การจำลองมหภาคสำหรับเครือข่ายถนนที่มีการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์

นายกมลเทพ เตียประเสริฐ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

MACROSCOPIC MODELLING FOR ROAD NETWORK WITH HETEROGENEOUS MOBILITY

Mr. Kamontep Tuerprasert

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การจำลองมหภาคสำหรับเครือข่ายถนนที่มีการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์
โดย	นายกมลเทพ เตียประเสริฐ
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เชาวน์ดิศ อัศวกุล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เชาวน์ดิศ อัศวกุล)

.... กรรมการ
(อาจารย์ สุวิทย์ นาคพีระยุทธ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยเชษฐ์ สายวิจิตร)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สรวิศ นฤปิติ)

กมลเทพ เตียประเสริฐ : การจำลองมหภาคสำหรับเครือข่ายถนนที่มีการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์ (MACROSCOPIC MODELLING FOR ROAD NETWORK WITH HETEROGENEOUS MOBILITY) อ.ที่ปรึกษา : ผศ.ดร. เชาวน์ดิศ อัศวกุล, 101 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้กล่าวถึงการศึกษาแบบจำลองใหม่ทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่บนเครือข่ายถนน โดยพิจารณาในแบบจำลองมหภาคโดยใช้พื้นฐานมาจากแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ (Cell Transmission Model, CTM) ซึ่งได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวาง อย่างไรก็ตามแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม (S-CTM) นั้นไม่คำนึงถึงประเภทของยานพาหนะที่แตกต่างกัน (เช่น รถบรรทุก, รถยนต์, รถโดยสารประจำทาง) ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญในการประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติ ดังนั้นแบบจำลองจึงได้ถูกขยายเป็นรูปทั่วไป (M-Class) ที่คิดแยกประเภทยานพาหนะในวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อทดสอบความถูกต้องของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้น ในงานวิจัยชิ้นนี้ได้มีการจำลองเครือข่ายจริง (ถนนพญาไทและถนนสาทร) และเครือข่ายสมมุติด้วยการเทียบผลการจำลองกับข้อมูลจริงและผลจากแบบจำลองของ MITSIM จากผลการทดสอบพบว่า ทั้ง S-CTM และ M-CTM สามารถจำลองการแปรเปลี่ยนตามเวลาของความหนาแน่นยานพาหนะบนถนนในแต่ละช่วงได้อย่างถูกต้อง สำหรับทั้งเครือข่ายที่มีสัญญาณไฟและไม่มีสัญญาณไฟ ซึ่งมีขนาดเล็กเช่นกรณีถนนพญาไทและที่มีขนาดใหญ่เช่น กรณีถนนสาทร ทั้งนี้แบบจำลองที่นำเสนอ M-CTM ให้ผลการจำลองที่ถูกต้องกว่าแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม S-CTM อย่างชัดเจน ในกรณีที่สัดส่วนยานพาหนะในเครือข่ายไม่คงที่ เปลี่ยนไปตามเวลาและมีสภาพการจราจรไม่หนาแน่นซึ่งทำให้คาดการณ์ได้ว่าแบบจำลองที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้จะเหมาะสำหรับการนำไปใช้กับเครือข่ายถนนขนาดใหญ่เช่นทางด่วนหรือทางหลวงได้

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า **ลายมือชื่อนิสิต** ...กมลเทพ เตี่ยประเสริฐ...
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า **ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา** ...
ปีการศึกษา 2550

4770612321: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING
KEY WORD: TRAFFIC NETWORK / MACROSCOPIC MODEL / CELL TRANSMISSION MODEL / HETEROGENEOUS MOBILITY.

KAMONTEP TUERPRASERT : MACROSCOPIC MODELLING FOR ROAD NETWORK WITH HETEROGENEOUS MOBILITY. THESIS ADVISOR: ASST. PROF. CHAODIT ASWAKUL, Ph.D., 101 pp.

This thesis is concerned with a study of novel mathematical model of macroscopic road network mobility. The approach taken herein is based on the well established framework, called *cell transmission model* (CTM). However, the conventional CTM (herein called S-CTM) cannot capture the mixed composition of vehicle types (e.g. truck, car, bus), the essence of which is critical to many applications in practice. CTM is therefore originally generalised into so-called M-CTM in this thesis so as to consider the heterogeneous mobility, i.e. with more than one class of vehicles. To test the accuracy of developed model, both real networks (Phayathai and Sathon roads) and imaginary networks have been investigated in this thesis. The modelled results of S-CTM and M-CTM are compared with the actual measurement for the real networks and with the simulated result in microscopic level from MITSIM. Based on the obtained results, both S-CTM and M-CTM are capable of modelling the variation of vehicle density on each road segment accurately. This finding is confirmed for signalized/non-signalized networks as well as for small network like Phayathai road and large network like Sathon road. Further the proposed, M-CTM is more accurate than S-CTM significantly in uncongested network with non-stationary vehicle composition. It is therefore expected that the proposed mobility model in this thesis would be well applicable to model large-scale road network like expressway or highway systems.

Department	Electrical Engineering	**Student's signature** . . . .
Field of study	Electrical Engineering	**Advisor's signature** . . . .
Academic year	2007	

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยคำแนะนำและความช่วยเหลืออย่างดียิ่ง จากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.เชาวน์ดิศ อัศวกุล ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบคุณมา ณ ที่นี้

ขอบคุณศูนย์เชี่ยวชาญเทคโนโลยีระบบโทรคมนาคม (Center of Excellence in Telecommunication System) สถานที่ทำงานวิจัย รวมทั้งอ.เป๊กและน้องตู้ซึ่งได้เสียสละเวลาส่วนตัวอันมีค่ามาให้ความช่วยเหลือและคำแนะนำที่มีคุณค่าอย่างหาที่เปรียบไม่ได้ในหลาย ๆ ทั้งด้านงานวิจัยและด้านอื่น ๆ รวมถึงเพื่อนนักวิจัยทุกคน

ขอขอบคุณ บิดา มารดา ซึ่งได้ให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจให้แก่ผู้วิจัยเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา

"Every famous individual was not just talented. They met important people at important times.", "คุณธรรมใหม่แม้หนักแน่นแต่คุณธรรมเก่าก็ยากจะลืมเลือน", สุดท้ายนี้ถ้าหากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้พอจะมีคุณค่าในทางคณิตศาสตร์อยู่บ้าง ข้าพเจ้าก็ขออุทิศความดีในทางคณิตศาสตร์ทั้งนั้นแด่เหล่าปรมาจารย์คณิตศาสตร์ผู้ซึ่งได้ชี้แนะด้วยความเมตตา ซื่อตรงและอดทนกับบุคคลเข้าใจยากและไม่มีพรสวรรค์ใด ๆ คนหนึ่งจนเป็นจุดหักเหสำคัญของข้าพเจ้าและส่งผลให้เกิดวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ในเวลาต่อมารวมถึงเป็นแรงบรรดาลใจในการสร้างสรรค์งานทางคณิตศาสตร์ตลอดไป แม้ปรมาจารย์บางท่านจะจากโลกนี้ไปแล้ว แต่บุคลิกและคำสอนของท่านจะดำรงอยู่ในใจข้าพเจ้าตลอดไป

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ตั้งแต่ที่มนุษย์ได้เริ่มพัฒนาระบบขนส่งด้วยเครื่องจักรไอน้ำขึ้นเป็นครั้งแรกในยุโรปจนมาถึงปัจจุบัน แม้ว่าเทคโนโลยีในด้านการออกแบบพาหนะจะพัฒนาไปเพียงใดแต่ก็ไม่ได้ทำให้ปัญหาทางการขนส่งหรือจราจรลดลงเลย แต่กลับจะยิ่งทวีความรุนแรงขึ้นโดยเฉพาะในเขตเมืองใหญ่หรือเมืองหลวง ซึ่งบอกโดยนัยได้ว่าการแก้ปัญหาระบบจราจรนั้นไม่อาจทำได้ด้วยเทคโนโลยีทางวัสดุวิศวกรรมอย่างเดียว แต่จำเป็นต้องอาศัยการวางแผนระบบจราจรโดยศึกษาจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อทราบต้นเหตุของปัญหาและวิธีจัดการที่มีประสิทธิภาพเพื่อลดความสูญเสียสิ้นเปลืองด้านทรัพยากรเวลาและแรงงาน ซึ่งจะมี 2 ลักษณะใหญ่ ๆ คือ

1. การหาความต้องการใช้เส้นทางโดยพิจารณาจากภาพรวมทั้งเครือข่าย

2. การคำนวณคาดคะเนสภาพการติดขัดของเส้นทางนั้นเมื่อเกิดความต้องการที่แน่นอนเข้ามา

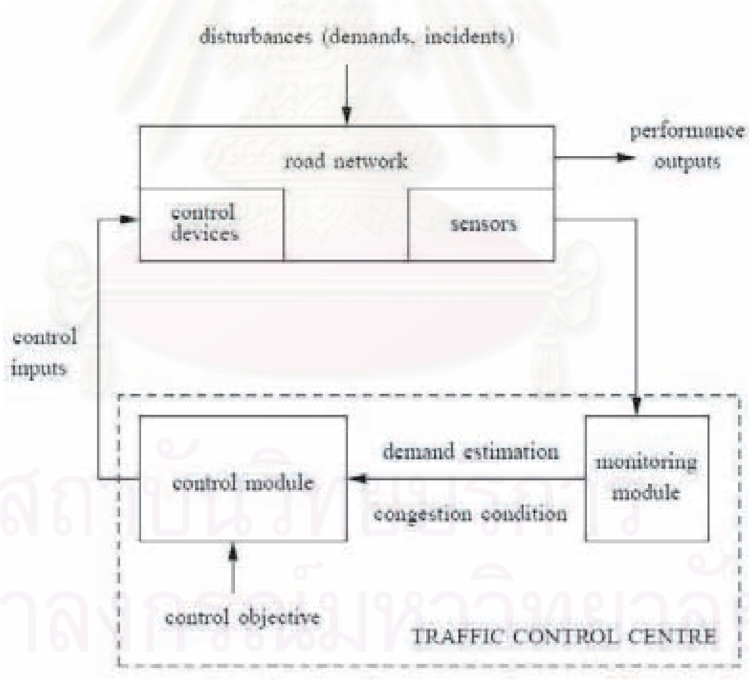
ในงานวิจัยนี้จะเน้นไปในข้อ 2 ซึ่งเป็นการศึกษาปัญหาในเส้นทางจราจรและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาสาเหตุและแนวทางการแก้ไขที่เหมาะสม การแก้ปัญหาจราจรในท้องถิ่นหรือประเทศใดนั้นควรให้ผู้ที่อยู่ในท้องถิ่นหรือประเทศนั้นเป็นผู้ทำการศึกษาปัญหาและหาแนวทางแก้ไข เพราะความซับซ้อนและแก่นแท้ของปัญหาในท้องถิ่นใดคนในท้องถิ่นที่ประสบปัญหานั้นย่อมเข้าใจและเข้าถึงได้ดีกว่าคนต่างถิ่นอย่างแน่นอน เช่นระบบควบคุมสัญญาณไฟจราจรอัตโนมัติซึ่งประเทศไทยได้นำเข้าจากประเทศอังกฤษเป็นเงินหลายล้านบาทแต่ไม่อาจแก้ปัญหาได้ซ้ำยังทำให้เกิดปัญหามากขึ้นกว่าเดิม ทำให้เกิดการสิ้นเปลืองอย่างเปล่าประโยชน์ จึงสมควรที่ประเทศไทยจะศึกษาและแก้ปัญหาของประเทศไทยเอง เป็นการแก้ปัญหาที่ถูกจุดและประหยัดเงินตราแผ่นดินที่จะนำไปซื้อเทคโนโลยีจากต่างประเทศได้ด้วย

เครือข่ายจราจรมีลักษณะสำคัญประการหนึ่งคือแต่ละส่วนจะมีความสัมพันธ์ต่อกันทั้งหมด สภาพการจราจรติดขัดที่เกิดขึ้นในเครือข่ายจราจร โดยเฉพาะเส้นทางที่ความต้องการใช้มากเกินความจุของถนน จะส่งผลกระทบต่อสภาพการจราจรในเครือข่ายทั้งหมด โดยจะเริ่มส่งผลในบริเวณรอบข้างก่อน จากนั้นจึงส่งผลในบริเวณห่างไกลต่อไป การแก้ไขหรือฟื้นคืนสภาพการจราจรให้กลับคืนสู่สภาพปกติทำได้ยากและต้องใช้เวลาในการแก้ไขมาก ซึ่งตรงกันข้ามกับการป้องกันสภาพการติดขัดที่กระทำได้ง่ายกว่า จึงจำเป็นต้องมีแบบจำลองที่ใช้ทำนายสภาพการจราจรล่วงหน้าเพื่อป้องกันสภาพการจราจรติดขัดแทนการตรวจสอบสภาพการจราจรและแก้ไข แต่การพิจารณาสภาพการจราจรแยกส่วนจะก่อให้เกิดปัญหาการติดขัดในส่วนอื่นที่ไม่ได้พิจารณาและการติดขัดนั้นจะทำให้ทั้งเครือข่ายติดขัดตามไปด้วย ดังนั้นจึงต้องมีแบบจำลองที่สามารถพิจารณาทั้งเครือข่ายเป็นตัวควบคุมป้อนกลับให้สภาพจราจรอยู่ในสภาพปกติ โดยการทำนายสภาพการจราจรของเครือข่ายล่วงหน้า รวมถึงคำนวณหาวิธีการป้องกันหรือแก้ไขสภาพการจราจรติดขัด การพัฒนาแบบจำลองการเคลื่อนที่จึงจัดว่าเป็นปัญหาหนึ่งที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาระบบการขนส่งอัจฉริยะ ITS (Intelligent Transport System)

นอกจาก การ ประยุกต์ แบบจำลอง การ เคลื่อนที่ กับ ปัญหา ด้าน จราจร แล้ว แบบจำลอง ที่ ได้ ยัง เป็น องค์ประกอบสำคัญในการวิเคราะห์และออกแบบระบบสื่อสารเคลื่อนที่ต่าง ๆ อีกด้วย เช่นในการสื่อสารผ่านรถยนต์ สภาพจราจรที่ได้จากแบบจำลองจะช่วยจำลองการทดสอบประสิทธิภาพของการส่งข้อมูลแทนการเก็บค่าข้อมูลจริงจากรถยนต์บนถนนได้

เพื่อให้สามารถจำลองระบบถนนทั้งเครือข่ายได้ แนวทางวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้แบบจำลองมหภาค เนื่องจากแบบจำลองจุลภาคนั้นทำการเก็บรวบรวมข้อมูลให้ครบถ้วนได้ยากในทางปฏิบัติ ทั้งยังต้องการความแม่นยำของข้อมูลในระดับสูง และเมื่อนำไปใช้ในระดับเครือข่ายแล้วความซับซ้อนของแบบจำลองและเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะยิ่งทวีคูณกว่าแบบจำลองมหภาคมาก แบบจำลองมหภาคจึงมีความเหมาะสมมากกว่าในทางปฏิบัติโดยเฉพาะเมื่อต้องการผลการทำนายอย่างรวดเร็ว

แบบจำลองมหภาคที่เลือกใช้ในแนวทางของวิทยานิพนธ์นี้คือแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ (Cell Transmission Model) หรือ CTM เนื่องจากเป็นแบบจำลองมหภาคชนิดสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แม้จะมีความแม่นยำในการทำนายน้อยกว่าแบบจำลองมหภาคชนิดสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงเล็กน้อย แต่ใช้เวลาและขั้นตอนการคำนวณที่น้อยกว่ารวมทั้งมีความง่ายในการเก็บข้อมูลมากกว่า [22] ไม่จำเป็นต้องใช้ตัวตรวจสอบที่สามารถวัดความเร็วและมีการทดสอบความถูกต้องจากข้อมูลเครือข่ายจราจรจริงแล้ว ที่สำคัญคือแบบจำลอง CTM นั้นได้พัฒนาเพิ่มเติมมาจากแบบจำลอง LWR ซึ่งได้รับความนิยม [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8]



รูปที่ 1.1 องค์ประกอบพื้นฐานของตัวควบคุมเครือข่ายแบบป้อนกลับ

1.2 แนวทางของงานวิจัย

งานวิจัยนี้มุ่งพัฒนาแบบจำลองการเคลื่อนที่แบบมหภาคให้สามารถจำแนกประเภทของยานพาหนะได้ เนื่องจากมีงานในหลายด้านที่ต้องการการจำแนกประเภทของยานพาหนะ เช่นการศึกษาความปลอดภัยใน

การใช้ถนนกับอัตราการไหลของรถยนต์ [3] ปัจจัยที่มีผลต่อความปลอดภัยไม่ได้ขึ้นกับความหนาแน่นของระบบจราจรเท่านั้น แต่ขึ้นกับชนิดของยานพาหนะที่อยู่ในระบบจราจรด้วย และเนื่องจากถนนแต่ละเส้นอาจมีการจำกัดชนิดของยานพาหนะไม่เหมือนกัน ทำให้ถ้าไม่พิจารณาชนิดของยานพาหนะแล้วจะทำให้เกิดความผิดเพี้ยนได้ค่อนข้างสูงในการวิเคราะห์พฤติกรรมการเคลื่อนที่ด้วยแบบจำลอง [10, 11, 25]

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิทยานิพนธ์

1. ศึกษาแบบจำลองต่าง ๆ ทั้งแบบมหภาคและแบบจุลภาค
2. พัฒนาแบบจำลองมหภาคสำหรับเครือข่ายจราจรที่คิดแยกประเภทยานพาหนะได้
3. ทดสอบ และ วิเคราะห์ แบบจำลอง ที่ คิดค้น ขึ้น โดย เทียบ ผล การ จำลอง กับ ข้อมูล จริง ของ เครือข่าย จราจรในประเทศไทยว่าสอดคล้องกันหรือไม่
4. รวบรวม ข้อมูล, สรุป ผล และ จัด เก็บ ข้อมูล ทั้งหมด เพื่อ เป็น องค์ ความ รู้ พื้นฐาน ใน การ พัฒนา แบบจำลองเครือข่ายจราจรของประเทศไทยต่อไป

1.4 ขั้นตอนดำเนินงาน

1. ศึกษาแบบจำลอง CTM และแบบจำลองอื่น ๆ ทั้งที่มีการแยกประเภทยานพาหนะและไม่มีการแยกประเภท
2. พัฒนาแบบจำลอง CTM เดิมให้สามารถแยกประเภทยานพาหนะได้
3. ทำการเก็บข้อมูลจริงบนเครือข่ายจราจรของกรุงเทพมหานคร
4. ทำการทดสอบแบบจำลองที่ได้ออกแบบขึ้นมาเทียบกับข้อมูลจริง และปรับปรุงความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลอง
5. วิเคราะห์ผลการทดสอบ
6. ทำรายงานฉบับสมบูรณ์

1.5 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

เนื่องจาก ยัง ไม่ มี การ พัฒนา แบบจำลอง CTM ให้ สามารถ คิด แยกประเภท ยานพาหนะ ได้ ในวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นการนำเสนอแบบจำลอง CTM ที่สามารถจำแนกประเภทได้โดยใช้ข้อมูลจากการวัดไม่มากแต่สามารถให้ผลการทำนายที่น่าพอใจได้โดยขอบเขตของงานจะพิจารณาและทดสอบแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นว่าสอดคล้องกับข้อมูลจริงหรือไม่

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

เนื่องจากปัญหาการจราจรเป็นปัญหาระดับต้น ๆ ของกรุงเทพมหานครและเมืองใหญ่ของทุกประเทศที่กำลังพัฒนาและพัฒนาแล้ว ทั้งยังเป็นปัญหาที่ส่งผลโดยตรงต่อสุขภาพของประชากร แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ช่วยในการแก้ปัญหาการจราจรได้รวมทั้งเป็นเครื่องมือที่ใช้ช่วยในการพิจารณาการสร้างต่อเติมถนนในอนาคตให้ได้รับประโยชน์คุ้มค่ากับทรัพยากรมากที่สุด เพิ่มประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาจราจรและวางผังถนนได้ถูกต้อง

บทที่ 2

แบบจำลองเครือข่ายจราจร

2.1 ประเภทของแบบจำลอง

แบบจำลองได้ถูกแบ่งเป็น 3 ประเภทคือ แบบจำลองจุลภาค (microscopic model), แบบจำลองมัชฌิม (mesoscopic model) และ แบบจำลองมหภาค (macroscopic model) [9]

2.1.1 แบบจำลองจุลภาค

พิจารณากระบวนการตัดสินใจระหว่างผู้ขับขี่ การเคลื่อนไหวของยานพาหนะแต่ละคัน และปฏิสัมพันธ์ระหว่างยานพาหนะคันหนึ่งกับยานพาหนะอื่น ๆ เช่น แบบจำลองการขับรถตามกัน (car following model) [30, 31]

2.1.2 แบบจำลองมัชฌิม

พิจารณายานพาหนะเป็นกลุ่มก้อน ปฏิสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มจะมีรายละเอียดน้อยกว่าแบบจำลองจุลภาค เช่น แบบจำลองของ Hoogendoorn และ Bovy [10]

2.1.3 แบบจำลองมหภาค

พิจารณาสภาพความหนาแน่นของระบบจราจรและการไหลของกระแสจราจรแทนการพิจารณายานพาหนะเป็นคัน ๆ ซึ่งมองภาพการเคลื่อนที่ของยานพาหนะในองค์รวม เช่น แบบจำลอง LWR [12, 13], CTM [1, 2], SMM [6, 7, 8], แบบจำลอง PW [14], แบบจำลองของ H. J. Cho และ S. C. Lo [11]

ตารางที่ 2.1 ความแตกต่างระหว่างแบบจำลองจุลภาคและแบบจำลองมหภาค

ข้อเปรียบเทียบ	แบบจำลองจุลภาค	แบบจำลองมหภาค
การหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง	ยากมาก	ง่าย
ผลเฉลยทั่วไป	ไม่มี	สามารถมีได้
การปรับเทียบค่าตัวแปรด้วย Adaptive Filter	สามารถทำได้	สามารถทำได้
เวลาที่ใช้ในการประมวลผล	มาก	น้อย
ความถูกต้องในการจำลอง	มาก	น้อย
ความสามารถในการสร้างรูปทั่วไป	ทำได้ง่าย	ต้องอาศัยการทำงานเล็กน้อย

2.2 ลำดับการพัฒนาแบบจำลองเครือข่ายจราจรแบบมหภาค

2.2.1 แบบจำลอง LWR

Lighthill และ Whitham [12] กับ Richards [13] เป็นนักวิจัยกลุ่มแรกที่นำเสนอแบบจำลองเครือข่ายจราจรแบบมหภาคซึ่งมีชื่อว่าแบบจำลอง LWR แบบจำลองนี้มีหลักการอธิบายเครือข่ายจราจรโดยมองกลุ่มยานพาหนะเป็นของเหลวที่มีการไหลบนถนนอย่างต่อเนื่องทุกตำแหน่งโดยมีสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังนี้

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot q(x,t) = 0 \tag{2.1}$$

$$q(x,t) = u(x,t)k(x,t) \tag{2.2}$$

ถ้าพิจารณาในมิติเดียวหรือไม่คิดแยกช่องทางจราจรของถนนสมการ (2.1) จะลดรูปเป็น

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

โดยตัวแปรต่าง ๆ แทนค่าต่อไปนี้

$t =$ เวลา

$x =$ ตำแหน่งที่พิจารณา

$k(x,t) =$ ความหนาแน่นที่เวลาและตำแหน่งที่พิจารณา

$q(x,t) =$ อัตราการไหลที่เวลาและตำแหน่งที่พิจารณา

$u(x,t) =$ ความเร็วที่เวลาและตำแหน่งที่พิจารณา

สมการที่ (2.1) และ (2.3) แสดงให้เห็นถึงกฎการอนุรักษ์จำนวนยานพาหนะ

แบบจำลอง LWR เป็นแบบจำลองที่มีหลักการง่าย ๆ แต่เพียงพอที่จะอธิบายทฤษฎีการจราจร แต่เนื่องจากปรากฏการณ์ที่สังเกตได้มีความซับซ้อน จึงได้มีการพัฒนาแบบจำลองความต่อเนื่องด้วยการแทนที่ฟังชันฟลักซ์ขณะหนึ่ง ๆ ของการไหลของจราจร (instantaneous) ด้วยฟังก์ชันพลวัต (dynamic) แทนซึ่งก็คือแบบจำลองอนุพันธ์อันดับสูงที่รู้จักกันในนามแบบจำลอง PW

2.2.2 แบบจำลอง PW

จากสมมุติฐานของแบบจำลอง LWR จะเห็นได้ว่าความเร็วของยานพาหนะ $u(x,t)$ จะอยู่ในสภาวะคงตัว (steady state) เสมอทำให้ $u(x,t)$ เปลี่ยนแปลงทันทีเมื่อความหนาแน่นเปลี่ยนไป ซึ่งไม่สอดคล้องกับบางปรากฏการณ์ของระบบจราจร เพื่อแก้ไขปัญหาสมมุติฐานของความเร็วข้างต้น Payne [14] จึงเสนอให้ปรับสมการการเคลื่อนที่ตามความเร็วที่แปรตามเวลา (time variant speed) เพิ่มเติมจากสมการ (2.1)-(2.3) ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\left(\nabla \cdot u\right) = -\frac{1}{k}\nabla \cdot \left(p_e(k)\right) + \frac{1}{\tau}\left(u_e\left(k\right) - u\right) \tag{2.4}$$

$u =$ ความเร็ว

$u_e(k)$ = ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นและความเร็วที่จุดสมดุล (equilibrium speed density relation)

$p_e(k)$ = แรงกดจราจรที่จุดสมดุล (equilibrium traffic pressure)

τ = ค่าคงที่

พจน์ $-\frac{1}{k}\nabla \cdot (p_e(k)) = -\frac{p'_e(k)(\nabla \cdot k)}{k}$ โดย $p'_e(k) = \frac{dp_e(k)}{dk}$ เป็นพจน์ที่บ่งบอกถึงความชะงักงัน (anticipation) ของผู้ขับขี่จากการตระหนักถึงสภาพจราจรในบริเวณรอบข้าง โดย Payne กำหนดให้พจน์ชะงักงันหาค่าได้โดยให้ $p'_e(k) = \frac{1}{2\tau}\left|u'_e(k)\right|$

เนื่องจาก Whitham ได้นำเสนอหลักการนำฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับสูงมาเพิ่มเติมในแบบจำลอง LWR ก่อนที่ Payne จะนำสมการการเคลื่อนที่ (หรือที่รู้จักกันในชื่อการอนุรักษ์โมเมนตัม) มาใช้คู่กับสมการความต่อเนื่อง แบบจำลองข้างต้นจึงมีชื่อว่าแบบจำลอง PW

