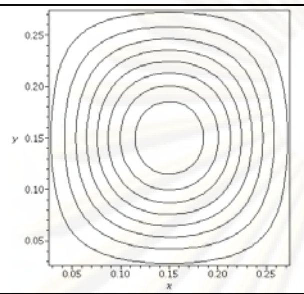
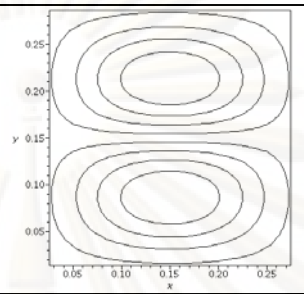
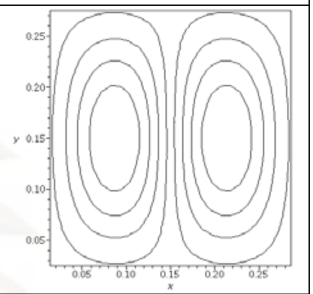
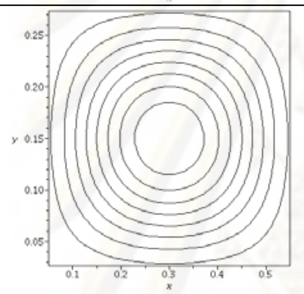
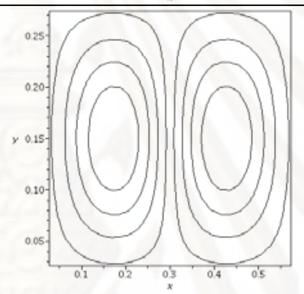
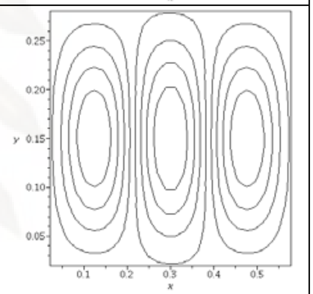
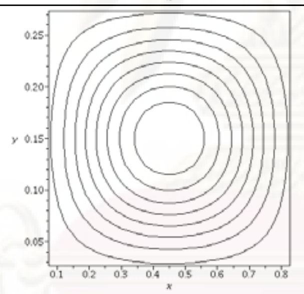
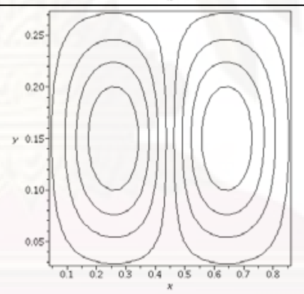
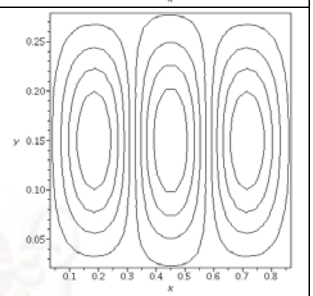
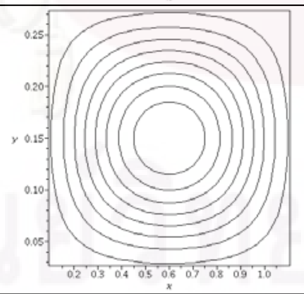
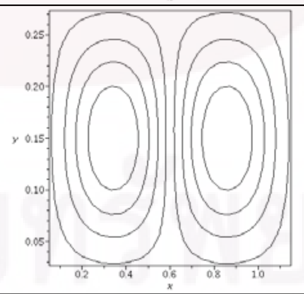
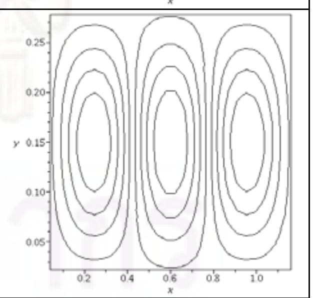
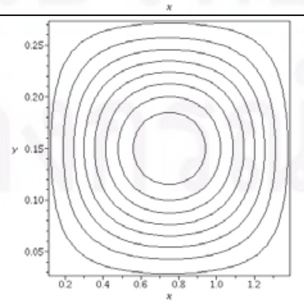
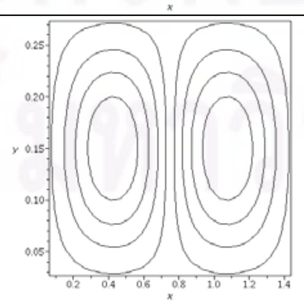
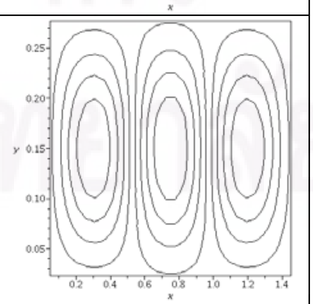
7.5.2 ผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

ในหัวข้อนี้นำเสนอการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือน ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กันห้าขนาดสัดส่วนคือ 1.0 2.0 3.0 4.0 และ 5.0 ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสองแบบคือเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดเหมือนกันทั้งสี่ด้านและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบผสม โดยพิจารณาขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC และ CSSC และแต่ละขอบเขตการจับยึดจะศึกษาชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยสองแบบคือ แบบ $[0/90]_{2S}$ และแบบ $[45]_{8}$ การศึกษาในหัวข้อนี้จะพิจารณาการสั่นสะเทือนสามโหมดแรก ตารางที่ 7-9 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานขนาดต่าง ๆ ในหน่วย rad/s จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ส่วนรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแบบเส้นรูปร่างของชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบ CCCC และมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ และแบบ $[45]_{8}$ แสดงในตารางที่ 7-10 และ 7-11 ตามลำดับ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแบบเส้นรูปร่างของชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบ CSSC และมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ และแบบ $[45]_{8}$ แสดงในตารางที่ 7-12 และ 7-13 ตามลำดับ

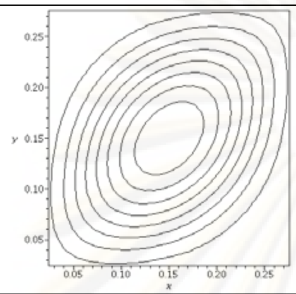
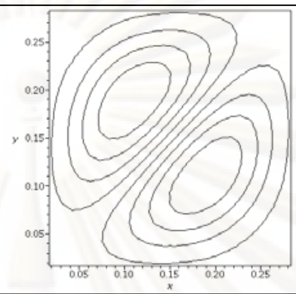
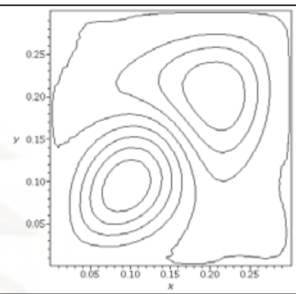
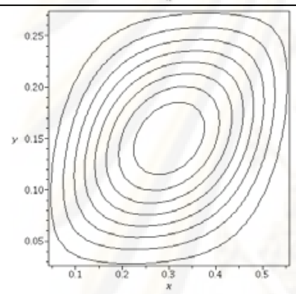
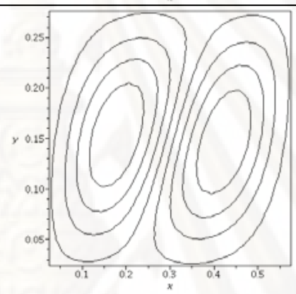
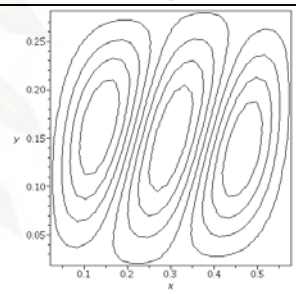
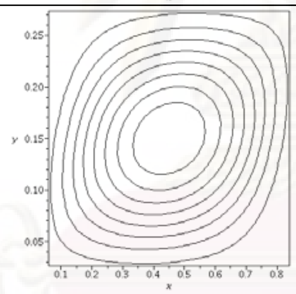
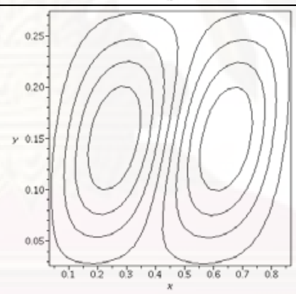
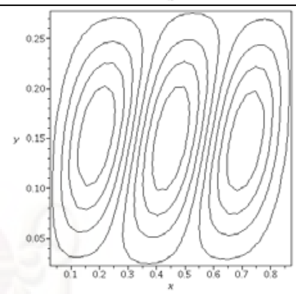
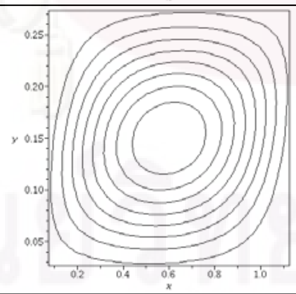
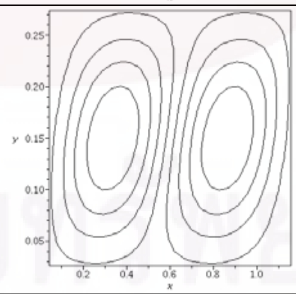
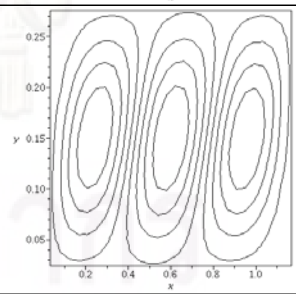
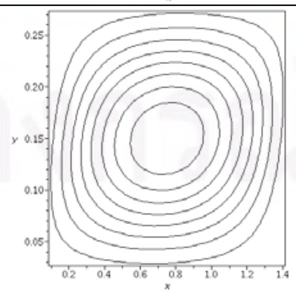
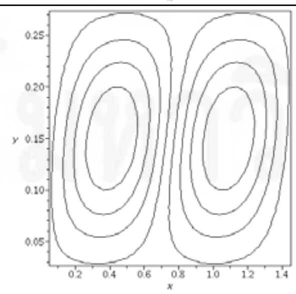
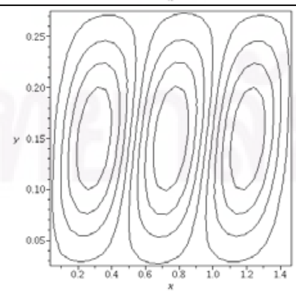
ตารางที่ 7-9 ค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กัน

| Boundary condition | Stacking sequence | Aspect ratio | Mode 1 | | Mode 2 | | Mode 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\omega$ (rad/s) | mode | $\omega$ (rad/s) | mode | $\omega$ (rad/s) | mode |
| CCCC | $[0/90]_{2S}$ | 1.0 | 723.93 | [1,1] | 1310.26 | [1,2] | 1660.22 | [2,1] |
| | | 2.0 | 443.17 | [1,1] | 592.29 | [2,1] | 906.88 | [3,1] |
| | | 3.0 | 419.54 | [1,1] | 459.79 | [2,1] | 558.83 | [3,1] |
| | | 4.0 | 414.56 | [1,1] | 430.37 | [2,1] | 469.64 | [3,1] |
| | | 5.0 | 412.86 | [1,1] | 420.78 | [2,1] | 439.71 | [3,1] |
| | $[45]_8$ | 1.0 | 613.78 | [1,1] | 1306.64 | [1,2] | 1441.15 | [2,1] |
| | | 2.0 | 419.81 | [1,1] | 525.73 | [2,1] | 679.54 | [3,1] |
| | | 3.0 | 397.21 | [1,1] | 436.69 | [2,1] | 504.93 | [3,1] |
| | | 4.0 | 390.93 | [1,1] | 410.85 | [2,1] | 445.43 | [3,1] |
| | | 5.0 | 388.36 | [1,1] | 400.27 | [2,1] | 420.83 | [3,1] |
| CSSC | $[0/90]_{2S}$ | 1.0 | 510.30 | [1,1] | 1044.37 | [1,2] | 1342.06 | [2,1] |
| | | 2.0 | 310.07 | [1,1] | 453.28 | [2,1] | 757.95 | [3,1] |
| | | 3.0 | 291.29 | [1,1] | 332.78 | [2,1] | 436.59 | [3,1] |
| | | 4.0 | 286.91 | [1,1] | 304.00 | [2,1] | 347.53 | [3,1] |
| | | 5.0 | 285.30 | [1,1] | 294.17 | [2,1] | 315.89 | [3,1] |
| | $[45]_8$ | 1.0 | 465.48 | [1,1] | 845.45 | [1,2] | 1218.48 | [2,1] |
| | | 2.0 | 304.08 | [1,1] | 414.55 | [2,1] | 548.40 | [3,1] |
| | | 3.0 | 280.28 | [1,1] | 325.95 | [2,1] | 400.70 | [3,1] |
| | | 4.0 | 273.01 | [1,1] | 297.27 | [2,1] | 337.77 | [3,1] |
| | | 5.0 | 269.90 | [1,1] | 284.83 | [2,1] | 309.89 | [3,1] |

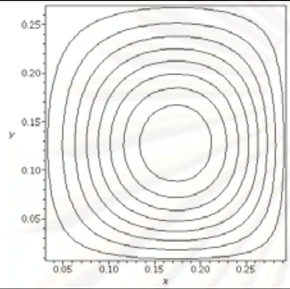
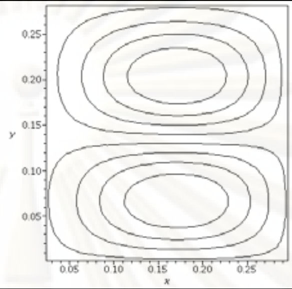
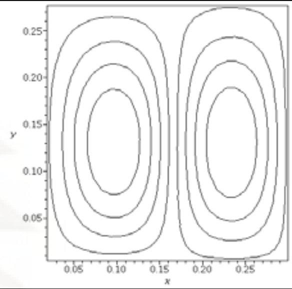
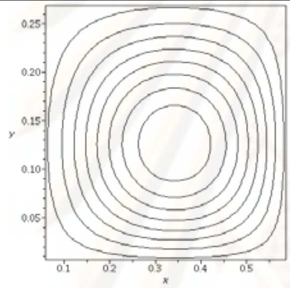
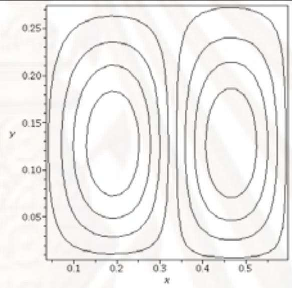
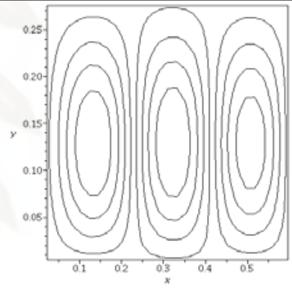
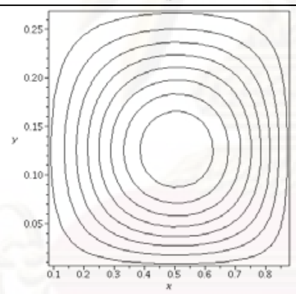
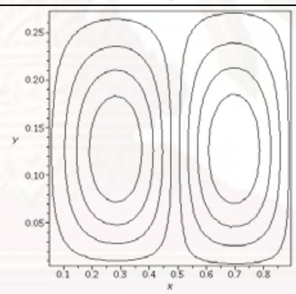
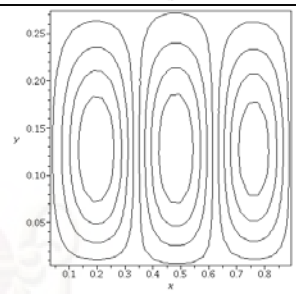
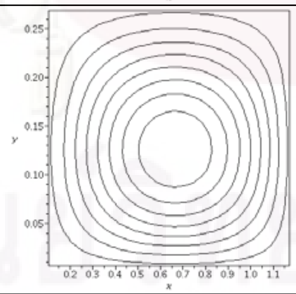
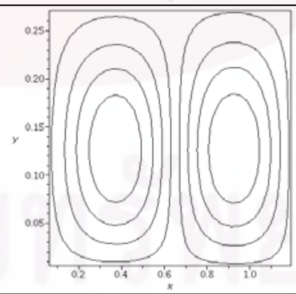
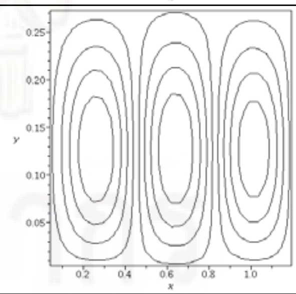
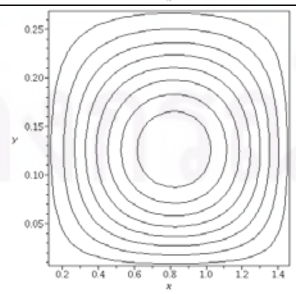
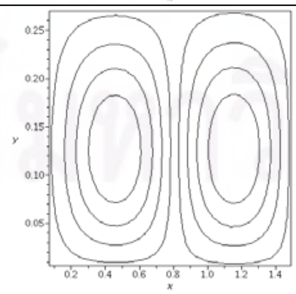
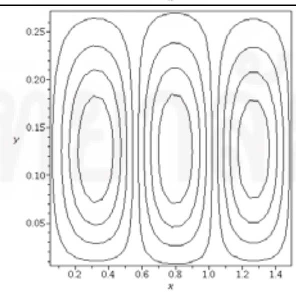
ตารางที่ 7-10 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กัน ที่ขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$

| Aspect ratio | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 |
|---|---|---|---|
| 1.0 |  |  |  |
| 2.0 |  |  |  |
| 3.0 |  |  |  |
| 4.0 |  |  |  |
| 5.0 |  |  |  |

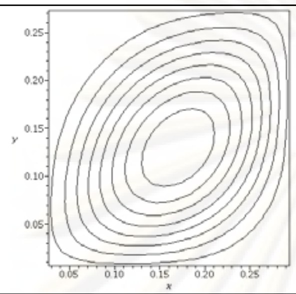
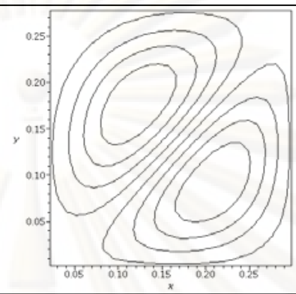
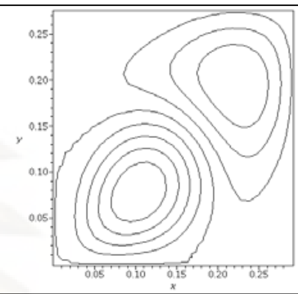
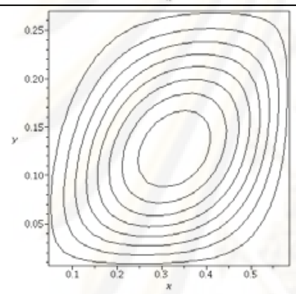
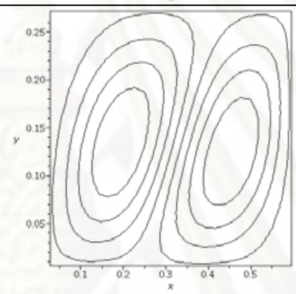
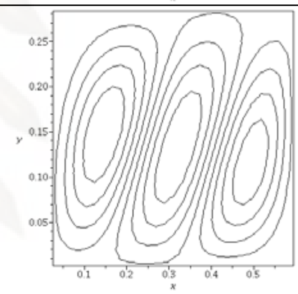
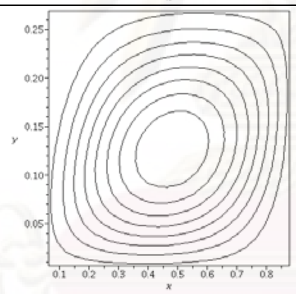
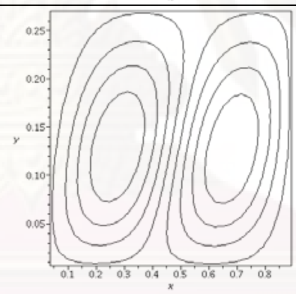
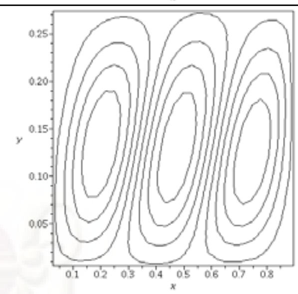
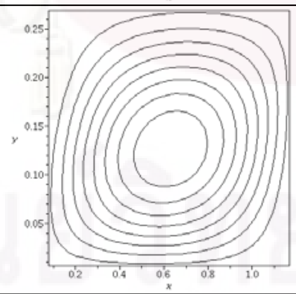
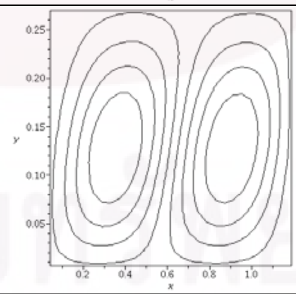
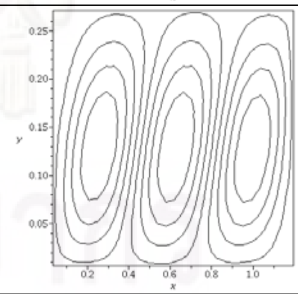
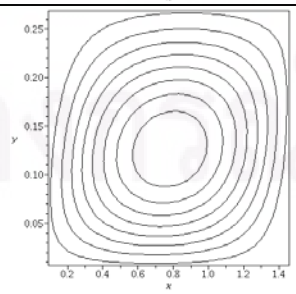
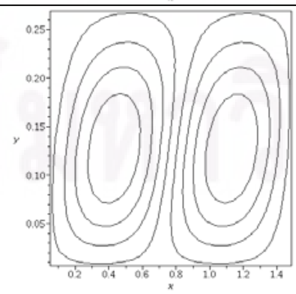
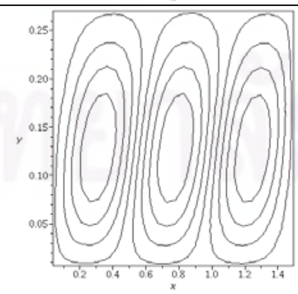
ตารางที่ 7-11 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กัน ที่ขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$

| Aspect ratio | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 |
|---|---|---|---|
| 1.0 |  |  |  |
| 2.0 |  |  |  |
| 3.0 |  |  |  |
| 4.0 |  |  |  |
| 5.0 |  |  |  |