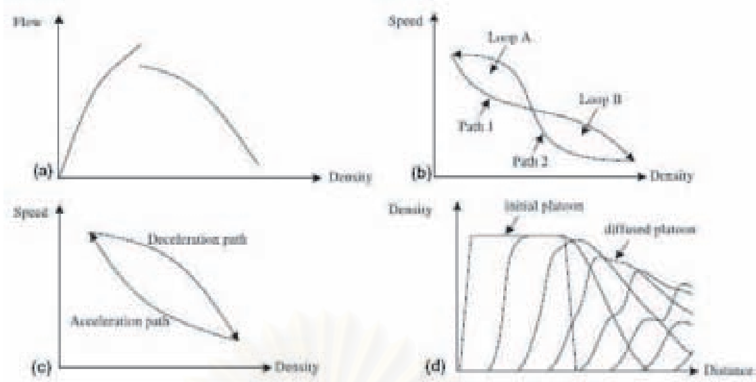
Papageorgiou [15] ได้แทนค่าพจน์ชะงักงันด้วยรูปแบบวิยุตของออยเลอร์ (Euler-like discrete form) จากนั้น Michalopoulos [16] ได้นำเสนอแบบจำลองกึ่งหนืด (semi-viscous model) Zhang [17] ได้เสนอแบบจำลองใหม่ที่มีพจน์มากขึ้นจากพจน์ที่ปรากฏมากมายของสมการอนุรักษ์โมเมนตัม หลังจากนั้นได้มีผู้ปรับปรุงแบบจำลองไปหลากหลายรูปแบบด้วยการตั้งสมมุติฐานของค่า $u_e(k)$ และ $\theta_e(k)$ ค่าความแปรปรวนของความเร็วสมดุล (equilibrium velocity variance) ที่แตกต่างกันออกไป Kühne [18], และ Kerner กับ Kohnhäuser [19, 20] ได้เสนอว่า $\theta_e(k)$ ควรมีค่าคงที่ c_0^2 ในขณะที่ Philips [21] เสนอว่า $\theta_e(k)$ มีความสัมพันธ์เชิงเส้นดังนี้ $\theta_e(k) = \theta_m\left(1 - \frac{k}{k_m}\right)$ ฟังก์ชันชัดแจ้ง (explicit function) ของ $u_e(k)$ และ $\theta_e(k)$ สามารถหาได้จากฟังก์ชันการกระจายที่จุดสมดุลของทฤษฎีจลน์ตามลำดับ

อย่างไรก็ดี Daganzo [22] ได้ตั้งข้อสังเกตว่าผลจากแบบจำลองอนุพันธ์อันดับสูงนั้นมีความแม่นยำดีกว่าแบบจำลองอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพียงเล็กน้อยแต่ก็ต้องใช้การคำนวณที่ยุ่งยากขึ้นด้วย นอกจากนั้นยังชี้ให้เห็นว่าแบบจำลองอนุพันธ์อันดับสูงนำไปสู่การทำนายที่ผิดพลาดได้เนื่องจากค่าความเร็วที่คำนวณจากแบบจำลองอนุพันธ์อันดับสูงมีโอกาสติดลบได้ ซึ่งในระบบเครือข่ายจราจรโดยทั่วไปจะไม่มีทางที่รถจะวิ่งถอยหลังได้ และแบบจำลองอนุพันธ์อันดับสูงนั้นจะนำอิทธิพลจากยานพาหนะข้างหลังยานพาหนะที่กำลังพิจารณาคำนวณค่าพารามิเตอร์ด้วย ซึ่งในความเป็นจริงนั้นผู้ขับขี่จะไม่ค่อยได้รับผลจากยานพาหนะที่อยู่ข้างหลังเท่ากับยานพาหนะที่อยู่ข้างหน้า ซึ่งในลำดับต่อมา Aw และ Rascle [23] ได้อธิบายว่าปรากฏการณ์ความเร็วติดลบนั้นเกิดจากสมมติฐานที่ผิดพลาดของแรงกดจราจร และ Günther [24] ได้นำเสนอกระบวนการใหม่ของแบบจำลองที่ทำให้มั่นใจได้ว่าแบบจำลอง PW สามารถทำนายและอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้ถูกต้องทั้งหมด

2.2.3 การขยายแบบจำลอง LWR ให้มีผู้ขับขี่แบบวิวิธพันธ์

G. C. K. Wong, S. C. Wong [25] ได้เสนอว่าจากผลการเก็บข้อมูลบนทางหลวงจริงได้เกิดปรากฏการณ์หลายอย่างที่แบบจำลอง LWR นั้นไม่สามารถอธิบายหรือทำนายผลได้ดังรูปที่ 2.1

กำหนดให้มียานพาหนะที่แตกต่างกัน M ประเภทที่มีความเร็วที่ต้องการขับขี่ต่างกันบนถนนเส้นเดียวกัน นั่นหมายความว่าจากความหนาแน่นทั้งหมดจะประกอบด้วยยานพาหนะที่มีความเร็วต่าง ๆ กัน และคาดคะเนได้ว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความเร็วจะลดลงเมื่อความหนาแน่นเพิ่มขึ้น ให้ $q_m(x,t), k_m(x,t)$, และ $u_m(t)$ คืออัตราการไหล, ความหนาแน่นและความเร็วของยานพาหนะประเภท



รูปที่ 2.1 ปรากฏการณ์ของเครือข่ายจราจร (a) ปรากฏการณ์ค่าความจุ 2 ค่า (b) ปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิสแบบวงวน 2 อัน (c) ปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิสแบบวงวนเดี่ยว (d) การกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อน

m ที่ตำแหน่ง x ณ เวลา t ความหนาแน่นรวมทั้งหมดที่ตำแหน่ง x ณ เวลา t จะหาค่าได้ดังนี้

$$k(x,t) = \sum_{m=1}^{M} k_m(x,t) \tag{2.5}$$

อัตราการไหล, ความหนาแน่นและความเร็วของแต่ละประเภทจะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$q_m(x,t) = u_m(t) \cdot k_m(x,t),\ \forall m = 1,2,...,M \tag{2.6}$$

จากกฎแห่งการอนุรักษ์จำนวนยานพาหนะแต่ละประเภทค่าของ $k_m(x,t)$ และ $q_m(x,t)$ จะต้องสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่องดังนี้

$$\frac{\partial k_m(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q_m(x,t)}{\partial x} = 0,\ \forall m = 1,2,...,M \tag{2.7}$$

สมมุติว่าความเร็วของยานพาหนะแต่ละประเภทขึ้นอยู่กับทั้งจำนวนยานพาหนะประเภทเดียวกันและยานพาหนะประเภทอื่นทุกประเภทที่ใช้ถนนเส้นเดียวกัน โดยมีรูปทั่วไปของความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความหนาแน่นเป็น

$$u_m(x,t) = U_m(k_1, k_2, ..., k_M),\ \forall m = 1,2,...,M \tag{2.8}$$

สำหรับกรณีที่มีความเท่าเทียมกันทุกทิศทาง (isotropic case) ความสัมพันธ์ในสมการ (2.8) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเฉพาะอย่างง่ายได้ดังนี้

$$u_m(x,t) = U_m(k),\ \forall m = 1,2,...,M \tag{2.9}$$

โดย $k =$ ความหนาแน่นรวมทั้งหมด

จากสมการ (2.5)-(2.9) นำมารวมกันจะได้สมการใหม่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial k_m(x,t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{M} c_{mn}(x,t)\frac{\partial k_n(x,t)}{\partial x} = 0, \forall m = 1, 2, ..., M \tag{2.10}$$

โดยที่

$$c_{mn} = U_m \delta_{mn} + k_m \frac{\partial U_m}{\partial k_n}, \forall m, n = 1, 2, ..., M \tag{2.11}$$

คือความเร็วคลื่นจลน์ (kinetic wave speed) ของยานพาหนะประเภท m ที่ตอบสนองต่อยานพาหนะประเภท n และ $\delta_{mn} = 1$ เมื่อ $m = n$ และ $\delta_{mn} = 0$ เมื่อ $m = n$ โดยจะสังเกตได้ว่าสมการที่ (2.10) สามารถลดรูปเป็นแบบจำลอง LWR ได้เมื่อ $M = 1$ (ยานพาหนะมีเพียงประเภทเดียว)

แม้ว่าการแก้ปัญหานี้จะดูง่ายแต่จากการทดลองแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองมหภาคนี้สามารถอธิบายปรากฏการณ์ซับซ้อนต่าง ๆ ที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ในรูปที่ 2.1 [25] เช่น ความไม่ต่อเนื่องของความสัมพันธ์พื้นฐานของความหนาแน่นและอัตราการไหล, ปรากฏการณ์ 2 ความจุ, การกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนและฮิสเทอรีซิสทั้งแบบวงวนเดี่ยวและคู่ได้ แต่ไม่ได้กล่าวถึงปรากฏการณ์อื่นๆนอกเหนือจากนี้ เช่น การเดินผิดเส้นทาง (ความเร็วติดลบ)

กระบวนการหาผลเฉลยจากสมการ (2.5)-(2.11) และเงื่อนไขค่าขอบเขตต่าง ๆ นั้นสามารถใช้วิธีผลต่างจำกัดของก้าวเวลา (time-step finite difference method) โดยที่ถนนจะถูกแบ่งเป็น I ปม (node) และแบ่งช่วงเวลาที่วิเคราะห์ออกเป็น J ช่องเวลา (time slot) และให้ยานพาหนะมีการเคลื่อนที่ในทิศทางจากปมที่ 1 ไปปมปลายที่ I สำหรับปมที่ไม่ได้อยู่ทีบริเวณขอบเขตของระบบที่กำลังพิจารณาแบบแผนของ Lax−Friedrichs จะใช้ในการวิยุตสมการได้ดังนี้

$$k_m(i, j+1) = \frac{1}{2}\left(k_m(i+1, j) + k_m(i-1, j)\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(q_m(i+1, j) - q_m(i-1, j)\right) \tag{2.12}$$

ซึ่งทำให้สามารถหาค่าความหนาแน่นเนื่องมาจากยานพาหนะประเภท m ที่ปม I ที่ช่องเวลา $j+1$ จากค่าพารามิเตอร์ที่ทราบแล้วในช่องเวลา j ได้โดยที่ Δx และ Δy คือขนาดที่ใช้ในการแบ่งมิติของเวลาและปริภูมิ (space) ตามลำดับ

สำหรับปมที่ขอบเขตของระบบที่พิจารณานั้น ค่าความหนาแน่นที่จุดเริ่มต้นจะได้จากการวัดค่าโดยตรง ส่วนจุดสิ้นสุดของถนนที่กำลังพิจารณาจะใช้กระบวนการ backward-space ซึ่งจะได้ดังสมการ

$$k_m(I, j+1) = k_m(I, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(q_m\left(I, j\right) - q_m\left(I-1, j\right)\right) \tag{2.13}$$

เมื่อทราบค่าขอบเขตเงื่อนไขเริ่มต้นแล้ว ค่าความหนาแน่นของยานพาหนะแต่ละประเภทก็สามารถหาค่าได้โดยง่ายจากการคำนวณหาค่าในช่องเวลาที่ผ่านมาจากสมการ (2.12)-(2.13) กระบวนการหาผลเฉลยสรุปได้ดังนี้

1. แบ่งถนนออกเป็นความยาวที่เท่า ๆ กัน (Δx) และเลือกค่าช่องเวลาที่เหมาะสม (Δt)

2. กำหนดให้ $j = 1$ (หรือ $t = 0$) และคำนวณค่าความหนาแน่นของแต่ละประเภทยานพาหนะที่แต่ละปม $k_m(i, j), i = 1, 2, ..., I,$ จากค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ได้รับมา

3. คำนวณค่าความหนาแน่นของแต่ละประเภทยานพาหนะที่ขอบถนนที่พิจารณา เช่น $k_m(1, j)$ จากค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ได้รับมา

4. คำนวณค่าความหนาแน่นของยานพาหนะแต่ละประเภทในช่วงเวลาถัดมา $k_m(i, j + 1), i = 2, ..., I$

5. ถ้า $j = J$ สิ้นสุดการคำนวณ ถ้าไม่ใช่ให้ $j = j + 1, t = t + \Delta t$ แล้ววนกลับไปข้อ 3.

ต่อมา Zuojin Zhu, Gang-len Chang, และ Tongqiang Wu [26] ได้ใช้กระบวนการลดทอนความผันแปรทั้งหมด (total-variation-diminishing method) ซึ่งมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีผลต่างจำกัดของก้าวเวลาในการหาผลเฉลยของสมการที่ (2.10)-(2.11) แทน เพื่อให้แบบจำลองการไหลของยานพาหนะแบบคิดแยกประเภทยานพาหนะสามารถจำลองปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจริงบนถนนที่ไม่จำกัดความเร็ว เช่น การแกว่งของอัตราการไหลและความหนาแน่นตามความยาวถนนที่ไม่จำกัดความเร็วที่เวลาต่าง ๆ โดยไม่มีการรบกวนจากอัตราการไหลบนทางลาดและมีสภาพการจราจรตั้งแต่เริ่มแรกเป็นการกระจายแบบสม่ำเสมอได้

บทที่ 3

แบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ (Cell Transmission Model, CTM)

แบบจำลองนี้ใช้หลักการของไหลด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งพัฒนามาจากแบบจำลอง LWR ทำให้ง่ายต่อความเข้าใจมีความซับซ้อนน้อยจึงสามารถนำไปใช้และปรับปรุงได้ง่าย CTM นั้นมองปริมาณยานพาหนะเป็นแบบจำลองมหภาคโดยจะแบ่งถนนออกเป็นส่วนย่อย ๆ เรียกว่าเซลล์มาเชื่อมต่อเข้าด้วยกันและพิจารณาการเปลี่ยนสถานะของระบบในแต่ละช่องเวลา (time slot) โดยสิ่งที่พิจารณาหลักมีดังนี้

1. การแบ่งเซลล์ของถนนที่มีทางแยกจะต้องพิจารณาตรงจุดที่มีการเชื่อมทางแยกเป็นจุดแบ่งเซลล์เสมอเพื่อความสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง

2. ความยาวของเซลล์ที่แบ่งต้องสั้นพอโดยที่ยานพาหนะแต่ละคันโดยเฉลี่ยแล้วจะต้องไม่สามารถเคลื่อนที่กระโดดข้ามเซลล์ได้นั่นคือหากมีเซลล์ 3 เซลล์ซึ่งอยู่ติดกันและมีการเคลื่อนที่จากเซลล์ที่ 1 ไปเซลล์ที่ 3 แล้วยานพาหนะทุกคันต้องไม่สามารถเคลื่อนที่จากเซลล์ที่ 1 ไปยังเซลล์ที่ 3 ได้ใน 1 ช่องเวลาแต่จะต้องมีการผ่านเซลล์ที่ 2 ด้วยเสมอ เพราะฉะนั้นความยาวของเซลล์จึงถูกกำหนดด้วยความเร็วเฉลี่ยเมื่อไม่เกิดการติดขัดของยานพาหนะที่เคลื่อนที่ในเซลล์นั้นคูณด้วยเวลา 1 ช่องเวลาของแบบจำลอง

3. การกำหนดขนาด 1 ช่องเวลาของแบบจำลองจะพิจารณาจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของสภาพจราจร เช่นถ้าบริเวณแยกที่พิจารณามีการเปลี่ยนสัญญาณไฟที่ค่อนข้างเร็วก็ควรให้ 1 ช่องเวลาของแบบจำลองมีค่าน้อยเพื่อที่แบบจำลองสามารถเปลี่ยนแปลงตามสภาพของเครือข่ายจราจรได้ทัน

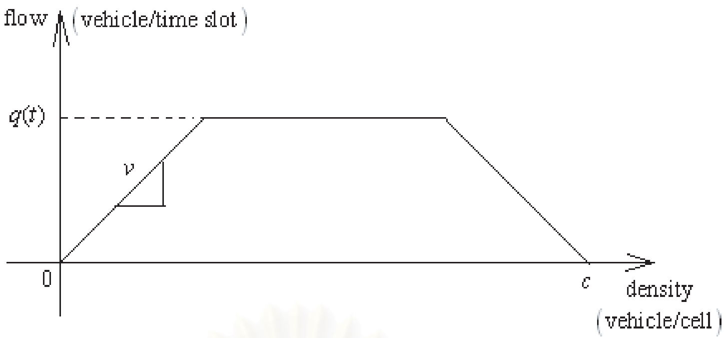
เมื่อหาความยาวที่เหมาะสมสำหรับเซลล์แต่ละเซลล์และแบ่งเซลล์ได้เรียบร้อยแล้วก็จะนำรูปแบบของเซลล์ที่ได้มาคำนวณต่อไป โดยทั้งนี้การแบ่งเซลล์ไม่มีความจำเป็นต้องมีความยาวของเซลล์เท่ากันทุกเซลล์

3.1 ความสัมพันธ์พื้นฐานระหว่างความหนาแน่นและอัตราการไหล

ก่อนอื่นจะกล่าวถึงความสัมพันธ์พื้นฐาน (fundamental diagram) ระหว่างอัตราการไหล (flow), ความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัด (free flow speed) (v) และ ความหนาแน่นของยานพาหนะบนถนน (density) ซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับสมการคำนวณค่าอัตราการไหล ดังรูปที่ 3.1 [1]

จากรูปที่ 3.1 ในช่วงที่ความหนาแน่นของยานพาหนะบนถนนมีค่าน้อย ยานพาหนะจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัด (v) ทำให้ความสัมพันธ์ของอัตราการไหลและความหนาแน่นของยานพาหนะบนถนนเป็นแบบเชิงเส้นที่มีความชันเป็น v จากนั้นเมื่ออัตราการไหลเพิ่มเป็น $q(t)$ จะเริ่มเข้าสู่ช่วงอัตราการไหลคงที่ที่อัตราการไหลสูงสุด จากนั้นถ้าปริมาณยานพาหนะหนาแน่นขึ้นอีกจะเข้าสู่ช่วงสุดท้ายที่ยานพาหนะจะเริ่มเกิดการติดขัด ค่าอัตราการไหลจะลดลง จนเมื่อความหนาแน่นของยานพาหนะมีค่าเท่ากับความจุของถนน (c) อัตราการไหลจะมีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือเกิดการติดขัดจนเคลื่อนที่ไม่ได้เลย

เนื่องจากความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดเป็นความเร็วในช่วงที่ผู้ขับขี่หรือประเภทของยานพาหนะเป็นผู้กำหนดเอง ซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะของยานพาหนะแต่ละประเภท ในที่นี้จึงนำมาเป็นค่าที่บ่งบอกถึงความสามารถในเคลื่อนที่ของยานพาหนะแต่ละประเภทได้



รูปที่ 3.1 ความสัมพันธ์พื้นฐานของแบบจำลองจราจร

3.2 การคำนวณการไหลของยานพาหนะ

การคำนวณการไหลของยานพาหนะระหว่างเซลล์ต่าง ๆ นั้นจะต้องพิจารณาลักษณะการเชื่อมต่อของเซลล์เป็นสำคัญ โดยสามารถแบ่งลักษณะการเชื่อมต่อของเซลล์ได้เป็น 3 ลักษณะดังนี้

- การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ (cascading scenario)
- การเชื่อมต่อแบบรวม (merging scenario)
- การเชื่อมต่อแบบแยก (diverging scenario)

ในการคำนวณการไหลของยานพาหนะระหว่างเซลล์ในแต่ละรูปแบบนั้นจะมีการคำนวณพื้นฐานจากค่า 2 ค่าด้วยกันคือความสามารถในการส่ง (sending capability) ของเซลล์ที่อยู่ต้นทางหรืออุปสงค์และความสามารถในการรับ (receiving capability) หรืออุปทานของเซลล์ที่อยู่ปลายทาง

ความสามารถในการส่งคือความต้องการของเซลล์ต้นทางที่จะเคลื่อนยานพาหนะไปยังเซลล์ปลายทาง ส่วนความสามารถในการรับหมายถึงความสามารถของเซลล์ปลายที่จะรองรับยานพาหนะที่เคลื่อนมาได้ ตัวแปรทั้ง 2 ตัวนี้จะเป็นตัวแปรพื้นฐานในการคำนวณปริมาณการไหลของยานพาหนะในทุกรูปแบบ ซึ่งการคำนวณหาค่าของตัวแปรทั้ง 2 ตัวนั้นมีดังนี้

3.2.1 ความสามารถในการส่ง

ปัจจัยที่กำหนดจำนวนยานพาหนะที่เซลล์สามารถส่งได้มี 2 ส่วนคือปริมาณยานพาหนะทั้งหมดที่มีอยู่ในเซลล์นั้นและปริมาณยานพาหนะสูงสุดที่สามารถเคลื่อนที่ออกจากเซลล์ได้ใน 1 ช่องเวลาหรือสามารถเขียนเป็นสูตรคำนวณได้ดังนี้

$$s_{Bg}(t) = \min\{n_{Bg}(t), q_{Bg}(t)\} \tag{3.1}$$

$s_{Bg}(t) =$ ความสามารถในการส่งของเซลล์ต้นทาง Bg (upstream cell) ภายในช่องเวลา t

$n_{Bg}(t) =$ จำนวนยานพาหนะของเซลล์ต้นทาง Bg ในช่วงเริ่มต้นของช่องเวลา t

$q_{Bg}(t) =$ จำนวนยานพาหนะสูงสุดที่สามารถเคลื่อนที่จากเซลล์ต้นทาง Bg ไปยังเซลล์ปลายทางได้ภายในช่องเวลา t

ในทางปฏิบัติ ค่าของ $q_{Bg}(t)$ จะขึ้นอยู่กับปัจจัยต่าง ๆ เช่น จำนวนช่องทางจราจรของเซลล์, ทิศทางการเคลื่อนที่ (ตรง, ซ้าย, ขวา หรือกลับรถ) รวมถึงอาจใช้แทนการอนุญาตให้เคลื่อนที่โดยสัญญาณไฟจราจรได้

3.2.2 ความสามารถในการรับ

ในการหาความสามารถในการรับยานพาหนะของเซลล์ จะพิจารณาได้จากขนาดของพื้นที่ว่างในเซลล์นั้นและจำนวนยานพาหนะสูงสุดที่เซลล์สามารถรับได้ใน 1 ช่องเวลา หรือสามารถเขียนเป็นสูตรคำนวณได้ดังนี้

$$r_E(t) = \min\{q_E(t), \delta_E(c_E - n_E(t))\} \tag{3.2}$$

$r_E(t) =$ ความสามารถในการรับของเซลล์ปลายทาง E ภายในช่องเวลา t

$c_E =$ ความจุสูงสุดของเซลล์ปลายทาง E

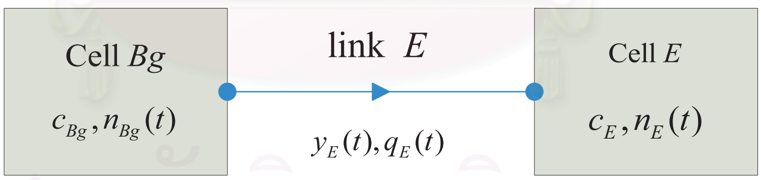
$\delta_E =$ ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ปลายทาง E

$n_E(t) =$ จำนวนยานพาหนะของเซลล์ปลายทาง E ในช่วงเริ่มต้นของช่องเวลา t

$q_E(t) =$ จำนวนยานพาหนะสูงสุดที่สามารถเคลื่อนที่จากเซลล์ต้นทางไปยังเซลล์ปลายทาง E ได้ภายในช่องเวลา t

หลังจากที่ได้คำนวณค่าความสามารถในการรับและส่งของเซลล์ต่าง ๆ แล้ว ก็จะคำนวณจำนวนยานพาหนะที่ไหลระหว่างเซลล์โดยพิจารณาจากลักษณะการเชื่อมต่อระหว่างเซลล์นั้น ๆ ซึ่งวิธีการคำนวณจะแตกต่างกันออกไปดังนี้

3.2.3 การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ



รูปที่ 3.2 การเชื่อมต่อของเซลล์แบบตามลำดับ

การเชื่อมต่อแบบนี้คือการเชื่อมต่อระหว่างเซลล์ 2 เซลล์ซึ่งอยู่ติดกันและมีการเชื่อมต่อระหว่างเซลล์เพียง 1 การเชื่อมต่อ โดยที่เซลล์ซึ่งเป็นเซลล์ปลายทางนั้นมีการรับยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางเพียง 1 เซลล์และเซลล์ต้นทางก็มีเซลล์ปลายทางเพียง 1 เซลล์เช่นกัน ดังนั้นการเชื่อมต่อแบบนี้คือการเชื่อมต่อของเซลล์ซึ่งแทนทางตรงของถนนเส้นหนึ่งซึ่งไม่มีการแบ่งช่องทางจราจรออกไปตามเส้นทางการวิ่งของยานพาหนะนั่นเอง

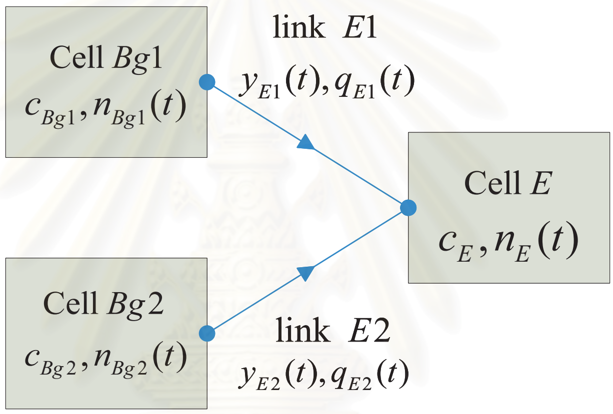
จำนวน ยานพาหนะ ที่ สามารถ เคลื่อนที่ ได้ สำหรับ การ เชื่อมต่อ แบบ ตาม ลำดับ จะ คำนวณ จาก ความสามารถในการส่งและความสามารถในการรับของเซลล์ทั้ง 2 เซลล์แล้วจึงหาค่าน้อยที่สุดระหว่างค่า 2 ค่านี้แล้วจึงนำค่าที่น้อยที่สุดมาเป็นค่าจำนวนยานพาหนะที่สามารถเคลื่อนที่ได้ซึ่งสามารถเขียนเป็นสูตรการคำนวณดังนี้

$$y_E(t) = \min\{s_{Bg}(t), r_E(t)\} \tag{3.3}$$

โดยที่ $y_E(t)$ = จำนวนยานพาหนะที่เคลื่อนที่จากเซลล์ต้นทาง Bg เข้าสู่เซลล์ปลายทาง E ภายในช่องเวลา t

จากสมการ (3.3) จะเห็นได้ว่าอัตราการไหลได้มาจากการหาค่าน้อยที่สุดของจำนวนยานพาหนะในเซลล์ต้นทาง, จำนวนยานพาหนะสูงสุดที่สามารถเคลื่อนที่จากเซลล์ต้นทางไปยังเซลล์ปลายทาง และจำนวนที่ว่างในเซลล์ปลายทางซึ่งตรงกับความสัมพันธ์พื้นฐานของความหนาแน่นและอัตราการไหลในรูปที่ 3.1

3.2.4 การเชื่อมต่อแบบรวม



รูปที่ 3.3 การเชื่อมต่อของเซลล์แบบรวม

การเชื่อมต่อแบบนี้คือการเชื่อมต่อระหว่างเซลล์ 3 เซลล์โดยมีเซลล์ต้นทาง 2 เซลล์และเซลล์ปลายทาง 1 เซลล์ (เนื่องจากในสภาพความเป็นจริงนั้นการรวมกันจะเกิดจากเซลล์เพียง 2 เซลล์เท่านั้น ดังนั้นในกรณีของการรวมกันจะมีเซลล์ต้นทางเพียงแค่ 2 เซลล์เท่านั้น) จากลักษณะการเชื่อมต่อดังกล่าวจะต้องพิจารณาถึงพื้นที่ว่างของเซลล์ปลายทางและความสัมพันธ์ระหว่างการแย่งที่ว่างกันของยานพาหนะด้วย การคำนวณอัตราการไหลจะต้องทราบอัตราส่วนการรวมตัว p_1, p_2 ระหว่างเซลล์ทั้ง 2 ก่อนจากนั้นจึงพิจารณาถึงพื้นที่ว่างในเซลล์ปลายทางซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี