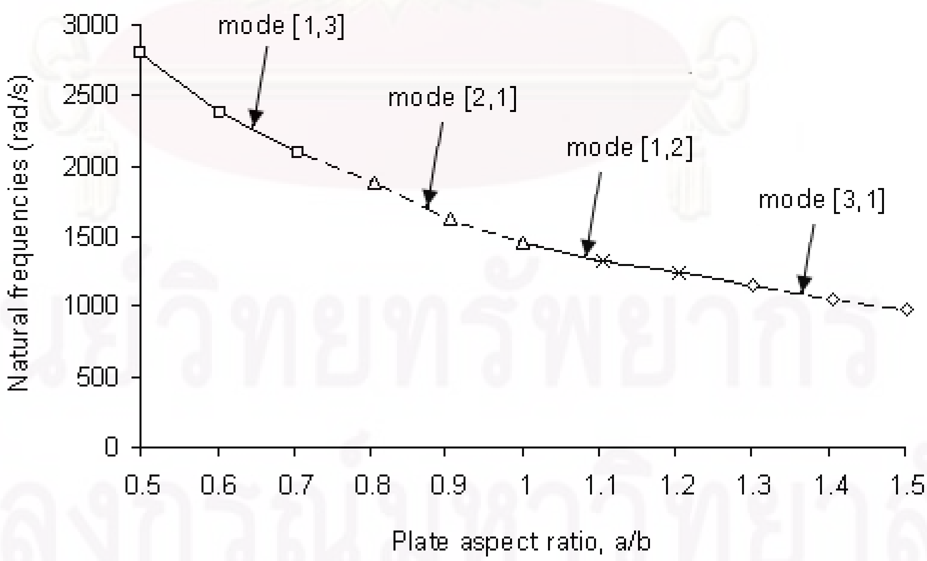
ตารางที่ 7-12 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กันที่ขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$

| Aspect ratio | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 |
|---|---|---|---|
| 1.0 |  |  |  |
| 2.0 |  |  |  |
| 3.0 |  |  |  |
| 4.0 |  |  |  |
| 5.0 |  |  |  |

ตารางที่ 7-13 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กัน ที่ขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$

| Aspect ratio | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 |
|---|---|---|---|
| 1.0 |  |  |  |
| 2.0 |  |  |  |
| 3.0 |  |  |  |
| 4.0 |  |  |  |
| 5.0 |  |  |  |

จากตารางที่ 7-9 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทภายใต้ขอบเขตการจับยึดและลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยทั้งสองแบบมีค่าลดลงเสมอเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเพิ่มขึ้นโดยความกว้างของชิ้นงานมีค่าคงที่ จากลักษณะของรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทตามกรณีที่ศึกษาดังแสดงในตารางที่ 7-10 ถึง 7-13 พบว่า รูปร่างการสั่นสะเทือนในโหมดแรกไม่เปลี่ยนแปลงตามขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่เพิ่มขึ้น แต่สำหรับรูปร่างการสั่นสะเทือนในโหมดที่สูงขึ้นคือ ในโหมดที่สองและโหมดที่สามจะมีแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงรูปร่างโหมดเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเพิ่มขึ้น ดังเช่นรูปร่างการสั่นสะเทือนในโหมดที่สองของชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1.0 จะมีโหมดการสั่นสะเทือนแบบ [1,2] และเมื่อเพิ่มขนาดสัดส่วนเป็น 2.0 ถึง 5.0 โหมดการสั่นสะเทือนจะเปลี่ยนเป็นแบบ [2,1] ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับรูปร่างการสั่นสะเทือนในโหมดที่สามคือ สำหรับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1.0 มีโหมดการสั่นสะเทือนแบบ [2,1] แต่เมื่อเพิ่มขนาดสัดส่วนเป็น 2.0 ถึง 5.0 โหมดการสั่นสะเทือนจะเปลี่ยนเป็น [3,1] โดยพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโหมดการสั่นสะเทือนและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทในโหมดที่สองและโหมดที่สามนี้ สามารถอธิบายได้จากความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กัน ดังแสดงในรูปที่ 7.2 ซึ่งเป็นกราฟแสดงค่าความถี่ธรรมชาติที่การสั่นสะเทือนโหมดสามของแผ่นคอมโพสิทที่ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC โดยพล็อตที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานตั้งแต่ 0.5 ถึง 1.5




รูปที่ 7.2 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนโหมดสามที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่าง ๆ กัน ของขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC ที่การวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$

จากรูปที่ 7.2 แสดงให้เห็นว่ามีการเปลี่ยนแปลงโหมดการสั่นสะเทือนตามขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่เพิ่มขึ้น โดยการเพิ่มขนาดสัดส่วนของชิ้นงานตั้งแต่ 0.5 ถึง 1.5 มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนทั้งหมดสี่แบบ คือ ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 0.5 ถึง 0.7 ได้โหมดการสั่นสะเทือนแบบ [1,3] ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าระหว่าง 0.7 ถึง 1.0 จะได้โหมดการสั่นสะเทือนเปลี่ยนจาก [1,3] เป็น [2,1] ต่อมาเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าระหว่าง 1.0 ถึง 1.3 จะได้โหมดการสั่นสะเทือนเปลี่ยนจาก [2,1] เป็น [1,2] และเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าระหว่าง 1.3 ถึง 1.5 จะได้โหมดการสั่นสะเทือนเปลี่ยนจาก [1,2] เป็น [3,1] ซึ่งสอดคล้องกับผลในตารางที่ 7-9 และสอดคล้องกับรูปร่างการสั่นสะเทือนในโหมดที่สามในตารางที่ 7-11

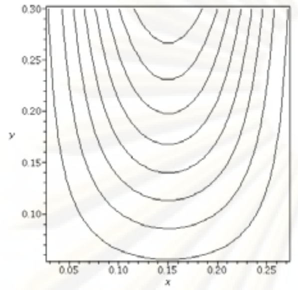
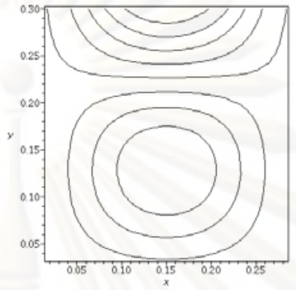
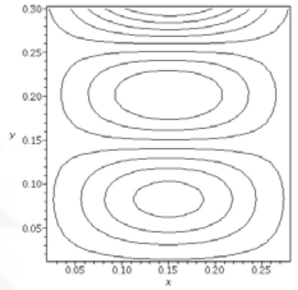
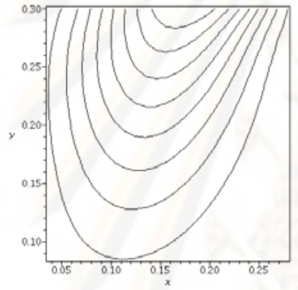
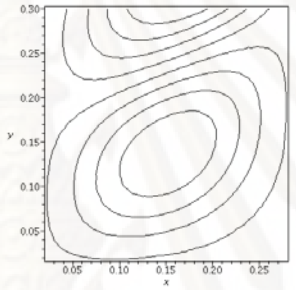
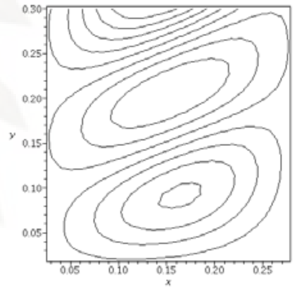
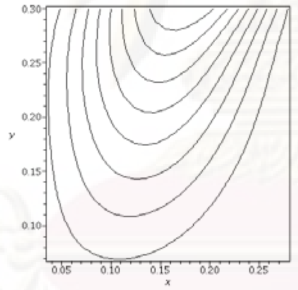
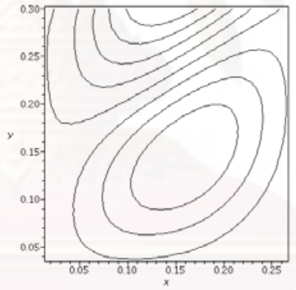
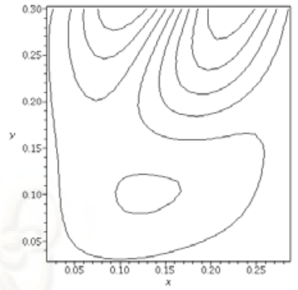
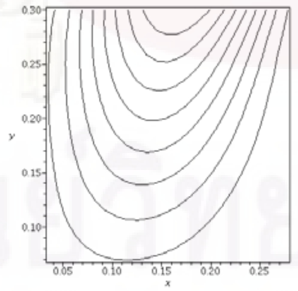
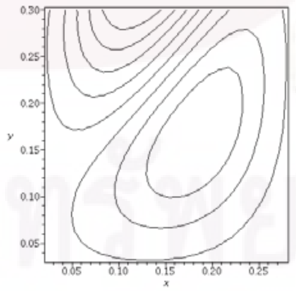
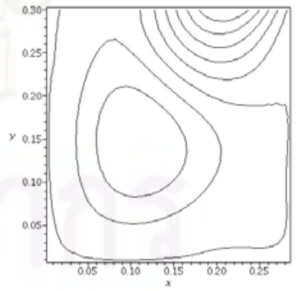
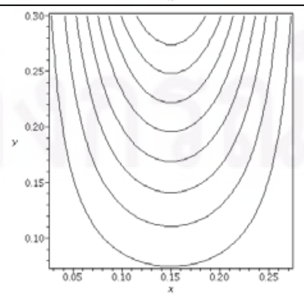
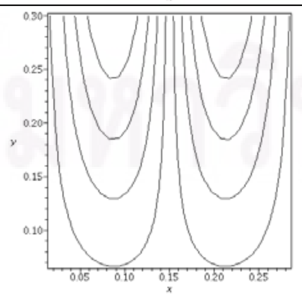
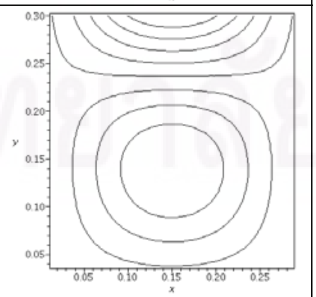
7.5.3 ผลของงองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

หัวข้อนี้นำเสนอการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือน ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแตกต่างกัน โดยพิจารณาแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta]_8$ โดยมุม $\theta$ แตกต่างกัน 7 มุม คือเริ่มจาก $\theta = 0^\circ$ ถึง $90^\circ$ โดยเพิ่มทีละ $15^\circ$ และขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่ศึกษาเท่ากับหนึ่ง พิจารณาชิ้นงานภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสามแบบคือ CCCF, SCSC และ CSSC โดยศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนสามโหมดแรกและใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการคำนวณเท่ากับ 3 พจน์ ตารางที่ 7-14 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติที่อยู่ในหน่วย rad/s เนื่องจากการวางตัวของเส้นใยที่แตกต่างกันทั้ง 7 มุม ส่วนรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแบบเส้นรูปร่างที่เกิดขึ้นจากการวางตัวของเส้นใยที่แตกต่างกันทั้ง 7 มุมภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF, SCSC และ CSSC แสดงในตารางที่ 7-15 ถึง 7-17 ตามลำดับ

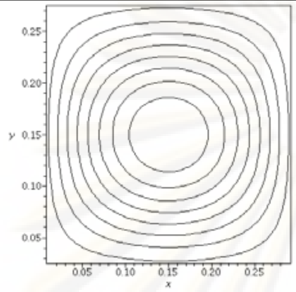
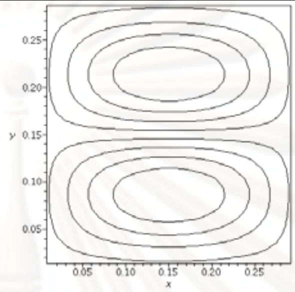
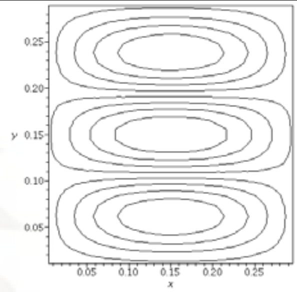
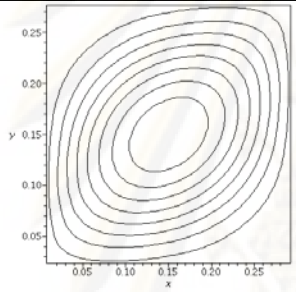
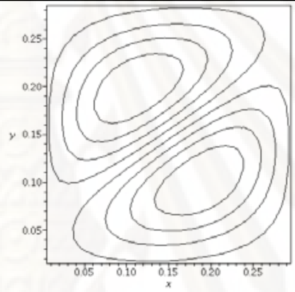
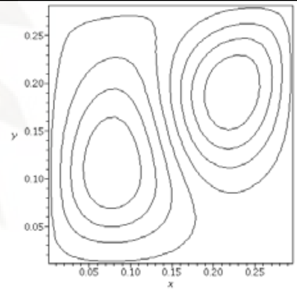
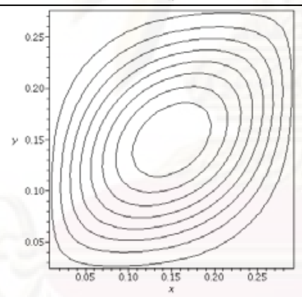
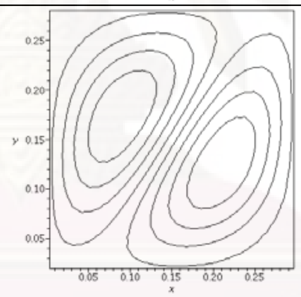
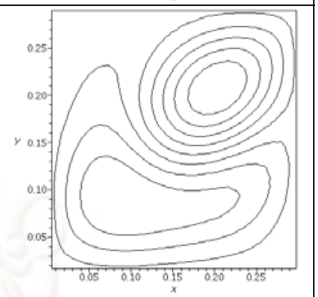
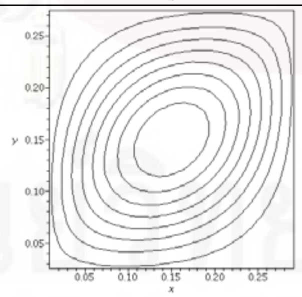
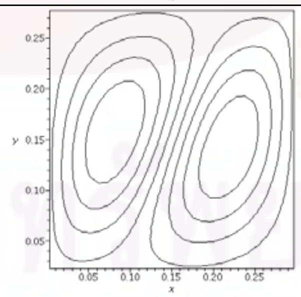
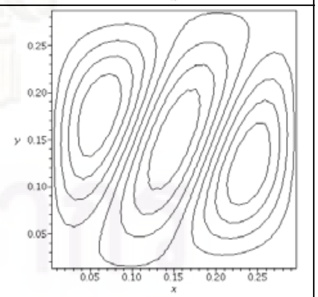
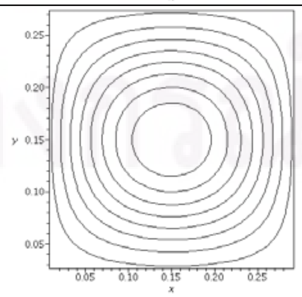
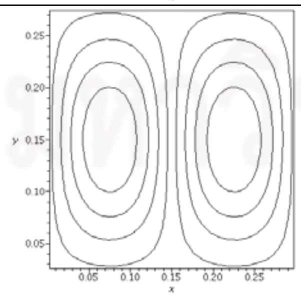
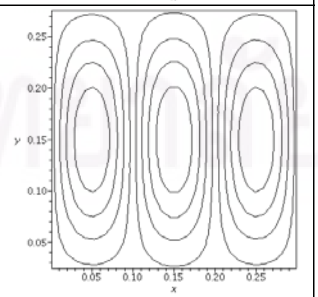
ตารางที่ 7-14 ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/s) ของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta]_8$ สำหรับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับหนึ่ง

| Mode | BC. | Stacking sequence | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $[0]_8$ | $[15]_8$ | $[30]_8$ | $[45]_8$ | $[60]_8$ | $[75]_8$ | $[90]_8$ |
| 1 | CCCF | 682.32 | 617.41 | 481.59 | 360.24 | 284.81 | 248.59 | 238.55 |
| | SCSC | 386.67 | 392.22 | 426.27 | 500.39 | 592.43 | 669.06 | 698.82 |
| | CSSC | 509.96 | 498.00 | 475.68 | 465.48 | 475.68 | 498.00 | 509.96 |
| 2 | CCCF | 746.99 | 716.34 | 668.61 | 641.00 | 623.92 | 587.67 | 569.69 |
| | SCSC | 678.54 | 715.45 | 804.24 | 833.13 | 826.90 | 820.34 | 816.78 |
| | CSSC | 705.70 | 730.82 | 796.94 | 845.45 | 796.94 | 730.82 | 705.70 |
| 3 | CCCF | 953.01 | 965.12 | 1002.17 | 970.48 | 780.32 | 731.66 | 739.41 |
| | SCSC | 1170.43 | 1203.24 | 1148.70 | 1275.34 | 1246.43 | 1163.30 | 1120.54 |
| | CSSC | 1111.36 | 1163.53 | 1256.66 | 1218.48 | 1256.66 | 1163.53 | 1111.36 |

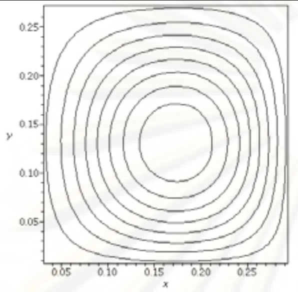
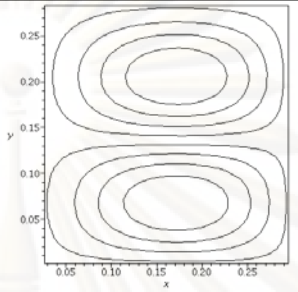
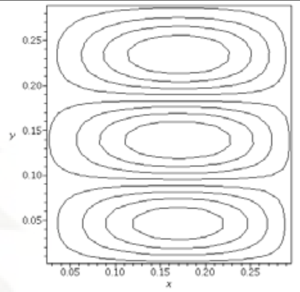
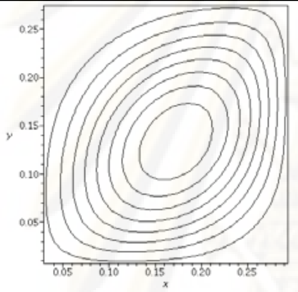
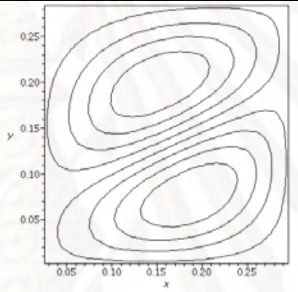
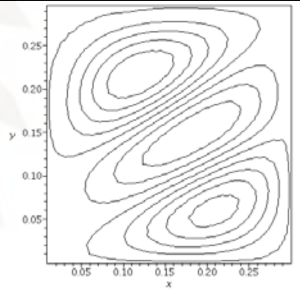
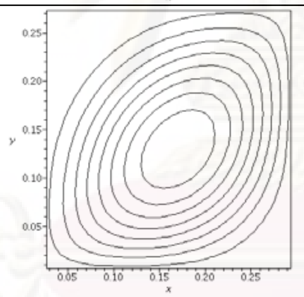
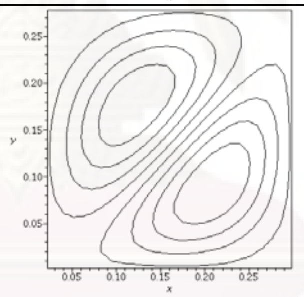
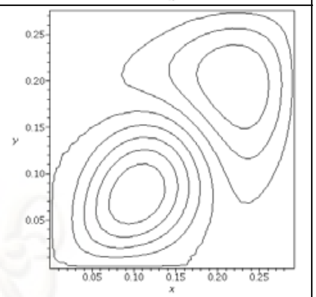
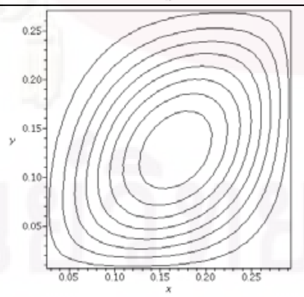
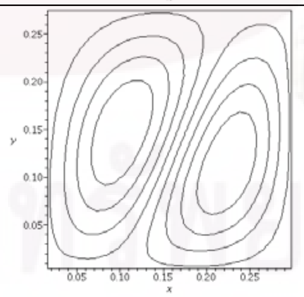
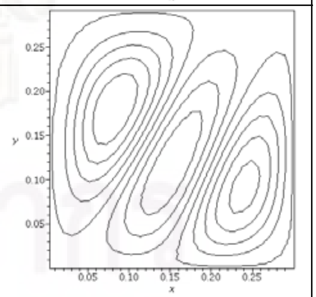
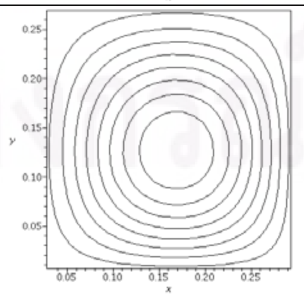
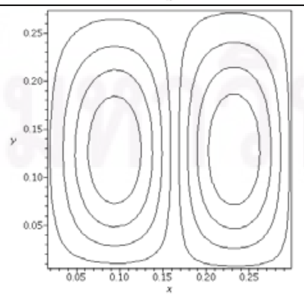
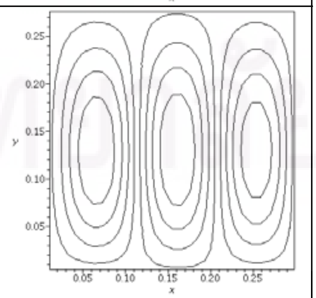
ตารางที่ 7-15 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท กรณีขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF ที่การวางตัวของเส้นใยแบบต่าง ๆ

| Stacking sequence | Mode Shape | | |
|---|---|---|---|
| | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 |
| $[0]_8$ |  |  |  |
| $[30]_8$ |  |  |  |
| $[45]_8$ |  |  |  |
| $[60]_8$ |  |  |  |
| $[90]_8$ |  |  |  |

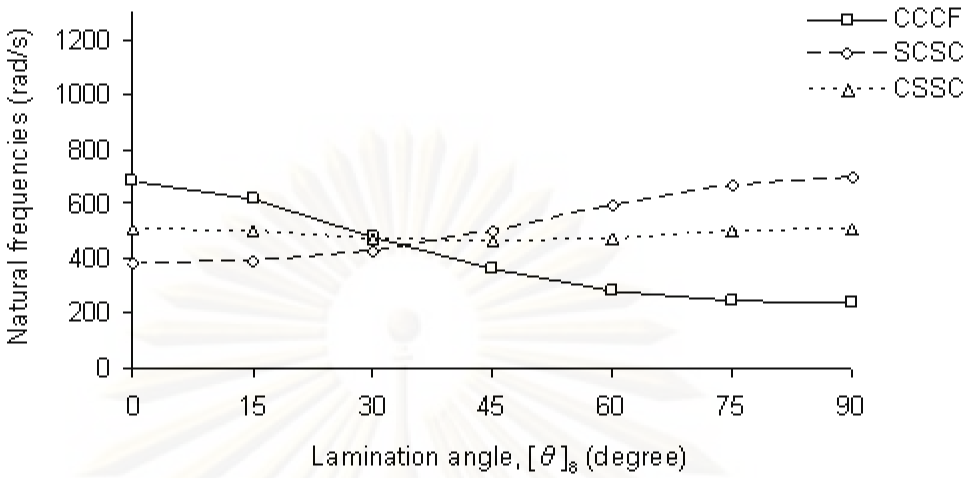
ตารางที่ 7-16 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท กรณีขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC ที่การวางตัวของเส้นใยแบบต่าง ๆ

| Stacking sequence | Mode Shape | | |
|---|---|---|---|
| | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 |
| $[0]_8$ |  |  |  |
| $[30]_8$ |  |  |  |
| $[45]_8$ |  |  |  |
| $[60]_8$ |  |  |  |
| $[90]_8$ |  |  |  |

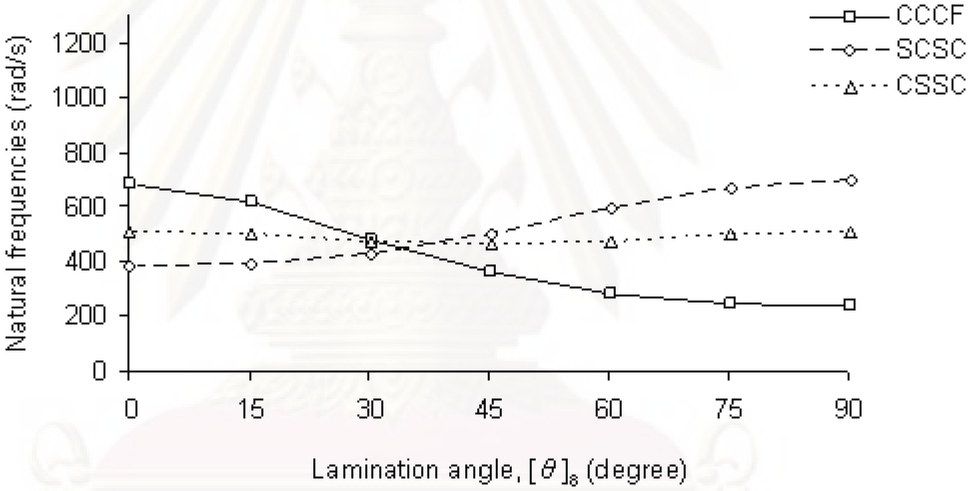
ตารางที่ 7-17 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท กรณีขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC ที่การวางตัวของเส้นใยแบบต่าง ๆ

<table>
<tr><th rowspan="2">Stacking sequence</th><th colspan="3">Mode Shape</th></tr>
<tr><th>Mode 1</th><th>Mode 2</th><th>Mode 3</th></tr>
<tr><td>$[0]_8$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$[30]_8$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$[45]_8$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$[60]_8$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$[90]_8$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

จากรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่แสดงในตารางที่ 7-15 ถึง 7-17 พบว่า จำนวนโหมดของรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดต่ำ ๆ จะไม่เปลี่ยนแปลงตามองศาการวางตัวของเส้นใยที่เพิ่มขึ้น เช่น ที่การสั่นสะเทือนโหมดแรกจะมีรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแบบ [1,1] เสมอ ทุกองศาการวางตัวของเส้นใย และการสั่นสะเทือนที่โหมดสองก็มีรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบ [1,2] หรือ [2,1] เท่านั้น แต่สำหรับการสั่นสะเทือนที่โหมดสาม รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจะมีจำนวนโหมดเปลี่ยนแปลงตามองศาการวางตัวของเส้ยใย เช่น กรณีขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC ที่มุม $\theta=0°$ มีรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแบบ [1,3] เมื่อมุม $\theta=30°$ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนเปลี่ยนเป็น [2,1] ต่อมาที่มุม $\theta=45°$ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนเปลี่ยนจาก [2,1] เป็น [1,2] และที่มุม $\theta=60°$ และ $\theta=90°$ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนเปลี่ยนเป็น [3,1] รูปที่ 7.3 แสดงการนำค่าความถี่ธรรมชาติจากการสั่นสะเทือนโหมดแรกและโหมดสองในตารางที่ 7-14 มาพล็อตเพื่อแสดงความสัมพันธ์กับมุมการวางตัวของเส้นใย ซึ่งพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทในกรณีที่ศึกษาที่จำนวนโหมดการสั่นสะเทือนไม่เปลี่ยนแปลงตามองศาการวางตัวของเส้นใยจะมีรูปแบบความสัมพันธ์กับองศาการวางตัวของเส้นใยคือ การสั่นสะเทือนโหมดแรกและโหมดที่สองที่กรณีการจับยึดแบบ CCCF ค่าความถี่ธรรมชาติที่มุม $\theta=0°$ จะมีค่าสูงสุดและมีค่าต่ำลงเมื่อเพิ่มมุมการวางตัวของเส้นใยขึ้น จนถึงมุม $\theta=90°$ สำหรับกรณีการจับยึดแบบ SCSC ค่าความถี่ธรรมชาติที่มุม $\theta=0°$ จะมีค่าต่ำสุดและมีค่าสูงขึ้นเมื่อเพิ่มมุมการวางตัวของเส้นใยขึ้น จนถึงมุม $\theta=90°$ และกรณีการจับยึดแบบ CSSC ค่าความถี่ธรรมชาติที่มุม $\theta=0°$ จะมีค่าสูงสุดและมีค่าต่ำลงเมื่อเพิ่มมุมการวางตัวของเส้นใยขึ้น โดยมีค่าต่ำสุดที่มุม $\theta=45°$ เมื่อมุมการวางตัวของเส้นใยในช่วงมุม $45°<\theta=90°$ ค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าสูงสุดที่มุม $\theta=90°$ ซึ่งมีค่าเท่ากับมุมการวางตัวของเส้นใยที่ $\theta=0°$ ส่วนการสั่นสะเทือนโหมดที่สามพบว่าความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทกับมุมการวางตัวของเส้นใยของการจับยึดทั้งสามกรณี ไม่มีรูปแบบความสัมพันธ์ที่ชัดเจนเหมือนโหมดการสั่นสะเทือนสองโหมดแรก ดังนั้นจะเห็นได้ว่าสำหรับโหมดการสั่นสะเทือนต่ำ ๆ ค่าความถี่ธรรมชาติจะเปลี่ยนตามองศาการวางตัวของเส้นใยโดยการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจะมีลักษณะอย่างไรขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้วย




(a) Mode 1



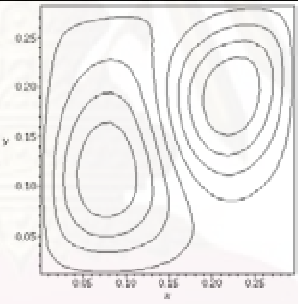
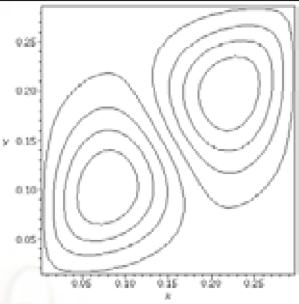
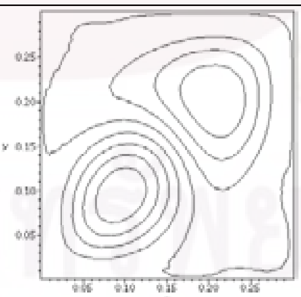
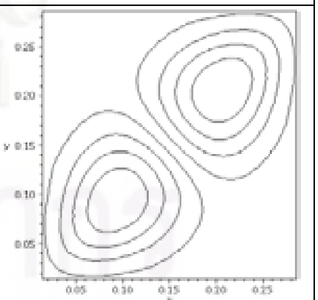

(b) Mode 2

รูปที่ 7.3 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติกับมุมการวางตัวของเส้นใยของโหมดการสั่นสะเทือนสองโหมดแรก ที่ขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF, SCSC และ CSSC

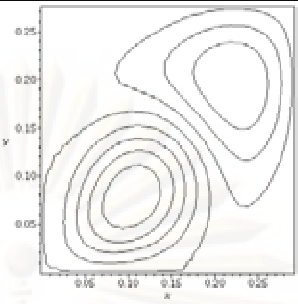
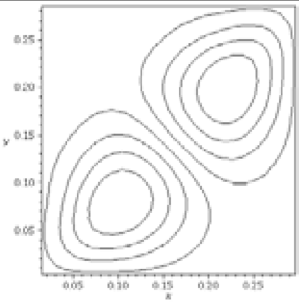
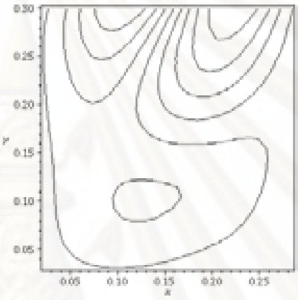
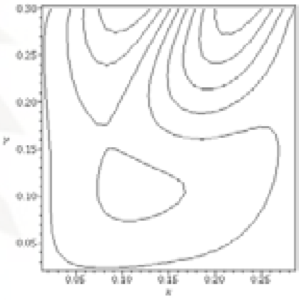
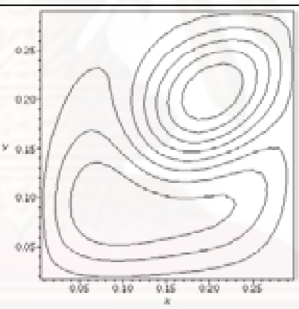
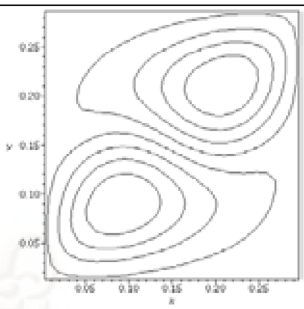
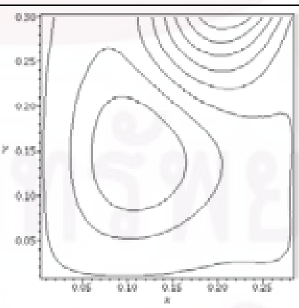
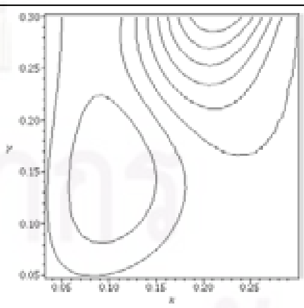
จากการศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท ในหัวข้อที่ 7.5.2 และ 7.5.3 พบว่า มีรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางโหมดที่ค่าความถี่ธรรมชาติยังแตกต่างจากค่าที่ได้จากการคำนวณโดยระเบียบวิธีริทซ์และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนมีลักษณะไม่สมมาตรกรณีเหล่านั้นได้แก่ การสั่นสะเทือนที่โหมดสามสำหรับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับหนึ่งมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ ในกรณีขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC, CSSC, CCCF และSCSC ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[60]_8$ ในกรณีขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF และลำดับชั้นการ

วางตัวของเส้นใยแบบ $[30]_8$ ในกรณีขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC การคำนวณหารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทดังกล่าวใช้จำนวนพจน์ในการใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 พจน์ และจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 200 ตัว ซึ่งน่าจะมีค่าน้อยเกินไปทำให้ได้คำตอบที่ยังไม่ลู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง จึงทำการคำนวณใหม่โดยใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 5 พจน์ และจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 300 ตัว ตารางที่ 7-18 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติที่อยู่ในหน่วย rad/s และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของจำนวนพจน์ในการใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเดิมและจำนวนใหม่

ตารางที่ 7-18 ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/s) และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท จากการใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 และ 5 พจน์

| Stacking sequence | Boundary condition | N=3 | N=5 |
|---|---|---|---|
| | | Mode shape ($\omega$) | Mode shape ($\omega$) |
| $[30]_8$ | SCSC |  (1148.70) |  (1126.50) |
| $[45]_8$ | CCCC |  (1441.15) |  (1415.63) |

ตารางที่ 7-18 (ต่อ)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[45]_8$ | CSSC |  (1218.48) |  (1185.43) |
| | CCCF |  (970.48) |  (960.44) |
| | SCSC |  (1275.34) |  (1250.77) |
| $[60]_8$ | CCCF |  (780.32) |  (768.92) |

จากตารางที่ 7-18 พบว่า รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการเพิ่มจำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 5 พจน์ มีรูปร่างที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดมากกว่าการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 พจน์ และได้ค่าความถี่ธรรมชาติที่มีค่าลู่เข้าสู่คำตอบมากกว่า สอดคล้องกับข้อสรุปในหัวข้อที่ 7.5.1 ดังนั้นจะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีแคนโทโรวิชนี้สามารถใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางได้อย่างมีประสิทธิภาพ สำหรับชิ้นงานที่เป็นวัสดุไอโซโทรปิคหรือวัสดุคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของชิ้นงานแบบ cross-ply การใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่เพียงหนึ่งพจน์ก็เพียงพอที่จะได้คำตอบที่ลู่เข้า ส่วนกรณีชิ้นงานเป็นแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของชิ้นงานแบบ angle-ply จะต้องใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันเริ่มต้นมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับโหมดการสั่นสะเทือนสูง ๆ

ในบทนี้ได้ศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นในการใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท ศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ใช้ในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้า ศึกษาผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือน และศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท ซึ่งจากการศึกษาในแต่ละหัวข้อทำให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และทราบถึงข้อจำกัดในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบาง

# บทที่ 8

# บทสรุป

## 8.1 บทสรุป

ปัจจุบันวัสดุคอมโพสิทถูกนำมาใช้กันอย่างกว้างขว้างสำหรับโครงสร้างในงานทางวิศวกรรมเพราะมีน้ำหนักเบาและมีคุณสมบัติทางกลที่เหมาะสมในการออกแบบ ดังนั้นจึงมีการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทกันอย่างแพร่หลายในสองทศวรรษที่ผ่านมา การโก่งงอและการสั่นสะเทือนเป็นพฤติกรรมของโครงสร้างที่ต้องคำนึงถึงในขบวนการออกแบบเนื่องจากเป็นพฤติกรรมที่อาจทำให้โครงสร้างไม่สามารถอยู่ในสภาวะเสถียรและส่งผลทำให้โครงสร้างโดยรวมเกิดความเสียหายได้ การหาค่าภาระโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทบางอาจทำได้โดยวิธีการวิเคราะห์ วิธีการทดลอง หรือวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งแต่ในละวิธีก็มีข้อได้เปรียบและข้อจำกัดแตกต่างกันออกไป วิธีการเชิงตัวเลขเป็นวิธีที่ได้รับการยอมรับและใช้อย่างกว้างขวางในปัจจุบันเนื่องจากสามารถประมาณค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทที่ไม่มีผลเฉลยแม่นตรงได้ ซึ่งแต่ละระเบียบวิธีในวิธีเชิงตัวเลขสามารถประมาณค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติได้ค่าแม่นยำมากน้อยแตกต่างกันไปเมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในอดีต ความคลาดเคลื่อนของคำตอบสาเหตุหนึ่งอาจเกิดจากการกำหนดฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีที่ต้องใช้ฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของชิ้นงานที่ศึกษา ด้วยเหตุนี้การศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้จึงเลือกใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการประมาณค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิท เนื่องจากในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณครั้งแรกของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด รวมทั้งผลเฉลยที่ได้ก็ถือเป็นผลเฉลยแม่นตรงได้เนื่องจากเป็นการแก้ปัญหาจากสมการครอบคลุมโดยตรง โดยสมการครอบคลุมที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อยู่ในรูปของพลังงานศักย์รวม หลักการของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชคือลดรูปสมการครอบคลุมจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ โดยสมมุติให้ทราบฟังก์ชันในทิศใดทิศหนึ่งแล้วใช้หลักการการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด สุดท้ายรูปแบบของการแก้ปัญหาจะอยู่ในรูปแบบของปัญหาค่าเจาะจงซึ่งในการคำนวณจะต้องอาศัยการทำซ้ำเพื่อให้ค่าเจาะจงที่มีค่าลู่เข้า

จากงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชพบว่า ในส่วนของปัญหาการโก่งงอมีผู้ศึกษาโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเท่ากับหรือมากกว่า 1 พจน์ โดยได้ศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอ แต่ในส่วนของปัญหาการสั่นสะเทือนมีการศึกษาโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ และคุณสมบัติทางกลของโครงสร้างแผ่นบางที่ศึกษาเป็นวัสดุแบบไอโซโทรปิคและออโทรทรอปิกเท่านั้น ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงเน้นการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นมากกว่า 1 พจน์ โดยหัวข้อที่จะศึกษา ได้แก่ ศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นในการใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท ศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ใช้ในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา ศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท และเนื่องจากขั้นตอนในการหาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอมีลักษณะเหมือนกับขั้นตอนการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดแรกของปัญหาการสั่นสะเทือน ดังนั้นในส่วนแรกได้ศึกษาการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิท โดยศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอ คือนำผลที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปเปรียบเทียบกับผลการศึกษาที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเหมือนกันและจากการศึกษาอื่น ๆ

จากผลการศึกษาในส่วนแรกพบว่าค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมีค่าเท่ากันทุกกรณีศึกษาเมื่อเทียบกับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเหมือนกัน ส่วนกรณีเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอกับการแก้ปัญหาการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีอื่น พบว่าในกรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 และ 2 พจน์ จะได้ค่าภาระการโก่งงอไม่แตกต่างกันมากนัก และเมื่อใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์ ก็ทำให้ค่าภาระการโก่งงอมีค่าลู่เข้าและมีค่าใกล้เคียงกับผลการศึกษาที่นำมาเปรียบเทียบ ดังนั้นจะได้ว่าในกรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 หรือ 2 พจน์ ก็ให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่มีความถูกต้องแล้ว ส่วนกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพียง 1 พจน์ ยังไม่สามารถให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่ง

งอที่น่าเชื่อถือได้ เนื่องจากค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับผลการศึกษาที่นำมาเปรียบเทียบ การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นมากขึ้นจะทำให้ค่าภาระการโก่งงอมีค่าลู่เข้ามากยิ่งขึ้นและทำให้รูปร่างโหมดการโก่งงอมีความสมเหตุสมผลมากขึ้นด้วย ผลการศึกษาการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอนี้สอดคล้องกับการศึกษาของ Shufrin และคณะ [11]

ส่วนการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทเริ่มจากการตรวจโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือน โดยหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคโดยใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 4 พจน์ เทียบกับค่าผลการศึกษาที่มีในอดีตของ Leissa [12] พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีค่าเท่ากันตั้งแต่การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 พจน์ขึ้นไปทุกโหมดที่ศึกษาและมีค่าใกล้เคียงกับผลการศึกษาในอดีต โดยค่าความถี่ธรรมชาติที่แตกต่างกันมากสุดมีค่าเพียง 0.007 เปอร์เซ็นต์เท่านั้น ดังนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคได้อย่างน่าเชื่อถือ จากนั้นนำโปรแกรมที่ได้ไปศึกษาผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าความถี่ธรรมชาติโครงสร้างแผ่นบาง โดยแผ่นบางที่ศึกษามีขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC, CCSS และ SCSF และสำหรับแต่ละขอบเขตการจับยึดได้ศึกษาชิ้นงานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นไอโซโทรปิคและคอมโพสิท ในส่วนของแผ่นคอมโพสิทศึกษากรณีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยทั้งแบบ cross-ply และแบบ angle-ply จากผลการศึกษาพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับกรณีแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิคและแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply จะมีค่าลู่เข้าสู่คำตอบตั้งแต่การใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 หรือ 2 พจน์เท่านั้น ส่วนในกรณีที่แผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply จะต้องใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อลู่เข้าสู่คำตอบมากกว่า ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นต่อค่าภาระการโก่งงอในปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบาง

ในหัวข้อต่อมาศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้าของแผ่นคอมโพสิทบางที่มีขอบเขตการจับยึดเดียวกับการศึกษาจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นโดยได้เพิ่มกรณีขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS ด้วย แผ่นคอมโพสิทที่ศึกษามีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยสองแบบคือ การวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และแบบ angle-ply โดยศึกษาที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานแตกต่างกันทั้งหมดสี่ขนาดสัดส่วนคือ 0.5 1.0 1.5 และ 2.0 ผล

การศึกษาพบว่า กรณีแผ่นคอมโพสิทที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply จะมีแนวโน้มการใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้ามากกว่าในกรณีที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และในศึกษานี้พบว่าเมื่อใช้จำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพิ่มขึ้นจะต้องการจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมากขึ้นด้วย โดยการศึกษาจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนนี้เป็นการพิจารณาที่การสั่นสะเทือนโหมดแรก จากการศึกษาทั้งสองหัวข้อดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่ากรณีแผ่นบางที่ค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ไม่เท่ากับศูนย์ ต้องการจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อการลู่เข้าสู่คำตอบและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้ามากกว่ากรณีของแผ่นบางที่ค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ เท่ากับศูนย์

การศึกษาในลำดับสุดท้ายแบ่งการศึกษาออกเป็นสามส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ของโครงสร้างแผ่นบางต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่โหมดสูงขึ้น ในการศึกษานี้ได้ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนห้าโหมดแรกของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซโทรปิคและแบบคอมโพสิท ภายใต้ขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF, SCSC และ CSSC ในกรณีแผ่นคอมโพสิทศึกษาชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแตกต่างกันสามแบบคือ $[0/90]_{2S}$, $[\pm 45]_{2S}$ และ $[45]_8$ ซึ่งค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ของการวางตัวจะมีค่าเรียงจากน้อยไปมากตามลำดับ แล้วนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีริทซ์ ผลการศึกษาพบว่า สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่มีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ สูงการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่โหมดการสั่นสะเทือนสูง ๆ ทำได้ยากขึ้น ส่วนที่สองศึกษาผลของการเพิ่มขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนโดยศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนสามโหมดแรก พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทมีค่าลดลงเสมอเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเพิ่มขึ้น ส่วนรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนพบว่าที่การสั่นสะเทือนโหมดแรกไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่เพิ่มขึ้นเมื่อความกว้างของชิ้นงานเท่ากัน แต่สำหรับรูปร่างการสั่นสะเทือนในโหมดที่สูงขึ้นจะมีแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงรูปร่างโหมดเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเพิ่มขึ้น และส่วนสุดท้ายศึกษาผลขององศาการวางตัวของเส้นใยจะศึกษาแผ่นคอมโพสิทที่การสั่นสะเทือนสามโหมดแรกโดยพิจารณาชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta]_8$ โดยมุม $\theta$ แตกต่างกัน 7 มุม คือเริ่มจาก $\theta = 0^\circ$ ถึง $90^\circ$ โดยเพิ่มทีละ $15^\circ$ จากการศึกษาพบว่า ที่โหมดการสั่นสะเทือนต่ำ ๆ ค่าความถี่ธรรมชาติกับมุมการวางตัวของเส้นใยจะมีรูปแบบความสัมพันธ์ที่ชัดเจนกว่าที่โหมดการสั่นสะเทือนสูงขึ้น

เนื่องจากจำนวนโหมดของรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดต่ำ ๆ จะไม่เปลี่ยนแปลงตามองศาการวางตัวของเส้นใยที่เพิ่มขึ้น

การศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ โดยวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช มีข้อได้เปรียบกว่าระเบียบวิธีอื่นคือ ผลเฉลยที่ได้ถือเป็นผลเฉลยแม่นตรงเพราะเป็นแก้ปัญหาจากสมการครอบคลุมโดยตรง และในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณครั้งแรกก็ไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดเนื่องจากในการหาผลเฉลยต้องอาศัยกระบวนการการทำซ้ำ แต่เนื่องจากในการหาผลเฉลยของระเบียบวิธีนี้ต้องอาศัยกระบวนการการคำนวณซ้ำ จึงทำให้การหาค่าเจาะจงของแต่ละรอบการคำนวณจะต้องพิจารณาค่าที่ต้องการให้ลู่เข้าเท่านั้น ดังนั้นข้อด้อยของระเบียบวิธีนี้ก็คือ ถ้าในรอบใดรอบหนึ่งในการคำนวณเลือกค่าเจาะจงที่เป็นค่าที่ไม่ลู่เข้าสู่คำตอบ ก็ต้องใช้จำนวนรอบการคำนวณเพิ่มขึ้นจึงจะได้ค่าเจาะจงที่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการทำให้ใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นหรืออาจทำให้หาคำตอบที่ต้องการไม่ได้เลย สำหรับข้อจำกัดของระเบียบวิธีนี้คือ ในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ ของโครงสร้างแผ่นบางที่มีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ สูงจะทำได้ยาก เพราะรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ จะมีความซับซ้อนเพิ่มขึ้น และมีผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ ต่อฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบมากขึ้น ทำให้ต้องการจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบมากขึ้นด้วย ซึ่งส่งผลให้จำนวนสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหามากขึ้นและมีความซับซ้อนมากตามไปด้วย ข้อแนะนำสำหรับการใช้ระเบียบแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหาอื่น ๆ คือ ควรศึกษาจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นให้ได้จำนวนเหมาะสมกับปัญหาที่กำลังศึกษา

## 8.2 ประโยชน์ที่ได้รับและข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ประโยชน์ข้อแรกจากการนำเสนอวิทยานิพนธ์นี้คือ เข้าใจพฤติกรรมการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางแบบสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ และเข้าใจพฤติกรรมการสั่นสะเทือน ลักษณะของรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ รวมทั้งทราบถึงผลของค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$

ต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือน ผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานและองศาการวางตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิทว่ามีต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางอย่างไร

ส่วนประโยชน์ข้อถัดมาคือเข้าใจถึงผลของการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นและจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นที่ใช้ในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชต่อปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท และทราบข้อได้เปรียบ ข้อด้อย ข้อจำกัดของระเบียบวิธีแคนโทโรวิช รวมทั้งข้อแนะนำในการใช้ระเบียบวิธีนี้ในการแก้ไขปัญหาอื่น ๆ ส่วนประโยชน์ข้อสุดท้ายคือ ได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง

งานวิจัยในอนาคตที่น่าจะทำต่อจากวิทยานิพนธ์นี้คือ ศึกษาวิธีการสำหรับการแก้ปัญหาค่าเจาะจงที่มีความซับซ้อนมาก ๆ เพื่อที่จะสามารถคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนที่โหมดสูง ๆ ของโครงสร้างที่มีค่า $D_{16}$ และ $D_{26}$ สูงให้มีความน่าเชื่อถือมากขึ้น งานวิจัยในอนาคตที่น่าสนใจอีกส่วนหนึ่งเป็นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหาอื่น ๆ เช่น ปัญหาการดัดของแผ่นบางหรือศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอหรือการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่เป็นแผ่นหนา

# รายการอ้างอิง


[1] Iyengar, N.G.R. Structural Stability of Columns and Plates. The United Kingdom : JOHN WILEY & SONS, 1988.

[2] Gibson, R.F. Principles of Composite Material Mechanics. Singapore : McGraw-Hill, 1994.

[3] Chai, G.B., and Hoon K.H. Buckling of generally laminated composite plates with various edges support conditions. Composite Structures 29 (1994) : 299-310.

[4] Ashton, J.E., and Love, T.S. Experimental study of the stability of composite plates. Journal of Composite Material 3 (1969) 230-242.

[5] Tuttle, M., Singhatanadgid, P., and Hinds, G. Buckling of Composite Panels Subject to Biaxial Loading. Experiment Mechanics 39 (1999) : 191-201.

[6] Darvizeh, M., Darvizeh, A., Ansari, R., and Sharma, C.B. Buckling analysis of generally laminated composite plates (generalized differential quadrature rules versus Rayleigh-Ritz method). Composite Structures 63 (2004) : 69-74.

[7] Kerr, A.D. An extended Kantorovich method for solution of eigenvalue problem. International Journal of Solids and Structures 5 (1969) : 559-572.

[8] Yuan, S., and Jin, Y. Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method. Composite Structures 66 (1998) : 861-867.

[9] Ungbhakorn, V., and Singhatanadgid, P. Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method. Composite Structures 73 (2006) : 120-128.

[10] Reddy, J.N. Theory and analysis of elastic plates. Philadelphia, PA : Taylor & Francis, 1999.

[11] Shufrin, I., Rabinovitch, O., and Eisenberger, M. Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions-A semi analytical approach. Composite Structures 82 (2008) : 521-531.

[12] Leissa, A.W. Vibration of Plates. The United States of America : Office of Technology Untilization National Aeronautics and Space Administration, 1969.

[13] Gorman, D.J. Free Vibration Analysis of Rectangular Plates. The United States of America : Elsevier, 1982.

[14] Aydogdo, M., and Timarci, T. Free Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Thin Square Composite Plates. Trakya University : Turkey, 2007.

[15] Messinan, A., and Soldatos, K.P. Vibration of completely Free Composite Plates and Cylindrical Shall Panels by a Higher Order Theory. International Journal of Mechanical Sciences 41 (1999) : 891-918.

[16] Bercin, A.N. Free vibration solution for clamped orthotropic plates using the Kantorovich method. Journal of Sound and Vibration 196 (1996) : 243-247.

[17] Gorman, D.J. Accurate free vibration analysis of clamped orthotropic rectangular plates with clamped and simply supported edges. Journal of Sound and Vibration 140 (1990) : 391-411.

[18] Marangoni, R.D. Upper and lower bounds to the natural frequencies of vibration of clamped rectangular orthotropic plates. International Journal of Solids and Structures 14 (1978) : 611-623.

[19] Chang, D.C., Wang, G., and Wereley, N.M. A Generalized Kantorovich Method and its Application to Free In-Plane Plate Vibration Problem. Applicable Analysis 80 (2001) : 493-523.

[20] Farag, N.H., and Pan, J. Modal characteristics of in-plane vibration of rectangular plates. Journal of the Acoustical Society of America 105 (1999) : 3295-3309.

[21] Whitney, J.M. Structural Analyss of Laminte Anisotropic Plate. Technomic Publishing : Lancaster, 1987.

[22] Chen, X.L., Liu, G.R., and Lim, S.P. An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape. Composite Structures 59 (2003) : 279-289.

[23] Turvey, G.J, and Marshall, I.H. Buckling and Postbuckling of Composite Plates. Chapman & Hall : London, 1995.

[24] Herakovich, C.T. Mechanics of fibrous composites. John Wiley & Sons, Inc : New York, 1998.

[25] Leissa, A.W. and Narita, Y. Vibration studies for simply supported symmetrically laminated regular plates. Composite Structures 12 (1989) : 113-132.

[26] Chow, S.T., Liew, K.M., and Lam, K.Y. Transverse vibration of symmetrically laminated rectangular composite plates. Composite Structures 5 (1992) : 207-241.

# ภาคผนวก

# ภาคผนวก ก

## รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

# ภาคผนวก ก

## รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ภาคผนวก ก แสดงรายละเอียดและคำอธิบายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อช่วยคำนวณทางคณิตศาสตร์สำหรับการแก้ปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ แบ่งภาคการคำนวณออกเป็นสามส่วน ได้แก่

ภาคผนวก ก.1 แสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิท

ภาคผนวก ก.2 แสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

ภาคผนวก ก.3 แสดงโปรแกรมย่อยที่ใช้ในภาคผนวก ก.1 และภาคผนวก ก.2

โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งแก้ปัญหาการโก่งงอและสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท จะแบ่งโปรแกรมสำหรับการคำนวณออกเป็นสองด้านคือด้านที่กำหนดฟังก์ชัน $Y_i(y)$ และด้านที่กำหนดฟังก์ชัน $X_i(x)$ เป็นตัวทราบค่าเริ่มต้น ดังแสดงตามแผนผังในรูปที่ 5.1 โดยการแก้ปัญหาทั้งสองด้านจะเริ่มจากหาค่าเมตริกซ์ทราบค่าจากฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่า จากนั้นนำเมตริกซ์ทราบค่าไปคำนวณหาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของขอบที่ไม่ทราบฟังก์ชันเริ่มต้นโดยจัดรูปแบบสมการให้เป็นระบบสมการเชิงเส้น ในส่วนสุดท้ายจะแก้ปัญหาค่าเจาะจง โดยพล็อตกราฟหาค่าเจาะจงที่ทำให้พลังงานรวมมีค่าต่ำสุด แล้วนำค่าเจาะจงที่ได้ไปหาเวกเตอร์เจาะจง สำหรับใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการทำซ้ำในรอบต่อไป

หมายเหตุ; - ผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขในบทที่ 5 6 และ 7 เป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากโปรแกรม Maple

- ข้อความที่แสดงไว้ระหว่างเครื่องหมาย # .. # เป็นข้อความที่ใช้อธิบายรายละเอียดของโปรแกรมเท่านั้นไม่มีผลต่อการคำนวณของโปรแกรม