1. เซลล์ปลายทางมีพื้นที่ว่างน้อยกว่าจำนวนยานพาหนะที่จะส่งเข้ามา

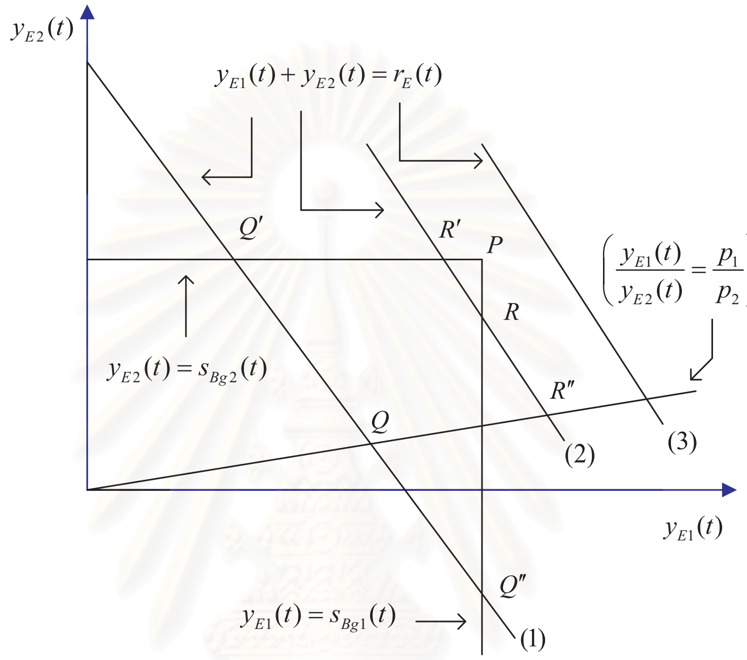
   ในกรณีนี้ยานพาหนะทั้งหมดที่จะส่งมาจากเซลล์ต้นทางนั้นจะไม่สามารถเข้าไปยังเซลล์ปลายทางได้ทั้งหมดจึงทำให้การคำนวณนั้นมีความซับซ้อนมากกว่ากรณีที่สอง

   ในการพิจารณาจำนวนยานพาหนะที่เคลื่อนที่เข้าสู่เซลล์ปลายทางนั้นจะคำนึงถึงสมการซึ่งควบคุมการเคลื่อนที่ของยานพาหนะ 2 สมการด้วยกันคือ

$$y_{E1}(t) + y_{E2}(t) = r_E(t) \tag{3.4}$$

$$\frac{y_{E1}(t)}{y_{E2}(t)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{3.5}$$

ซึ่งเมื่อนำสมการ (3.4)-(3.5) มาเขียนลงบนกราฟประกอบกับเส้นจำกัดขอบเขตของปริมาณการเคลื่อนที่ของยานพาหนะ ($y_{E1} = s_{Bg1}, y_{E2} = s_{Bg2}$) จะได้ตามรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ความสัมพันธ์ของจำนวนยานพาหนะที่สามารถเคลื่อนที่ออกจากเซลล์ต้นทางทั้ง 2 เซลล์ได้

จากรูปที่ 3.4 จะพิจารณาสมการ $y_{E1}(t) + y_{E2}(t) = r_E(t)$ เป็น 2 กรณี

(a) เมื่อ $r_E(t)$ มีขนาดน้อยจนไม่มียานพาหนะจากเซลล์ต้นทางใดสามารถผ่านไปได้ทั้งหมด

(b) เมื่อ $r_E(t)$ มีขนาดเพียงพอให้ยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางหนึ่งสามารถเข้ามาได้ทั้งหมดเพียงเซลล์ต้นทางเดียว

สำหรับกรณี (a) จำนวนยานพาหนะที่ไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทางจะเพิ่มขึ้นตามความสัมพันธ์ระหว่างเซลล์ต้นทางทั้ง 2 $\left(\frac{y_{E1}(t)}{y_{E2}(t)} = \frac{p_1}{p_2}\right)$ จนมาตัดกับสมการซึ่งบอกถึงพื้นที่ว่างในเซลล์ปลายทาง $y_{E1}(t) + y_{E2}(t) = r_E(t)$ ดังเส้นตรง (1) ในรูปที่ 3.4 นั่นหมายถึงว่าจุดที่จะบ่งบอกขนาดของอัตราการไหลจากเซลล์ต้นทางทั้งสองคือจุด Q นั่นเอง สำหรับกรณี (b) จำนวนยานพาหนะที่ไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทางจะถูกกำหนดโดยเส้นตรง (2) ในรูปที่ 3.4 และสมการควบคุมอัตราการไหล ($y_{E1}(t) = s_{Bg1}(t)$) ทำให้จุดที่จะบ่งบอกถึงปริมาณยานพาหนะที่ไหลจากเซลล์ต้นทางทั้งสองคือจุด R

จากกรณีทั้ง 2 นั้นจะพบว่าจุดที่ต้องการนั้นเป็นจุดกลาง ระหว่างจุด 3 จุดคือ $\{R', R, R''\}$ และ $\{Q', Q, Q''\}$ ดังนั้น เราสามารถเขียนสรุปเป็นสมการได้ว่า

$$y_{E1}(t) = mid\{s_{Bg1}(t), r_E(t) - s_{Bg2}(t), p_1 r_E(t)\} \tag{3.6}$$

$$y_{E2}(t) = mid\{s_{Bg2}(t), r_E(t) - s_{Bg1}(t), p_2 r_E(t)\} \tag{3.7}$$

โดยที่ $r_E(t) < s_{Bg1}(t) + s_{Bg2}(t)$

2. เซลล์ปลายทางมีพื้นที่ว่างมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนยานพาหนะที่จะส่งเข้ามา

   สำหรับกรณีนี้จะพบว่าเมื่อวาดกราฟ $(y_{E1}(t)+y_{E2}(t) = r_E(t))$ แล้วจะได้เส้นตรง (3) ในรูปที่ 3.4 นั่นคือเซลล์ต้นทางทั้งสองสามารถส่งยานพาหนะให้กับเซลล์ปลายทางได้ทั้งหมดโดยสามารถสรุปเป็นสูตรการคำนวณได้ดังนี้

$$y_{E1}(t) = s_{Bg1}(t) \tag{3.8}$$

$$y_{E2}(t) = s_{Bg2}(t) \tag{3.9}$$

โดยที่ $r_E(t) \geq s_{Bg1}(t) + s_{Bg2}(t)$

เมื่อนำสมการที่ (3.4)-(3.9) มาเขียนใหม่จะได้สมการทั่วไปของการเชื่อมต่อแบบรวมดังสมการที่ (3.10)-(3.11)

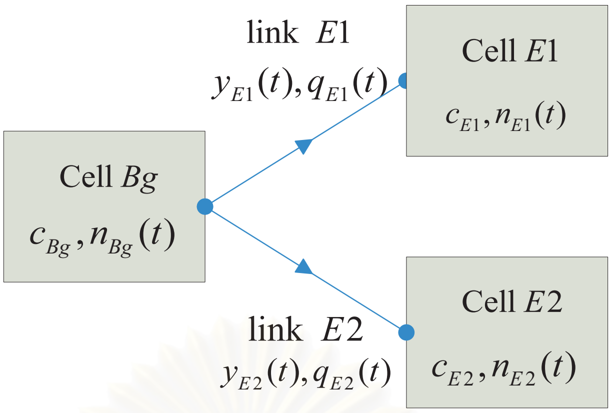
$$y_{E1}(t) = \min\{s_{Bg1}(t), \max\{r_E(t) - s_{Bg2}(t), p_1 r_E(t)\}\} \tag{3.10}$$

$$y_{E2}(t) = \min\{s_{Bg2}(t), \max\{r_E(t) - s_{Bg1}(t), p_2 r_E(t)\}\} \tag{3.11}$$

3.2.5 การเชื่อมต่อแบบแยก

การเชื่อมต่อแบบนี้เป็นการเชื่อมต่อของเซลล์ 3 เซลล์ ประกอบด้วยเซลล์ต้นทาง 1 เซลล์และที่เหลือเป็นเซลล์ปลายทาง 2 เซลล์ต่อกับเซลล์ต้นทาง ในสภาพการจราจรจริงนั้นรูปแบบการต่อแบบนี้ก็คือทางแยกนั่นเอง ในการคำนวณนั้นจะต้องพิจารณาอัตราส่วนของการแบ่งจำนวนยานพาหนะไปตามเส้นทางต่าง ๆ เพิ่มขึ้นด้วย เนื่องจากพิจารณาคุณสมบัติ first-in first-out เมื่อเซลล์ปลายทางเซลล์ใดไม่สามารถรับยานพาหนะเพิ่มได้ ยานพาหนะที่จากเซลล์ต้นทางที่ต้องการไปยังเซลล์ปลายทางนั้นจะขวางไม่ให้ยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางเดียวกันที่ต้องการจะไปยังเซลล์ปลายทางเซลล์อื่นไปได้ซึ่งเรียกว่า head-line blocking จึงทำให้อัตราการไหลในทั้ง 2 ช่องทางจราจรสิ้นสุดลงเมื่อเซลล์ปลายทางเซลล์ใดเซลล์หนึ่งไม่สามารถรับยานพาหนะเพิ่มได้อีก เพราะฉะนั้นสมการในการคำนวณสำหรับการเชื่อมต่อแบบนี้คือ

$$y_{E1}(t) = \min\left\{\beta_{E1} s_{Bg}(t), r_{E1}(t), \frac{\beta_{E1}}{\beta_{E2}} r_{E2}(t)\right\} \tag{3.12}$$



รูปที่ 3.5 การเชื่อมต่อของเซลล์แบบแยก

$$y_{E2}(t) = \frac{\beta_{E2}}{\beta_{E1}} y_{E1}(t) \tag{3.13}$$

β_{E1} = อัตราส่วนในการแบ่งยานพาหนะจากเซลล์ต้นทาง Bg ไปยังเซลล์ปลายทาง $E1$
β_{E2} = อัตราส่วนในการแบ่งยานพาหนะจากเซลล์ต้นทาง Bg ไปยังเซลล์ปลายทาง $E2$

3.3 กฎการอนุรักษ์การไหลของยานพาหนะ

กฎการอนุรักษ์การไหล (flow conservation law) เป็นสมการที่ใช้คำนวณความหนาแน่นของแต่ละเซลล์ เมื่อได้ทำการคำนวณค่าอัตราการไหลและทราบค่าความหนาแน่นเมื่อเวลาก่อนหน้า

ให้ i แทนดัชนีของเซลล์ และ k แทนดัชนีของข่ายเชื่อมโยงขาเข้า (input link) และข่ายเชื่อมโยงขาออก (output link) ของเซลล์ i

$$n_i(t+1) = n_i(t) + \sum_{k \in \{\text{input link of } i\}} y_k(t) - \sum_{k \in \{\text{output link of } i\}} y_k(t) \tag{3.14}$$

3.4 การจำลองสัญญาณไฟจราจร

ที่สัญญาณไฟจราจรสามารถจำลองได้โดยปรับค่า $q_k(t)$ ของข่ายเชื่อมโยง k ซึ่งมีสัญญาณไฟกำกับอยู่ดังนี้

$$q_k(t) = \begin{cases} q_{\max}, \text{Light Signal} = \text{green} \\ 0, \text{ Light Signal} = \text{red} \end{cases} \tag{3.15}$$

3.5 การคำนวณค่าตัวแปรของแบบจำลอง

ในการคำนวณจำนวนยานพาหนะที่เคลื่อนที่ระหว่างเซลล์นั้นจะมีค่าตัวแปรบางค่าซึ่งเป็นค่าเฉพาะของเซลล์และไม่สามารถหาได้จากการคำนวณโดยตรง แต่ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลดิบของสภาพการ

จราจรของบริเวณนั้น โดยตัวแปรที่จะต้องพิจารณามีดังนี้

- ความจุของเซลล์ที่ i $(c_i(t))$ หาได้จากความยาวเซลล์, ความยาวยานพาหนะที่ใช้เป็นประเภทอ้างอิง, และจำนวนช่องทางจราจร โดยเท่ากับความยาวของเซลล์คูณด้วยจำนวนช่องทางจราจรหารด้วยความยาวของยานพาหนะ

- จำนวนยานพาหนะสูงสุดที่เคลื่อนที่ผ่านข่ายเชื่อมโยง k ได้ในช่องเวลา t $(q_k(t))$ สามารถหาได้จากการเก็บข้อมูลอัตราการไหลที่ผ่านเข้าสู่ทางข่ายเชื่อมโยงแล้วทำการหาค่าสูงสุด หรือจะหาจากความสัมพันธ์พื้นฐานของความหนาแน่นและอัตราการไหล โดยจะเท่ากับค่าอัตราการไหลในกราฟช่วงที่อัตราการไหลมีค่าคงที่ก่อนที่จะเริ่มลดลงจนเป็น 0

- ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ i (δ_i) สามารถหาได้จากความสัมพันธ์พื้นฐานของความหนาแน่นและอัตราการไหล โดยพิจารณาจากอัตราส่วนความชันของเส้นกำกับของแผนภาพที่กระจัดกระจายของความหนาแน่นและอัตราการไหลในช่วงขาขึ้น (free-flow traffic) เทียบกับช่วงขาลง (congested traffic) ตามลำดับ ในกรณีที่ไม่มีความสัมพันธ์พื้นฐานของความหนาแน่นและอัตราการไหลที่สมบูรณ์ อาจใช้วิธีการหาค่าเหมาะที่สุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของความหนาแน่นของทุกเซลล์มีค่าน้อยที่สุดเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของทุกเซลล์แทนได้

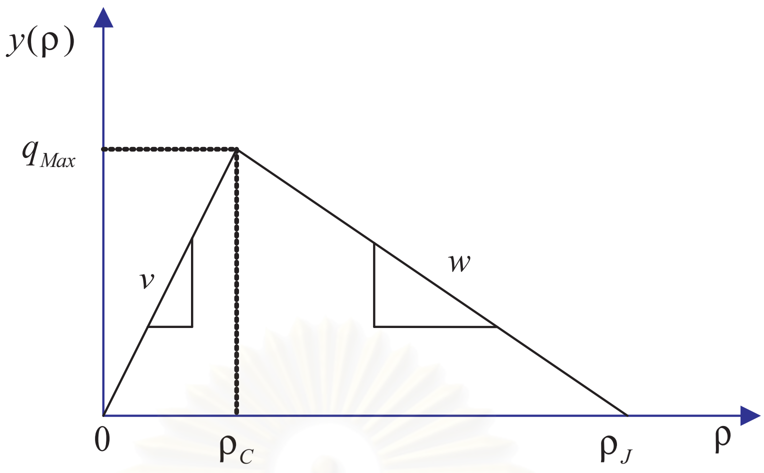
3.6 แบบจำลองการสลับภาวะ

แบบจำลองการสลับภาวะ (switching mode model) เป็นแบบจำลองหนึ่งซึ่งพัฒนามาจาก CTM โดยแบ่งภาวะ (mode) การทำงานของระบบสมการอนุพันธ์เชิงเส้นแตกต่างกันตามฟังชั่นของอัตราการไหลและความหนาแน่นที่แตกต่างกัน ซึ่งปกติแล้ว CTM จะไม่เป็นเชิงเส้นเนื่องจากประกอบด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นของอัตราการไหลและความหนาแน่นหลายฟังก์ชันที่แตกต่างกันประกอบกันเป็นแบบจำลอง CTM โดยขึ้นกับเงื่อนไขสภาพจราจรว่าจะใช้ฟังก์ชันใดในการทำงานของแบบจำลอง แต่ถ้าทราบภาวะการทำงานจะทำให้เลือกฟังก์ชันเชิงเส้นเพียงฟังก์ชันเดียวของภาวะนั้นมาใช้ได้ทันทีทำให้แบบจำลองเป็นเชิงเส้นโดยตัวมันเอง ซึ่งระบบเชิงเส้นนั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการสถานะ (state equation) และสามารถหาคุณสมบัติการควบคุมได้ (controllability) และคุณสมบัติการสังเกตได้ (observability) ของแบบจำลองได้และแบบจำลองนี้ได้ทดสอบเทียบกับข้อมูลจริงแล้วปรากฏว่ามีความผิดพลาดจากข้อมูลจริงอยู่ประมาณ 13% [5]

ใน SMM จะบอกความหนาแน่นในแต่ละเซลล์ i ตามความยาว $\rho_i(t)$ (density per length) แทนความหนาแน่น (density) ซึ่งจะมีสมการอนุรักษ์จำนวนยานพาหนะดังนี้

$$\rho_i(t+1) = \rho_i(t) + \frac{t_s}{l_i}\left(\sum_{k\in\{\text{input link of } i\}} y_k(t) - \sum_{k\in\{\text{output link of } i\}} y_k(t)\right) \tag{3.16}$$

เมื่อ $t_s =$ ระยะเวลาของช่องเวลา (time slot), $l_i =$ ความยาวของเซลล์ i



รูปที่ 3.6 ความสัมพันธ์อย่างง่ายที่ใช้ใน SMM

ในส่วนที่แตกต่างจาก CTM เดิมอีกอย่างนั่นคือความสัมพันธ์พื้นฐานระหว่างความหนาแน่นกับอัตราการไหลจะประมาณด้วยฟังก์ชันเส้นตรง 2 ฟังก์ชันแทนที่จะเป็น 3 ฟังก์ชันดังรูปที่ 3.6

v = ความเร็วเฉลี่ยของยานพาหนะที่ขับขี่ในช่วงไม่ติดขัด

w = ความเร็วเฉลี่ยที่หน้าคลื่นติดขัดแพร่จากเซลล์ปลายทางมายังเซลล์ต้นทางบนทางด่วนภายใต้สภาพที่การจราจรเกิดการติดขัดอย่างสมบูรณ์

ρ_C = ความหนาแน่นวิกฤต

q_{Max} = อัตราการไหลสูงสุดซึ่งตรงกับความหนาแน่นวิกฤต

ρ_J = ความหนาแน่นเมื่อเกิดการจราจรติดขัด (jam density)

เพื่อความง่ายในการสร้างแบบจำลองจึงกำหนดสมมุติฐานดังนี้

1. ความหนาแน่นและอัตราการไหลที่ต้นทางและปลายทางรวมทั้งอัตราการไหลที่ทางขึ้นทางด่วนและทางลงทางด่วนสามารถวัดได้

2. มีจุดเปลี่ยนสถานะหรือสภาพของการจราจร (free flow หรือ congest) เพียงจุดเดียวในถนนที่พิจารณา

ใน SMM สามารถแบ่งภาวะการทำงานได้เป็น 5 ภาวะ ดังนี้

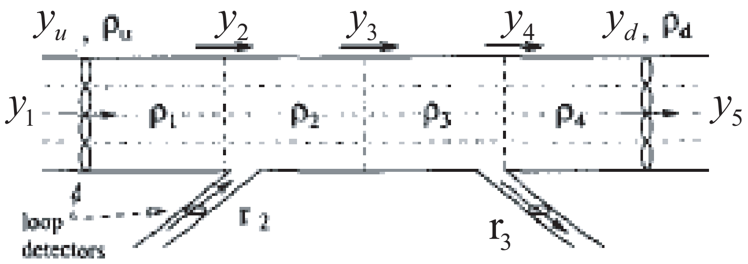
1. เบาบาง-เบาบาง เขียนแทนด้วย FF

2. ติดขัด-ติดขัด เขียนแทนด้วย CC

3. ติดขัด-เบาบาง เขียนแทนด้วย CF

4. เบาบาง-ติดขัด 1 เขียนแทนด้วย FC1

5. เบาบาง-ติดขัด 2 เขียนแทนด้วย FC2



รูปที่ 3.7 ส่วนหนึ่งของถนนทางด่วนที่ถูกแบ่งออกเป็น 4 เซลล์

สำหรับ FC1 และ FC2 นั้นต่างกันตรงที่หน้าคลื่นติดขัดกำลังเคลื่อนที่ไปข้างหลังหรือข้างหน้าตามลำดับ

รูปที่ 3.7 [5] แสดงการแบ่งถนนทางด่วนที่พิจารณาออกเป็น 4 เซลล์ โดยเซลล์ที่ 2 จะมียานพาหนะขึ้นจากถนนมาบนทางด่วนด้วยอัตราการไหล $r_2(t)$ และเซลล์ที่ 3 มียานพาหนะลงจากทางด่วนด้วยอัตราการไหลเท่ากับ $f_3(t)$ เมื่อนำสมการความต่อเนื่องมาเขียนให้อยู่ในรูปสมการสถานะจะได้ดังนี้

$$\vec{\rho}(t+1) = A_s\vec{\rho}(t) + B_s\vec{u}(t) + B_{J,s}\vec{\rho}_J + B_{Q,s}\vec{Q}_{Max} \tag{3.17}$$

$s =$ ภาวะของระบบ (1: FF, 2: CC, 3: CF, 4: FC1, 5: FC2)

$\vec{\rho}(t) = [\rho_1(t)...\rho_4(t)]^T =$ ตัวแปรสถานะ (state variable)

$\vec{u}(t) = [y_u(t)\, r_2(t)\, r_3(t)\, \rho_d(t)]^T =$ เวกเตอร์ตัวแปรนำเข้า (input vector)

$\vec{\rho}_J = [\rho_{J1}\, \rho_{J2}\, \rho_{J3}\, \rho_{J4}\, \rho_{J5}]^T =$ เวกเตอร์ความหนาแน่นติดขัด (vector of jam densities)

$\vec{Q}_{Max} = [q_{Max1}\, q_{Max2}\, q_{Max3}\, q_{Max4}]^T =$ เวกเตอร์อัตราการไหลสูงสุด (vector of maximum flow rates)

ส่วน $A_s, B_s, B_{J,s},$ และ $B_{Q,s}$ เป็นเมทริกซ์สถานะซึ่งจะมีค่าขึ้นกับภาวะการทำงาน

ในภาวะ FF ($s = 1$) ทุกเซลล์จะอยู่ในสถานะ flee flow หมดและสามารถรับยานพาหนะจากเซลล์ก่อนหน้านั้นได้ทั้งหมด อัตราการไหลจะขึ้นกับจำนวนยานพาหนะในเซลล์ต้นทางเป็นหลัก เมทริกซ์สถานะจะมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 1-\frac{v_1t_s}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_1t_s}{l_2} & 1-\frac{v_2t_s}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_2t_s}{l_3} & 1-\frac{v_3t_s}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_3t_s}{l_4} & 1-\frac{v_4t_s}{l_4} \end{bmatrix} \\
B_1 &= \begin{bmatrix} t_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t_s}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t_s}{l_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_{J,1} &= 0_{4\times5}, B_{Q,1} = 0_{4\times4}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

สำหรับค่าพารามิเตอร์ในภาวะที่เหลือนั้นสามารถดูได้ใน [5]

ในแต่ละช่องเวลา SMM จะพิจารณาภาวะของระบบจากข้อมูลค่าขอบเขตที่ได้จากการวัดและสถานะของเซลล์ในแต่ละเซลล์ถ้า ρ_u และ ρ_d อยู่ในสถานะเบาบาง จะเลือกใช้ภาวะ FF ถ้าทั้ง ρ_u และ ρ_d อยู่ในสถานะติดขัด จะใช้ภาวะ CC ถ้า ρ_u และ ρ_d มีสถานะต่างกัน SMM จะมองไปที่ ρ_i เพื่อหาว่ามีสถานะเปลี่ยนแปลงอย่างไรบ้างเพื่อใช้ในการตัดสินใจว่าจะเป็นภาวะใด คุณสมบัติการสังเกตได้และคุณสมบัติการควบคุมได้สามารถสรุปได้ดังตารางข้างล่าง

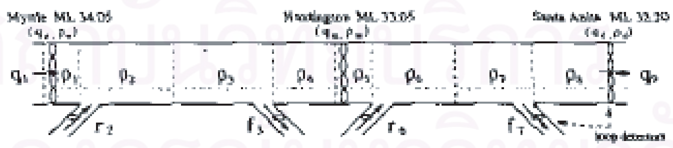
ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติการสังเกตได้ในแต่ละภาวะ

เซลล์ต้นทาง	เซลล์ปลายทาง	สามารถสังเกตได้จาก
เบาบาง	เบาบาง	การวัดค่าที่เซลล์ปลายทาง
ติดขัด	ติดขัด	การวัดค่าที่เซลล์ต้นทาง
ติดขัด	เบาบาง	การวัดค่าที่เซลล์ต้นทางและปลายทาง
เบาบาง	ติดขัด 1	ไม่สามารถสังเกตได้
เบาบาง	ติดขัด 2	ไม่สามารถสังเกตได้

ตารางที่ 3.2 คุณสมบัติการควบคุมได้ในแต่ละภาวะ

เซลล์ต้นทาง	เซลล์ปลายทาง	สามารถควบคุมได้จาก
เบาบาง	เบาบาง	ทางลาดบริเวณเซลล์ต้นทาง
ติดขัด	ติดขัด	ทางลาดบริเวณเซลล์ปลายทาง
ติดขัด	เบาบาง	ไม่สามารถควบคุมได้
เบาบาง	ติดขัด 1	ทางลาดบริเวณเซลล์ต้นทางและเซลล์ปลายทาง
เบาบาง	ติดขัด 2	ทางลาดบริเวณเซลล์ต้นทางและเซลล์ปลายทาง

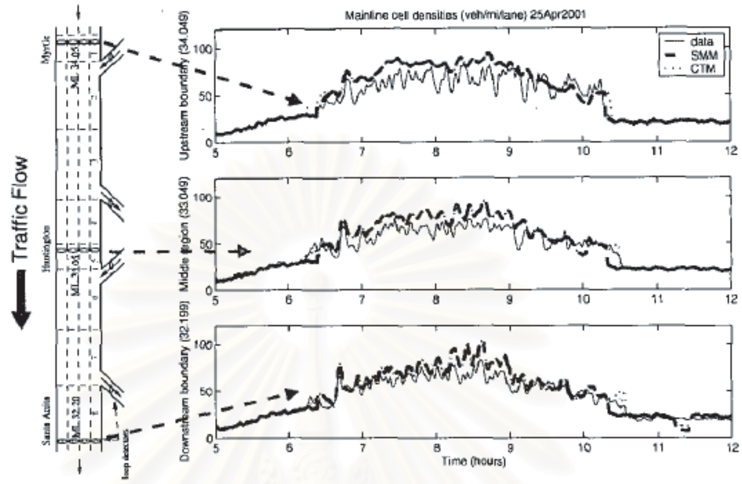
ผลการทดสอบจากส่วนของถนนทางด่วน I-210 West ซึ่งถนนส่วนที่ทดสอบมีความประมาณ 2 ไมล์ มี 4 ช่องทางการจราจร, 3 loop detector บนเส้นทางหลัก และ detector เพิ่มเติมตรงทางขึ้น-ลงทางด่วนดังรูปที่ 3.8 [5]



รูปที่ 3.8 ส่วนหนึ่งของถนนทางด่วน I-210W ที่ถูกแบ่งออกเป็นเซลล์ต่าง ๆ

ได้ผลการทำนายดังนี้

จาก SMM จะเห็นได้ว่าการประมาณภาวะของ CTM ออกเป็น 2 ภาวะ (เบาบาง, ติดขัด) แทนที่จะเป็น 3 ภาวะ (เบาบาง, อิ่มตัว, ติดขัด) ยังทำให้ผลการจำลองมีความแม่นยำในระดับที่ยอมรับได้ แต่ลดความซับซ้อนของแบบจำลองลงไปได้มาก จากนั้นจึงได้เขียนสมการให้อยู่ในรูปของสมการสถานะซึ่งอยู่ในรูปตัวแปรเวกเตอร์และเมทริกซ์ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ได้ในหลายแนวทาง จึงเป็นแนวคิดการพัฒนาสมการให้อยู่ในรูปตัวแปรเวกเตอร์และเมทริกซ์ในวิทยานิพนธ์นี้



รูปที่ 3.9 ผลเปรียบเทียบระหว่างการประมาณค่าและการวัดจริงจากส่วนหนึ่งของทางด่วน I-210W ในวันที่ 25 April 2001

ตารางที่ 3.3 ค่าเฉลี่ยความผิดพลาดของการประมาณ ρ_5 ในแต่ละวันเป็นเปอร์เซ็นต์

date	CTM	SMM
Mar. 15, 2001	0.117	0.129
Mar. 27, 2001	0.108	0.129
Apr. 02, 2001	0.109	0.125
Apr. 10, 2001	0.165	0.111
Apr. 25, 2001	0.126	0.142
mean	0.125	0.127
std. dev.	0.023	0.011

บทที่ 4

แบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ที่มีการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์

4.1 แนวทางที่เสนอในวิทยานิพนธ์

จากที่ได้กล่าวไปในข้างต้นแล้วว่าต้องการที่จะพัฒนาให้ CTM สามารถคำนวณได้ละเอียดขึ้นโดยพิจารณาถึงผลกระทบของประเภท (class) ของยานพาหนะที่แตกต่างกันเพื่อลดความผิดพลาดจากการจำลองด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้น้อยลงและสามารถจำลองปรากฏการณ์ที่แบบจำลองที่ไม่คิดแยกประเภทยานพาหนะไม่สามารถจำลองได้ โดยจะเริ่มจากสมมุติฐานดังนี้

พิจารณาเครือข่ายถนนซึ่งถูกแบ่งออกเป็นเซลล์ย่อย โดยมีลำดับเซลล์ที่ 1 เป็นต้นทาง และเซลล์ที่ 2,3,... เป็นเซลล์ที่อยู่ปลายทางในลำดับถัดกันไป และพิจารณาแบบจำลองในเวลาเต็มหน่วยคือแกนเวลา (t) ถูกแบ่งเป็นช่องเวลา (time slot) ในที่นี้จะพิจารณาชนิดของทราฟฟิกตามความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดเป็นหลัก โดยสมมุติว่า

1. ปฏิสัมพันธ์ระหว่างยานพาหนะในประเภทที่ต่างกันจะมีความคล้ายคลึงกันดังเช่นของไหลต่างชนิดกันที่อยู่ปะปนกันแต่ไม่ทำปฏิกิริยาเคมีต่อกัน นั่นคือสามารถใช้สมการทั่วไปเพียงชุดเดียวก็สามารถอธิบายการไหลร่วมกันของยานพาหนะทุกประเภทได้

2. จากหลักการความทัดเทียมกัน (principle of equivalence) และทฤษฎีสัมพันธภาพพิเศษ (special relativity theory) ระบุว่ากฎเกณฑ์ทางวิทยาศาสตร์สำหรับผู้สังเกตการณ์ที่เคลื่อนที่อย่างอิสระทุกคนจะดำเนินไปเหมือนกันไม่ว่าผู้สังเกตการณ์แต่ละรายจะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเท่าใด นั่นหมายความว่าไม่จำเป็นต้องมีสมการชุดใหม่เพื่ออธิบายและทำนายคุณสมบัติเฉพาะของยานพาหนะแต่ละประเภท

3. ความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของทราฟฟิกชนิดที่เคลื่อนเร็วที่สุดมีค่าไม่เกิน 2 เท่าของความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของทราฟฟิกชนิดที่เคลื่อนช้าที่สุด เช่น รถเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 120 กม/ชม. จะสามารถจำลองร่วมกับรถบรรทุกที่มีความเร็ว 60 กม/ชม. โดยใช้แบบจำลองนี้ได้ นอกจากนี้กำหนดให้เวลา 1 ช่องเวลาเป็นเวลาที่พาหนะชนิดที่เคลื่อนที่เร็วที่สุดต้องใช้ในการเคลื่อนที่จากเซลล์ปัจจุบันไปยังเซลล์ถัดไปที่สภาพการจราจรไม่ติดขัด ดังนั้นสำหรับยานพาหนะชนิดที่เคลื่อนที่ช้าจะใช้เวลามากกว่าแต่ไม่เกิน 2 ช่องเวลาในการเคลื่อนที่จากเซลล์ปัจจุบันไปยังเซลล์ถัดไปที่มีสภาพการจราจรไม่ติดขัด

4. เมื่อมีการแบ่งแยกประเภทยานพาหนะ จะมียานพาหนะที่เคลื่อนที่ช้า และไม่สามารถเคลื่อนที่ผ่านเซลล์ได้ภายใน 1 ช่องเวลาถึงแม้ว่าการจราจรจะไม่ติดขัด ดังนั้นเพื่อให้สามารถทราบว่ายานพาหนะนั้นได้เข้าสู่เซลล์เมื่อช่องเวลาใด จึงต้องกำหนดให้ยานพาหนะในแต่ละเซลล์มี 2 ประเภทคือ ยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์ (Head-of-Cell Vehicle) และ ยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ (End-of-Cell Vehicle) โดยมีนิยามดังนี้

- ยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์คือยานพาหนะที่ตกค้างในเซลล์เมื่อช่องเวลาที่แล้ว จะถือว่ายานพาหนะจำพวกนี้อยู่ที่ปลายเซลล์และมีความพร้อมที่จะไปได้ทั้งหมดในช่องเวลานี้ถ้าเซลล์ถัดไปมีที่ว่างพอสามารถรองรับทราฟฟิกได้
- ยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์คือยานพาหนะที่พึ่งเข้ามาจากเซลล์อื่นเมื่อช่องเวลาที่แล้ว จะมองว่ามันกระจายอยู่ในเซลล์แบบสม่ำเสมอ (Uniform) ทำให้มีเพียงบางส่วนที่สามารถไปได้ในช่องเวลานี้ โดยขึ้นอยู่กับความเร็วของประเภทยานพาหนะที่กำลังพิจารณา และขึ้นกับว่าเซลล์ถัดไปมีที่ว่างเหลืออยู่มากเพียงใด

5. เวลาและอวกาศไม่ได้อยู่เป็นอิสระต่อกัน แต่อยู่ร่วมกันเป็นโดเมนของอวกาศและเวลาทำให้ที่ว่างสัมบูรณ์ (absolute capacity) และการครอบครองที่ว่างสัมบูรณ์ (absolute occupancy) ไม่สามารถใช้อธิบายในแบบจำลองที่มีการคิดแยกประเภทยานพาหนะและมีการวิยุตทั้งในโดเมนของเวลาและโดเมนของอวกาศได้ จึงต้องคิดจากที่ว่างสัมพัทธ์ (relative capacity) และการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ (relative occupancy) แทน

   สำหรับสมมุติฐานข้อที่ 5 นั้น อาจจะยากต่อการยอมรับและไม่สามารถมองเห็นได้โดยง่าย จะพิสูจน์ให้เห็นโดยย่อด้วยวิธีการเส้นขนานที่จะทำการยกตัวอย่างเปรียบเทียบตัวอย่างหนึ่งซึ่งใกล้เคียงขึ้นมาและจะพิสูจน์ตัวอย่างนั้นแทนดังนี้

   ตามทฤษฎีสัมพันธภาพพิเศษและทั่วไป (special and general relativity theory) แล้ว แสงจะมีความเร็วเท่ากันหมดไม่ว่าผู้สังเกตและแหล่งกำเนิดแสงจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสัมพัทธ์ต่อผู้สังเกตเท่าใดในทิศทางใดก็ตาม เนื่องจากความเร็วแสงคงที่แต่ผู้สังเกตกลับเห็นการเคลื่อนที่ของสิ่งต่าง ๆ ไม่เหมือนกันเมื่ออยู่ในกรอบอ้างอิงที่ไม่เหมือนกันจึงเป็นไปได้อย่างเดียวว่าทั้งสองจะต้องวัดระยะเวลาที่แสงเดินทางได้ไม่เท่ากันด้วย จึงเป็นต้นกำเนิดของการยืดหดของเวลาซึ่งกล่าวได้ว่าเวลาได้เคลื่อนที่ผ่านผู้สังเกตของแต่ละกรอบอ้างอิงไม่เท่ากันจึงสรุปได้ว่าเวลาและอวกาศอยู่ร่วมกันเป็นโดเมนของอวกาศและเวลาไม่ใช่โดเมนของอวกาศและโดเมนของเวลาที่เป็นอิสระต่อกัน กลับมาที่ทฤษฎี CTM ได้ทราบมาก่อนหน้านี้แล้วว่าการครอบครองที่ว่างของยานพาหนะขึ้นกับความยาวของยานพาหนะที่ครอบครองที่ว่างนั้นอยู่เท่านั้นและมองว่าการครอบครองที่ว่างของยานพาหนะและความยาวของยานพาหนะเป็นอิสระจากความเร็วของยานพาหนะ แต่ความจริงแล้วมันอยู่ร่วมกันเป็นโดเมนของอวกาศและความเร็ว ถ้ายานพาหนะที่นำหน้ายานพาหนะผู้สังเกตหยุดนิ่งหรือมีความเร็วเท่ากับศูนย์ ไม่ว่าจะมีที่ว่างข้างหน้ายานพาหนะที่หยุดนิ่งเพียงใดยานพาหนะผู้สังเกตก็ไม่สามารถไปต่อได้ ในขณะที่ยานพาหนะข้างหน้ายานพาหนะผู้สังเกตวิ่งเร็วกว่ายานพาหนะผู้สังเกต ยานพาหนะผู้สังเกตจะมีที่ว่างให้สอดแทรกเข้ามาได้เสมอแม้ว่าจะมีที่ว่างข้างหน้ายานพาหนะที่วิ่งเร็วนั้นน้อยมากหรือไม่มีก็ตาม ลองเปรียบเทียบทฤษฎีสัมพันธภาพและ CTM

   สัมพันธภาพ

$$C = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

   โดย $C =$ ความเร็วแสง มีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของผู้สังเกต

CTM

$$t_s = \frac{x_m(t + \Delta t) - x_m(t)}{v_m} \tag{4.2}$$

โดย t_s คือ ขนาดของช่องเวลา (time slot) และเป็นค่าคงที่, v_m คือความเร็วของยานพาหนะประเภท m

จากนั้นลองเปรียบเทียบความคล้ายคลึงกันของ 2 ปรากฏการณ์นี้จะพบว่าทฤษฎีสัมพันธภาพเกิดจากการที่ความเร็วของแสงคงที่ไม่ขึ้นกับผู้สังเกต ทำให้เกิดการยืดหดของเวลาและโดเมนอวกาศกับโดเมนเวลาไม่เป็นอิสระต่อกัน ทฤษฎี CTM ช่องเวลามีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับค่าใด ๆ ทำให้การครอบครองที่ว่างของยานพาหนะมีการยืดหดและขึ้นกับทั้งความยาวและความเร็วและความเร็วของยานพาหนะ หรือการครอบครองที่ว่างและความเร็วของยานพาหนะไม่ได้เป็นอิสระต่อกัน จึงทำให้การครอบครองที่ว่างของยานพาหนะแต่ละประเภทที่มีความเร็วต่างกันจะมีค่าไม่เท่ากันจึงสรุปได้ว่าที่ว่างสัมบูรณ์ไม่สามารถใช้อธิบายยานพาหนะที่มีความเร็วหรือความสามารถในการเคลื่อนที่ซึ่งไม่เท่ากันได้ แต่จะต้องอ้างอิงสัมพัทธ์จากความเร็วของยานพาหนะที่ครอบครองที่ว่างในขณะนั้นเทียบกับผู้ที่ต้องการจะครอบครองแทนที่หรือที่ว่างสัมพัทธ์แทน ข้อสรุปนี้อาจค้านกับสายตาและสามัญสำนึกของมนุษย์เนื่องจาก สิ่งที่มนุษย์สังเกตได้ดีนั้นคือการเคลื่อนที่และตำแหน่งของยานพาหนะและเข้าใจว่าการครอบครองที่ว่างคือสิ่งเดียวกับการเคลื่อนที่และตำแหน่งของยานพาหนะ จึงกลายเป็นสามัญสำนึกที่คลาดเคลื่อนจากความจริง ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนคือตัวตรวจหาแบบวงวน (loop detector) ซึ่งเป็นอุปกรณ์ฝังใต้ถนนสำหรับวัดการครอบครองที่ว่างของยานพาหนะโดยจะทำการบันทึกเวลาที่ยานพาหนะใช้ในการเคลื่อนที่ผ่านตัวตรวจหาแบบวงวนในการคำนวณค่าการครอบครองที่ว่างจะต้องทราบหรือประมาณทั้งความยาวของยานพาหนะและความเร็วของยานพาหนะจึงจะคำนวณค่าการครอบครองที่ว่างได้ จึงกล่าวได้ว่าการครอบครองที่ว่างขึ้นกับทั้งความยาวและความเร็วของยานพาหนะ

เนื่องจากมีการพิจารณาประเภทของยานพาหนะเพิ่มขึ้นมา ทำให้พารามิเตอร์มีเพิ่มขึ้นจากแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม จึงต้องทราบนิยามของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ก่อน

M = จำนวนประเภท (class) ของยานพาหนะทั้งหมด โดยกำหนดให้ยานพาหนะประเภทที่ M มีความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดสูงที่สุด

c_i = ความจุของเซลล์ i

δ_i = สัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ i

$n_{i,m}(t)$ = จำนวนยานพาหนะประเภท m ในเซลล์ i ณ ช่วงเริ่มต้นของช่องเวลา t

$q_i(t)$ = จำนวนยานพาหนะที่เคลื่อนที่เข้าสู่เซลล์ i ได้มากที่สุดใน 1 ช่องเวลา โดยกำหนดให้ขึ้นกับสภาพทางกายภาพ เช่น จำนวนช่องจราจรหรือสัญญาณไฟจราจร

v = ความเร็วเมื่อไม่ติดขัดของยานพาหนะประเภทที่เคลื่อนเร็วที่สุด ซึ่งกำหนดให้เป็นความเร็วอ้างอิง

v_m = ความเร็วเมื่อไม่ติดขัดของยานพาหนะประเภท m

$\tilde{v}_m = \frac{v_m}{v_M}$ = ความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของยานพาหนะที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalized free flow speed) ของยานพาหนะประเภท m โดยคิดเทียบกับยานพาหนะประเภท M

$\tilde{l}_m = \frac{l_m}{l_M}$ = ความยาวของยานพาหนะประเภท m ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว (normalized length) โดยคิดเทียบกับยานพาหนะประเภท M

$r_i(t)$ = ความสามารถในการรองรับการเคลื่อนที่ของยานพาหนะเข้ามายังเซลล์ i ระหว่างช่องเวลา t

$a_{i,m}(t)$ = จำนวนยานพาหนะประเภท m ที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ i ณ ช่วงเริ่มต้นของช่องเวลา t

$b_{i,m}(t)$ = จำนวนยานพาหนะประเภท m ที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์ i ณ ช่วงเริ่มต้นของช่องเวลา t

$y_{i,m}(t)$ = จำนวนยานพาหนะประเภท m ที่วิ่งเข้าสู่เซลล์ i ระหว่างช่องเวลา t

ในการสร้างแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ที่แยกประเภทยานพาหนะด้วยการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์ จะพิจารณาว่า $M, c_i, q_i(t), v, v_m, a_{i,m}(t=0)$ และ $b_{i,m}(t=0)$ เป็นตัวแปรต้นที่ไม่แปรตามเวลา นอกจากนี้ $y_{0,m}(t)$ และ $y_{I+1,m}(t)$ หรือจำนวนยานพาหนะจากภายนอกบริเวณขอบเขตที่เข้าหรือออกจากระบบที่พิจารณา เป็นค่าขอบเขต และ $y_{i,m}(t), n_{i,m}(t), t \in \{1, 2, ...\}, i \in \{1, 2, ...I\}$ (I = จำนวนเซลล์ในระบบที่พิจารณา) เป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดสถานะของระบบซึ่งสามารถคำนวณหาได้ดังนี้

$$n_{i,m}(t) = a_{i,m}(t) + b_{i,m}(t) \tag{4.3}$$

$$a_{i,m}(t) = n_{i,m}(t-1) - y_{i+1,m}(t-1) \tag{4.4}$$

$$b_{i,m}(t) = y_{i,m}(t-1) \tag{4.5}$$

สมการที่ (4.3)-(4.5) ได้มาโดยตรงจากนิยามของยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์และยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์

4.2 การคำนวณค่าอัตราการไหล

ก่อนจะคำนวณค่าอัตราการไหล จะกล่าวถึง ความสามารถในการส่ง, อัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ (relative occupancy rate), ความสามารถในการรับสัมพัทธ์, และความสามารถในการรับสัมพัทธ์หลังจากรับยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทางแล้ว จากนั้นจะแยกการพิจารณาค่าอัตราการไหลตามการเชื่อมต่อออกเป็น 3 กรณีคือ การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ, การเชื่อมต่อแบบรวม, และการเชื่อมต่อแบบแยก

4.2.1 ความสามารถในการส่ง

ใน แบบจำลอง ที่ นำเสนอ มี การ แยก ยานพาหนะ ออก เป็น ยานพาหนะ ที่อยู่ ตอน ต้น ของ เซลล์ และยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์ ความสามารถในการส่งจึงแยกออกเป็น 2 ประเภทดังนี้

$$s_{i,a}(t) = \sum_{m=1}^{M} \left[\tilde{l}_m a_{i,m}(t) \right] \tag{4.6}$$

$$s_{i,b}(t) = \sum_{m=1}^{M} \left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right] \tag{4.7}$$

$$s_i(t) = \min\left\{s_{i,a}(t) + s_{i,b}(t), q_{i+1}(t)\right\} \tag{4.8}$$

โดย

$s_{i,a}(t)$ = ความสามารถในการส่งของเซลล์ i ระหว่างช่องเวลา t เนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์

$s_{i,b}(t)$ = ความสามารถในการส่งของเซลล์ i ระหว่างช่องเวลา t เนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์

สังเกตได้ว่าความสามารถในการส่งของแบบจำลองที่นำเสนอจะไม่คิดเทียบกับอัตราการไหลสูงสุดเหมือนกับในแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม เนื่องมาจากยานพาหนะถูกแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ความสามารถในการส่งจึงถูกแบ่งออกเป็น 2 ประเภทด้วย ในขณะที่อัตราการไหลสูงสุดต้องเทียบกับความสามารถในการส่งทั้งหมดดังสมการ (4.8)

เนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์นั้นไม่สามารถไปยังเซลล์ถัดไปได้ทั้งหมดระหว่างช่องเวลา t ถึงแม้ว่าเซลล์ปลายทางจะมีความสามารถในการรับเพียงพอ ดังนั้นจำนวนยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์ที่สามารถไปยังเซลล์ถัดไปจะคิดเป็นอัตราส่วนกับความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของยานพาหนะที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานซึ่งสอดคล้องกับสมมุติฐานข้อ 4 ที่กล่าวว่ายานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์จะมีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอในเซลล์จึงทำให้คำนวณค่าความสามารถในการส่งเนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์ระหว่างช่องเวลาได้ดังสมการ (4.7)

4.2.2 อัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์

คือค่าการครอบครองที่ว่างของยานพาหนะแต่ละคันโดยคิดสัมพัทธ์กับประเภทของยานพาหนะอ้างอิง $(v = v_M)$ โดยเมื่อทำการหาความสามารถในการรับสัมพัทธ์ ยานพาหนะแต่ละประเภทจะมีการครอบครองที่ว่างไม่เท่ากันจึงต้องพิจารณาอัตราส่วนในการครอบครองที่ว่างเทียบกับยานพาหนะประเภทอ้างอิง ยานพาหนะที่ความสามารถในการเคลื่อนที่ช้าจะมีอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ (relative occupancy ratio) ที่สูง และเนื่องจากอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์จะคิดเทียบกับยานพาหนะประเภทอ้างอิงซึ่งมีความสามารถในการเคลื่อนที่มากที่สุด ค่าอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์จึงมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 เสมอ ค่าอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ของยานพาหนะประเภทอ้างอิง $(m = M)$ จะมีค่าเป็น 1 เสมอเนื่องจากเป็นการหาค่าอัตราส่วนเทียบกับยานพาหนะประเภทเดียวกัน ค่าอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์จะมีลักษณะคงที่ในช่วงสภาพการจราจรไม่ติดขัดและจะลดลงในช่วงติดขัดจนลู่เข้าสู่ 1

เพื่อความง่ายในการพิจารณาจะตั้งสมมุติฐานว่า

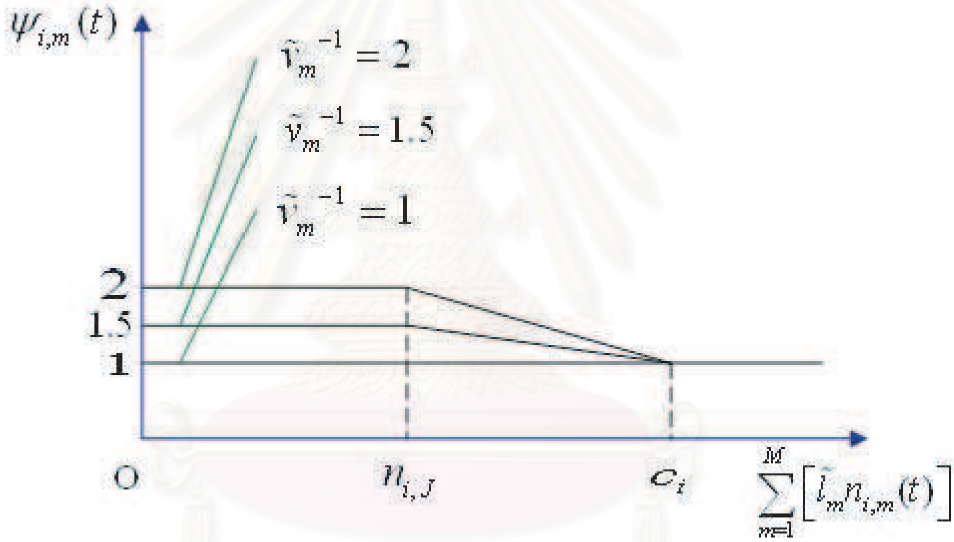
1. อัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ของยานพาหนะทุกประเภทจะขึ้นกับความหนาแน่นรวม $\sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m n_{i,m}(t)\right]$ ของเซลล์นั้นเท่านั้น ซึ่งเป็นสมมุติฐานกรณี Isotropic case [27]

2. ลักษณะการลดลงของอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ในช่วงสภาพการจราจรไม่ติดขัดจนถึงติดขัดมีลักษณะเป็นเชิงเส้น

จากสมมุติฐานข้างต้นทำให้ได้สมการคำนวณค่าอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ดังนี้

$$\psi_{i,m}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{v}_m} & , 0 \le \sum_{m=1}^{M} \left[\tilde{l}_m n_{i,m}(t)\right] \le n_{i,J} \\ \left(\frac{1-\frac{1}{\tilde{v}_m}}{c_i - n_{i,J}}\right)\left(\sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m n_{i,m}(t)\right]\right) + \left(\frac{\frac{c_i}{\tilde{v}_m} - n_{i,J}}{c_i - n_{i,J}}\right) & , n_{i,J} < \sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m n_{i,m}(t)\right] \le c_i \\ 1 & , c_i < \sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m n_{i,m}(t)\right] \end{cases} \tag{4.9}$$

ซึ่งมีกราฟดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 อัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์

จะเห็นได้ว่าค่าอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ของยานพาหนะทุกประเภทจะลู่เข้าสู่ 1 เมื่อความหนาแน่นรวมของเซลล์เข้าใกล้ค่าความจุ ซึ่งเป็นเพราะการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ของยานพาหนะประเภท m เทียบกับยานพาหนะที่มีความเร็วมากที่สุด ($v = v_M$) ในช่วงต้นสภาพการจราจรเบาบาง ยานพาหนะในเซลล์ทุกประเภทจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เป็นอิสระจากความหนาแน่นจึงมีความแตกต่างด้านความสามารถในการเคลื่อนที่มากที่สุดหรือเกิดการกระจายตัวออกตามความสามารถในการเคลื่อนที่ จากนั้นเมื่อสภาพการจราจรเริ่มติดขัด ยานพาหนะทุกประเภทในถนน จากที่กระจายตัวออกในช่วงแรกจะเริ่มค่อย ๆ จับตัวเป็นกลุ่มก้อนมากขึ้นเรื่อย ๆ ทำให้ความแตกต่างทางด้านความสามารถในการเคลื่อนที่ลดลงจนความหนาแน่นรวมเท่ากับค่าความจุ ยานพาหนะทุกประเภทจะหยุดนิ่งเหมือนกันหมด จึงมีค่าอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์เท่าเทียมกันเท่ากับ 1 ค่าอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ของยานพาหนะแต่ละประเภทไม่ได้สัมพันธ์กับค่าความสามารถในการเคลื่อนที่ในแต่ละความหนาแน่นโดยตรง แต่แสดงสัมพัทธ์เทียบกับยานพาหนะที่มีความเร็วมากที่สุด

สมการที่ (4.9) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$\psi_{i,m}(t) = \mathrm{mid}\left\{\frac{1}{\tilde{v}_m}, \left(\frac{1-\frac{1}{\tilde{v}_m}}{c_i - n_{i,J}}\right)\left(\sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m n_{i,m}(t)\right]\right) + \left(\frac{\frac{c_i}{\tilde{v}_m} - n_{i,J}}{c_i - n_{i,J}}\right), 1\right\} \quad (4.10)$$

4.2.3 ความสามารถในการรับสัมพัทธ์

อย่างที่กล่าวในข้างต้นแล้วว่าจะใช้การครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์และที่ว่างสัมพัทธ์ในการพิจารณา ดังนั้นจึงต้องพิจารณาความสามารถในการรับสัมพัทธ์แทนความสามารถในการรับสัมบูรณ์ของ CTM ดั้งเดิมดังนี้

$$\tilde{r}_{i+1}(t) = \mathrm{mid}\left\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}\left[c_{i+1} - \sum_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m \psi_{i+1,m}(t) n_{i+1,m}(t)\right)\right], 0\right\} \quad (4.11)$$

$\tilde{r}_{i+1}(t) =$ ความสามารถในการรับสัมพัทธ์ของเซลล์ $i+1$ ระหว่างช่องเวลา t

ตรงนี้จะสังเกตได้ว่าพจน์ $\tilde{l}_m \psi_{i+1,m}(t)$ มีความหมายใกล้เคียงกับหน่วยเทียบเท่ากับรถยนต์นั่งส่วนบุคคล (passenger car unit, pcu) แต่ต่างกันตรงที่ในแบบจำลองนี้ใช้ยานพาหนะที่มีความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดสูงสุดเป็นยานพาหนะอ้างอิง แต่ pcu ใช้รถยนต์นั่งส่วนบุคคลเป็นยานพาหนะอ้างอิง