## ก.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิท

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาการโก่งงอที่แสดงในภาคผนวก ก.1 นี้ ใช้คำนวณหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิท ดังตัวอย่างที่แสดงไว้ในหัวข้อที่ 5.2 แบ่งโปรแกรมการคำนวณออกเป็นสองด้าน โปรแกรมแรกแสดงการทำซ้ำรอบแรกโดยกำหนดฟังก์ชัน $Y_i(y)$ เป็นตัวทราบค่าเริ่มต้น มีรายละเอียดของโปรแกรมดังนี้

```
=====================================================================

                         ## Kantorovich Program ##

              ## Buckling of Symmetrically Laminated Plates ##
                  ## using Extended Kantorovich Method ##


## Iteration No.1 known function Y(y) ##

> restart;
> Digits:=100:
> N_term:=1:                # Number of N term  #
> i_term:=150:               # Number of i term  #
>
> Ny:=0:  Nxy:=0:  beta[x]:=1:  beta[y]:=0:  beta[xy]:=0:
>
## Input of all material properties ##
>
> ratio:=3:                 # ratio is E1/E2  #
> E1:=131e9:                # Longitudanal modulus, GPa  #
> E2:=E1/ratio:             # Transverse modulus, GPa  #
> v12:=0.25:                # Poisson ratio  #
> G12:=0.5*E2:              # Shear modulus, GPa  #
> v21:=v12*E2/E1:           # Poisson ratio  #
>
## Defind geometry of a plate ##
>
> aspect_ratio:=1.0:        # is a/b  #
>
> a:=0.9:                   # Length of the plates, m  #
> b:=a/aspect_ratio:        # Width of the plates, m  #
> t:=0.000127:              # Ply thickness, m  #
> h:=t*N:                   # thickness of the plates, m  #
>
```

```
## Boundary condition for study ##
>
> Boundary_X:=C_S:          # - satisfy boundary condition on edge's x - #
> Boundary_Y:=S_C:          # - satisfy boundary condition on edge's y - #
>
> save Boundary_X, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_X.txt":
> save Boundary_Y, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_Y.txt":
>
## Calculate ABD matrix ##
>
> N:=8:                               #  Number of ply  #
> phi:=vector([0,90,0,90,90,0,90,0]):          #  Stacking sequence  #
> theta:=0:                           #  Angle of rotation  #
> read "C:/ABD.txt":                  #  find ABD matrix  #      # (subr.1)
>
> ## ------------------ PART 1 ------------------  ##
>
# --- Assume function Y(y) --- #
>
> YY[1]:=y^6:
>
## Calculate [S] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/[S].txt":              # (subr.2)
>
## Calculate [A] Matrix ##
>
>
> # Defind Identity Matrix (N_term*N_term) #
> with(LinearAlgebra):IM:=IdentityMatrix(N_term):
>
> A1:=evalm( (2*a*D16/D11) * (S1_i&*(S3-S3_t)) ):
> A2:=evalm( ((a^2*D12/D11)*(S1_i&*(S2+S2_t))) -
((4*a^2*D66/D11)*(S1_i&*S6_t)) ):
> A3:=evalm( (2*a^3*D26/D11) * (S1_i&*(S5-S5_t)) ):
> A4:=evalm( (a^4*D22/D11) * (S1_i&*S4_t) ):
> A5:=-IM:
> A6:=evalm( -a * (S1_i&*(S3-S3_t)) ):
> A7:=evalm( a^2 * (S1_i&*S6_t) ):
> A8:=evalm( (D11/a^2)*S1 ):
> A9:=evalm( (2*D16/a)*S3 ):
> A10:=evalm( D12*S2 ):
> A11:=evalm( (-D11/a^3)*S1 ):
> A12:=evalm( (-2*D16/a^2) * (S3-S3_t) ):
> A13:=evalm( ((4*D66/a)*S6_t) - ((D12/a)*S2) ):
> A14:=evalm( (D11/a^3)*S1 ):
> A15:=evalm( (2*D26)*S5_t ):
> A16:=evalm( (D11/a^2)*S3 ):
>
>
```

```
> ## ----------------- PART 2 -----------------  ##
>
## The recurrence formula ##
>
> AA[0]:=array(1..N_term,1..1):
> AA[1]:=array(1..N_term,1..1):
> AA[2]:=array(1..N_term,1..1):
> AA[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
> for i from 1 to N_term do
>    AA[0][i,1]:=aa[i,0];
>    AA[1][i,1]:=aa[i,1];
>    AA[2][i,1]:=aa[i,2];
>    AA[3][i,1]:=aa[i,3];
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    AA[i+4]:=evalm(simplify(expand(-1*((A1&*AA[i+3]*(1/(i+4)))
>  + (evalf((A2-lambda*beta[x]*A5)&*AA[i+2]*(1/(i+3)/(i+4))))
>  + (evalf((A3-lambda*beta[xy]*A6)&*AA[i+1]*(1/(i+2)/(i+3)/(i+4))))
>  + (evalf((A4-lambda*beta[y]*A7)&*AA[i]*(1/(i+1)/(i+2)/(i+3)/(i+4))))))));
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    AAA[i+4]:=(evalm(simplify(AA[i+4])));
> od:
>
> AAA[0]:=array(1..N_term,1..1):
> AAA[1]:=array(1..N_term,1..1):
> AAA[2]:=array(1..N_term,1..1):
> AAA[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
> for i from 1 to N_term do
>    AAA[0][i,1]:=aa[i,0];
>    AAA[1][i,1]:=aa[i,1];
>    AAA[2][i,1]:=aa[i,2];
>    AAA[3][i,1]:=aa[i,3];
> od:
>
## Calculate [X] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/N_term=1/[X].txt":        # (subr.3)
>
## Calculate diff [X] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/diff[X].txt":           # (subr.4)
>
```

```
## Natural Boundary condition ##
>
> My:=evalm((A8&*X_2x)+(A9&*X_1x)+(A10&*X)):
> Qy:=evalm((A11&*X_3x)+(A12&*X_2x)+((A13-(lambda*beta[x]*A14))&*X_1x)
+((A15-(lambda*beta[xy]*A16))&*X)):
>
## Boundary Condition for on edge's x ##
>
> read
"D:/Kantorovich/Boundary/N_term=1/Boundary_X.txt":            # (subr.5)
>
> ## ------------------ PART 3 ------------------  ##
>
## Solve eigenvalue problem ##
>
> S:=array(1..4*N_term,1..4*N_term):
>   for i from 1 to 4*N_term do
>       for j from 1 to 4*N_term do
>          S[i,j]:=diff(BC[i],Ca[j-1]):
>       od:
>   od:
> with(linalg):
> aaaa:=evalf(det(S)):
>
       ## determine eigenvalue ##
## satisfy total energy minimization ##
>
> plot(aaaa,lambda=80..150);
> read "C:/newton.txt":
result1:=Newton ([aaaa=0],[lambda=100],output={variables,functions});
>
> lambda:=subs(%,lambda);
> Nxx:=((beta[x]*lambda*D11)/a^2);          #  Buckling load (N/m^2)  #
> non:=evalf(b^2/(D22*Pi^2)):
> Nondi_Buck:=Nxx*non;                       #  Nondimension buckling load  #
>
             ## determine eigenvector ##
## consider from boundary condition's case study ##
>
> for z from 1 to 4*N_term do
>     eq[z]:=BC[z]=0:
> od:
>
> Ca[0]:=0;  Ca[1]:=0;  Ca[3]:=1;
> sols:=solve({eq[4]}):
>
> Ca[0]:=0;
> Ca[1]:=0;
> Ca[2]:=subs(sols,Ca[2]);
> Ca[3]:=1;
>
```

```
## find X(x) for calculate next iteration  ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/find[X].txt":            # (subr.6)
>
> XX1a:=XX[1]:
>
> save XX1a,"D:/Kantorovich/Buckling/Function/N=1/SSSS/XX1_1.txt":
>
## Out-of-plane displacement  ##
>
> w:=XX[1]*YY[1]:
>
## plot mode shape  ##
>
> plot3d(w,x=0..a,y=0..b):
>
=============================================================
```

ส่วนโปรแกรมที่สองแสดงการทำซ้ำในรอบที่สองโดยนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ ที่ได้จากการทำซ้ำรอบแรกเป็นตัวทราบค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

```
=============================================================

                         ## Kantorovich Program ##

              ## Buckling of Symmetrically Laminated Plates ##
                 ## using Extended Kantorovich Method ##


## Iteration No.2 known function X(x) ##

> restart;
> Digits:=100:
> N_term:=1:                #  Number of N term  #
> i_term:=150:               #  Number of i term  #
>
> Ny:=0:  Nxy:=0:  beta[x]:=1:  beta[y]:=0:  beta[xy]:=0:
>
## Input of all material properties ##
>
> ratio:=3:                 #  ratio is E1/E2  #
> E1:=131e9:                #  Longitudanal modulus, GPa  #
> E2:=E1/ratio:             #  Transverse modulus, GPa  #
> v12:=0.25:                #  Poisson ratio  #
> G12:=0.5*E2:              #  Shear modulus, GPa  #
> v21:=v12*E2/E1:           #  Poisson ratio  #
```

```
## Defind geometry of a plate ##
>
> aspect_ratio:=1.0:        #  is a/b  #
>
> a:=0.9:                   #  Length of the plates, m  #
> b:=a/aspect_ratio:        #  Width of the plates, m  #
> t:=0.000127:              #  Ply thickness, m  #
> h:=t*N:                   #  thickness of the plates, m  #
>
## Boundary condition for study ##
>
> Boundary_X:=C_S:          # - satisfy boundary condition on edge's x - #
> Boundary_Y:=S_C:          # - satisfy boundary condition on edge's y - #
>
> save Boundary_X, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_X.txt":
> save Boundary_Y, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_Y.txt":
>
## Calculate ABD matrix ##
>
> N:=8:                              #  Number of ply  #
> phi:=vector([0,90,0,90,90,0,90,0]):         #  Stacking sequence  #
> theta:=0:                          #  Angle of rotation  #
> read "C:/ABD.txt":                 #  find ABD matrix  #     # (subr.1)
>
> ## ------------------ PART 1 ------------------  ##
>
# --- Read function X(x) from previous calculate --- #
>
> read "D:/Kantorovich/Buckling/Function/N=1/SSSS/XX1_1.txt":
>
> XX[1]:=XX1a:
>
## Calculate [R] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/[R].txt":          # (subr.7)
>
## Calculate [B] Matrix ##
>
> # Defind Identity Matrix (N_term*N_term) #
> with(LinearAlgebra):IM:=IdentityMatrix(N_term):
>
> B1:=evalm( (2*b*D26/D22) * (R1_i&*(R3-R3_t)) ):
> B2:=evalm( ((b^2*D12/D22)*(R1_i&*(R2+R2_t))) -
((4*b^2*D66/D22)*(R1_i&*R6_t)) ):
> B3:=evalm( (2*b^3*D16/D22) * (R1_i&*(R5-R5_t)) ):
> B4:=evalm( (b^4*D11/D22) * (R1_i&*R4_t) ):
> B5:=-IM:
> B6:=evalm( -b * (R1_i&*(R3-R3_t)) ):
> B7:=evalm( b^2 * (R1_i&*R6_t) ):
> B8:=evalm( (D22/b^2)*R1 ):
```

```
> B9:=evalm( (2*D26/b)*R3 ):
> B10:=evalm( D12*R2 ):
> B11:=evalm( (-D22/b^3)*R1 ):
> B12:=evalm( (-2*D26/b^2) * (R3-R3_t) ):
> B13:=evalm( ((4*D66/b)*R6_t) - ((D12/b)*R2) ):
> B14:=evalm( (D22/b^3)*R1 ):
> B15:=evalm( (2*D16)*R5_t ):
> B16:=evalm( (D22/b^2)*R3 ):
>
> ## ------------------ PART 2 ------------------  ##
>
## The recurrence formula ##
>
> BB[0]:=array(1..N_term,1..1):
> BB[1]:=array(1..N_term,1..1):
> BB[2]:=array(1..N_term,1..1):
> BB[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
> for i from 1 to N_term do
>    BB[0][i,1]:=bb[i,0];
>    BB[1][i,1]:=bb[i,1];
>    BB[2][i,1]:=bb[i,2];
>    BB[3][i,1]:=bb[i,3];
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    BB[i+4]:=evalm(simplify(expand(-1*((B1&*BB[i+3]*(1/(i+4)))
>  + (evalf((B2-alpha*beta[y]*B5)&*BB[i+2]*(1/(i+3)/(i+4))))
>  + (evalf((B3-alpha*beta[xy]*B6)&*BB[i+1]*(1/(i+2)/(i+3)/(i+4))))
>  + (evalf((B4-alpha*beta[x]*B7)&*BB[i]*(1/(i+1)/(i+2)/(i+3)/(i+4))))))));
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    BBB[i+4]:=(evalm(simplify(BB[i+4])));
> od:
>
> BBB[0]:=array(1..N_term,1..1):
> BBB[1]:=array(1..N_term,1..1):
> BBB[2]:=array(1..N_term,1..1):
> BBB[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
> for i from 1 to N_term do
>    BBB[0][i,1]:=bb[i,0];
>    BBB[1][i,1]:=bb[i,1];
>    BBB[2][i,1]:=bb[i,2];
>    BBB[3][i,1]:=bb[i,3];
> od:
>
```

```
## Calculate [Y] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/N_term=1/[Y].txt":        # (subr.8)
>
## Calculate diff [Y] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/diff[Y].txt":             # (subr.9)
>
##  Natural Boundary condition  ##
>
> Mx:=evalm((B8&*Y_2y)+(B9&*Y_1y)+(B10&*Y)):
> Qx:=evalm((B11&*Y_3y)+(B12&*Y_2y)+((B13-(alpha*beta[y]*B14))&*Y_1y)
+((B15-(alpha*beta[xy]*B16))&*Y)):
>
## Boundary Condition for on edge's y ##
>
> read
"D:/Kantorovich/Boundary/N_term=1/Boundary_Y.txt":             # (subr.10)
>
> ## ------------------ PART 3 ------------------  ##
>
## Solve eigenvalue problem ##
>
> R:=array(1..4*N_term,1..4*N_term);
>   for i from 1 to 4*N_term do
>       for j from 1 to 4*N_term do
>          R[i,j]:=diff(BC[i],Cb[j-1]);
>       od:
>   od:
> with(linalg):
> bbbb:=evalf(det(R)):
>
       ## determine eigenvalue ##
## satisfy total energy minimization ##
>
> plot(bbbb,alpha=50..180);
> read "C:/newton.txt":
result1:=Newton ([bbbb=0],[alpha=90],output={variables,functions});
>
> alpha:=subs(%,alpha);
> Nxx:=((beta[x]*alpha*D22)/b^2);           #  Buckling load (N/m^2)  #
> non:=evalf(b^2/(D22*Pi^2)):
> Nondi_Buck:=Nxx*non;                      #  Nondimension buckling load  #
>
             ## determine eigenvector ##
## consider from boundary condition's case study ##
>
> for z from 1 to 4*N_term do
>      eq[z]:=BC[z]=0:
> od:
> Cb[0]:=0;  Cb[3]:=1;
```

```
> sols:=solve({eq[3],eq[4]}):
>
> Cb[0]:=0;
> Cb[1]:=subs(sols,Cb[1]);
> Cb[2]:=subs(sols,Cb[2]);
> Cb[3]:=1;
>
## find Y(y) for calculate next iteration  ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/find[Y].txt":           #(subr.11)
>
> YY1b:=YY[1]:
>
> save YY1b,"D:/Kantorovich/Buckling/Function/N=1/SSSS/YY1_1.txt":
>
## Out-of-plane displacement  ##
>
> w:=XX[1]*YY[1]:
>
## plot mode shape  ##
>
> plot3d(w,x=0..a,y=0..b):
>
==================================================
```

## ก.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท

สำหรับโปรแกรมในภาคผนวก ก.2 นี้ เป็นโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิท โดยแสดงตัวอย่างการแก้ปัญหาดังหัวข้อที่ 5.3 ซึ่งแบ่งการคำนวณออกเป็นสองด้านเช่นเดียวกับกรณีการแก้ปัญหาการโก่งงอ โปรแกรมแรกแสดงการทำซ้ำรอบแรก โดยกำหนดฟังก์ชัน $Y_i(y)$ เป็นตัวทราบค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

```
=============================================================

                    ## Kantorovich Program ##

         ## Vibration of Symmetrically Laminated Plates ##
             ## using Extended Kantorovich Method ##


## Iteration No.1 known function Y(y) ##

> restart;
> Digits:=100:
> N_term:=3:                #  Number of N term  #
> i_term:=200:              #  Number of i term  #
>
## Input of all material properties ##
>
> ratio:=2.45:              #  ratio is E1/E2  #
> E1:=131e9:                #  Longitudanal modulus, GPa  #
> E2:=E1/ratio:             #  Transverse modulus, GPa  #
> v12:=0.23:                #  Poisson ratio  #
> G12:=0.48*E2:             #  Shear modulus, GPa  #
> density:=8000:            #  density, kg/m^3  #
> v21:=v12*E2/E1:           #  Poisson ratio  #
>
## Defind geometry of a plate ##
>
> aspect_ratio:=1.0:        #  is a/b  #
>
> a:=10:                    #  Length of the plates, m  #
> b:=a/aspect_ratio:        #  Width of the plates, m  #
> t:=0.06:                  #  Ply thickness, m  #
> h:=t*N:                   #  thickness of the plates, m  #
>
## Boundary condition for study ##
>
> Boundary_X:=S_S:          # - satisfy boundary condition on edge's x - #
> Boundary_Y:=S_S:          # - satisfy boundary condition on edge's y - #
```

```
> save Boundary_X, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_X.txt":
> save Boundary_Y, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_Y.txt":
>
## Calculate ABD matrix ##
>
> N:=3:                              #  Number of ply  #
> phi:=vector([30,-30,30]):          #  Stacking sequence  #
> theta:=0:                          #  Angle of rotation  #
> read "C:/ABD.txt":                 #  find ABD matrix  #      # (subr.1)
>
> ## ------------------ PART 1 ------------------  ##
>
# --- Assume function Y(y) --- #
>
> YY[1]:=sin(Pi*y/b):
> YY[2]:=sin(2*Pi*y/b):
> YY[3]:=sin(3*Pi*y/b):
>
## Calculate [S] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/[S].txt":                # (subr.2)
>
## Calculate [A] Matrix ##
>
> # Defind Identity Matrix (N_term*N_term) #
> with(LinearAlgebra):IM:=IdentityMatrix(N_term):
>
> A1:=evalm( (2*a*D16/D11) * (S1_i&*(S3-S3_t)) ):
> A2:=evalm( ((a^2*D12/D11)*(S1_i&*(S2+S2_t))) -
((4*a^2*D66/D11)*(S1_i&*S6_t)) ):
> A3:=evalm( (2*a^3*D26/D11) * (S1_i&*(S5-S5_t)) ):
> A4:=evalm( (a^4*D22/D11) * (S1_i&*S4_t) ):
> A5:=evalm( (a^4*density/D11)*IM ):
> A6:=evalm( (D11/a^2)*S1 ):
> A7:=evalm( (2*D16/a)*S3 ):
> A8:=evalm( D12*S2 ):
> A9:=evalm( (-D11/a^3)*S1 ):
> A10:=evalm( (-2*D16/a^2) * (S3-S3_t) ):
> A11:=evalm( ((4*D66/a)*S6_t) - ((D12/a)*S2) ):
> A12:=evalm( (2*D26)*S5_t ):
>
> ## ------------------ PART 2 ------------------  ##
>
## The recurrence formula ##
>
> AA[0]:=array(1..N_term,1..1):
> AA[1]:=array(1..N_term,1..1):
> AA[2]:=array(1..N_term,1..1):
> AA[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
```

```
> for i from 1 to N_term do
>    AA[0][i,1]:=aa[i,0];
>    AA[1][i,1]:=aa[i,1];
>    AA[2][i,1]:=aa[i,2];
>    AA[3][i,1]:=aa[i,3];
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    AA[i+4]:=evalm(simplify(expand(-1*((A1&*AA[i+3]*(1/(i+4)))
>    + (evalf(A2&*AA[i+2]*(1/(i+3)/(i+4))))
>    + (evalf(A3&*AA[i+1]*(1/(i+2)/(i+3)/(i+4))))
>    + (evalf((A4-lambda*A5)&*AA[i]*(1/(i+1)/(i+2)/(i+3)/(i+4))))))));
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    AAA[i+4]:=(evalm(simplify(AA[i+4])));
> od:
>
> AAA[0]:=array(1..N_term,1..1):
> AAA[1]:=array(1..N_term,1..1):
> AAA[2]:=array(1..N_term,1..1):
> AAA[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
> for i from 1 to N_term do
>    AAA[0][i,1]:=aa[i,0];
>    AAA[1][i,1]:=aa[i,1];
>    AAA[2][i,1]:=aa[i,2];
>    AAA[3][i,1]:=aa[i,3];
> od:
>
## Calculate [X] Matrix ##
>
> read
"D:/Kantorovich/CalculateMatrix/N_term=3/[X].txt":              # (subr.3)
>
## Calculate diff [X] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/diff[X].txt":           # (subr.4)
>
##  Natural Boundary condition  ##
>
> My:=evalm((A6&*X_2x)+(A7&*X_1x)+(A8&*X)):
> Qy:=evalm((A9&*X_3x)+(A10&*X_2x)+(A11&*X_1x)+(A12&*X)):
>
## Boundary Condition for on edge's x ##
>
> read
"D:/Kantorovich/Boundary/N_term=3/Boundary_X.txt":              # (subr.5)
>
```

```
> ## ----------------- PART 3 -----------------  ##
>
## Solve eigenvalue problem ##
>
> S:=array(1..4*N_term,1..4*N_term):
>   for i from 1 to 4*N_term do
>       for j from 1 to 4*N_term do
>          S[i,j]:=diff(BC[i],Ca[j-1]):
>       od:
>   od:
> with(linalg):
> aaaa:=evalf(det(S)):
>
      ## determine eigenvalue ##
## satisfy total energy minimization ##
>
> plot(aaaa,lambda=0..400);
> read "C:/newton.txt":
result1:=Newton ([aaaa=0],[lambda=200],output={variables,functions});
>
> lambda:=subs(%,lambda);
> ome2:=lambda;
> ome:=sqrt(ome2/h);                  #  Natural frequencies (rad/s)  #
> D00:=((E1*h^3)/(12*(1-v12*v21))):
> beta:=sqrt(density*ome2*a^4/D00);   #  dimensionless frequency parameter #
>
            ## determine eigenvector ##
## consider from boundary condition's case study ##
>
> for z from 1 to 4*N_term do
>      eq[z]:=BC[z]=0:
> od:
>
> Ca[0]:=0;   Ca[4]:=0;    Ca[8]:=0;    Ca[3]:=1;
> sols:=solve({eq[5],eq[6],eq[7],eq[8],eq[9],eq[10],eq[11],eq[12]});
>
> Ca[0]:=0;
> Ca[1]:=subs(sols,Ca[1]);
> Ca[2]:=subs(sols,Ca[2]);
> Ca[3]:=1;
> Ca[4]:=0;
> Ca[5]:=subs(sols,Ca[5]);
> Ca[6]:=subs(sols,Ca[6]);
> Ca[7]:=subs(sols,Ca[7]);
> Ca[8]:=0;
> Ca[9]:=subs(sols,Ca[9]);
> Ca[10]:=subs(sols,Ca[10]);
> Ca[11]:=subs(sols,Ca[11]);
>
```

```
## find X(x) for calculate next iteration  ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/find[X].txt":          # (subr.6)
>
> XX1a:=XX[1]: XX2a:=XX[2]: XX3a:=XX[3]:
>
> save XX1a,"D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/XX1_1.txt":
> save XX2a,"D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/XX1_2.txt":
> save XX3a,"D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/XX1_3.txt":
>
>
## Out-of-plane displacement  ##
>
> w:=XX[1]*YY[1]+XX[2]*YY[2]+XX[3]*YY[3]:
>
## plot mode shape  ##
>
> plot3d(w,x=0..a,y=0..b):
>
==================================================================
```