สมการ (4.11) คล้ายกับความสามารถในการรับสัมบูรณ์ของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม แต่ต่างกันที่คำนวณการใช้ที่ว่างสัมพัทธ์ของแต่ละประเภทยานพาหนะไม่เท่ากัน โดยจะแปรผันตามค่า $\psi_{i,m}(t)$ และ $\tilde{l}_m$ ดังนั้นค่า $c_{i+1} - \sum_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m \psi_{i+1,m}(t) n_{i+1,m}(t)\right)$ จึงถูกเรียกว่า*ที่ว่างสัมพัทธ์*ของเซลล์ $i+1$ เมื่อคิดผลกระทบจากยานพาหนะที่มีความยาวและความเร็วแตกต่างกันแล้ว

เนื่องจากความสามารถในการรับสัมพัทธ์คิดเทียบเชิงความยาวที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว หน่วยของความสามารถในการรับสัมพัทธ์จึงเปลี่ยนจากแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมที่มองความสามารถในการรับสัมพัทธ์เป็นจำนวนคัน เป็นหน่วยเทียบเท่าความยาวของยานพาหนะอ้างอิงแทน ค่าอัตราการไหลสูงสุด $q_i(t)$ จึงมีค่าไม่เท่ากับในแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมที่หาได้โดยนับจำนวนรถมากที่สุดที่เข้าสู่เซลล์ i ใน 1 ช่องเวลาแต่จะมีค่าอยู่ระหว่าง $[q_i(t), \max(\tilde{l}_m) q_i(t)]$ แทน

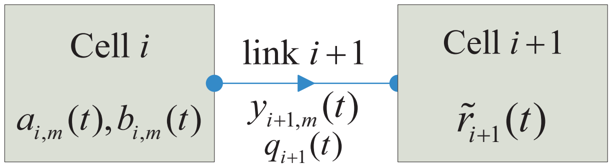
4.2.4 ความสามารถในการรับสัมพัทธ์หลังจากรับยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทางแล้ว

เนื่องจากการพิจารณายานพาหนะเป็น 2 ส่วนคือยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์และยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ และกำหนดให้ยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์มีสิทธิ์ที่จะเคลื่อนที่ไปเซลล์ถัดไปได้ก่อนยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ ดังนั้นจึงต้องพิจารณาความสามารถในการรับสัมพัทธ์ที่เหลือสำหรับยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ดังนี้

$$\tilde{r}^*_{i+1}(t) = \tilde{r}_{i+1}(t) - s_{i,a}(t) \quad (4.12)$$

$\tilde{r}^*_{i+1}(t) =$ ความสามารถในการรองรับยานพาหนะเชิงสัมพัทธ์ของเซลล์ปลายทาง $i+1$ ระหว่างช่องเวลา t หลังจากรับยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทาง i แล้ว

4.2.5 การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ



รูปที่ 4.2 การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ

การคำนวณค่า $y_{i,m}(t)$ มีลักษณะที่ไม่ต่อเนื่องโดยค่าของ $y_{i,m}(t)$ แต่ละช่วงถูกกำหนดด้วยเงื่อนไขของความสามารถในการรับสัมพัทธ์ของเซลล์ปลายทาง, จำนวนยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์และจำนวนยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ จึงต้องแยกการพิจารณา $y_{i,m}(t)$ ตามเงื่อนไขของค่าดังกล่าวข้างต้นเป็น 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่เซลล์ปลายทางมีความสามารถในการรับสัมพัทธ์น้อยกว่าจำนวนยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทาง

   กรณีนี้ยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์ในแต่ละประเภทจะแบ่งที่ว่างสัมพัทธ์ของเซลล์ปลายทางในการเข้าสู่เซลล์ปลายทางโดยขึ้นกับความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของยานพาหนะที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานและจำนวนยานพาหนะแต่ละประเภทที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทาง นอกจากนี้อัตราการไหลจากยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์ต้นทางจะมีค่าเป็น 0 เพราะที่ว่างสัมพัทธ์ของเซลล์ปลายทางถูกยานพาหนะที่อยู่หัวแถวของเซลล์ต้นทางครอบครองจนหมด กรณีนี้มีเงื่อนไขดังนี้

$$s_{i,a}(t) > \tilde{r}_{i+1}(t) \tag{4.13}$$

จะได้

$$\sum_{m=1}^{M} y_{i+1,m}(t) = \tilde{r}_{i+1}(t) \tag{4.14}$$

$$y_{i+1,m}(t) = \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right]} \tag{4.15}$$

ทฤษฎี CTM มีรากฐานจากทฤษฎีอุทกพลศาสตร์ (hydrodynamics) ถ้ามีของผสมของของไหลปริมาณของของไหลแต่ละประเภทที่จะไหลไปได้จะขึ้นสัดส่วนของของไหลในของผสมนั้นซึ่งสมมูลกับจำนวนยานพาหนะที่อยู่หัวเซลล์ของแต่ละประเภทและความหนืดซึ่งสมมูลกับส่วนผกผันของความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของยานพาหนะที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว อัตราการไหลของยานพาหนะแต่ละประเภทในสมการ (4.15) จึงได้จากการแบ่งที่ว่างสำหรับยานพาหนะแต่ละประเภทโดยพิจารณาจากจำนวนยานพาหนะที่อยู่หัวเซลล์ของแต่ละประเภทและความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของยานพาหนะที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว

2. กรณีที่เซลล์ปลายทางมีที่ว่างพอจะรับยานพาหนะที่อยู่หัวแถวจากเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมด กรณีนี้มีเงื่อนไขดังนี้

$$s_{i,a}(t) \leq \tilde{r}_{i+1}(t) \tag{4.16}$$

จากนั้นจะพิจารณาถึงยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์ต้นทาง โดยแยกเป็น 2 กรณีย่อยดังนี้

- ความ สามารถ ใน การ รับ สัมพัทธ์ ที่ เหลือ สามารถ รับ ยานพาหนะ ที่อยู่ ท้าย เซลล์ ต้นทาง ได้ทั้งหมด

  ถึงแม้ว่าจะมีความสามารถในการรับสัมพัทธ์หลังจากรับยานพาหนะที่อยู่ต้นเซลล์เหลือมากเพียงพอ ยานพาหนะที่อยู่ตอนท้ายของเซลล์ต้นทางก็ไม่สามารถไปยังเซลล์ปลายทางได้ทั้งหมด เนื่องจากยานพาหนะประเภทที่มีความเร็วเมื่อไม่ติดขัดที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานน้อยกว่า 1 จะไม่สามารถไปยังเซลล์ปลายทางได้ทั้งหมดใน 1 ช่องเวลาเพราะความยาวของเซลล์มากกว่าระยะทางเฉลี่ยที่ยานพาหนะนั้นจะเคลื่อนที่ได้ใน 1 ช่องเวลา เนื่องจากเราสมมุติว่ายานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวมีการกระจายในเซลล์อย่างสม่ำเสมอและระยะทางที่ยานพาหนะสามารถเคลื่อนได้เฉลี่ยใน 1 ช่องเวลาคิดเป็น $\tilde{v}_m$ เท่าของความยาวเซลล์ จำนวนยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ของเซลล์ต้นทางที่สามารถไปได้จึงมีจำนวนเท่ากับ $\tilde{v}_m$ เท่าของจำนวนยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ต้นทาง กรณีนี้มีเงื่อนไขดังนี้

$$s_{i,b}(t) \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \tag{4.17}$$

  จะได้

$$\sum_{m=1}^{M} y_{i+1,m}(t) = \sum_{m=1}^{M} a_{i,m}(t) + \sum_{m=1}^{M} [\tilde{v}_m b_{i,m}(t)] \tag{4.18}$$

$$y_{i+1,m}(t) = a_{i,m}(t) + \tilde{v}_m b_{i,m}(t) \tag{4.19}$$

- ที่ว่างสัมพัทธ์ที่เหลือไม่สามารถรับยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมด

  ในกรณีนี้ยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ต้นทางทุกประเภทจะไม่สามารถเข้าเซลล์ปลายทางได้ทั้งหมด อัตราส่วนในการเข้าเซลล์ปลายทางของแต่ละประเภทจะขึ้นกับจำนวนยานพาหนะที่อยู่ ท้าย เซลล์ และ ความ เร็ว ของ ประเภท นั้น โดย ความ เร็ว จะ เป็น ตัว บ่งชี้ ว่า ยานพาหนะประเภทนั้นมีส่วนที่มีความพร้อมที่จะไปยังเซลล์ปลายทางมากน้อยแค่ไหน กรณีนี้มีเงื่อนไขดังนี้

$$s_{i,b}(t) > \tilde{r}^*_{i+1}(t) \tag{4.20}$$

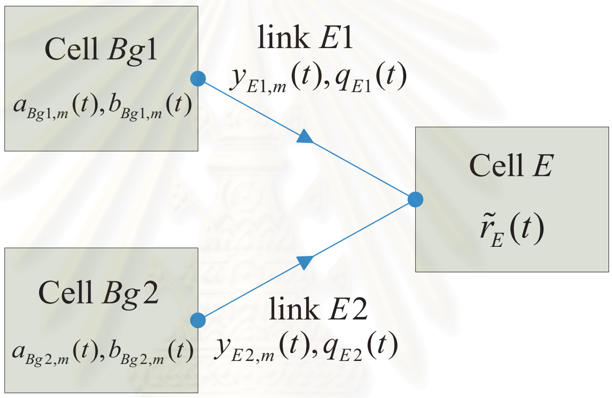
  จะได้

$$\sum_{m=1}^{M} y_{i+1,m}(t) = \sum_{m=1}^{M} a_{i,m}(t) + \tilde{r}_{i+1}^{*}(t) \tag{4.21}$$

$$y_{i+1,m}(t) = a_{i,m}(t) + \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}^{*}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right]} \tag{4.22}$$

4.2.6 การเชื่อมต่อแบบรวม

การคำนวณความสามารถในรับสัมพัทธ์ของเซลล์ปลายทางในสมการ (4.11) ในการเชื่อมต่อแบบรวมจะใช้ค่า $q_E(t) = q_{E1}(t) + q_{E2}(t)$



รูปที่ 4.3 การเชื่อมต่อแบบรวม

การคำนวณอัตราการไหลในการเชื่อมต่อแบบรวมสามารถแยกการคำนวณออกเป็นการเชื่อมต่อแบบตามลำดับ 2 ส่วนโดยพิจารณาได้ดังนี้

1. เซลล์ปลายทางสามารถรับยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นและปลายของเซลล์ต้นทางทั้ง 2 เซลล์ได้ทั้งหมดเขียนเป็นเงื่อนไขได้ดังสมการ

$$\tilde{r}_E(t) \geq \min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} + \min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} \tag{4.23}$$

ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่มีความซับซ้อน อัตราการไหลจะขึ้นกับจำนวนยานพาหนะที่พร้อมจะไปของเซลล์ต้นทางเท่านั้นจึงเปรียบเสมือนว่าความสามารถในการรับสัมพัทธ์สำหรับแต่ละเซลล์ต้นทางมีค่าเท่ากับความสามารถในการส่งของแต่ละเซลล์ต้นทาง ความสามารถในการรับสัมพัทธ์สำหรับยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางแต่ละเซลล์จึงสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\tilde{r}_{E1}(t) = \min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} \tag{4.24}$$

$$\tilde{r}_{E2}(t) = \min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} \tag{4.25}$$

2. เซลล์ปลายทางไม่สามารถรับยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นและปลายของเซลล์ต้นทางทั้ง 2 เซลล์ได้ทั้งหมดเขียนเป็นเงื่อนไขได้ดังสมการ

$$\tilde{r}_{E}(t) < \min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} + \min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} \tag{4.26}$$

ในกรณีนี้เซลล์ปลายทางไม่มีที่ว่างพอที่จะรองรับยานพาหนะได้ทั้งหมด การพิจารณาที่ว่างสัมพัทธ์ของเซลล์ปลายทางที่ถูกแบ่งไว้รองรับยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางแต่ละเซลล์จะต้องพิจารณาจากอัตราส่วนการรวมตัว p_i ด้วย จะแยกพิจารณาได้เป็นอีก 2 กรณีดังนี้

(a) เซลล์ปลายทางไม่สามารถรับยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมด ทั้ง 2 เซลล์ มีเงื่อนไขดังนี้

$$\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} \geq p_1\tilde{r}_{E}(t) \tag{4.27}$$

และ

$$\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} \geq p_2\tilde{r}_{E}(t) \tag{4.28}$$

จะได้

$$\tilde{r}_{Ei}(t) = p_i\tilde{r}_{E}(t),\ i = 1, 2 \tag{4.29}$$

(b) เซลล์ปลายทางสามารถรับยานพาหนะทั้งหมดจากเซลล์ต้นทางเพียงเซลล์เดียว มีเงื่อนไขแบ่งเป็น 2 ลักษณะดังนี้

- ยานพาหนะในเซลล์ต้นทางที่ 1 ที่มีความพร้อมจะไปสามารถไปยังเซลล์ปลายได้ทั้งหมด แต่เซลล์ต้นทางที่ 2 ไม่สามารถส่งยานพาหนะที่มีความพร้อมจะไปไปยังเซลล์ปลายทางได้ทั้งหมด มีเงื่อนไขดังนี้

$$\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} \leq p_1\tilde{r}_{E}(t) \tag{4.30}$$

และ

$$\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} > p_2\tilde{r}_{E}(t) \tag{4.31}$$

จะได้

$$\tilde{r}_{E1}(t) = \min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} \tag{4.32}$$

$$\tilde{r}_{E2}(t) = \tilde{r}_{E}(t) - \min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} \tag{4.33}$$

- ยานพาหนะในเซลล์ต้นทางที่ 1 ไม่สามารถส่งยานพาหนะที่มีความพร้อมจะไปไปยังเซลล์ปลายทางได้ทั้งหมดแต่เซลล์ต้นทางที่ 2 ที่มีความพร้อมจะไปสามารถไปยังเซลล์ปลายได้ทั้งหมด มีเงื่อนไขดังนี้

$$\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} > p_1\tilde{r}_{E}(t) \tag{4.34}$$

และ

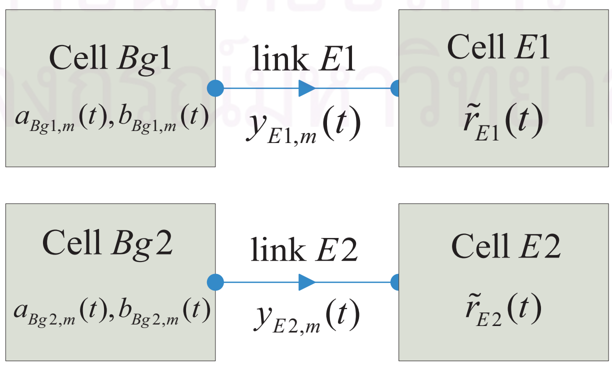
$$\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} \leq p_2\tilde{r}_{E}(t) \tag{4.35}$$

จะได้

$$\tilde{r}_{E1}(t) = \tilde{r}_{E}(t) - \min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} \tag{4.36}$$

$$\tilde{r}_{E2}(t) = \min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} \tag{4.37}$$

หลังจากการคำนวณค่าความสามารถในการรับสัมพัทธ์เซลล์ปลายทางสำหรับยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางแต่ละเซลล์จากสมการที่ (4.24)-(4.25), (4.29), (4.32)-(4.33), (4.36), (4.58) แล้ว เซลล์ปลายทางจะเสมือนถูกแบ่งเป็น 2 เซลล์ย่อยแยกจากกันโดยเชื่อมกับเซลล์ต้นทางแต่ละเซลล์ โดยความสามารถในการรับสัมพัทธ์จะถูกแบ่งไปในเซลล์ย่อยนั้น ๆ ดังรูปที่ 4.4 การคำนวณอัตราการไหลจากเซลล์ต้นทางทั้ง 2 เซลล์จะพิจารณาแยกจากกันได้เป็นการเชื่อมต่อแบบตามลำดับ 2 กรณีตาม (4.12)-(4.20) ได้ดังนี้



รูปที่ 4.4 การแบ่งเซลล์ปลายทางออกเป็นเซลล์ปลายทางย่อย 2 เซลล์

- ถ้า $s_{Bgi,a}(t) > \tilde{r}_{Ei}(t)$ จะได้

$$y_{Ei,m}(t) = \frac{\tilde{v}_m a_{Bgi,m}(t)\tilde{r}_{Ei}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{Bgi,m}(t)\right]} \tag{4.38}$$

สมการ (4.38) มี $\tilde{v}_m$ เนื่องมาจากที่ว่างสัมพัทธ์ในเซลล์ปลายทางไม่เพียงพอที่จะรองรับยานพาหนะที่อยู่หัวตอนต้นของเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมด ยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทางจึงต้องแบ่งที่ว่างโดยพิจารณาความสามารถในการแบ่งที่ว่างของยานพาหนะแต่ละประเภทจากจำนวนยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทางและความสามารถในการเคลื่อนที่ของยานพาหนะแต่ละประเภทซึ่งแปรผันโดยตรงกับ $\tilde{v}_m$ ความสามารถในการส่งในสมการ (4.6) เพียงแต่บอกว่าเซลล์ต้นทางมีความสามารถที่จะส่งยานพาหนะได้สูงสุดเท่าใด ซึ่งเป็นกรณีที่เซลล์ปลายทางมีที่ว่างสัมพัทธ์เพียงพอที่จะรองรับยานพาหนะที่อยู่ตอนต้นของเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมด จึงไม่มีพจน์ที่บ่งบอกความสามารถในการแบ่งที่ว่างดังพจน์ $\tilde{v}_m$

- ถ้า $s_{Bgi,a}(t) \le \tilde{r}_{Ei}(t)$

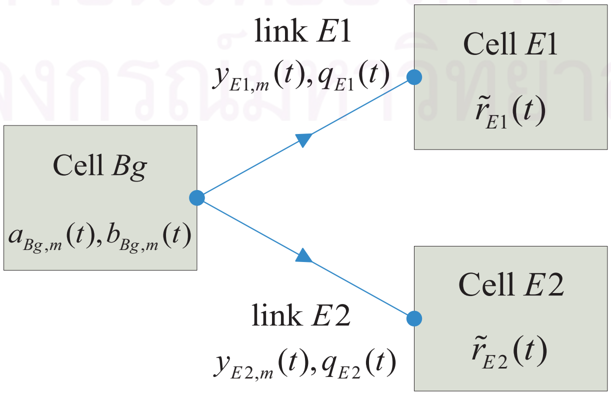
  – ถ้า $s_{Bgi,b}(t) \le \tilde{r}_{Ei}(t) - \sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{Bgi,m}(t)\right]$ จะได้

$$y_{Ei,m}(t) = a_{Bgi,m}(t) + \tilde{v}_m b_{Bgi,m}(t) \tag{4.39}$$

  – ถ้า $s_{Bgi,b}(t) > \tilde{r}_{Ei}(t) - \sum_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{Bgi,m}(t)\right]$ จะได้

$$y_{Ei,m}(t) = a_{Bgi,m}(t) + \frac{\tilde{v}_m b_{Bgi,m}(t)\left(\tilde{r}_{Ei}(t) - s_{Bgi,a}(t)\right)}{s_{Bgi,b}(t)} \tag{4.40}$$

4.2.7 การเชื่อมต่อแบบแยก



รูปที่ 4.5 การเชื่อมต่อแบบแยก

ข้อแตกต่างสำคัญระหว่างแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ที่มีการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์และ CTM ดั้งเดิมคืออัตราส่วนของการแบ่งปริมาณยานพาหนะไปตามช่องทางต่าง ๆ จะแยกพิจารณาตามประเภทของยานพาหนะ ในการเชื่อมต่อแบบแยกนั้นเซลล์ปลายทางที่มีโอกาสจะเต็มก่อนจะเป็นตัวกำหนดอัตราการไหลในทั้ง 2 ช่องทาง เพราะฉะนั้นจึงต้องหาเซลล์ปลายทาง $\hat{i}$ ที่จะเต็มก่อนจากการพิจารณาอุปสงค์และอุปทานในแต่ละช่องทางโดยเส้นทางที่มีอัตราส่วนของอุปทานต่ออุปสงค์น้อยที่สุดจะมีโอกาสเต็มเป็นอันดับแรกหากมีปริมาณยานพาหนะที่เซลล์ต้นทางมากพอ จาก

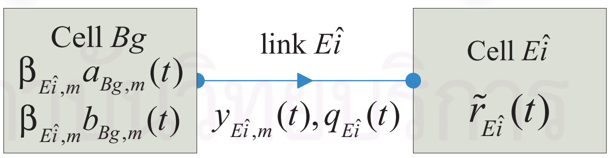
$$\hat{i} = \arg\min_{i} \left\{ \frac{\tilde{r}_{Ei}(t)}{\sum_{m=1}^{M} \left[\beta_{Ei,m} \tilde{l}_m \left(a_{Bg,m}(t) + \tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \right) \right]} \right\} \tag{4.41}$$

$\beta_{Ei,m}$ = อัตราส่วนของการแบ่งยานพาหนะประเภท m ไปยังเซลล์ปลายทาง Ei โดยที่ $\sum_i \beta_{Ei,m} = 1, \forall m$

โดยหาก $\min_{i} \left\{ \frac{\tilde{r}_{Ei}(t)}{\sum_{m=1}^{M} \left[\beta_{Ei,m} \tilde{l}_m \left(a_{Bg,m}(t) + \tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \right) \right]} \right\} < 1$ จะได้ว่า $\hat{i}$ เป็นเซลล์ปลายทางที่มีโอกาสเต็มก่อนเซลล์ปลายทางอื่น แต่หาก $\min_{i} \left\{ \frac{\tilde{r}_{Ei}(t)}{\sum_{m=1}^{M} \left[\beta_{Ei,m} \tilde{l}_m \left(a_{Bg,m}(t) + \tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \right) \right]} \right\} \geq 1$ จะได้ว่าเซลล์ปลายทางทุกเซลล์สามารถรับยานพาหนะจากเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมดทุกเซลล์

การคำนวณอัตราการไหลในการเชื่อมต่อแบบแยกสามารถลดรูปปัญหาเป็นการคำนวณในการเชื่อมต่อแบบตามลำดับได้โดยทำการคำนวณหาอัตราการไหลของเซลล์ปลายทางที่มีโอกาสจะเต็มก่อน อัตราการไหลในเซลล์ปลายทางที่เหลือจะหาได้จากอัตราส่วนของการแบ่งยานพาหนะดังรูปที่ 4.6

เพื่อลดความซ้ำซ้อนในการเขียนสมการเป็นกรณีย่อย ๆ ในที่นี้จะสมมุติว่า $E1$ เป็นเซลล์ปลายทางที่มีโอกาสจะเต็มก่อน ซึ่งกรณี $E2$ จะมีความคล้ายคลึงกันในการคำนวณเพียงแต่สลับดัชนีของช่องทางและเซลล์ปลายทาง การคำนวณค่าอัตราการไหลในช่องทาง $E1$ แบ่งได้เป็น 2 กรณี



รูปที่ 4.6 การเชื่อมต่อแบบแยกที่ลดรูปเป็นการเชื่อมต่อแบบตามลำดับแล้ว

1. เซลล์ปลายทาง $E1$ สามารถรับยานพาหนะที่อยู่หัวแถวของเซลล์ต้นทาง Bg ได้ทั้งหมด มีเงื่อนไขดังนี้

$$\sum_{m=1}^{M} \left(\beta_{E1,m} \tilde{l}_m a_{Bg,m}(t) \right) \leq \tilde{r}_{E1}(t) \tag{4.42}$$

ในกรณีนี้ยังแบ่งได้อีกเป็น 2 กรณีย่อยดังนี้

- เซลล์ปลายทาง $E1$ สามารถรับยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวจากเซลล์ต้นทาง Bg ได้ทั้งหมด กรณีย่อยนี้มีเงื่อนไขเพิ่มเติมดังนี้

$$\sum_{m=1}^{M}\left[\beta_{E1,m}\tilde{l}_m\left(a_{Bg,m}(t)+\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\right)\right]\leq \tilde{r}_{E1}(t) \tag{4.43}$$

ซึ่งจะคำนวณค่าอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $E1$ ได้ดังนี้

$$y_{E1,m}(t)=\beta_{E1,m}\tilde{l}_m\left(a_{Bg,m}(t)+\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\right) \tag{4.44}$$

$$y_{E1}(t)=\sum_{m=1}^{M}\left[\beta_{E1,m}\tilde{l}_m\left(a_{Bg,m}(t)+\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\right)\right] \tag{4.45}$$

- เซลล์ปลายทาง $E1$ ไม่สามารถรับยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวจากเซลล์ต้นทาง Bg ได้ทั้งหมด กรณีย่อยนี้มีเงื่อนไขเพิ่มเติมดังนี้

$$\sum_{m=1}^{M}\left[\beta_{E1,m}\tilde{l}_m\left(a_{Bg,m}(t)+\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\right)\right]> \tilde{r}_{E1}(t) \tag{4.46}$$

ซึ่งจะคำนวณค่าอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $E1$ ได้ดังนี้

$$y_{E1,m}(t)=\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t)+\frac{\tilde{v}_m\beta_{E1,m}b_{Bg,m}(t)\left(\tilde{r}_{E1}(t)-\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t)\right)\right)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m\tilde{l}_m\beta_{E1,m}b_{Bg,m}(t)\right)} \tag{4.47}$$

$$y_{E1}(t)=\tilde{r}_{E1}(t) \tag{4.48}$$

2. เซลล์ปลายทาง $E1$ ไม่สามารถรับยานพาหนะที่อยู่หัวแถวของเซลล์ต้นทาง Bg ได้ทั้งหมด มีเงื่อนไขดังนี้

$$\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)> \tilde{r}_{E1}(t) \tag{4.49}$$

จะคำนวณค่าอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $E1$ ได้ดังนี้

$$y_{E1,m}(t)=\frac{\tilde{v}_m\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m\tilde{l}_m\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t)\right)} \tag{4.50}$$

$$y_{E1}(t) = \tilde{r}_{E1}(t) \tag{4.51}$$

เนื่องมาจากที่ว่างสัมพัทธ์ในเซลล์ปลายทางไม่เพียงพอที่จะรองรับยานพาหนะที่อยู่หัวแถวจากเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมด ยานพาหนะที่อยู่หัวแถวจากเซลล์ต้นทางจึงต้องแบ่งที่ว่างโดยพิจารณาความสามารถในการแบ่งที่ว่างของยานพาหนะแต่ละประเภทจากจำนวนยานพาหนะที่อยู่หัวแถวในเซลล์ต้นทางและความสามารถในการเคลื่อนที่ของยานพาหนะแต่ละประเภทซึ่งแปรผันโดยตรงกับ $\tilde{v}_m$ ความสามารถในการส่งในสมการ (4.6) เพียงแต่บอกว่าเซลล์ต้นทางมีความสามารถที่จะส่งยานพาหนะได้สูงสุดเท่าใด ซึ่งเป็นกรณีที่เซลล์ปลายทางมีที่ว่างสัมพัทธ์เพียงพอที่จะรองรับยานพาหนะที่อยู่หัวแถวจากเซลล์ต้นทางได้ทั้งหมดจึงไม่มีพจน์ที่บ่งบอกความสามารถในการแบ่งที่ว่างดังพจน์ $\tilde{v}_m$

หลังจากที่ได้ค่าอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $E1$ จากสมการข้างต้นแล้ว ก็สามารถหาค่าอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $E2$ ได้จากอัตราส่วนของการแบ่งปริมาณยานพาหนะดังนี้

$$y_{E2,m}(t) = \frac{\beta_{E2,m}}{\beta_{E1,m}} y_{E1,m}(t) \tag{4.52}$$

$$y_{E2}(t) = \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\beta_{E2,m}}{\beta_{E1,m}} y_{E1,m}(t) \right) \tag{4.53}$$

4.3 แบบจำลองในกรณีเฉพาะเมื่อ $M = 1$

4.3.1 การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ

จากสมการ (4.13)-(4.22) ถ้าให้ $M = 1$ และ $\tilde{l}_m = \frac{l_m}{l_M} = 1$ จะได้สมการตามลำดับดังข้างล่าง

$$a_i(t) \geq \tilde{r}_{i+1}(t) \tag{4.54}$$

$$y_{i+1}(t) = \tilde{r}_{i+1}(t) \tag{4.55}$$

$$\tilde{v}b_i(t) \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \tag{4.56}$$

$$y_{i+1}(t) = a_i(t) + \tilde{v}b_i(t) \tag{4.57}$$

$$\tilde{v}b_i(t) \geq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \tag{4.58}$$

$$y_{i+1}(t) = a_i(t) + \tilde{r}^*_{i+1}(t) \tag{4.59}$$

เนื่องจาก $v_m = v$ จึงได้ $\tilde{v} = 1$ และ $\psi_{i,m}(t) = 1$ แทนค่า $\tilde{v} = 1$, $\tilde{r}_{i+1}(t) = \min\{q_{i+1}, \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\}$ และ $\tilde{r}^*_{i+1}(t) = \tilde{r}_{i+1}(t) - a_i(t) = \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} - a_i(t)$ ลงไปในสมการที่ (4.54)-(4.59) จะได้สมการดังข้างล่าง

$$a_i(t) \geq \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.60}$$

$$y_{i+1}(t) = \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.61}$$

$$a_i(t) + b_i(t) \leq \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.62}$$

$$y_{i+1}(t) = a_i(t) + b_i(t) \tag{4.63}$$

$$a_i(t) + b_i(t) \geq \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.64}$$

$$y_{i+1}(t) = \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.65}$$

จากนั้นแทนค่า $a_i(t) + b_i(t) = n_i(t)$ ลงในสมการที่ (3.11)-(3.13) จะได้

$$n_i(t) \leq \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.66}$$

$$y_{i+1}(t) = n_i(t) \tag{4.67}$$

$$n_i(t) \geq \min\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.68}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (4.60)-(4.61), (4.65) และ (4.66)-(4.68) จะได้

$$y_{i+1}(t) = \min\{n_i(t), q_{i+1}(t), \delta_{i+1}[c_{i+1} - n_{i+1}(t)]\} \tag{4.69}$$

ซึ่งตรงกับสมการคำนวณอัตราการไหลของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม [1] สมการแบบจำลอง การ ส่ง ผ่าน แบบ เซลล์ ที่ แยกประเภท ยานพาหนะ ด้วย การ เคลื่อนที่ แบบ วิวิธ พันธุ์ ใน กรณีเชื่อมต่อแบบตามลำดับจึงเป็นกรณีทั่วไปของแบบจำลองการส่งผ่านแบบเซลล์ในกรณีการเชื่อมต่อแบบตามลำดับดั้งเดิม

4.3.2 การเชื่อมต่อแบบรวม

เมื่อเราให้ $M = 1$ จะได้ $\tilde{v}_m = 1, \min\{(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)), q_{E1}(t)\} = s_{Bg1}(t), \min\{(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)), q_{E2}(t)\} = s_{Bg2}(t), \psi_{i,m}(t) = 1, \tilde{l}_m = \frac{l_m}{l_M} = 1, \tilde{r}_E(t) = r_E(t), \tilde{r}_{E1}(t) = r_{E1}(t), \tilde{r}_{E2}(t) = r_{E2}(t)$ เมื่อแทนลงในสมการที่ (4.26)-(4.37) จะได้สมการดังข้างล่างตามลำดับ

$$r_E(t) < s_{Bg1}(t) + s_{Bg2}(t) \tag{4.70}$$

$$s_{Bg1}(t) \geq p_1 r_E(t) \tag{4.71}$$

$$s_{Bg2}(t) \geq p_2 r_E(t) \tag{4.72}$$

$$r_{Ei}(t) = p_i r_E(t),\ i = 1, 2 \tag{4.73}$$

$$s_{Bg1}(t) < p_1 r_E(t) \tag{4.74}$$

$$s_{Bg2}(t) \geq p_2 r_E(t) \tag{4.75}$$

$$r_{E1}(t) = s_{Bg1}(t) \tag{4.76}$$

$$r_{E2}(t) = r_E(t) - s_{Bg1}(t) \tag{4.77}$$

$$s_{Bg1}(t) \geq p_1 r_E(t) \tag{4.78}$$

$$s_{Bg2}(t) < p_2 r_E(t) \tag{4.79}$$

$$r_{E1}(t) = r_E(t) - s_{Bg2}(t) \tag{4.80}$$

$$r_{E2}(t) = s_{Bg2}(t) \tag{4.81}$$

แทนค่า $p_2 = 1 - p_1$ ลงในสมการที่ (4.72) และ (4.79) และจัดรูปใหม่จะได้

$$p_1 r_E(t) \geq r_E(t) - s_{Bg2}(t) \tag{4.82}$$

$$p_1 r_E(t) < r_E(t) - s_{Bg2}(t) \tag{4.83}$$

จากสมการที่ (4.71), (4.82) และ (4.73) จะสรุปได้ว่า

$$r_E(t) - s_{Bg2}(t) \leq p_1 r_E(t) \leq s_{Bg1}(t) \rightarrow r_{E1}(t) = p_1 r_E(t) \tag{4.84}$$

สัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ แทนประพจน์ "ถ้า p แล้ว q"
จากสมการที่ (4.70), (4.74) และ (4.76) จะสรุปได้ว่า

$$r_E(t) - s_{Bg2}(t) < s_{Bg1}(t) < p_1 r_E(t) \rightarrow r_{E1}(t) = s_{Bg1}(t) \tag{4.85}$$

จากสมการที่ (4.70), (4.83) และ (4.80) จะสรุปได้ว่า

$$p_1 r_E(t) < r_E(t) - s_{Bg2}(t) < s_{Bg1}(t) \rightarrow r_{E1}(t) = r_E(t) - s_{Bg2}(t) \tag{4.86}$$

จากสมการที่ (4.70), (4.84)-(4.86) จะสรุปได้ว่า

$$r_E(t) < s_{Bg1}(t) + s_{Bg2}(t) \rightarrow r_{E1}(t) = \mathrm{mid}\left\{p_1 r_E(t), s_{Bg1}(t), r_E(t) - s_{Bg2}(t)\right\} \tag{4.87}$$

จากนั้น แทน ค่า $\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\} = s_{Bg1}(t), \min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\} = s_{Bg2}(t), \tilde{r}_E(t) = r_E(t), \tilde{r}_{E1}(t) = r_{E1}(t), \tilde{r}_{E2}(t) = r_{E2}(t)$ ลงในสมการที่ (4.23)-(4.25) จะได้สมการดังข้างล่างตามลำดับ

$$r_E(t) \geq s_{Bg1}(t) + s_{Bg2}(t) \tag{4.88}$$

$$r_{E1}(t) = s_{Bg1}(t) \tag{4.89}$$

$$r_{E2}(t) = s_{Bg2}(t) \tag{4.90}$$

จากสมการที่ (4.88)-(4.89) จะสรุปได้ดังนี้

$$r_E(t) \geq s_{Bg1}(t) + s_{Bg2}(t) \rightarrow r_{E1}(t) = s_{Bg1}(t) \tag{4.91}$$

จากสมการที่ (4.87) และ (4.91) เราจะได้สมการที่ (4.92)

$$r_{E1}(t) = \min\left\{s_{Bg1}(t), \max\left\{r_E(t) - s_{Bg2}(t), p_1 r_E(t)\right\}\right\} \tag{4.92}$$

เนื่องจาก $r_{E1}(t) \leq s_{Bg1}(t)$ เสมอจึงได้

$$\begin{aligned} y_{E1}(t) &= \min\{s_{Bg1}(t), r_{E1}(t)\} \\ &= \min\{s_{Bg1}(t), \max\{r_E(t) - s_{Bg2}(t), p_1 r_E(t)\}\} \end{aligned} \tag{4.93}$$

สมการที่ (4.93) ตรงกับ สมการที่ (3.10) ซึ่งเป็นสมการคำนวณอัตราการไหลในการเชื่อมต่อแบบรวมของ CTM ดั้งเดิม [2] สมการแบบจำลองการส่งผ่านแบบเซลล์ที่แยกประเภทยานพาหนะด้วยการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์ในกรณีเชื่อมต่อแบบรวมจึงเป็นกรณีทั่วไปของแบบจำลองการส่งผ่านแบบเซลล์ในกรณีการเชื่อมต่อแบบรวมดั้งเดิม ส่วนการคำนวณค่า $y_{E2}(t)$ จะเหมือนกับ $y_{E1}(t)$ ที่ได้แสดงให้ดูแล้วในข้างต้นและตรงกับสมการที่ (3.11) เช่นเดียวกัน

4.3.3 การเชื่อมต่อแบบแยก

เมื่อเราให้ $M = 1$ จะได้ $\tilde{v}_m = 1, a_{Bg}(t) + \tilde{v}_m(t) = n_{Bg}(t), \psi_{i,m}(t) = 1, \tilde{l}_m = \frac{l_m}{l_M} = 1, \tilde{r}_E(t) = r_E(t), \tilde{r}_{E1}(t) = r_{E1}(t), \tilde{r}_{E2}(t) = r_{E2}(t)$ เมื่อแทนลงในสมการที่ (4.41)-(4.53) จะได้สมการดังข้างล่าง

$$\arg\min_i \left\{\frac{r_{Ei}(t)}{\beta_{Ei}}\right\} \tag{4.94}$$

$$\beta_{E1} a_{Bg}(t) \le r_{E1}(t) \tag{4.95}$$

$$\beta_{E1} n_{Bg}(t) \le r_{E1}(t) \tag{4.96}$$

$$y_{E1}(t) = \beta_{E1} n_{Bg}(t) \tag{4.97}$$

$$\beta_{E1} n_{Bg}(t) > r_{E1}(t) \tag{4.98}$$

$$y_{E1}(t) = r_{E1}(t) \tag{4.99}$$

$$\beta_{E1} a_{Bg}(t) > r_{E1}(t) \tag{4.100}$$

$$y_{E1}(t) = r_{E1}(t) \tag{4.101}$$

$$y_{E2}(t) = \frac{\beta_{E2}}{\beta_{E1}} y_{E1}(t) \tag{4.102}$$

สมการที่ (4.100) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\beta_{E1} n_{Bg}(t) > r_{E1}(t) \tag{4.103}$$

จากสมการที่ (4.95), (4.98)-(4.101), (4.103) จะสรุปได้ว่า

$$\beta_{E1}n_{Bg}(t) > r_{E1}(t) \rightarrow y_{E1}(t) = r_{E1}(t) \tag{4.104}$$

และจากสมการที่ (4.95)-(4.97) จะสรุปได้ว่า

$$\beta_{E1}n_{Bg}(t) \leq r_{E1}(t) \rightarrow y_{E1}(t) = \beta_{E1}n_{Bg}(t) \tag{4.105}$$

สมการที่ (4.104) และ (4.105) จะสรุปได้ว่า

$$y_{E1}(t) = \min\left\{\beta_{E1}n_{Bg}(t), r_{E1}(t)\right\} \tag{4.106}$$

สมการที่ (4.106) เป็นค่า $y_{E1}(t)$ กรณีเฉพาะเมื่อ $\arg\min_i \left\{\frac{r_{Ei}(t)}{\beta_{Ei}}\right\} = 1$ หรือเซลล์ปลายทาง $E1$ เป็นเซลล์ที่มีโอกาสจะเต็มก่อนเซลล์ปลายทาง $E2$ ต่อไปจะทำการหาสมการทั่วไป

แทนค่า $y_{E1}(t) = \min\left\{\beta_{E1}n_{Bg}(t), r_{E1}(t)\right\}$ ลงในสมการที่ (4.102) จะได้

$$y_{E2}(t) = \min\left\{\beta_{E2}n_{Bg}(t), \frac{\beta_{E2}}{\beta_{E1}}r_{E1}(t)\right\} \tag{4.107}$$

เมื่อสลับ index cell ในสมการที่ (4.107) จาก 1 เป็น 2 และ 2 เป็น 1 เราจะได้ค่า $y_{E1}(t)$ กรณีเฉพาะเมื่อ $\arg\min_i \left\{\frac{r_{Ei}(t)}{\beta_{Ei}}\right\} = 2$ หรือเซลล์ปลายทาง $E2$ เป็นเซลล์ที่มีโอกาสจะเต็มก่อนเซลล์ปลายทาง $E1$ ดังสมการข้างล่าง

$$y_{E1}(t) = \min\left\{\beta_{E1}n_{Bg}(t), \frac{\beta_{E1}}{\beta_{E2}}r_{E2}(t)\right\} \tag{4.108}$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (4.107) และ (4.108) เป็นสมการคำนวณค่า $y_{E1}(t)$ แยกตามเงื่อนไข $\arg\min_i \left\{\frac{r_{Ei}(t)}{\beta_{Ei}}\right\} = 1$ และ 2 ตามลำดับ ซึ่งถ้าเขียนใหม่ให้ดูง่ายขึ้นจะได้ดังสมการข้างล่าง

$$r_{E1}(t) \leq \frac{\beta_{E1}}{\beta_{E2}}r_{E2}(t) \rightarrow y_{E1}(t) = \min\left\{\beta_{E1}n_{Bg}(t), r_{E1}(t)\right\} \tag{4.109}$$

$$r_{E1}(t) > \frac{\beta_{E1}}{\beta_{E2}}r_{E2}(t) \rightarrow y_{E1}(t) = \min\left\{\beta_{E1}n_{Bg}(t), \frac{\beta_{E1}}{\beta_{E2}}r_{E2}(t)\right\} \tag{4.110}$$

เมื่อรวมสมการที่ (4.109) และ (4.110) เข้าด้วยกันจะได้สมการทั่วไปของ $y_{E1}(t)$ ดังสมการข้างล่าง

$$\begin{aligned} y_{E1}(t) &= \min\left\{\beta_{E1}n_{Bg}(t), \min\left\{r_{E1}(t), \tfrac{\beta_{E1}}{\beta_{E2}}r_{E2}(t)\right\}\right\} \\ &= \min\left\{\beta_{E1}n_{Bg}(t), r_{E1}(t), \tfrac{\beta_{E1}}{\beta_{E2}}r_{E2}(t)\right\} \end{aligned} \tag{4.111}$$

สมการที่ (4.111) ตรงกับสมการที่ (3.12) ซึ่งเป็นสมการคำนวณอัตราการไหลในการเชื่อมต่อแบบรวมของ CTM ดั้งเดิม [2] สมการแบบจำลองการส่งผ่านแบบเซลล์ที่แยกประเภทยานพาหนะด้วยการเคลื่อนที่แบบวิวิธพันธุ์ในกรณีเชื่อมต่อแบบแยกจึงเป็นกรณีทั่วไปของแบบจำลองการส่งผ่านแบบเซลล์ในกรณีการเชื่อมต่อแบบแยกดั้งเดิม

บทที่ 5

แบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ในรูปทั่วไป

แบบจำลองที่ได้นำเสนอในบทที่ 3 นั้นแสดงความหมายที่ชัดแจ้งในด้านกายภาพหรือสถานะของการจราจรในขณะนั้น แต่ในด้านการคำนวณแล้วยังมีขั้นตอนที่ซับซ้อนโดยไม่จำเป็นอยู่มาก รวมทั้งยังไม่ได้อยู่ในรูปทั่วไป เนื้อหาในบทนี้จึงเป็นการหารูปทั่วไปของแบบจำลองในบทที่ 3 รวมทั้งพิสูจน์เป็นสิ่งเดียวกันและให้ผลการจำลองที่ตรงกัน สุดท้ายเนื่องจากแบบจำลองที่นำเสนอนั้นมีตัวแปรมากขึ้นกว่าแบบจำลองดั้งเดิม จึงเขียนแบบจำลองทั่วไปในรูปแบบของเมเทริกซ์และตัวแปรเวกเตอร์แทนที่สมการสเกลล่าร์หลายๆสมการ เพื่อความรวดเร็วและความสะดวกในการคำนวณหรือการจำลองผล

ในที่นี้จะแบ่งออกเป็น 3 ส่วนคือ การเชื่อมต่อปกติ,การเชื่อมต่อแบบรวม และการเชื่อมต่อแบบแยก

5.1 การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ

เริ่มการทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 $\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right] \geq \tilde{r}_{i+1}(t) \leftrightarrow a_{i,m}(t) \geq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right]}$

ทฤษฎีบทที่ 2 $\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right] \leq \tilde{r}_{i+1}(t) \leftrightarrow a_{i,m}(t) \leq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right]}$

$\leftrightarrow$ แทนการเชื่อมประพจน์ "ก็ต่อเมื่อ"

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1

จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right] \geq \tilde{r}_{i+1}(t) \rightarrow a_{i,m}(t) \geq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right]}$

2. $a_{i,m}(t) \geq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)} \rightarrow \sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right] \geq \tilde{r}_{i+1}(t)$

จาก $a_{i,m}(t) < \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) < \tilde{r}_{i+1}(t)$ จึงกล่าวได้ว่าประพจน์ $a_{i,m}(t) < \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)} \rightarrow \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) < \tilde{r}_{i+1}(t)$ เป็นจริงและเนื่องจากประพจน์นี้สมมูลกับประพจน์ในข้อ 1. $(p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p)$ ประพจน์ในข้อ 1. จึงเป็นจริงด้วย

จาก $a_{i,m}(t) \geq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) \geq \tilde{r}_{i+1}(t)$ ดังนั้นข้อ 2. จึงเป็นข้อความที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) \geq \tilde{r}_{i+1}(t) \leftrightarrow a_{i,m}(t) \geq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2

จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{i+1}(t) \rightarrow a_{i,m}(t) \leq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}$

2. $a_{i,m}(t) \leq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)} \rightarrow \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{i+1}(t)$

จาก $a_{i,m}(t) > \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}$ ทำการคูณตลอดทั้งอสมการด้วย $\tilde{l}_m$ หาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) > \tilde{r}_{i+1}(t)$ จึงกล่าวได้ว่าประพจน์ $a_{i,m}(t) > \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)} \rightarrow \sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right] > \tilde{r}_{i+1}(t)$ เป็นจริงและเนื่องจากประพจน์นี้สมมูลกับประพจน์ในข้อ 1. $(p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p)$ ประพจน์ในข้อ 1. จึงเป็นจริงด้วย

จาก $a_{i,m}(t) \leq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}$ ทำการคูณตลอดทั้งอสมการด้วย $\tilde{l}_m$ หาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{i+1}(t)$ ดังนั้นข้อ 2. จึงเป็นข้อความที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right] \leq \tilde{r}_{i+1}(t) \leftrightarrow a_{i,m}(t) \leq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ให้ $y_{i+1,m,a}(t) =$ อัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $i+1$ เนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่หัวแถวประเภท m ของเซลล์ต้นทาง i ระหว่างช่องเวลา t และ $t+1$

$y_{i+1,m,b}(t) =$ อัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $i+1$ เนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวประเภท m ของเซลล์ต้นทาง i ระหว่างช่องเวลา t และ $t+1$

จากทฤษฎีบทที่ 1 และ สมการ (4.16), (4.19) และ (4.22) จะได้

ทฤษฎีบทที่ 3 $a_{i,m}(t) \leq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)} \rightarrow y_{i+1,m}(t) = a_{i,m}(t)$

จากทฤษฎีบทที่ 2 และ สมการ (4.13) และ (4.15) จะได้

ทฤษฎีบทที่ 4 $a_{i,m}(t) \geq \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right]} \rightarrow y_{i+1,m}(t) = \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m l_m a_{i,m}(t)\right]}$

เมื่อพิจารณาทฤษฎีบทที่ 3 และทฤษฎีบทที่ 4 ร่วมกันเราจะได้สมการดังข้างล่าง

$$y_{i+1,m,a}(t) = \min\left\{a_{i,m}(t), \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}\right\} \tag{5.1}$$

สมการ (5.1) เป็นสมการทั่วไปของอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $i+1$ เนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่หัวแถวประเภท m ของเซลล์ต้นทาง i ในการเชื่อมต่อแบบตามลำดับ ต่อไปจะทำการหาสมการทั่วไปของอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ปลายทาง $i+1$ เนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวประเภท m ของเซลล์ต้นทาง i ในการเชื่อมต่อแบบตามลำดับ

ทฤษฎีบทที่ 5 $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq 0 \leftrightarrow \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq 0$

ทฤษฎีบทที่ 6 $0 \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right] \leftrightarrow 0 \leq \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$

ทฤษฎีบทที่ 7 $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \geq \sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right] \leftrightarrow \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right]} \geq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5

จาก $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq 0$ เนื่องจาก $\tilde{v}_m > 0, b_{i,m} \geq 0$ ทุกค่า i, m จึงทำให้ $\frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq 0$ โดยปริยาย และในทางกลับกัน ถ้า $\frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq 0$ จะทำให้ได้ $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq 0$ ด้วยจึงสรุปได้ว่าทฤษฎีบทที่ 5 เป็นจริง

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 6

จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $0 \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right) \rightarrow 0 \leq \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$

2. $0 \leq \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq \tilde{v}_m b_{i,m}(t) \rightarrow 0 \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)$

จาก

$$0 \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq \sum_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right) \tag{5.2}$$

เนื่องจาก $0 < \tilde{v}_m b_{i,m}(t), \forall m = 1, .., M$ ทำให้ $0 < \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}, \forall m = 1, .., M$ คูณตลอดทั้งอสมการ (5.2) ด้วย พจน์ $\frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}$ จะได้อสมการดังข้างล่าง

$$0 \leq \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq \tilde{v}_m b_{i,m}(t) \tag{5.3}$$

ดังนั้นข้อ 1. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

จาก $0 \leq \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $0 \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)$ ดังนั้นข้อ 2. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $0 \leq \tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right) \leftrightarrow 0 \leq \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \leq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 7

จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \geq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right) \rightarrow \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \geq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$

2. $\frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \geq \tilde{v}_m b_{i,m}(t) \rightarrow \tilde{r}^*_{i+1}(t) \geq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)$

จาก $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \geq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)$ คูณตลอดทั้งอสมการด้วย $\frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}$ จะได้ $\frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \geq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$ ข้อ 1. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ใน ทำนอง เดียวกัน จาก $\frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \geq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$ คูณ ตลอด ทั้ง อสมการ ด้วย $\frac{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)}$ จะได้ $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \geq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)$ ข้อ 2. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \geq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right) \leftrightarrow \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)} \geq \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 8 $\tilde{r}^*_{i+1}(t) \leq 0 \rightarrow y_{i+1,m,b}(t) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 9 $0 \leq \tilde{r}^*_{_{i+1}}(t) \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right] \rightarrow y_{i+1,m,b}(t) = \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right]}$

ทฤษฎีบทที่ 10 $\tilde{r}^*_{_{i+1}}(t) \geq \sum\limits_{m=1}^{M}\left[\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right] \rightarrow y_{i+1,m,b}(t) = \tilde{v}_m b_{i,m}(t)$

ทฤษฎีบทที่ 8 พิสูจน์ได้จากการที่เซลล์ปลายทางไม่มีที่ว่างที่จะรองรับยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวเพิ่มได้ อัตราการการไหลเนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวของเซลล์ต้นทางย่อมเป็นศูนย์

ทฤษฎีบทที่ 9 ได้มาจากสมการ (4.17) และ (4.19)

ทฤษฎีบทที่ 10 ได้มาจากสมการ (4.20) และ (4.22)

สังเกตได้ว่าทฤษฎีบทที่ 1-10 มีข้อยกเว้นเมื่อตัวหารเป็นศูนย์หรืออีกนัยหนึ่งคือเมื่อไม่มียานพาหนะที่อยู่หัวแถวหรือท้ายแถวในเซลล์ต้นทางเลย แต่เป็นที่ชัดเจนว่าเมื่อไม่มียานพาหนะในเซลล์ต้นทางย่อมไม่มีอัตราการไหลจากเซลล์ต้นทางแน่นอน ปัญหานี้จึงแก้ไขได้โดยง่ายซึ่งจะแสดงให้ดูในการรวมสมการต่อไป

จากทฤษฎีบทที่ 8-10 เราจะได้สมการคำนวณอัตราการไหลเนื่องจากยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวดังนี้

$$y_{i+1,m,b}(t) = \text{mid}\left\{0, \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}, \tilde{v}_m b_{i,m}(t)\right\} \tag{5.4}$$

เมื่อรวมสมการ (5.1) และ (5.4) เข้าด้วยกันจะได้สมการคำนวณอัตราการไหลในการเชื่อมต่อแบบตามลำดับดังข้างล่าง

$$y_{i+1,m}(t) = \min\left\{a_{i,m}(t), \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}\right\} + \text{mid}\left\{0, \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}, \tilde{v}_m b_{i,m}(t)\right\} \tag{5.5}$$

มีข้อสังเกตว่า เมื่อ $a_{i,1} = a_{i,2} =, ..., = a_{i,M} = 0$ หรือ $b_{i,1} = b_{i,2} =, ..., = b_{i,M} = 0$ จะทำให้ตัวส่วนมีค่าเป็นศูนย์เพื่อหลีกเลี่ยงกรณีนี้จึงปรับปรุงสมการ (5.5) ใหม่ให้ครอบคลุมทุกกรณีได้ดังนี้

$$y_{i+1,m}(t) = \begin{cases} 0, a_i(t) = b_i(t) = 0 \\ \min\left\{a_{i,m}(t), \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}\right\}, a_i(t) \neq 0, b_i(t) = 0 \\ \text{mid}\left\{0, \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}, \tilde{v}_m b_{i,m}(t)\right\}, a_i(t) = 0, b_i(t) \neq 0 \\ \min\left\{a_{i,m}(t), \frac{\tilde{v}_m a_{i,m}(t)\tilde{r}_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m a_{i,m}(t)\right)}\right\} + \text{mid}\left\{0, \frac{\tilde{v}_m b_{i,m}(t)\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\tilde{v}_m \tilde{l}_m b_{i,m}(t)\right)}, \tilde{v}_m b_{i,m}(t)\right\} \\ , a_i(t) \neq 0, b_i(t) \neq 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

$$a_i(t) = \sum_{m=1}^{M} a_{i,m}(t)$$

$$b_i(t) = \sum_{m=1}^{M} b_{i,m}(t)$$

จากนั้นเราจะพยายามเขียนสมการ (5.6) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์และตัวแปรเวกเตอร์โดยกำหนดตัวแปรใหม่ดังนี้

$\vec{A}_i(t) = [a_{i,1}(t), ..., a_{i,M}(t)]^T$
$\vec{B}_i(t) = [b_{i,1}(t), ..., b_{i,M}(t)]^T$
$\vec{N}_i(t) = [n_{i,1}(t), ..., n_{i,M}(t)]^T$
$\vec{Y}_i(t) = [y_{i,1}(t), ..., y_{i,M}(t)]^T$
$\vec{\tilde{V}} = [\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_M]^T$

$$diag(\vec{\tilde{V}}) = diag(\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_M) = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{v}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{v}_M \end{bmatrix}$$