ส่วนโปรแกรมที่สองแสดงการทำซ้ำในรอบที่สองโดยนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ ที่ได้จากการทำซ้ำรอบแรกเป็นตัวทราบค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

```
==================================================================

                          ## Kantorovich Program ##

                ## Vibration of Symmetrically Laminated Plates ##
                    ## using Extended Kantorovich Method ##


## Iteration No.2 known function X(x) ##

> restart;
> Digits:=100:
> N_term:=3:              #  Number of N term  #
> i_term:=200:            #  Number of i term  #
>
## Input of all material properties ##
>
> ratio:=2.45:            #  ratio is E1/E2  #
> E1 := 131e9:            #  Longitudanal modulus, GPa  #
> E2 := E1/ratio:         #  Transverse modulus, GPa  #
> v12 := 0.23:            #  Poisson ratio  #
> G12 := 0.48*E2:         #  Shear modulus, GPa  #
> density := 8000:        #  density, kg/m^3  #
> v21 := v12*E2/E1:       #  Poisson ratio  #
```

```
## Defind geometry of a plate ##
>
> aspect_ratio:=1.0:        #  is a/b  #
>
> a:=10:                    #  Length of the plates, m  #
> b:=a/aspect_ratio:        #  Width of the plates, m  #
> t := 0.06:                #  Ply thickness, m  #
> h:=t*N:                   #  thickness of the plates, m  #
>
## Boundary condition for study ##
>
> Boundary_X:=S_S:          # - satisfy boundary condition on edge's x - #
> Boundary_Y:=S_S:          # - satisfy boundary condition on edge's y - #
>
> save Boundary_X, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_X.txt":
> save Boundary_Y, "D:/Kantorovich/Vibration/Boundary/Boundary_Y.txt":
>
## Calculate ABD matrix ##
>
> N := 3:                            #  Number of ply  #
> phi := vector([30,-30,30]):        #  Stacking sequence  #
> theta:= 0:                         #  Angle of rotation  #
> read "C:/ABD.txt":                 #  find ABD matrix  #     # (subr.1)
>
> ## ------------------ PART 1 ------------------  ##
>
# --- Read function X(x) from previous calculate --- #
>
> read "D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/XX1_1.txt":
> read "D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/XX1_2.txt":
> read "D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/XX1_3.txt":
>
> XX[1]:=XX1a: XX[2]:=XX2a: XX[3]:=XX3a:
>
## Calculate [R] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/[R].txt":              # (subr.7)
>
## Calculate [B] Matrix ##
>
> # Defind Identity Matrix (N_term*N_term) #
> with(LinearAlgebra):IM:=IdentityMatrix(N_term):
>
> B1:=evalm( (2*b*D26/D22) * (R1_i&*(R3-R3_t)) ):
> B2:=evalm( ((b^2*D12/D22)*(R1_i&*(R2+R2_t))) -
((4*b^2*D66/D22)*(R1_i&*R6_t)) ):
> B3:=evalm( (2*b^3*D16/D22) * (R1_i&*(R5-R5_t)) ):
> B4:=evalm( (b^4*D11/D22) * (R1_i&*R4_t) ):
> B5:=evalm( (b^4*density/D22)*IM ):
> B6:=evalm( (D22/b^2)*R1 ):
```

```
> B7:=evalm( (2*D26/b)*R3 ):
> B8:=evalm( D12*R2 ):
> B9:=evalm( (-D22/b^3)*R1 ):
> B10:=evalm( (-2*D26/b^2) * (R3-R3_t) ):
> B11:=evalm( ((4*D66/b)*R6_t) - ((D12/b)*R2) ):
> B12:=evalm( (2*D16)*R5_t ):
>
> ## ------------------ PART 2 ------------------  ##
>
## The recurrence formula ##
>
> BB[0]:=array(1..N_term,1..1):
> BB[1]:=array(1..N_term,1..1):
> BB[2]:=array(1..N_term,1..1):
> BB[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
> for i from 1 to N_term do
>    BB[0][i,1]:=bb[i,0];
>    BB[1][i,1]:=bb[i,1];
>    BB[2][i,1]:=bb[i,2];
>    BB[3][i,1]:=bb[i,3];
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    BB[i+4]:=evalm(simplify(expand(-1*((B1&*BB[i+3]*(1/(i+4)))
>    + (evalf(B2&*BB[i+2]*(1/(i+3)/(i+4))))
>    + (evalf(B3&*BB[i+1]*(1/(i+2)/(i+3)/(i+4))))
>    + (evalf(B4-alpha*B5)&*BB[i]*(1/(i+1)/(i+2)/(i+3)/(i+4)))))));
> od:
>
> for i from 0 to i_term-4 do
>    BBB[i+4]:=(evalm(simplify(BB[i+4])));
> od:
>
> BBB[0]:=array(1..N_term,1..1):
> BBB[1]:=array(1..N_term,1..1):
> BBB[2]:=array(1..N_term,1..1):
> BBB[3]:=array(1..N_term,1..1):
>
> for i from 1 to N_term do
>    BBB[0][i,1]:=bb[i,0];
>    BBB[1][i,1]:=bb[i,1];
>    BBB[2][i,1]:=bb[i,2];
>    BBB[3][i,1]:=bb[i,3];
> od:
```

```
## Calculate [Y] Matrix ##
>
> read
"D:/Kantorovich/CalculateMatrix/N_term=3/[Y].txt":              # (subr.8)
>
## Calculate diff [Y] Matrix ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/diff[Y].txt":          # (subr.9)
>
##  Natural Boundary condition  ##
>
> Mx:=evalm((B6&*Y_2y)+(B7&*Y_1y)+(B8&*Y)):
> Qx:=evalm((B9&*Y_3y)+(B10&*Y_2y)+(B11&*Y_1y)+(B12&*Y)):
>
## Boundary Condition for on edge's y ##
>
> read
"D:/Kantorovich/Boundary/N_term=3/Boundary_Y.txt":            # (subr.10)
>
> ## ------------------ PART 3 ------------------  ##
>
## Solve eigenvalue problem ##
>
> R:=array(1..4*N_term,1..4*N_term);
>   for i from 1 to 4*N_term do
>       for j from 1 to 4*N_term do
>          R[i,j]:=diff(BC[i],Cb[j-1]);
>       od:
>   od:
> with(linalg):
> bbbb:=evalf(det(R)):
>
         ## determine eigenvalue ##
## satisfy total energy minimization ##
>
> plot(bbbb,alpha=0..400);
> read "C:/newton.txt":
result1:=Newton ([bbbb=0],[alpha=200],output={variables,functions});
>
> alpha:=subs(%,alpha);
> ome2:=alpha;
> ome:=sqrt(ome2/h);                  #  Natural frequencies (rad/s)  #
> D00:=((E1*h^3)/(12*(1-v12*v21))):
> beta:=sqrt(density*ome2*a^4/D00);   #  dimensionless frequency parameter #
>
```

```
            ## determine eigenvector ##
## consider from boundary condition's case study ##
>
> for z from 1 to 4*N_term do
>      eq[z]:=BC[z]=0:
> od:
>
> Cb[0]:=0;    Cb[4]:=0;   Cb[8]:=0;  Cb[11]:=1;
> sols:=solve({eq[5],eq[6],eq[7],eq[8],eq[9],eq[10],eq[11],eq[12]});
>
> Cb[0]:=0;
> Cb[1]:=subs(sols,Cb[1]);
> Cb[2]:=subs(sols,Cb[2]);
> Cb[3]:=subs(sols,Cb[3]);
> Cb[4]:=0;
> Cb[5]:=subs(sols,Cb[5]);
> Cb[6]:=subs(sols,Cb[6]);
> Cb[7]:=subs(sols,Cb[7]);
> Cb[8]:=0;
> Cb[9]:=subs(sols,Cb[9]);
> Cb[10]:=subs(sols,Cb[10]);
> Cb[11]:=1;
>
## find Y(y) for calculate next iteration  ##
>
> read "D:/Kantorovich/CalculateMatrix/find[Y].txt":          #(subr.11)
>
> YY1b:=YY[1]:  YY2b:=YY[2]:  YY3b:=YY[3]:
>
> save YY1b,"D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/YY1_1.txt":
> save YY2b,"D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/YY1_2.txt":
> save YY3b,"D:/Kantorovich/Vibration/Function/N=3/SSSS/YY1_3.txt":
>
## Out-of-plane displacement  ##
>
> w:=XX[1]*YY[1]+XX[2]*YY[2]+XX[3]*YY[3]:
>
## plot mode shape  ##
>
> plot3d(w,x=0..a,y=0..b):
>
==============================================
```

## ก.3 โปรแกรมย่อยที่ใช้ในโปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือน

สำหรับโปรแกรมย่อยที่ใช้ในโปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือน ดังแสดงในภาคผนวก ก.1 และ ก.2 ตามลำดับ มีปัญหาละ 11 โปรแกรม ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมย่อยทั้งสองปัญหามีคำสั่งเหมือนกัน ดังนั้นทั้งสองปัญหาจึงสามารถอ่านชุดคำสั่งจากไฟล์เดียวกันได้ โดยรายละเอียด คำอธิบายและฐานข้อมูลที่จัดเก็บโปรแกรมย่อยทั้ง 11 โปรแกรม มีดังต่อไปนี้

===================================================

**โปรแกรมย่อยที่ 1** ถูกจัดเก็บไว้ที่ C:/ABD.txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาค่า [ABD] ตามสมการ (3-15 ถึง 3-17) โดยรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 1) ---------------#
> #Calculate the lamina stiffness matrix [Q] in material axis
>  Q11:=E1^2/(E1-v12^2*E2):
>  Q12:=v12*E1*E2/(E1-v12^2*E2):
>  Q22:=E1*E2/(E1-v12^2*E2):
>  Q66:=G12:
> #Calculate invariants U
>  U1:= (3*Q11+3*Q22+2*Q12+4*Q66)/8:
>  U2:= (Q11-Q22)/2:
>  U3:= (Q11+Q22-2*Q12-4*Q66)/8:
>  U4:= (Q11+Q22+6*Q12-4*Q66)/8:
>  U5:= (Q11+Q22-2*Q12+4*Q66)/8:
>
> #Calculate the distance from midplane : z[1]to z[N+1]
>  for i from 1 to N+1 do
>     z[i]:=t*(i-1-N/2)
>  od:
> #Calculate the invariants V (a total of 15 invariants)
>  VA0 := N*t: VB0:=0:
>    VD0:=(N*t)^3/12:
>  VA1:=0:
>        for i from 1 to N do
>           VA1:=VA1+cos(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
>        od:
>  VA2:=0:
>        for i from 1 to N do
>           VA2:=VA2+sin(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
>        od:
>  VA3:=0:
>        for i from 1 to N do
>           VA3:=VA3+cos(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
```

```
>       od:
> VA4:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VA4:=VA4+sin(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
>       od:
> VB1:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VB1:=VB1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>       od:
> VB1:=VB1/2:
> VB2:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VB2:=VB2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>       od:
> VB2:=VB2/2:
> VB3:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VB3:=VB3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>       od:
> VB3:=VB3/2:
> VB4:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VB4:=VB4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>       od:
> VB4:=VB4/2:
> VD1:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VD1:=VD1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>       od:
> VD1:=VD1/3:
> VD2:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VD2:=VD2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>       od:
> VD2:=VD2/3:
> VD3:=0:
>       for i from 1 to N do
>          VD3:=VD3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>       od:
> VD3:=VD3/3:
>   VD4:=0:
>      for i from 1 to N do
>         VD4:=VD4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>      od:
> VD4:=VD4/3:
> #This are the results: [ABD] w.r.t. the rotated axis.
```

```
> #----------------------- Matrix [A] -----------------------------#
>
> A11:=evalf(U1*VA0+U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VA2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
> A22:=evalf(U1*VA0-U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
> A12:=evalf(U4*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> A66:=evalf(U5*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> A16:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)+2
> *U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> A26:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)-2
> *U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> #----------------------- Matrix [B] -----------------------------#
> B11:=evalf(U1*VB0+U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VB2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
> B22:=evalf(U1*VB0-U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
> B12:=evalf(U4*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> B66:=evalf(U5*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> B16:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)+2
> *U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> B26:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)
> -2*U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> #----------------------- Matrix [D] -----------------------------#
>
> D11:=evalf(U1*VD0+U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VD2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D22:=evalf(U1*VD0-U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D12:=evalf(U4*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> D66:=evalf(U5*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> D16:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)+2
> *U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> D26:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)-2
> *U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
>  #---------------------- Matrix [ABD] ---------------------------#
>
ABD:=linalg[matrix](6,6,[[A11,A12,A16,B11,B12,B16],[A12,A22,A26,B12,B22,B26]
,[A16,A26,A66,B16,B26,B66],[B11,B12,B16,D11,D12,D16],[B12,B22,B26,D12,D22,D2
6],[B16,B26,B66,D16,D26,D66]]);
>
```

=======================================================

**โปรแกรมย่อยที่ 2** ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /CalculateMatrix/[S].txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาเมตริกซ์ทราบค่า $[S_i]$ ตามสมการ (4-9) โดยรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 2) ---------------#
> with(linalg):   Y:=array(1..N_term,1..1):
>                Y_y:=array(1..N_term,1..1):
>               Y_yy:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
>    Y[i,1]:=YY[i];
>    Y_y[i,1]:=diff(Y[i,1],y);
>    Y_yy[i,1]:=diff(Y[i,1],y,y);
> od:
>
>    Y_t:=transpose(Y):
>    Y_y_t:=transpose(Y_y):
>    Y_yy_t:=transpose(Y_yy):
> ss1:=evalm(Y&*Y_t):
> ss2:=evalm(Y&*Y_yy_t):
> ss3:=evalm(Y&*Y_y_t):
> ss4:=evalm(Y_yy&*Y_yy_t):
> ss5:=evalm(Y_yy&*Y_y_t):
> ss6:=evalm(Y_y&*Y_y_t):
>      S1:=array(1..N_term,1..N_term):
>      S2:=array(1..N_term,1..N_term):
>      S3:=array(1..N_term,1..N_term):
>      S4:=array(1..N_term,1..N_term):
>      S5:=array(1..N_term,1..N_term):
>      S6:=array(1..N_term,1..N_term):
> for i from 1 to N_term do
>   for j from 1 to N_term do
>      S1[i,j]:=evalf(int(ss1[i,j],y=0..b));
>      S2[i,j]:=evalf(int(ss2[i,j],y=0..b));
>      S3[i,j]:=evalf(int(ss3[i,j],y=0..b));
>      S4[i,j]:=evalf(int(ss4[i,j],y=0..b));
>      S5[i,j]:=evalf(int(ss5[i,j],y=0..b));
>      S6[i,j]:=evalf(int(ss6[i,j],y=0..b));
>   od:
> od:
>      S1_t:=transpose(S1):        S1_i:=inverse(S1):
>      S2_t:=transpose(S2):
>      S3_t:=transpose(S3):
>      S4_t:=transpose(S4):
>      S5_t:=transpose(S5):
>      S6_t:=transpose(S6):
```

==============================================

**โปรแกรมย่อยที่** 3 ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /CalculateMatrix/N_term=1/[X].txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาเมตริกซ์ $\{X\}$ ตามสมการ (4-25) โดยเลือกใช้โปรแกรมตามจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 3) ---------------#
> # case using N term=1 for calculate #
> Xh[1]:=0:
>     for i from 0 to i_term do
>        Xh[1]:=expand(Xh[1]+AAA[i][1,1]*xi^i);
>     od:
>
> # case using N term=2 for calculate #
> Xh[1]:=0: Xh[2]:=0:
>     for i from 0 to i_term do
>        Xh[1]:=expand(Xh[1]+AAA[i][1,1]*xi^i);
>        Xh[2]:=expand(Xh[2]+AAA[i][2,1]*xi^i);
>     od:
>
> # case using N term=3 for calculate #
> Xh[1]:=0: Xh[2]:=0: Xh[3]:=0:
>     for i from 0 to i_term do
>        Xh[1]:=expand(Xh[1]+AAA[i][1,1]*xi^i);
>        Xh[2]:=expand(Xh[2]+AAA[i][2,1]*xi^i);
>        Xh[3]:=expand(Xh[3]+AAA[i][3,1]*xi^i);
>     od:
>
> # case using N term=4 for calculate #
> Xh[1]:=0: Xh[2]:=0: Xh[3]:=0: Xh[4]:=0:
>     for i from 0 to i_term do
>        Xh[1]:=expand(Xh[1]+AAA[i][1,1]*xi^i);
>        Xh[2]:=expand(Xh[2]+AAA[i][2,1]*xi^i);
>        Xh[3]:=expand(Xh[3]+AAA[i][3,1]*xi^i);
>        Xh[4]:=expand(Xh[4]+AAA[i][4,1]*xi^i);
>     od:
>
> # case using N term=5 for calculate #
> Xh[1]:=0: Xh[2]:=0: Xh[3]:=0: Xh[4]:=0: Xh[5]:=0:
>     for i from 0 to i_term do
>        Xh[1]:=expand(Xh[1]+AAA[i][1,1]*xi^i);
>        Xh[2]:=expand(Xh[2]+AAA[i][2,1]*xi^i);
>        Xh[3]:=expand(Xh[3]+AAA[i][3,1]*xi^i);
>        Xh[4]:=expand(Xh[4]+AAA[i][4,1]*xi^i);
>        Xh[5]:=expand(Xh[5]+AAA[i][5,1]*xi^i);
>     od:
>
>
```

```
> # case using N term=6 for calculate #
> Xh[1]:=0: Xh[2]:=0: Xh[3]:=0: Xh[4]:=0: Xh[5]:=0: Xh[6]:=0:
>     for i from 0 to i_term do
>        Xh[1]:=expand(Xh[1]+AAA[i][1,1]*xi^i);
>        Xh[2]:=expand(Xh[2]+AAA[i][2,1]*xi^i);
>        Xh[3]:=expand(Xh[3]+AAA[i][3,1]*xi^i);
>        Xh[4]:=expand(Xh[4]+AAA[i][4,1]*xi^i);
>        Xh[5]:=expand(Xh[5]+AAA[i][5,1]*xi^i);
>        Xh[6]:=expand(Xh[6]+AAA[i][6,1]*xi^i);
>     od:
>
===================================================
```

**โปรแกรมย่อยที่ 4** ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /CalculateMatrix/diff[X].txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาอนุพันธ์ของ $\{X\}$ โดยรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 4) ---------------#
> with(linalg):   X:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
>    X[i,1]:=Xh[i];
> od:
> for i from 1 to N_term do
>    for j from 0 to 3 do
>       aa[i,j]:=Ca[(4*(i-1))+j];
>    od:
> od:
> for i from 1 to N_term do
>    XX[i]:=X[i,1];
> od:
>
> X_1x:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
> X_1x[i,1]:=diff(XX[i],xi);
> od:
>
> X_2x:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
> X_2x[i,1]:=diff(XX[i],xi,xi);
> od:
>
> X_3x:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
> X_3x[i,1]:=diff(XX[i],xi,xi,xi);
> od:
===================================================
```

**โปรแกรมย่อยที่ 5** ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /Boundary/N_term=1/Boundary_X.txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่เลือกเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับตำแหน่ง $\xi = 0$ และ $\xi = a$ ตามสมการ (4-19 ถึง 4-22) โดยโปรแกรมจะถูกเลือกใช้ตามจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 5) ---------------#
> # case using N term=1 for calculate #
> read "D:/Kantorovich/Buckling/Boundary/Boundary_X.txt":
>
> if (Boundary_X=C_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=1,X_1x[1,1])):
> end if;
> if (Boundary_X=C_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=1,My[1,1])):
> end if;
> if (Boundary_X=S_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,My[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=1,My[1,1])):
> end if;
>
> # case using N term=2 for calculate #
>  read "D:/Kantorovich/Buckling/Boundary/Boundary_X.txt":
>
> if (Boundary_X=C_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(xi=1,X[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(xi=1,X_1x[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(xi=1,X_1x[2,1])):
> end if;
```

```
> if (Boundary_X=C_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(xi=1,X[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(xi=1,My[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(xi=1,My[2,1])):
> end if;
> if (Boundary_X=S_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=0,My[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=0,My[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(xi=1,X[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(xi=1,My[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(xi=1,My[2,1])):
>  end if;
>
> # case using N term=3 for calculate #
> read "D:/Kantorovich/Buckling/Boundary/Boundary_X.txt":
>
> if (Boundary_X=C_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=0,X[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[3,1])):
>
>      BC[7]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(xi=1,X[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(xi=1,X[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(xi=1,X_1x[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(xi=1,X_1x[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(xi=1,X_1x[3,1])):
> end if;
> if (Boundary_X=C_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=0,X[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(xi=0,X_1x[3,1])):
```