$\vec{\Psi}_i(t) = [\psi_{i,1}(t), ..., \psi_{i,M}(t)]^T$

$$diag(\vec{\Psi}_i(t)) = diag(\psi_{i,1}(t), ..., \psi_{i,M}(t)) = \begin{bmatrix} \psi_{i,1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_{i,2}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_{i,M}(t) \end{bmatrix}$$

$\vec{\tilde{L}} = \left[\tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_M\right]^T$
$\tilde{r}_{i+1}(t) = \mathrm{mid}\left\{q_{i+1}(t), \delta_{i+1}\left[c_{i+1} - \vec{L}^T diag\left(\vec{\Psi}_{i+1}(t)\right)\vec{N}_{i+1}(t)\right], 0\right\}$
$\tilde{r}^*_{i+1}(t) = \tilde{r}_{i+1}(t) - \vec{\tilde{L}}^T \vec{A}_i(t)$
จากสมการ (5.6) เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการข้างล่าง

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{i+1}(t) = \min&\left\{\vec{A}_i(t), \frac{\tilde{r}_{i+1}(t)}{\vec{\tilde{V}}^T diag(\vec{\tilde{L}})\vec{A}_i(t)} diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{A}_i(t)\right\} \\ +\mathrm{mid}&\left\{\vec{0}_{M\times 1}, \frac{\tilde{r}^*_{i+1}(t)}{\vec{\tilde{V}}^T diag(\vec{\tilde{L}})\vec{B}_i(t)} diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{B}_i(t), diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{B}_i(t)\right\} \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2 การเชื่อมต่อแบบรวม

ทฤษฎีบทที่ 11 $\min\{(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)), q_{E2}(t)\} \leq p_2\tilde{r}_E(t) \rightarrow \tilde{r}_E(t) - \min\{(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)), q_{E2}(t)\} \geq p_1\tilde{r}_E(t)$

ทฤษฎีบทที่ 12 $\min\{(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)), q_{E2}(t)\} \geq p_2\tilde{r}_E(t) \rightarrow \tilde{r}_E(t) - \min\{(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)), q_{E2}(t)\} \leq p_1\tilde{r}_E(t)$

ทฤษฎีบทที่ 13 $\min\{(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)), q_{E1}(t)\} \leq p_1\tilde{r}_E(t) \rightarrow \tilde{r}_E(t) - \min\{(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)), q_{E1}(t)\} \geq p_2\tilde{r}_E(t)$

ทฤษฎีบทที่ 14 $\min\{(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)), q_{E1}(t)\} \geq p_1\tilde{r}_E(t) \rightarrow \tilde{r}_E(t) - \min\{(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)), q_{E1}(t)\} \leq p_2\tilde{r}_E(t)$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 11

จาก $\min\{(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)), q_{E2}(t)\} \leq p_2\tilde{r}_E(t)$ บวกทั้ง 2 ข้างของอสมการด้วย $p_1\tilde{r}_E(t)$ จะได้

$$\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}+p_1\tilde{r}_E(t)\leq(p_1+p_2)\tilde{r}_E(t)$$
$$p_1\tilde{r}_E(t)\leq\tilde{r}_E(t)-\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}$$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 12

จาก $\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}\geq p_2\tilde{r}_E(t)$ บวกทั้ง 2 ข้างของอสมการด้วย $p_1\tilde{r}_E(t)$ จะได้

$$\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}+p_1\tilde{r}_E(t)\geq(p_1+p_2)\,\tilde{r}_E(t)$$
$$\tilde{r}_E(t)-\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}\leq p_1\tilde{r}_E(t)$$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 13

จาก $\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}\leq p_1\tilde{r}_E(t)$ บวกทั้ง 2 ข้างของอสมการด้วย $p_2\tilde{r}_E(t)$ จะได้

$$\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}+p_2\tilde{r}_E(t)\leq(p_1+p_2)\,\tilde{r}_E(t)$$
$$\tilde{r}_E(t)-\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}\geq p_2\tilde{r}_E(t)$$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 14

จาก $\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}\geq p_1\tilde{r}_E(t)$ บวกทั้ง 2 ข้างของอสมการด้วย $p_2\tilde{r}_E(t)$ จะได้

$$\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}+p_2\tilde{r}_E(t)\geq(p_1+p_2)\,\tilde{r}_E(t)$$
$$\tilde{r}_E(t)-\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}\leq p_2\tilde{r}_E(t)$$

$$\tilde{r}_{E1}(t)=\begin{cases}\tilde{r}_E(t)-\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}\\ \quad,\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}\leq p_2\tilde{r}_E(t)\\ p_1\tilde{r}_E(t),\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}>p_2\tilde{r}_E(t)\end{cases}\tag{5.8}$$

$$\tilde{r}_{E2}(t)=\begin{cases}\tilde{r}_E(t)-\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}\\ \quad,\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}\leq p_1\tilde{r}_E(t)\\ p_2\tilde{r}_E(t),\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}>p_1\tilde{r}_E(t)\end{cases}\tag{5.9}$$

สมการ (5.8)-(5.9) ได้มาจากการพิจารณาสมการ (4.23)-(4.37)

สังเกตได้ว่า $\tilde{r}_{E1}(t)+\tilde{r}_{E2}(t)\neq\tilde{r}_E(t)$ ยกเว้นเมื่อ $\min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t)+s_{Bg1,b}(t)\right),q_{E1}(t)\right\}+\min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t)+s_{Bg2,b}(t)\right),q_{E2}(t)\right\}\geq\tilde{r}_E(t)$

สามารถเขียนสมการ (5.8)-(5.9) ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$\tilde{r}_{E1}(t) = \max\left\{\tilde{r}_E(t) - \min\left\{\left(s_{Bg2,a}(t) + s_{Bg2,b}(t)\right), q_{E2}(t)\right\}, p_1\tilde{r}_E(t)\right\} \tag{5.10}$$

$$\tilde{r}_{E2}(t) = \max\left\{\tilde{r}_E(t) - \min\left\{\left(s_{Bg1,a}(t) + s_{Bg1,b}(t)\right), q_{E1}(t)\right\}, p_2\tilde{r}_E(t)\right\} \tag{5.11}$$

จากสมการ (5.10)-(5.11) จะได้ค่า $\tilde{r}_{E1}(t)$ และ $\tilde{r}_{E2}(t)$ ปัญหาจะกลายเป็น Cascade 2 อัน ทำการคำนวณแยกกันต่อไปได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{E1}(t) &= \min\left\{\vec{A}_{Bg1}(t), \frac{\tilde{r}_{E1}(t)}{\vec{\tilde{V}}^T diag(\vec{\tilde{L}})\vec{A}_{Bg1}(t)} diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{A}_{Bg1}(t)\right\} \\ &+ \text{mid}\left\{\vec{0}_{M\times 1}, \frac{\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\vec{\tilde{V}}^T diag(\vec{\tilde{L}})\vec{B}_{Bg1}(t)} diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{B}_{Bg1}(t), diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{B}_{Bg1}(t)\right\}\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{E2}(t) &= \min\left\{\vec{A}_{Bg2}(t), \frac{\tilde{r}_{E2}(t)}{\vec{\tilde{V}}^T diag(\vec{\tilde{L}})\vec{A}_{Bg2}(t)} diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{A}_{Bg2}(t)\right\} \\ &+ \text{mid}\left\{\vec{0}_{M\times 1}, \frac{\tilde{r}^*_{E2}(t)}{\vec{\tilde{V}}^T diag(\vec{\tilde{L}})\vec{B}_{Bg2}(t)} diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{B}_{Bg2}(t), diag\left(\vec{\tilde{V}}\right)\vec{B}_{Bg2}(t)\right\}\end{aligned} \tag{5.13}$$

โดยที่

$$\vec{Y}_{E1}(t) + \vec{Y}_{E2}(t) = \vec{Y}_E(t)$$
$$\tilde{r}^*_{E1}(t) = \tilde{r}_{E1}(t) - \vec{\tilde{L}}^T \vec{A}_{Bg1}(t)$$
$$\tilde{r}^*_{E2}(t) = \tilde{r}_{E2}(t) - \vec{\tilde{L}}^T \vec{A}_{Bg2}(t)$$

5.3 การเชื่อมต่อแบบแยก

การหารูปทั่วไปในการเชื่อมต่อแบบรวมจะคล้ายกับการเชื่อมต่อแบบตามลำดับคือเราจะทำการคำนวณค่าอัตราการอัตราการไหลเป็น 2 ส่วนคืออัตราการไหลเนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่หัวแถวและยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถว เนื่องจากว่าอัตราการไหล 2 ส่วนนี้เป็นอิสระต่อกัน สามารถคำนวณอันไหนก่อนก็ได้และนำมารวมกันเป็นอัตราการไหลรวมในท้ายที่สุด เราจะทำการพิสูจน์หรือคำนวณอัตราการไหลเนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่หัวแถวก่อนดังนี้

กำหนดให้ $i = 1$ เป็นค่าที่สอดคล้องกับสมการ (4.41) จะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 15 $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \le \tilde{r}_{E1}(t) \leftrightarrow \beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \le \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$

ทฤษฎีบทที่ 16 $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \ge \tilde{r}_{E1}(t) \leftrightarrow \beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \ge \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 15

เราจะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{E1}(t) \rightarrow \beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$

2. $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)} \rightarrow \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{E1}(t)$

จาก $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) > \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) > \tilde{r}_{E1}(t)$ จึงกล่าวได้ว่าประพจน์ $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) > \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)} \rightarrow \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) > \tilde{r}_{E1}(t)$ เป็นจริงและเนื่องจากประพจน์นี้สมมูลกับประพจน์ในข้อ 1. $(p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p)$ ประพจน์ในข้อ 1. จึงเป็นจริงด้วย

จาก $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{E1}(t)$ ดังนั้นข้อ 2. จึงเป็นข้อความที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{E1}(t) \leftrightarrow \beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 16

เราจะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \geq \tilde{r}_{E1}(t) \rightarrow \beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \geq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$

2. $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \geq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)} \rightarrow \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \geq \tilde{r}_{E1}(t)$

จาก $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) < \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) < \tilde{r}_{E1}(t)$ จึงกล่าวได้ว่าประพจน์ $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) < \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)} \rightarrow \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) < \tilde{r}_{E1}(t)$ เป็นจริงและเนื่องจากประพจน์นี้สมมูลกับประพจน์ในข้อ 1. $(p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p)$ ประพจน์ในข้อ 1. จึงเป็นจริงด้วย

จาก $\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \geq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \geq \tilde{r}_{E1}(t)$ ดังนั้นข้อ 2. จึงเป็นข้อความที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \geq \tilde{r}_{E1}(t) \leftrightarrow \beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t) \geq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

จากสมการ (4.42)-(4.44), (4.46)-(4.47), (4.49)-(4.50) จะได้สมการดังข้างล่าง

$$y_{E1,m,a}(t) = \begin{cases} \beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t), & \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}_{E1}(t) \\ \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}, & \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right) > \tilde{r}_{E1}(t) \end{cases} \tag{5.14}$$

จากสมการ (5.14) และทฤษฎีบทที่ 15 และ 16 จะทำให้เราได้สมการคำนวณค่าอัตราการไหลเนื่องมาจากยานพาหนะที่อยู่หัวแถวได้ดังนี้

$$y_{E1,m,a}(t) = \min\left\{\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t), \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}\right\} \tag{5.15}$$

จากนั้นเราจะทำการคำนวณอัตราการไหลที่เกิดจากยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวต่อ

ทฤษฎีบทที่ 17 $\tilde{r}^*_{E1}(t) \leq 0 \leftrightarrow \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq 0$

ทฤษฎีบทที่ 18 $0 \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leftrightarrow 0 \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)$

ทฤษฎีบทที่ 19 $\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leftrightarrow \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 17

จาก $\tilde{r}^*_{E1}(t) \leq 0$ เนื่องจาก $\tilde{v}_m > 0, b_{Bg,m}(t)$ และ $\beta_{E1,m} \geq 0$ ทุกค่า $E1, m$ จึงทำให้ $\frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq 0$ โดยปริยาย และในทางกลับกัน ถ้า $\frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq 0$ จะทำให้ได้ $\tilde{r}^*_{E1}(t) \leq 0$ ด้วยจึงสรุปได้ว่าทฤษฎีบทที่ 17 เป็นจริง

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 18

จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $0 \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leq \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \rightarrow 0 \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)$
2. $0 \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \rightarrow 0 \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leq \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)$

จาก

$$0 \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leq \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \tag{5.16}$$

เนื่องจาก $\tilde{v}_m > 0, b_{Bg,m}(t)$ และ $\beta_{E1,m} \geq 0$ ทุกค่า $E1, m$ ทำให้ $\frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} > 0, \forall m = 1,..,M$ คูณตลอดทั้งอสมการ (5.16) ด้วย พจน์ $\frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}$ จะได้อสมการดังข้างล่าง

$$0 \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \tag{5.17}$$

ดังนั้นข้อ 1. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

จาก $0 \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)$ ทำการหาผลรวมทุกพจน์ของ m จะได้ $0 \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leq \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)$ ดังนั้นข้อ 2. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $0 \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leq \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leftrightarrow 0 \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \leq \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 19

จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \rightarrow \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}$
2. $\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)} \rightarrow \sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}^*_{E1}(t)$

จาก $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}^*_{E1}(t)$ คูณ ตลอด ทั้ง อสมการ ด้วย $\frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}$ ข้อ 1. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ในทำนองเดียวกัน จาก $\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}$ คูณตลอดทั้งอสมการด้วย $\frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}$ จะได้ $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}^*_{E1}(t)$ ข้อ 2. จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ข้อ1. และ 2. เป็นจริงจึงสรุปได้ว่า $\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \leftrightarrow \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t) \leq \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

จากสมการ (4.42)-(4.44), (4.46)-(4.47), (4.49)-(4.50) จะได้สมการดังข้างล่าง

$$y_{E1,m,b}(t) = \begin{cases} 0, \tilde{r}^*_{E1}(t) \leq 0 \leq \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \\ \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t), 0 < \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \leq \tilde{r}^*_{E1}(t) \\ \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}, 0 < \tilde{r}^*_{E1}(t) < \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right) \end{cases} \tag{5.18}$$

จากสมการ (5.18) และทฤษฎีบทที่ 17-19 จะได้สมการคำนวณอัตราการไหลเนื่องจากยานพาหนะที่อยู่ท้ายแถวดังข้างล่าง

$$y_{E1,m,b}(t) = \mathrm{mid}\left\{0, \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}, \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\right\} \tag{5.19}$$

จะได้สมการคำนวณอัตราการไหลทั้งหมดดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} y_{E1,m}(t) = \min&\left\{\beta_{E1,m}a_{Bg,m}(t), \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m a_{Bg,m}(t)\tilde{r}_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m a_{Bg,m}(t)\right)}\right\} \\ +\mathrm{mid}&\left\{0, \frac{\beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\tilde{r}^*_{E1}(t)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(\beta_{E1,m}\tilde{v}_m\tilde{l}_m b_{Bg,m}(t)\right)}, \beta_{E1,m}\tilde{v}_m b_{Bg,m}(t)\right\} \end{aligned} \tag{5.20}$$

สมการ (5.20) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังข้างล่าง

$$\vec{Y}_{E1}(t) = diag(\vec{\beta}_{E1})diag(\vec{A}_{Bg}(t)) \min \left\{ \vec{1}_{M\times 1}, \frac{\tilde{r}_{E1}(t)}{\vec{A}_{Bg}(t)^T diag(\vec{\tilde{L}}) diag \;\; \vec{\tilde{V}} \;\; \vec{\beta}_{E1}} \vec{\tilde{V}} \right\}$$
$$+diag\left(\vec{\tilde{V}}\right) diag\left(\vec{\beta}_{E1}\right) diag\left(\vec{B}_{Bg}(t)\right) \min \left\{ \vec{0}_{M\times 1}, \frac{\tilde{r}^{*}_{E1}(t)}{\vec{B}_{Bg}(t)^T diag(\vec{\tilde{L}}) diag \;\; \vec{\tilde{V}} \;\; \vec{\beta}_{E1}}, \vec{1}_{M\times 1} \right\} \quad (5.21)$$

โดย

$\vec{\beta}_{Ei} = [\beta_{Ei,1}, ..., \beta_{Ei,M}]^T$

อัตราการไหลในเซลล์ปลายทางที่มีโอกาสจะเต็มช้ากว่า ($E2$) สามารถหาได้จากการแทนค่า $Y_{E1}(t)$ จากสมการ (5.21) ลงในสมการ (4.52) ได้ดังนี้

$$\vec{Y}_{E2}(t) = diag(\vec{\beta}_{E2})diag(\vec{A}_{Bg}(t)) \min \left\{ \vec{1}_{M\times 1}, \frac{\tilde{r}_{E1}(t)}{\vec{A}_{Bg}(t)^T diag(\vec{\tilde{L}}) diag \;\; \vec{\tilde{V}} \;\; \vec{\beta}_{E1}} \vec{\tilde{V}} \right\}$$
$$+diag\left(\vec{\tilde{V}}\right) diag\left(\vec{\beta}_{E2}\right) diag\left(\vec{B}_{Bg}(t)\right) \min \left\{ \vec{0}_{M\times 1}, \frac{\tilde{r}^{*}_{E1}(t)}{\vec{B}_{Bg}(t)^T diag(\vec{\tilde{L}}) diag \;\; \vec{\tilde{V}} \;\; \vec{\beta}_{E1}}, \vec{1}_{M\times 1} \right\} \quad (5.22)$$

บทที่ 6

ผลการจำลองเครือข่าย

การทดลองมุ่งศึกษาความถูกต้องของการจำลองความหนาแน่น (density) ถนนในแต่ละส่วน โดยเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมซึ่งมีการเคลื่อนที่ประเภทเดียว (S-CTM) กับแบบจำลองที่นำเสนอซึ่งมีการเคลื่อนที่ในหลายรูปแบบ (M-CTM) ทั้งนี้โดยแบ่งพิจารณาออกเป็น 3 กรณี คือ

1. การจำลองเครือข่ายจริงเพื่อทดสอบความถูกต้องของแบบจำลองกับข้อมูลจริงบนถนนพญาไท
2. การจำลองเครือข่ายจริงขนาดใหญ่ที่มีสัญญาณไฟจราจรบนถนนสาทร
3. การจำลองเครือข่ายสมมุติเพื่อพิจารณาผลกระทบจากสัดส่วนยานพาหนะในแต่ละประเภท

ในการปรับเทียบแบบจำลอง (calibration) จะใช้ genetic algorithm ในการหาค่าตัวแปรปรับเทียบที่เหมาะสม โดยพยายามลดค่า normalized weight error vector norm ของจำนวนยานพาหนะในแต่ละเซลล์ให้น้อยที่สุด ซึ่งในการทดสอบจะใช้ค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 6.1 โดยใช้ toolbox ของ Matlab เวอร์ชั่น 7.1 ขึ้นไปและคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ขนาด 3.21 GHz หน่วยความจำ 1 GB

ตารางที่ 6.1 ค่าของ genetic algorithm ที่ใช้

การทดลอง	ขนาดของประชากรในแต่ละรุ่น	จำนวนรุ่นของประชากร	เวลาในการคำนวณแต่ละครั้ง (ชั่วโมง)
การจำลองพญาไท	20	353	18
การจำลองสาทร	10	94	31
การจำลองเครือข่ายสมมุติ	10	335	10

6.1 การศึกษาความถูกต้องของแบบจำลองกับข้อมูลจริงบนถนนพญาไท

6.1.1 สถานที่และวิธีการเก็บข้อมูล

ข้อมูลสภาพการจราจรในการจำลองนี้ได้นำมาจากรายงาน "การศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของข้อมูลสื่อสารบนเครือข่ายในประเทศไทย" [28] โดยในการเก็บข้อมูลสำหรับแบบจำลองนี้ใช้การเก็บภาพจากกล้องวิดีโอเป็นหลัก หลังจากนั้นจึงนำภาพที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อดึงข้อมูลที่ต้องการออกมาต่อไป โดยในการถ่ายภาพนั้น จะใช้กล้องจากมุมสูง เพื่อความสะดวกในการแยกแยะ และการนับจำนวนรถยนต์ โดยจะตั้งกล้องไว้ ณ ชั้น 19 ของตึก 20 ชั้น คณะวิทยาศาสตร์ จำนวน 8 ตัว ซึ่งจะสามารถจับภาพทั้งหมดของถนนพญาไทตั้งแต่บริเวณ สามย่าน ถึง หน้ามาบุญครอง

ทั้งนี้ ในการเก็บข้อมูลครั้งนี้ ได้ใช้อุปกรณ์ รวมถึงขั้นตอนการเก็บภาพดังนี้

1. ถ่ายภาพ ณ ชั้น 19 ของอาคาร 20 ชั้น คณะวิทยาศาสตร์

2. ใช้กล้องวิดีโอในการบันทึกภาพ จำนวน 9 ตัว

3. บุคลากรในการควบคุมการถ่ายภาพ 5 คน

4. ช่วงเวลาในการบันทึกภาพ ระหว่างเวลา 15.00 ถึง 16.00 ในวันที่ 16 ธันวาคม พ.ศ. 2546

6.1.2 การถอดข้อมูลจากเทปวิดีโอที่บันทึกได้

เนื่องจาก แหล่งข้อมูลที่บันทึกมานั้น ยังมิใช่ข้อมูลที่ต้องการที่จะนำไปทำการจำลองอย่างแท้จริง จึงต้องมีการดึงข้อมูลที่ต้องการออกมาจากข้อมูลดิบ (วิดีโอเทป) เสียก่อน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. จำนวนยานพาหนะในแต่ละเซลล์ ณ เวลาเริ่มต้นของแต่ละช่องเวลาขนาด 10 วินาที

2. ความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัดของยานพาหนะส่วนบุคคลประมาณ 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

3. ความยาวเซลล์กำหนดให้เท่ากับ 160 เมตรหรือประมาณระยะห่างของเสาไฟฟ้า 3 ช่วง ซึ่งคำนวณจากขนาดช่องเวลา 10 วินาที $\times$ ความเร็วเมื่อไม่เกิดการติดขัด 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

4. อัตราการไหลของยานพาหนะเข้าสู่เซลล์ต่าง ๆ (หน่วยเป็นจำนวนคัน) นับจำนวนรถ ที่เข้าแต่ละเซลล์ ในแต่ละช่องเวลา 10 วินาที

5. การเชื่อมต่อของเซลล์ต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.1

การแปลงข้อมูลที่ถอดได้จากวิดีโอเทปเป็นตัวแปรต่าง ๆ สามารถกระทำได้ดังนี้

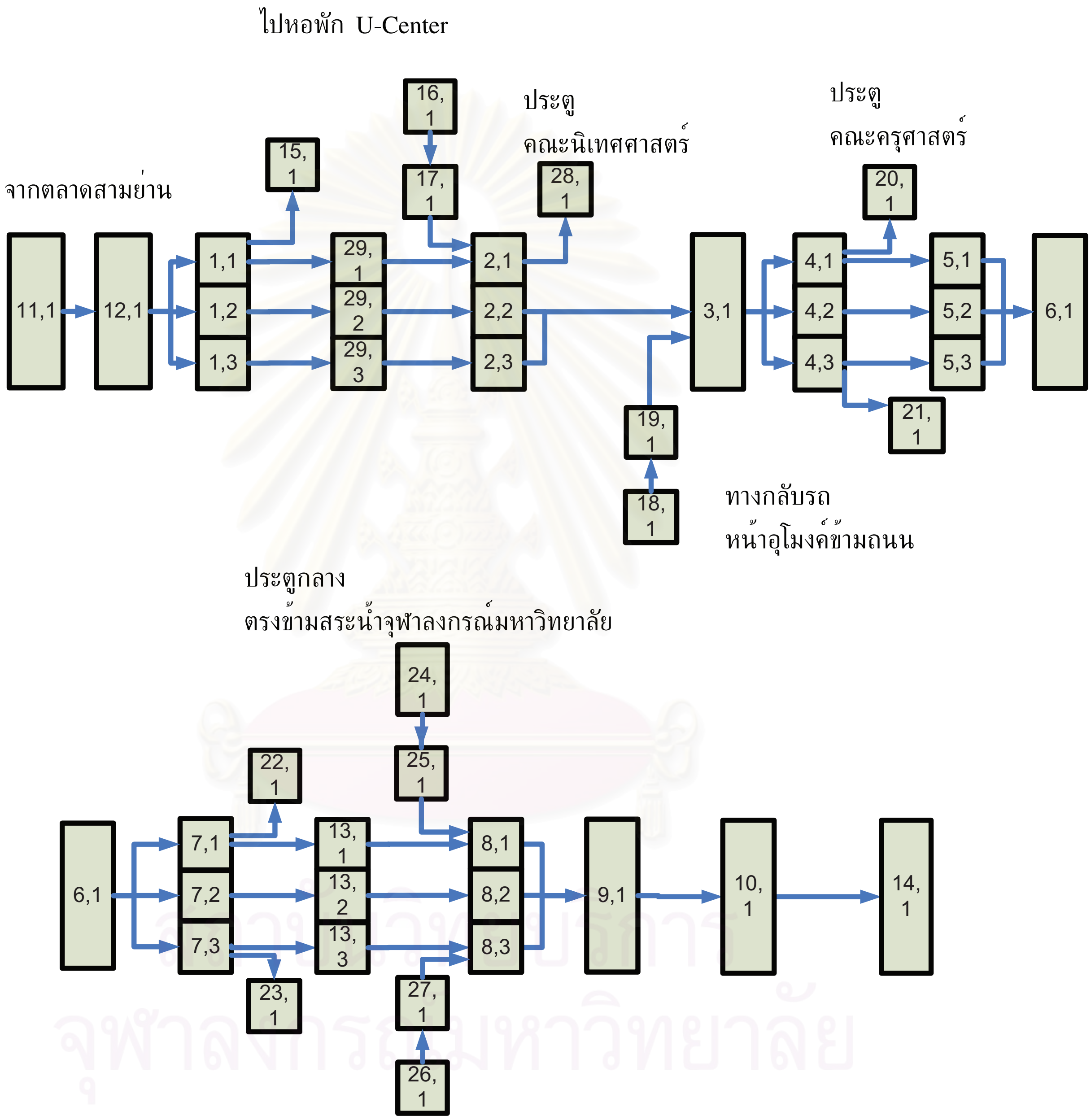
1. อัตราการไหลสูงสุดของข่ายเชื่อมโยงต่าง ๆ (หน่วยเป็นจำนวนคัน) สามารถหาได้จากการพิจารณาค่าสูงสุดของอัตราการไหลของยานพาหนะเข้าสู่เซลล์ต่าง ๆ ในแต่ละเวลาของแต่ละข่ายเชื่อมโยง

2. รอบเวลาสัญญาณไฟจราจรบริเวณแยกประตูสระน้ำจุฬา ฯ สามารถพิจารณาจากอัตราการไหลของยานพาหนะที่บริเวณแยกประตูสระน้ำจุฬา ฯ โดยพิจารณาว่าสัญญาณไฟจราจรของช่องทางจราจรนั้นเป็นช่วงไฟแดงเมื่อผลการวัดให้ค่าอัตราการไหลของยานพาหนะเป็นศูนย์