```
>
>      BC[7]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(xi=1,X[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(xi=1,X[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(xi=1,My[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(xi=1,My[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(xi=1,My[3,1])):
> end if;
> if (Boundary_X=S_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(xi=0,X[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(xi=0,X[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(xi=0,X[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(xi=0,My[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(xi=0,My[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(xi=0,My[3,1])):
>
>      BC[7]:=evalf(subs(xi=1,X[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(xi=1,X[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(xi=1,X[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(xi=1,My[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(xi=1,My[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(xi=1,My[3,1])):
> end if;
>
> # case using N term=4, 5 and 6 have form similar N term 1, 2 and 3 #
>
==============================================================
```

**โปรแกรมย่อยที่ 6** ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /CalculateMatrix/find[X].txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาค่า X(x) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ขอบ x=0 และ x=a และเพื่อเอาไว้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณการทำซ้ำรอบต่อไป โดยรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 6) ---------------#
> for i from 1 to N_term do
>    for j from 0 to 3 do
>       Ca[(4*(i-1))+j]:=aa[i,j];
>    od:
> od:
> xi:=x/a:
> for i from 1 to N_term do
>   XX[i]:=X[i,1];
> od:
>
==============================================================
```

**โปรแกรมย่อยที่ 7** ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich/CalculateMatrix/[R].txt":โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาเมตริกซ์ทราบค่า $[S_i]$ ตามสมการ (4-9) โดยรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 7) ---------------#
> with(linalg):   X:=array(1..N_term,1..1):
>               X_x:=array(1..N_term,1..1):
>              X_xx:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
>    X[i,1]:=XX[i];
>    X_x[i,1]:=diff(X[i,1],x);
>    X_xx[i,1]:=diff(X[i,1],x,x);
> od:
>
>    X_t:=transpose(X):
>    X_x_t:=transpose(X_x):
>    X_xx_t:=transpose(X_xx):
> rr1:=evalm(X&*X_t):
> rr2:=evalm(X&*X_xx_t):
> rr3:=evalm(X&*X_x_t):
> rr4:=evalm(X_xx&*X_xx_t):
> rr5:=evalm(X_xx&*X_x_t):
> rr6:=evalm(X_x&*X_x_t):
>      R1:=array(1..N_term,1..N_term):
>      R2:=array(1..N_term,1..N_term):
>      R3:=array(1..N_term,1..N_term):
>      R4:=array(1..N_term,1..N_term):
>      R5:=array(1..N_term,1..N_term):
>      R6:=array(1..N_term,1..N_term):
> for i from 1 to N_term do
>   for j from 1 to N_term do
>      R1[i,j]:=evalf(int(rr1[i,j],x=0..a));
>      R2[i,j]:=evalf(int(rr2[i,j],x=0..a));
>      R3[i,j]:=evalf(int(rr3[i,j],x=0..a));
>      R4[i,j]:=evalf(int(rr4[i,j],x=0..a));
>      R5[i,j]:=evalf(int(rr5[i,j],x=0..a));
>      R6[i,j]:=evalf(int(rr6[i,j],x=0..a));
>   od:
> od:
>      R1_t:=transpose(R1):       R1_i:=inverse(R1):
>      R2_t:=transpose(R2):
>      R3_t:=transpose(R3):
>      R4_t:=transpose(R4):
>      R5_t:=transpose(R5):
>      R6_t:=transpose(R6):
```

==================================================

**โปรแกรมย่อยที่** 8 ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich/CalculateMatrix/N_term=1/[Y].txt
โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาเมตริกซ์ $\{Y\}$ ตามสมการ (4-45) โดยเลือกใช้โปรแกรมตามจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 8) ---------------#
> # case using N term=1 for calculate #
> Yh[1]:=0:
>   for i from 0 to i_term do
>      Yh[1]:=expand(Yh[1]+BBB[i][1,1]*eta^i);
>   od:
>
> # case using N term=2 for calculate #
> Yh[1]:=0: Yh[2]:=0:
>   for i from 0 to i_term do
>      Yh[1]:=expand(Yh[1]+BBB[i][1,1]*eta^i);
>      Yh[2]:=expand(Yh[2]+BBB[i][2,1]*eta^i);
>   od:
>
> # case using N term=3 for calculate #
> Yh[1]:=0: Yh[2]:=0: Yh[3]:=0:
>   for i from 0 to i_term do
>      Yh[1]:=expand(Yh[1]+BBB[i][1,1]*eta^i);
>      Yh[2]:=expand(Yh[2]+BBB[i][2,1]*eta^i);
>      Yh[3]:=expand(Yh[3]+BBB[i][3,1]*eta^i);
>   od:
>
> # case using N term=4 for calculate #
> Yh[1]:=0: Yh[2]:=0: Yh[3]:=0: Yh[4]:=0:
>   for i from 0 to i_term do
>      Yh[1]:=expand(Yh[1]+BBB[i][1,1]*eta^i);
>      Yh[2]:=expand(Yh[2]+BBB[i][2,1]*eta^i);
>      Yh[3]:=expand(Yh[3]+BBB[i][3,1]*eta^i);
>      Yh[4]:=expand(Yh[4]+BBB[i][4,1]*eta^i);
>   od:
>
> # case using N term=5 for calculate #
> Yh[1]:=0: Yh[2]:=0: Yh[3]:=0: Yh[4]:=0: Yh[5]:=0:
>   for i from 0 to i_term do
>      Yh[1]:=expand(Yh[1]+BBB[i][1,1]*eta^i);
>      Yh[2]:=expand(Yh[2]+BBB[i][2,1]*eta^i);
>      Yh[3]:=expand(Yh[3]+BBB[i][3,1]*eta^i);
>      Yh[4]:=expand(Yh[4]+BBB[i][4,1]*eta^i);
>      Yh[5]:=expand(Yh[5]+BBB[i][5,1]*eta^i);
>   od:
>
>
```

```
> # case using N term=6 for calculate #
> Xh[1]:=0: Xh[2]:=0: Xh[3]:=0: Xh[4]:=0: Xh[5]:=0: Xh[6]:=0:
>     for i from 0 to i_term do
>        Xh[1]:=expand(Xh[1]+AAA[i][1,1]*xi^i);
>        Xh[2]:=expand(Xh[2]+AAA[i][2,1]*xi^i);
>        Xh[3]:=expand(Xh[3]+AAA[i][3,1]*xi^i);
>        Xh[4]:=expand(Xh[4]+AAA[i][4,1]*xi^i);
>        Xh[5]:=expand(Xh[5]+AAA[i][5,1]*xi^i);
>        Xh[6]:=expand(Xh[6]+AAA[i][6,1]*xi^i);
>     od:
>
```

==============================================================

**โปรแกรมย่อยที่** 9 ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /CalculateMatrix/diff[Y].txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาอนุพันธ์ของ $\{Y\}$ โดยรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 9) ---------------#
> > with(linalg):   Y:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
>    Y[i,1]:=Yh[i];
> od:
> for i from 1 to N_term do
>    for j from 0 to 3 do
>       bb[i,j]:=Cb[(4*(i-1))+j];
>    od:
> od:
> for i from 1 to N_term do
>    YY[i]:=Y[i,1];
> od:
>
> Y_1y:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
> Y_1y[i,1]:=diff(YY[i],eta);
> od:
>
> Y_2y:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
> Y_2y[i,1]:=diff(YY[i],eta,eta);
> od:
>
> Y_3y:=array(1..N_term,1..1):
> for i from 1 to N_term do
> Y_3y[i,1]:=diff(YY[i],eta,eta,eta);
> od:
```

==============================================================

**โปรแกรมย่อยที่ 10** ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /Boundary/N_term=1/Boundary_Y.txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่เลือกเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับตำแหน่ง $\eta = 0$ และ $\eta = b$ ตามสมการ (4-39 ถึง 4-42) โดยโปรแกรมจะถูกเลือกใช้ตามจำนวนพจน์ที่ใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้น ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 10) ---------------#
> # case using N term=1 for calculate #
> read "D:/Kantorovich/Buckling/Boundary/Boundary_Y.txt":
>
> if (Boundary_Y=C_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[1,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=C_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=S_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Mx[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=S_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Mx[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[1,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=C_F)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=1,Qx[1,1])):
> end if;
>
>
```

```
> # case using N term=2 for calculate #
> read "D:/Kantorovich/Buckling/Boundary/Boundary_Y.txt":
>
> if (Boundary_Y=C_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[2,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=C_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Mx[2,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=S_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Mx[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Mx[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Mx[2,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=S_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Mx[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Mx[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[2,1])):
> end if;
>
```

```
> if (Boundary_Y=C_F)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[2,1])):
>
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=1,Mx[2,1])):
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Qx[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Qx[2,1])):
> end if;
>
> # case using N term=3 for calculate #
> read "D:/Kantorovich/Buckling/Boundary/Boundary_Y.txt":
>
> if (Boundary_Y=C_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[3,1])):
>
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(eta=1,Y[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[3,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=C_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[3,1])):
>
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(eta=1,Y[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(eta=1,Mx[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(eta=1,Mx[3,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=S_S)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
```

```
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Mx[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=0,Mx[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=0,Mx[3,1])):
>
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(eta=1,Y[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(eta=1,Mx[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(eta=1,Mx[3,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=S_C)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Mx[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=0,Mx[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=0,Mx[3,1])):
>
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Y[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Y[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(eta=1,Y[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(eta=1,Y_1y[3,1])):
> end if;
> if (Boundary_Y=C_F)
> then BC[1]:=evalf(subs(eta=0,Y[1,1])):
>      BC[2]:=evalf(subs(eta=0,Y[2,1])):
>      BC[3]:=evalf(subs(eta=0,Y[3,1])):
>      BC[4]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[1,1])):
>      BC[5]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[2,1])):
>      BC[6]:=evalf(subs(eta=0,Y_1y[3,1])):
>
>      BC[7]:=evalf(subs(eta=1,Mx[1,1])):
>      BC[8]:=evalf(subs(eta=1,Mx[2,1])):
>      BC[9]:=evalf(subs(eta=1,Mx[3,1])):
>      BC[10]:=evalf(subs(eta=1,Qx[1,1])):
>      BC[11]:=evalf(subs(eta=1,Qx[2,1])):
>      BC[12]:=evalf(subs(eta=1,Qx[3,1])):
>  end if;
>
> # case using N term=4, 5 and 6 have form similar N term 1, 2 and 3 #
>
============================================================
```

**โปรแกรมย่อยที่ 11** ถูกจัดเก็บไว้ที่ D:/Kantorovich /CalculateMatrix/find[Y].txt โปรแกรมนี้ทำหน้าที่คำนวณหาค่า Y(y) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ขอบ y=0 และ y=b และเพื่อเอาไว้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณการทำซ้ำรอบต่อไป โดยรายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #---------------- (Subroutine 11) ---------------#
> for i from 1 to N_term do
>    for j from 0 to 3 do
>       Cb[(4*(i-1))+j]:=bb[i,j];
>    od:
> od:
> eta:=y/b:
> for i from 1 to N_term do
>   YY[i]:=Y[i,1];
> od:
>
```

==================================================

ภาคผนวก ข

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์

The 23rd Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand
November 4 – 7, 2009, Chiang Mai

# Vibration of Symmetrically Laminated Plates with Various Boundary Conditions using Extended Kantorovich Method

Thanawut Pannok and Pairod Singhatanadgid*

Department of Mechanical Engineering, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand 10330
* Corresponding Author: E-mail: Pairod.S@chula.ac.th Tel: (662) 2186595, Fax: (662) 2522889,

***Abstract***

In this study, the extended Kantorovich method using a multi-function expansion is applied to vibration analysis of symmetrically laminated rectangular plates with arbitrary boundary conditions. Natural frequencies and mode shapes of laminated plates are investigated using the variational principle of total energy minimization and the iterative Kantorovich method. The out-of-plane displacement is assumed in form of a series of a sum of products of functions in $x$ and $y$ directions. With this form of assumed functions, it is possible to solve the problem of plate with angle-ply stacking sequence where the classical single-term extended Kantorovich method is ineffective. The formulation for variation of total energy is reduced to be a governing equation and a set of boundary conditions. The unknown displacement functions are assumed as an infinite power series. The formulation is finally reduced to be an eigenvalue problem where the eigenvalue and the eigenvector represent the natural frequency and vibration mode shape of plates, respectively. Accuracy and reliability of the technique are demonstrated by comparing the obtained solutions with available solutions from the literatures. The extended Kantorovich is proven to be a powerful semi-analytical-numerical method which could potentially be used in other structural problems.

***Keywords****:* Vibration, laminated plate, composite, Kantorovich method

## 1. Introduction

Dynamic and stability of structures have been studied during the past decades. The studies include both numerical and experimental approaches. Recently, the Kantorovich method which is a semi-analytical numerical method was employed to a buckling problem of plates. Yuan and Jin [1] applied the extended Kantorovich method to determine buckling load of rectangular isotropic plates. Eisenberger and Alexandrov [2] applied the Kantorovich method to the buckling problem of variable thickness thin isotropic plates. The technique was applied to the buckling problem of symmetrically laminated composite plates by Ungbhakorn and Singhatanadgid [3]. However, the out-of-plane displacement was assumed as a single-term function in that study. Thus, the technique was applicable for only specially orthotropic plates. Later, Shufrin et al. [4] solved the buckling of angle-ply plates using the Kantorovich method with a multi-term displacement function.

The Kantorovich method was also applied to study vibration behavior of plates. Application of the technique to vibration of isotropic plates can be found in Ref. [5-6]. Unlike the buckling problem, studies on vibration of composite plate using the Kantorovich method are limited. Bercin [7] and Dalaei and Kerr [8] employed the Kantorovich method to solve vibration of clamped orthotropic plates using a single-term function. It is interesting to apply the technique to rectangular plates with angle-ply lamination. In this study, the multi-term Kantorovich method is applied to vibration of symmetrically angle-ply laminated plates.

## 2. Vibration of Composite Plate

In the past decades, composite materials are increasingly used in mechanical, civil, and marine engineering applications due to their high specific stiffness (stiffness per unit weight) and high specific strength (strength per unit weight). Recently, vibration of composite thin plates is in the interest of many researchers. A lot of theoretical and numerical studies are available in the literatures. In this study, vibration problem of symmetric composite plates is investigated using the variational principle of total potential energy minimization and the iterative Kantorovich method.

### 2.1 Energy formulation

The total potential energy of a vibrating symmetrically laminated composite plate, shown in Fig. 1, is the summation of the strain energy and the kinetic energy [9]. It can be written as:

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \Big[&D_{11}w_{,xx}^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}w_{,yy}^2 + 4D_{66}w_{,xy}^2 \\ &+4\left(D_{16}w_{,xx} + D_{26}w_{,yy}\right)w_{,xy} - \rho h\omega^2 w^2\Big]dxdy \end{aligned} \qquad (1)$$

where $D_{ij}$ are plate bending stiffnesses, $w$ is the out-of-plane displacement, $\rho$ is the density in term of mass per unit volume, and $\omega$ is the natural frequency of vibrating plate.

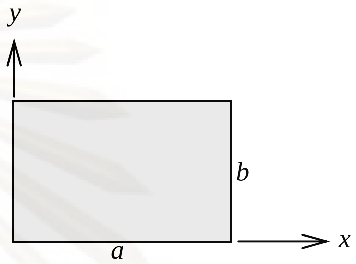



Fig. 1 Plate configurations

### 2.2. The Kantorovich method

To determine the natural frequencies using the multi-term Kantorovich method, the out-of-plane displacement $w$ is assumed in form of:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{N} X_i(x)Y_i(y) = \{X\}^T\{Y\} \qquad (2)$$

where $X_i(x)$ are functions of $x$ which satisfy the boundary conditions at $x$=0 and $x$=$a$, and $Y_i(y)$ are functions of $y$ which satisfy the conditions at $y$=0 and $y$=$b$. If $Y_i(y)$ is priorly specified, the total potential energy can be written as:

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \Big(&D_{11}\{X_{,xx}\}^T[S_1]\{X_{,xx}\} + 2D_{12}\{X_{,xx}\}^T[S_2]\{X\} \\ &+ D_{22}\{X\}^T[S_4]\{X\} + 4D_{66}\{X_{,x}\}^T[S_6]\{X_{,x}\} \\ &+ 4D_{16}\{X_{,xx}\}^T[S_3]\{X_{,x}\} + 4D_{26}\{X\}^T[S_5]\{X_{,x}\} \\ &- \rho h\omega^2\{X\}^T[S_1]\{X\}\Big)dx \end{aligned} \qquad (3)$$

where

$$[S_1] = \int_0^b \{Y\}\{Y\}^T dy,\quad [S_2] = \int_0^b \{Y\}\{Y_{,yy}\}^T dy,$$

$$[S_3] = \int_0^b \{Y\}\{Y_{,y}\}^T dy,\quad [S_4] = \int_0^b \{Y_{,yy}\}\{Y_{,yy}\}^T dy$$

$$[S_5] = \int_0^b \{Y_{,yy}\}\{Y_{,y}\}^T dy,\quad [S_6] = \int_0^b \{Y_{,y}\}\{Y_{,y}\}^T dy$$

The variational principle [10] requires the stationary condition for the functional Eq. (3), i.e. $\delta\Pi$ = 0. The variation of potential energy $\Pi$ can be written as:

$$\delta\Pi = \int_0^a \Big( \big( D_{11}\{X_{,xx}\}^T [S_1] + D_{12}\{X\}^T [S_2]^T$$
$$+ 2D_{16}\{X_{,x}\}^T [S_3]^T \big)\{\delta X_{,xx}\} + \big(4D_{66}\{X_{,x}\}^T [S_6]$$
$$+ 2D_{16}\{X_{,xx}\}^T [S_3] + 2D_{26}\{X\}^T [S_5]\big)\{\delta X_{,x}\} \qquad (4)$$
$$+ \big(D_{12}\{X_{,xx}\}^T [S_2] + D_{22}\{X\}^T [S_4]$$
$$+ 2D_{26}\{X_{,x}\}^T [S_5]^T - \rho h\omega^2 \{X\}^T [S_1]\big)\{\delta X\}\Big) dx$$
$$= \{0\}$$

Eq.(4) is consisted of $N$ equations where $N$ is the number of terms in the assumed displacement function, Eq.(2). By performing integration by part to Eq.(4), the governing equations are obtained as:

$$D_{11}[S_1]^T \{X_{,xxxx}\} + 2D_{16}\left([S_3]-[S_3]^T\right)\{X_{,xxx}\}$$
$$+\left(D_{12}\left([S_2]+[S_2]^T\right) - 4D_{66}[S_6]^T\right)\{X_{,xx}\} \qquad (5)$$
$$+\left(2D_{26}\left([S_5]-[S_5]^T\right)\right)\{X_{,x}\}$$
$$+\left(D_{22}[S_4]^T - \rho h\omega^2 [S_1]^T\right)\{X\} = \{0\}.$$

which may be rewritten as:

$$\{X_{,xxxx}\} + [A_1]\{X_{,xxx}\} + [A_2]\{X_{,xx}\} + [A_3]\{X_{,x}\} \qquad (6)$$
$$+\left([A_4] - \omega^2 [A_5]\right)\{X\} = \{0\}$$

where

$$[A_1] = \frac{2D_{16}}{D_{11}}[S_1]^{-1}\left([S_3]-[S_3]^T\right)$$
$$[A_2] = \frac{1}{D_{11}}[S_1]^{-1}\left(D_{12}\left([S_2]+[S_2]^T\right) - 4D_{66}[S_6]^T\right)$$
$$[A_3] = \frac{2D_{26}}{D_{11}}[S_1]^{-1}\left([S_5]-[S_5]^T\right)$$
$$[A_4] = \frac{D_{22}}{D_{11}}[S_1]^{-1}[S_4]^T, \text{ and } [A_5] = \frac{\rho h}{D_{11}}[I]$$

The boundary conditions along $x$ = 0 and $x$ = $a$ edges are:

Either

$$D_{11}[S_1]^T \{X_{,xx}\} + 2D_{16}[S_3]\{X_{,x}\} \qquad (7a)$$
$$+ D_{12}[S_2]\{X\} = \{0\}$$

or

$$\{X_{,x}\} = \{0\} \qquad (7b)$$

and, either:

$$-D_{11}[S_1]^T \{X_{,xxx}\} - 2D_{16}\left([S_3]-[S_3]^T\right)\{X_{,xx}\}$$
$$-\left(D_{12}[S_2] - 4D_{66}[S_6]^T\right)\{X_{,x}\} \qquad (7c)$$
$$+\left(2D_{26}[S_5]^T\right)\{X\} = \{0\}$$

or

$$\{X\} = \{0\} \qquad (7d)$$

These boundary conditions correspond to the following edge supports:

Simply supported edge: Eq.(7a) and Eq.(7d)

Clamped edge: Eq.(7b) and Eq.(7d)

Free edge: Eq.(7a) and Eq.(7c)

With assumed functions $Y_i(y)$ and appropriate boundary conditions, the governing equations can be solved for natural frequencies and associated mode shapes.

With a similar procedure, the other set of governing equations and boundary conditions can be derived for priorly assumed functions $X_i(x)$. The governing equations are obtained as:

$$D_{22}[R_1]^T \{Y_{,yyyy}\} + 2D_{26}\left([R_3]-[R_3]^T\right)\{Y_{,yyy}\}$$
$$+\left(D_{12}\left([R_2]+[R_2]^T\right) - 4D_{66}[R_6]^T\right)\{Y_{,yy}\} \qquad (8)$$
$$+\left(2D_{16}\left([R_5]-[R_5]^T\right)\right)\{Y_{,y}\}$$
$$+\left(D_{11}[R_4]^T - \rho h\omega^2 [R_1]^T\right)\{Y\} = \{0\}$$

where

$$[R_1] = \int_0^a \{X\}\{X\}^T dx, \quad [R_2] = \int_0^a \{X\}\{X_{,xx}\}^T dx$$
$$[R_3] = \int_0^a \{X\}\{X_{,x}\}^T dx, \ [R_4] = \int_0^a \{X_{,xx}\}\{X_{,xx}\}^T dx$$
$$[R_5] = \int_0^a \{X_{,xx}\}\{X_{,x}\}^T dx, \ [R_6] = \int_0^a \{X_{,x}\}\{X_{,x}\}^T dx$$

The governing equations, Eq.(8) are simplified as:

$$\{Y_{,yyyy}\} + [B_1]\{Y_{,yyy}\} + [B_2]\{Y_{,yy}\} + [B_3]\{Y_{,y}\} \qquad (9)$$
$$+\left([B_4] - \omega^2 [B_5]\right)\{Y\} = \{0\}$$

where

$$[B_1] = \frac{2D_{26}}{D_{22}}[R_1]^{-1}\left([R_3]-[R_3]^T\right)$$
$$[B_2] = \frac{1}{D_{22}}[R_1]^{-1}\left(D_{12}\left([R_2]+[R_2]^T\right) - 4D_{66}[R_6]^T\right)$$
$$[B_3] = \frac{2D_{16}}{D_{22}}[R_1]^{-1}\left([R_5]-[R_5]^T\right)$$
$$[B_4] = \frac{D_{11}}{D_{22}}[R_1]^{-1}[R_4]^T, \text{ and } [B_5] = \frac{\rho h}{D_{22}}[I]$$

The boundary conditions along $y$ = 0 and $y$ = $b$ edges are:

Either

$$D_{22}[R_1]^T \{Y_{,yy}\} + 2D_{26}[R_3]\{Y_{,y}\} \qquad (10a)$$
$$+ D_{12}[R_2]\{Y\} = \{0\}$$

or

$$\{Y_{,y}\} = \{0\} \tag{10b}$$

and, either:

$$\begin{aligned} &-D_{22}[R_1]^T\{Y_{,yyy}\} - 2D_{26}\left([R_3]-[R_3]^T\right)\{Y_{,yy}\} \\ &-\left(D_{12}[R_2]-4D_{66}[R_6]^T\right)\{Y_{,y}\} \\ &+2D_{16}[R_5]^T\{Y\} = \{0\} \end{aligned} \tag{10c}$$

or

$$\{Y\} = \{0\} \tag{10d}$$

Similar to the previous case, the boundary conditions for each edge support are:

Simply supported edge: Eq.(10a) and Eq.(10d)

Clamped edge: Eq.(10b) and Eq.(10d)

Free edge: Eq.(10a) and Eq.(10c)

**2.3. Solution procedure**

The governing equations, Eq. (6), can be solved using the assumed displacement functions $Y_i(y)$ and the boundary conditions, Eq. (7). The displacement functions $\{X\}$ are assumed in form of the infinite power series as:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1(x) \\ * \\ X_N(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} aa_{1,i}x^i \\ * \\ \sum_{i=0}^{\infty} aa_{N,i}x^i \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} aa_1 \\ * \\ aa_N \end{Bmatrix}_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\{AA\}_i\, x^i \tag{11}$$

where $\{AA\}_i$ are unknown coefficients to be determined. By substituting the assumed function from Eq. (11) in the governing equations, the unknown coefficients $\{AA\}_{i+4}$ can be written as:

$$\{AA\}_{i+4} = -\frac{\begin{Bmatrix} [A_1]\{AA\}_{i+3}(i+1)(i+2)(i+3) \\ +[A_2]\{AA\}_{i+2}(i+1)(i+2) \\ +[A_3]\{AA\}_{i+1}(i+1) \\ +\left([A_4]-\omega^2[A_5]\right)\{AA\}_i \end{Bmatrix}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \tag{14}$$

With this formulation, the number of unknown coefficients is reduced to $4N$. The displacement functions $\{X\}$ are written in term of the unknown coefficients $\{AA\}_3$, $\{AA\}_2$, $\{AA\}_1$ and $\{AA\}_0$. These unknown coefficients can be solved using the boundary conditions shown in Eq.(7). At this point, the iteration using the assumed displacement functions $Y_i(y)$ is concluded.

The next iteration involved the governing equations and boundary condition in Eqs. (9) and (10), respectively. The obtained functions $\{X\}$ from the first iteration are used as the assumed functions. Similarly, the displacement functions $\{Y\}$ are assumed as infinite power series of:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} Y_1(y) \\ * \\ Y_N(y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} bb_{1,i}y^i \\ * \\ \sum_{i=0}^{\infty} bb_{N,i}y^i \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} bb_1 \\ * \\ bb_N \end{Bmatrix}_i y^i = \sum_{i=0}^{\infty}\{BB\}_i\, y^i \tag{15}$$

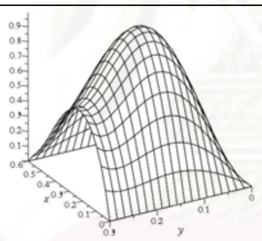
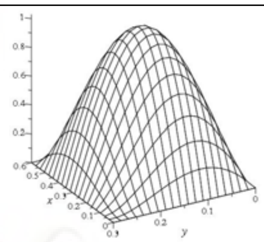
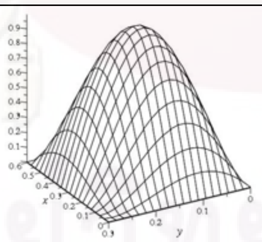
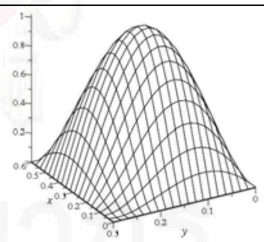
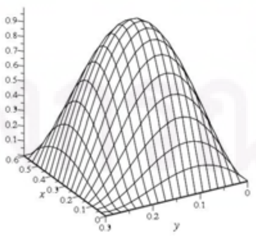
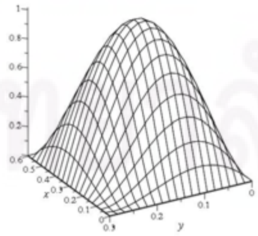
where $\{BB\}_i$ are unknown coefficients of functions $\{Y\}$. With similar procedures as the previous case, the unknown coefficients $\{BB\}_{i+4}$ can be written as:

$$\{BB\}_{i+4} = -\frac{\begin{Bmatrix} [B_1]\{BB\}_{i+3}(i+1)(i+2)(i+3) \\ +[B_2]\{BB\}_{i+2}(i+1)(i+2) \\ +[B_3]\{BB\}_{i+1}(i+1) \\ +\left([B_4]-\omega^2[B_5]\right)\{BB\}_i \end{Bmatrix}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \tag{16}$$

Again, the unknown coefficients $\{BB\}_0$, $\{BB\}_1$, $\{BB\}_2$ and $\{BB\}_3$ are determined from the boundary conditions shown in Eq.(10). The obtained functions $\{Y\}$ can be applied as an assumed function for Eq. (6) for the third iteration. These iterative calculations can be repeated until the obtained natural frequency converges to a particular value.

Table 1 presents the solution procedure used in this study. A $[45]_8$ composite plate with simply supported boundary condition along four edges is chosen as an example. Material used in this study is graphite-epoxy composite with mechanical and physical properties shown in Table 2. The dimensions of the specimen are $a$ = 60 cm and $b$ = 30 cm. The number of term used in the displacement function are 2, i.e. $N$ = 2 for the displacement function shown in Eq. (2). The first iteration begins with assuming functions {Y} as $Y_1(y) = y^6$ and $Y_2(y) = \sin(\pi y/b)$. These functions can be assumed arbitrarily. The natural frequencies and displacement functions in term of $x$ are obtained from governing equations, Eq.(6), and boundary conditions, Eq.(7). In the first iteration, the fundamental natural frequency is obtained as 209.790 rad/s with the displacement functions $\{X\}=\{X_1\}$. The vibration mode shape is determined from the assumed function $\{Y\}$ and the obtained functions $\{X_1\}$ by utilizing Eq. (2). The vibration mode shape is presented in form of a 3-D surface plot and shown in the table. It is seen that the vibration mode in the first iteration is incorrect because the assumed function {Y}, specifically $y^6$ , are not satisfied the boundary conditions.

Table 1. Iterative calculations for the natural frequency and vibration mode shape.

| Iteration No./ Assumed Functions. | Mode shape | Iteration No./ Assumed Functions. | Mode shape |
|---|---|---|---|
| 1. Assume $\{Y\} = \left\{ \begin{matrix} y^6 \\ \sin \frac{\pi y}{b} \end{matrix} \right\}$ |  $\omega$ = 209.790 rad/s $\{X\}=\{X_1\}$ | 2. Assume $\{X\}=\{X_1\}$ |  $\omega$ = 228.472 rad/s $\{Y\}=\{Y_1\}$ |
| 3. Assume $\{Y\}=\{Y_1\}$ |  $\omega$ = 220.249 rad/s $\{X\}=\{X_2\}$ | 4. Assume $\{X\}=\{X_2\}$ |  $\omega$ = 220.117 rad/s $\{Y\}=\{Y_2\}$ |
| 5. Assume $\{Y\}=\{Y_2\}$ |  $\omega$ = 220.109 rad/s $\{X\}=\{X_3\}$ | 6. Assume $\{X\}=\{X_3\}$ |  $\omega$ = 220.109 rad/s $\{Y\}=\{Y_3\}$ |

The obtained functions $\{X_1\}$ are employed as assumed functions in the second iteration which involves Eq. (9) and boundary conditions shown in Eq. (10). The natural frequency obtained in this iteration is 228.472 rad/s with the displacement functions $\{Y\}=\{Y_1\}$. It should be noted that the boundary conditions of the displacement functions obtained in this iteration satisfy the boundary conditions of the problem. Similar to the second iteration, the displacement functions $\{Y\}=\{Y_1\}$ are employed as the assumed function in the third calculation. This calculation procedure is repeated until natural frequency and vibration mode converges to a particular value. In this example, the natural frequencies from the fifth and sixth iterations are virtually identical.

Table 2. Ply properties of graphite-epoxy composite

| $E_{11}$ (GPa) | $E_{22}$ (GPa) | $G_{12}$ (GPa) | $v_{12}$ | $\rho$ (kg/m$^3$) | Thickness (mm) |
|---|---|---|---|---|---|
| 132 | 10.8 | 5.65 | 0.24 | 1540 | 0.127 |

### 3. Convergence Study

A convergence study was performed to determine the appropriate number of term used in the displacement function, i.e. value of $N$ in Eq.(2). Fundamental natural frequencies of 30x30 cm$^2$ laminated plates with different stacking sequence and boundary conditions are presented in Table 3. Material used in this convergence study is graphite-epoxy composite with material properties shown in Table 2. Specimens with three different boundary conditions are included in the study. They are SSSS, CCCC, and CCSS boundary conditions. The symbols “S” and “C” are referred to “simple support” and “clamped support” boundary conditions, respectively. The specimen with “CCSS” boundary conditions is clamp supported on $x = 0$ and $y = 0$ edges, and simply supported on $x = a$ and $y = b$ edges. The fundamental natural frequencies of all specimens are calculated using displacement functions with different values of $N$. For [0°/90°]$_{2s}$ specimens, the natural frequencies converge to the desired solutions in the first iteration, as shown in the table. The solutions are practically constant although the number of term used in the displacement functions is increased. Thus, for specially orthotropic plates, a single-term displacement function is sufficient to get converged solutions. This result is conformed with the conclusion from Ref. [3].

On the other hand, a single-term displacement function is not efficient to achieve the correct solutions for the case of angle-ply laminate. From the table, the displacement functions with a number of terms at least 3 are recommended to obtain an accurate solution. The specimens with angle-ply stacking sequence require multi-term displacement functions because of the inclination of their vibration mode shapes. Vibration mode shapes of [45°/-45°/45°] SSSS specimen obtained from the iterations using different number of $N$ in the displacement functions are presented in Fig. 2. It is seen that only a symmetric vibration mode shape is obtained if a single-term displacement function is used. Since the vibration mode shape of an angle-ply specimen is inclined because of the inclination of the fiber direction, vibration mode shape of this type of laminates is inclined and unsymmetrical, hence, a multi-term function is required. In this study, the displacement function with $N$ = 3 are used in the iterations.

**4. Numerical Verification**

After the convergence study, natural frequencies of laminated plates determined from the multi-term Kantorovich method are compared with available solutions of Chen et al. [11] and Leissa and Narita [12]. The first five natural frequencies of the specimens with stacking sequences of [0°]$_3$, [30°/-30°/30°], [45°/-45°/45°], and [0°/90°/0°] is presented in Table 4. The width and length of specimens used in this verification are 10.0 m with 0.06 m thickness. Material properties used in this part of the study are: $E_1/E_2 =$ 2.45, $G_{12}/E_2 =$ 0.48, $v_{12} =$ 0.23, and $\rho$ = 8000 kg/m$^3$. Natural frequency is presented in term of a dimensionless frequency parameter which is defined according to:

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_0}} \tag{17}$$

where $D_0 = \dfrac{E_1 h^3}{12(1 - v_{12} v_{21})}$

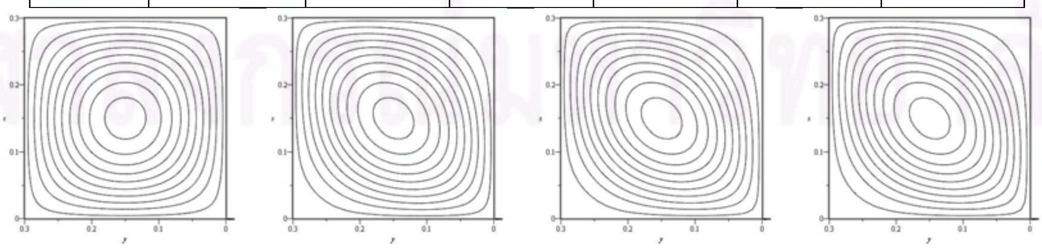
From a comparison in the table, the frequency parameters determined from the multi-term Kantorovich method are compared very well with solutions from other studies. Most of the natural frequencies from the proposed technique are slightly lower than the benchmark solutions. Thus, the derived governing equations and boundary conditions are verified.

**5. Conclusions**

The natural frequency and mode shape of symmetrically composite plates are determined using the Kantorovich method with multi-term assumed displacement function. The concept of the solution procedure is based on the variational principle of total energy minimization. The obtained natural frequencies corresponded very well with other available solutions. It is also shown that, with multi-term assumed functions, the vibration behavior of angle-ply plates can be determined. This type of problem is not possible to deal with using the conventional single-term Kantorovich method. It is interesting to apply the technique to other types of structural problems.

Table 3. Fundamental natural frequencies in rad/s of laminated plates

| Value of $N$ | [0°/90°]$_{2s}$ | | | [45°/-45°/45°] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | SSSS | CCCC | CCSS | SSSS | CCCC | CCSS |
| 1 | 339.2027 | 723.9547 | 510.3102 | 164.6403 | 263.7581 | 210.0205 |
| 2 | 339.2027 | 723.9333 | 510.3010 | 142.2653 | 238.3993 | 186.9836 |
| 3 | 339.2027 | 723.9333 | 510.3006 | 139.7492 | 236.8738 | 184.6462 |
| 4 | 339.2027 | 723.9333 | 510.3004 | 139.0017 | 236.7477 | 184.0323 |



$N$ = 1 $N$ = 2 $N$ = 3 $N$ = 4

Fig. 2 Mode shapes of [45°/-45°/45°] SSSS specimen determined using different value of $N$

Table 4. Frequency parameters $\beta$ of laminated composite square plates (BC:SSSS)

| Mode | [0°]$_3$ | | | [30°/-30°/30°] | | | [45°/-45°/45°] | | | [0°/90°/0°] | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ref.11 | Ref.12 | Present | Ref.11 | Ref.12 | Present | Ref.11 | Ref.12 | Present | Ref.11 | Present |
| Mode 1 | 15.18 | 15.19 | 15.17 | 15.88 | 15.90 | 15.86 | 16.11 | 16.14 | 16.10 | 15.18 | 15.17 |
| Mode 2 | 33.34 | 33.30 | 33.25 | 35.95 | 35.86 | 35.77 | 37.04 | 36.93 | 36.87 | 33.82 | 33.73 |
| Mode 3 | 44.51 | 44.42 | 44.39 | 42.63 | 42.62 | 42.58 | 41.80 | 41.81 | 41.82 | 44.14 | 44.02 |
| Mode 4 | 60.79 | 60.77 | 60.68 | 61.54 | 61.45 | 61.31 | 61.94 | 61.85 | 61.68 | 60.79 | 60.68 |
| Mode 5 | 64.80 | 64.53 | 64.46 | 72.12 | 71.71 | 71.88 | 78.03 | 77.04 | 78.57 | 66.12 | 65.77 |

## 6. References

[1] Yuan, S. and Jin, Y. (1998). Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method, *Composite Structures* vol. 66, pp. 861-867.

[2] Eisenberger, M. and Alexandrov, A. (2003). Buckling loads of variable thickness thin isotropic plates, *Thin-walled Structure*, vol.41(9), pp.871–889.

[3] Ungbhakorn, V. and Singhatanadgid, P. (2005). Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method, *Composite Structures*, vol.73, pp.120-128.

[4] Shufrin, I., Rabinovitch, O., and Eisenberger, M. (2008). Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions - A semi analytical approach, *Composite Structures*, vol.82, pp. 521-531.

[5] Shufrin, I. and Eisenberger, M. (2006). Vibration of shear deformable plates with variable thickness - First-order and higher-order analyses, *Journal of Sound and Vibration*, vol.290(1-2), pp. 465-489.

[6] Shufrin, I. and Eisenberger, M. (2005). Stability and vibration of shear deformable plates - First order and higher order analyses, *International Journal of Solids and Structures*, vol.42(3-4), pp. 1225-1251.

[7] Bercin, A.N. (1996). Free vibration solution for clamped orthotropic plates using the Kantorovich method, *Journal of Sound and Vibration*, vol.196, pp. 243-247.

[8] Dalaei, M. and Kerr, A.D. (1996) Natural vibration analysis of clamped rectangular orthotropic plates, *Journal of Sound and Vibration*, vol.189(3), pp. 399-406.

[9] Whitney, J.M. (1987). Structure analysis of laminated anisotropic plates, Technomic, Inc. Pennsylvania.

[10] Reddy J.N. (2004) Mechanics of laminated composite plates and shells, CRC Press, Boca Raton.

[11] Chen X.L., Liu G.R., and Lim S.P. (2003). An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape, *Composite Structures*, vol.59, 279-89.

[12] Leissa A.W. and Narita Y. (1989). Vibration studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates, *Composite Structures*, vol.12, pp.113-132.

# ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายธนาวุฒิ เวชญานนท์ เกิดเมื่อวันที่ 20 พฤศจิกายน 2527 ที่จังหวัดชัยภูมิ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล จากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เมื่อปีการศึกษา 2549 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2550 และมีผลงานวิชาการที่ได้เผยแพร่ดังนี้

Thanawut Pannok and Pairod Singhatanadgid, Vibration of Symmetrically Laminated Plates with Various Boundary Conditions using Extended Kantorovich Method, The 23rd Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand 4-7 November 2009, Chiang Mai, Thailand