3. อัตราการไหลของยานพาหนะเข้าสู่ระบบ สามารถหาได้จากอัตราการไหลเข้าสู่เซลล์ต้นทางซึ่งเป็นค่าที่วัดมาจริง

4. จำนวนยานพาหนะทั้งหมดที่ไหลในช่องทางต่าง ๆ ตลอดระยะเวลาที่ทำการจำลอง หาได้จากผลรวมทุกช่องเวลาของอัตราการไหลของช่องทางนั้น

5. อัตราส่วนการแบ่งยานพาหนะจากเซลล์หนึ่ง ๆ ไปยังช่องทางต่าง ๆ สามารถหาได้จากจำนวนยานพาหนะทั้งหมดที่ไหลออกจากเซลล์ในช่องทางนั้นหารด้วยผลรวมของจำนวนพาหนะทั้งหมดที่ไหลออกเซลล์นั้นในทุกช่องทาง ในการจำลองนี้ประมาณว่าอัตราส่วนการแบ่งยานพาหนะไม่แปรตามเวลา



รูปที่ 6.1 แบบจำลองถนนพญาไท

6.1.3 ผลการทดลอง

เนื่องจากตัวแปรหลายตัวไม่สามารถหาค่าได้ด้วยการถอดข้อมูลดิบ จึงใช้วิธีการปรับเทียบค่าให้ความต่างของจำนวนยานพาหนะในแต่ละเซลล์ของการจำลองกับข้อมูลจริงมีค่าน้อยที่สุดแทน ข้อมูลจริงมีค่าของจำนวนยานพาหนะในแต่ละเซลล์ที่หลายช่องเวลาเป็นศูนย์ ตัวชี้วัดค่าความผิดพลาดที่มีการถ่วงน้ำหนักความผิดพลาดด้วยขนาดของข้อมูลจริงอย่าง normalized weight error vector norm จึงไม่สามารถใช้ได้เพราะมีตัวหาร (ข้อมูลจริง) เป็นศูนย์ จึงเลี่ยงการหารด้วยศูนย์ด้วยการใช้ค่าเฉลี่ยทุกช่องเวลาของข้อมูลแทน โดยตัวชี้วัดความต่างที่ใช้ในการปรับเทียบเขียนได้ดังนี้

$$\text{Density Error} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{T\sum_{t=1}^{T}(\hat{x}_i(t)-x_i(t))^2}{\sum_{t=1}^{T}x_i(t)}\right)}{I} \tag{6.1}$$

$\hat{x}_i(t)$ = จำนวนยานพาหนะในกลุ่มของเซลล์ (segment) i ณ ช่องเวลา t ซึ่งได้จากการจำลองเครือข่าย

$x_i(t)$ = จำนวนยานพาหนะในกลุ่มของเซลล์ i ณ ช่องเวลา t ซึ่งได้จากการเก็บข้อมูลบนเครือข่ายจริง

I = จำนวนกลุ่มของเซลล์ทั้งหมดของเครือข่ายที่ทำการจำลอง

T = ช่องเวลาสุดท้ายที่ทำการจำลองเครือข่าย

ผลการปรับเทียบโดยใช้ genetic algorithm ให้ค่าตัวแปรปรับเทียบของแบบจำลองดังแสดงในตารางที่ 6.2 และให้ผลการจำลองเทียบกับข้อมูลจริงของถนนพญาไทดังรูปที่ 6.2- 6.8

มีตัวแปรปรับเทียบต่าง ๆ ดังนี้

l_{car} = ความยาวรถยนต์ส่วนบุคคลรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

q_i = อัตราการไหลสูงสุด (คัน*เมตรต่อวินาทีต่อช่องทางจราจร)

δ_i = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของแต่ละเซลล์

l_{bus} = ความยาวรถโดยสารประจำทางรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

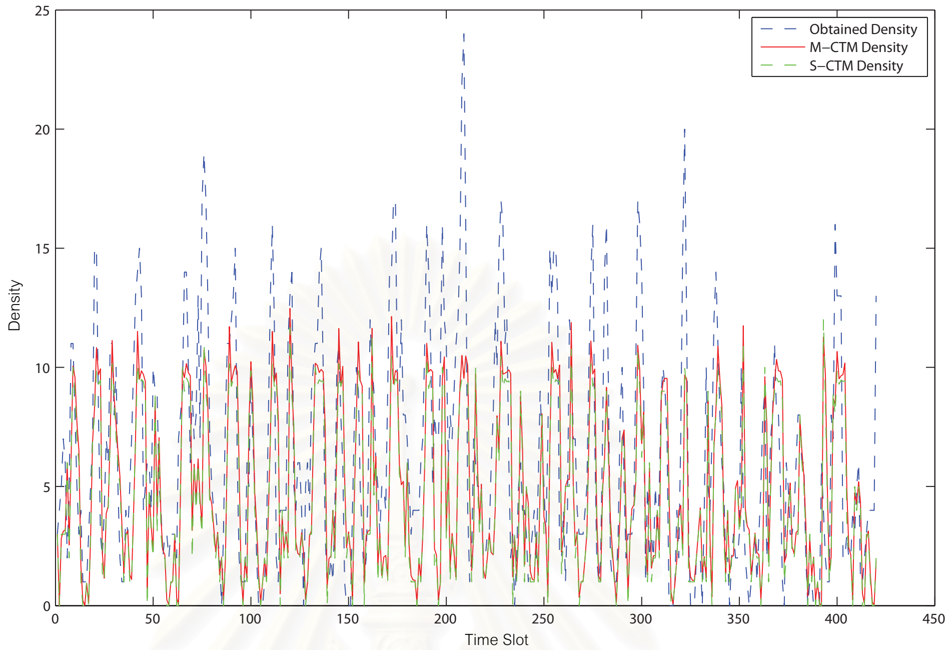
$\tilde{v}_{bus}$ = ความเร็วสัมพัทธ์ของรถโดยสารประจำทาง

Prob (bus) = อัตราส่วนรถโดยสารประจำทางต่อยานพาหนะทั้งหมดโดย $\delta_1, ..., \delta_{11}$ และ l_{car} เป็นตัวแปรปรับเทียบของทั้ง S-CTM และ M-CTM ในขณะที่ $q_i, l_{bus}, \tilde{v}_{bus}$ และ Prob (bus) เป็นตัวแปรปรับเทียบเฉพาะของ M-CTM

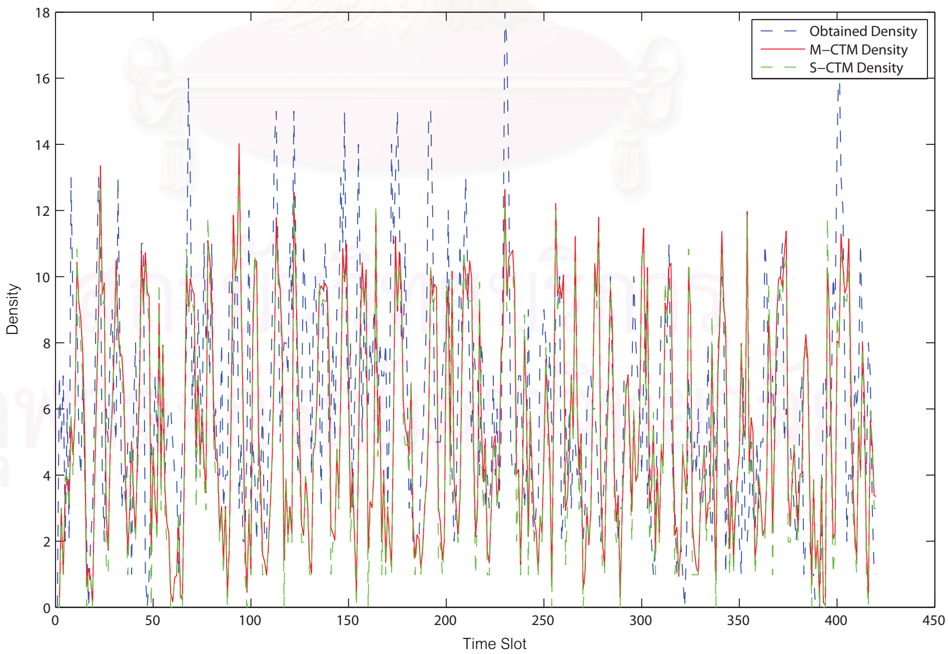
ค่าต่ำสุดและสูงสุดในตารางที่ 6.2 เป็นค่าขอบเขตที่กำหนดในการสุ่มค่าของตัวแปรปรับเทียบต่าง ๆ ใน Genetic Algorithm โดยพิจารณาขอบเขตค่าที่เป็นไปได้จริงของตัวแปรปรับเทียบต่าง ๆ

ตารางที่ 6.2 ค่าตัวแปรปรับเทียบของพญาไท

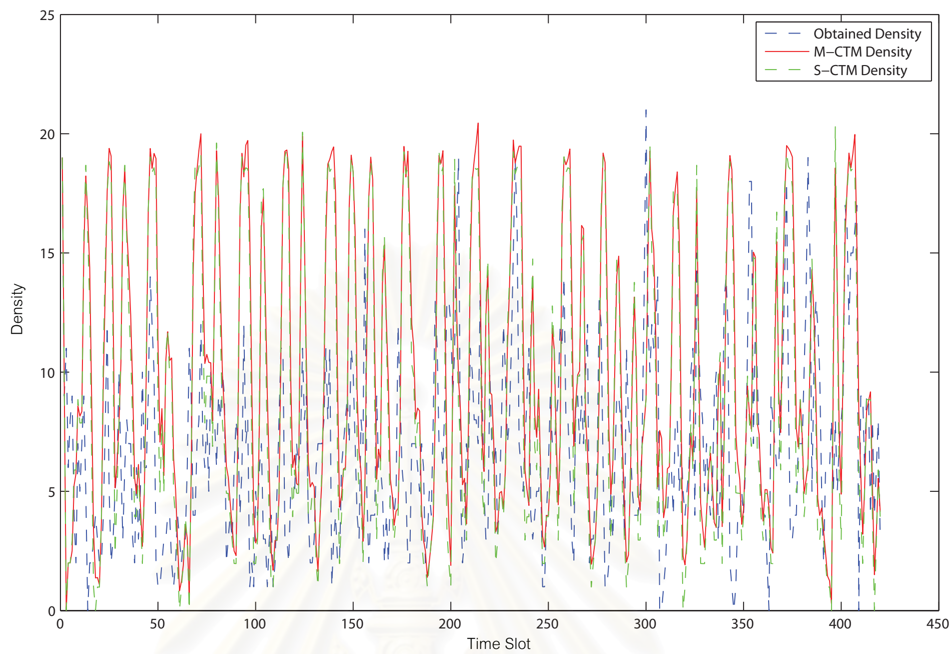
	S-CTM			M-CTM		
	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้
l_{car}	4.5	8	7.99964	4.5	8	4.96024
l_{bus}	-	-	-	12	20	17.2055
Prob (bus)	-	-	-	0	0.2	0.19982
$\tilde{v}_{bus}$	-	-	-	0.5	1	0.57429
δ_1	0.3	1	0.99597	0.3	1	0.77206
δ_2	0.3	1	0.96311	0.3	1	0.30183
δ_3	0.3	1	0.80601	0.3	1	0.453
δ_4	0.3	1	0.35413	0.3	1	0.82499
δ_5	0.3	1	0.99597	0.3	1	0.56558
δ_6	0.3	1	0.76024	0.3	1	0.73347
δ_7	0.3	1	0.45152	0.3	1	0.30051
δ_8	0.3	1	0.56039	0.3	1	0.48789
δ_9	0.3	1	0.30001	0.3	1	0.3786
δ_{10}	0.3	1	0.3	0.3	1	0.30972
δ_{11}	0.3	1	0.76882	0.3	1	0.71444
q_i	2.3	2.3	2.3	2.3	4.6	1.71*2.3
Density Error	-	-	0.74576	-	-	0.681704



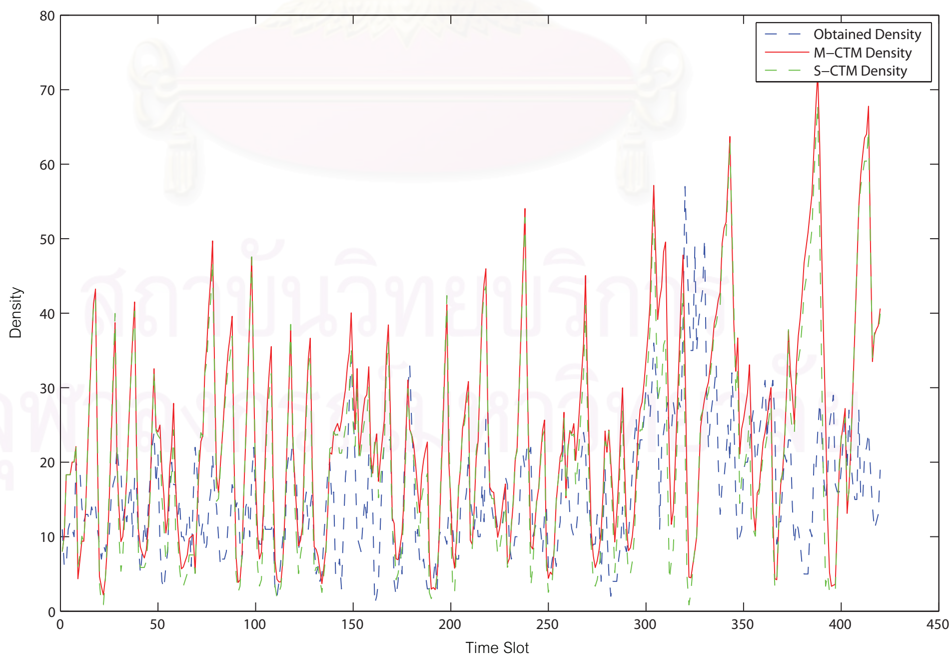
รูปที่ 6.2 ผลการจำลองถนนพญาไทของเซลล์ที่ 1



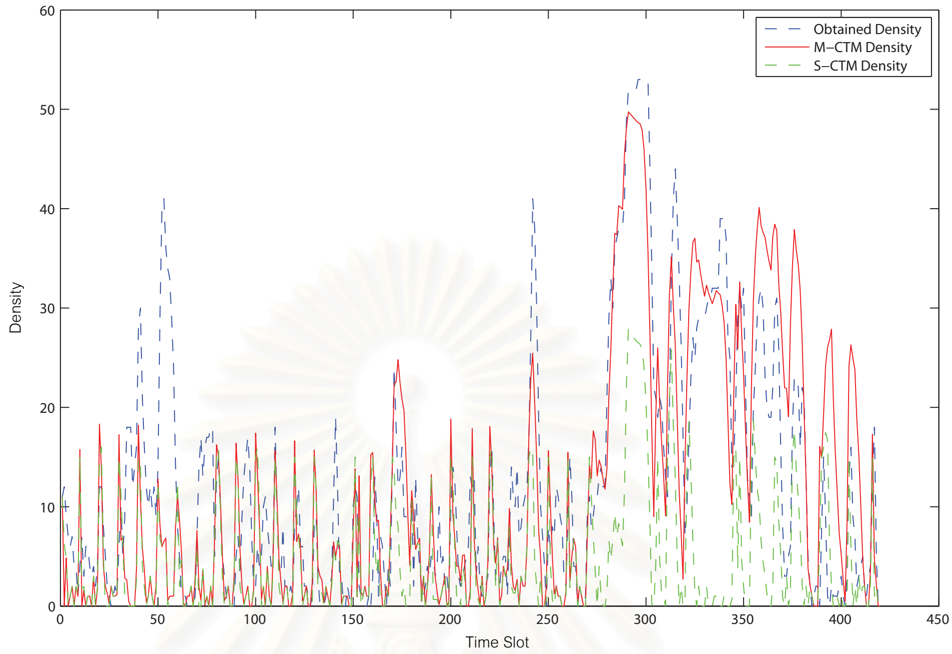
รูปที่ 6.3 ผลการจำลองถนนพญาไทของเซลล์ที่ 2



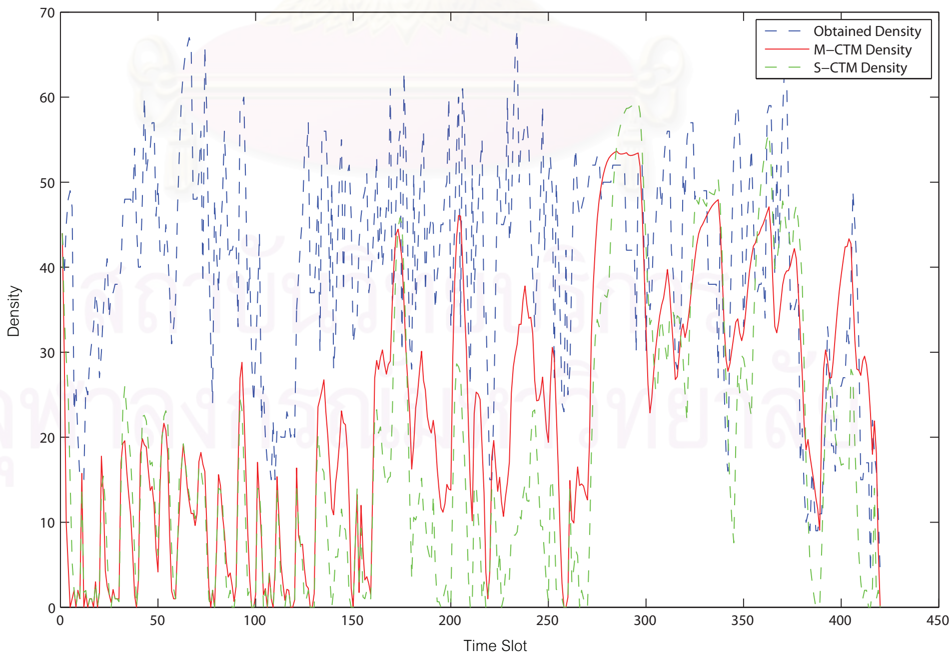
รูปที่ 6.4 ผลการจำลองถนนพญาไทของเซลล์ที่ 3 และ 4



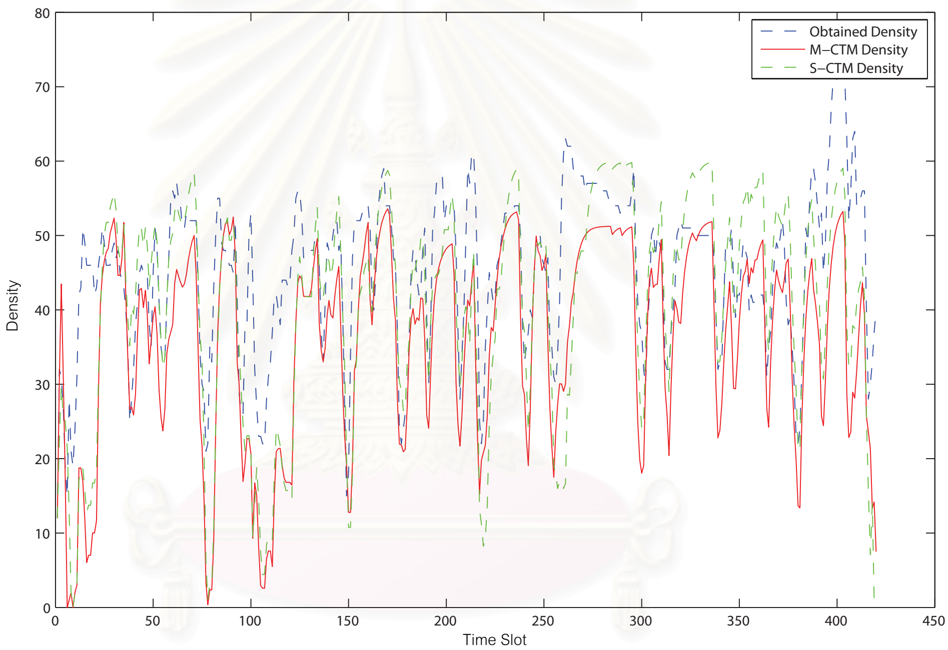
รูปที่ 6.5 ผลการจำลองถนนพญาไทของเซลล์ที่ 5, 6 และ 7



รูปที่ 6.6 ผลการจำลองถนนพญาไทของเซลล์ที่ 8



รูปที่ 6.7 ผลการจำลองถนนพญาไทของเซลล์ที่ 9



รูปที่ 6.8 ผลการจำลองถนนพญาไทของเซลล์ที่ 10

6.2 การจำลองระบบเครือข่ายจริงขนาดใหญ่ที่มีสัญญาณไฟจราจรบนถนนสาทร

6.2.1 สถานที่และวิธีเก็บข้อมูล

ใช้ข้อมูลเครือข่าย, (ความยาวถนน, การเชื่อมต่อ, จำนวนเลน) และรอบสัญญาณไฟจราจรจากรายงานฉบับสุดท้าย เล่มที่ 4 การแก้ไขปัญหาจราจรพื้นที่สาทร-สีลม [29]

ข้อมูลสภาพการจราจรได้มาจากการจำลองโดยใช้ปริมาณยานพาหนะที่เข้าสู่ระบบจากข้อมูลจริงด้วย MITSIM ซึ่งใช้แบบจำลองจุลภาค car following model ในการจำลองสภาพการจราจรเนื่องจากข้อมูลจริงที่ถอดจากกล้องวิดีโอได้นั้นไม่ครอบคลุมถึงจำนวนรถบนถนนสาธรซึ่งเป็นระบบขนาดใหญ่ ทั้งนี้ MITSIM เป็นโปรแกรมจำลองทราฟฟิกแบบจุลภาคด้วยแบบจำลองการขับรถตามกันซึ่งได้รับการทดสอบและยอมรับอย่างแพร่หลาย [30, 31]

ระบบที่พิจารณาคือถนนสาทรเหนือตั้งแต่แยกสุรศักดิ์จนถึงแยกวิทยุได้ถูกจำลองดังรูปที่ 6.9-6.12 ช่องเวลาและความยาวเซลล์ที่ใช้ในแบบจำลอง มีขนาด 5 วินาทีและ 80 เมตรตามลำดับ

ทราฟฟิกที่ใช้ในการจำลองเป็นทราฟฟิกอย่างง่ายโดยให้ยานพาหนะวิ่งบนนถนสาธรเหนือจากแยกสาธรสุรศักดิ์ไปยังแยกวิทยุโดยไม่มีการเลี้ยวออกจากถนนสาธร (ยานพาหนะวิ่งตรงอย่างเดียว) แบ่งเป็นรถโดยสารส่วนบุคคล 80 % และรถโดยสารประจำทาง 20 % โดยให้มียานพาหนะเข้าสู่แยกสุรศักดิ์ตามเวลาดังรูปที่ 6.13

6.2.2 ผลการทดลอง

จากรูปที่ 6.14-6.18 ผลการจำลองที่ได้ทั้งจาก S-CTM และ M-CTM สามารถจำลองการเปลี่ยนแปลงค่าตามผลการจำลองจากแบบจำลองจุลภาคของ MITSIM ได้ใกล้เคียงมาก และทั้ง 2 แบบจำลองมีความแตกต่างกันน้อยมากซึ่งสอดคล้องกับค่า Density Error จากการคำนวณในตารางที่ 6.3 ของแบบจำลองทั้งสองซึ่งมีค่าใกล้เคียงกัน

ผลการปรับเทียบโดยใช้ genetic algorithm ให้ค่าตัวแปรปรับเทียบของแบบจำลองดังแสดงในตารางที่ 6.3 และให้ผลการจำลองเทียบกับข้อมูลจริงของถนนสาทรดังรูปที่ 6.14-6.18

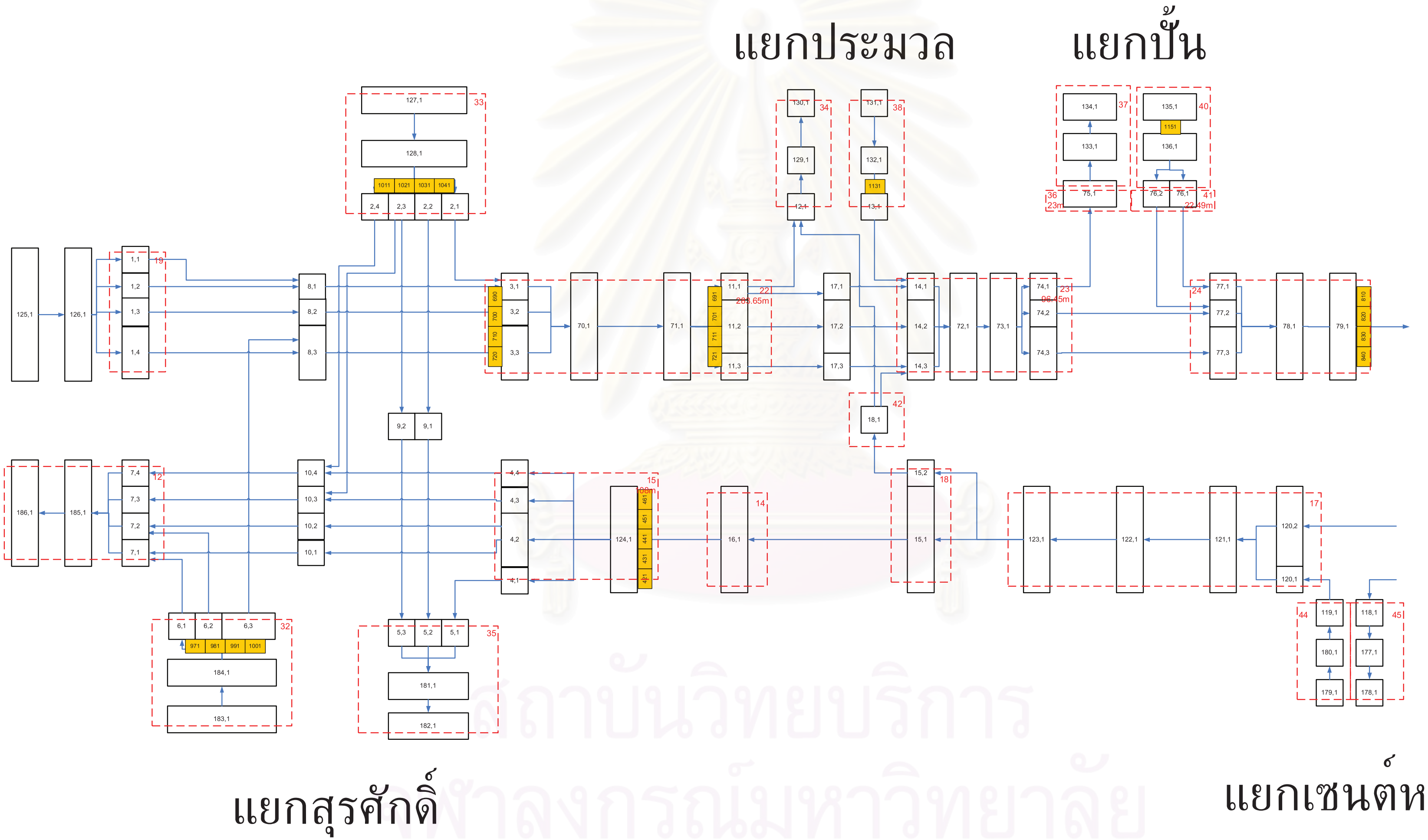
l_{car} = ความยาวรถยนต์ส่วนบุคคลรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

q_i = อัตราการไหลสูงสุด (คัน*เมตรต่อวินาทีต่อช่องทางจราจร)

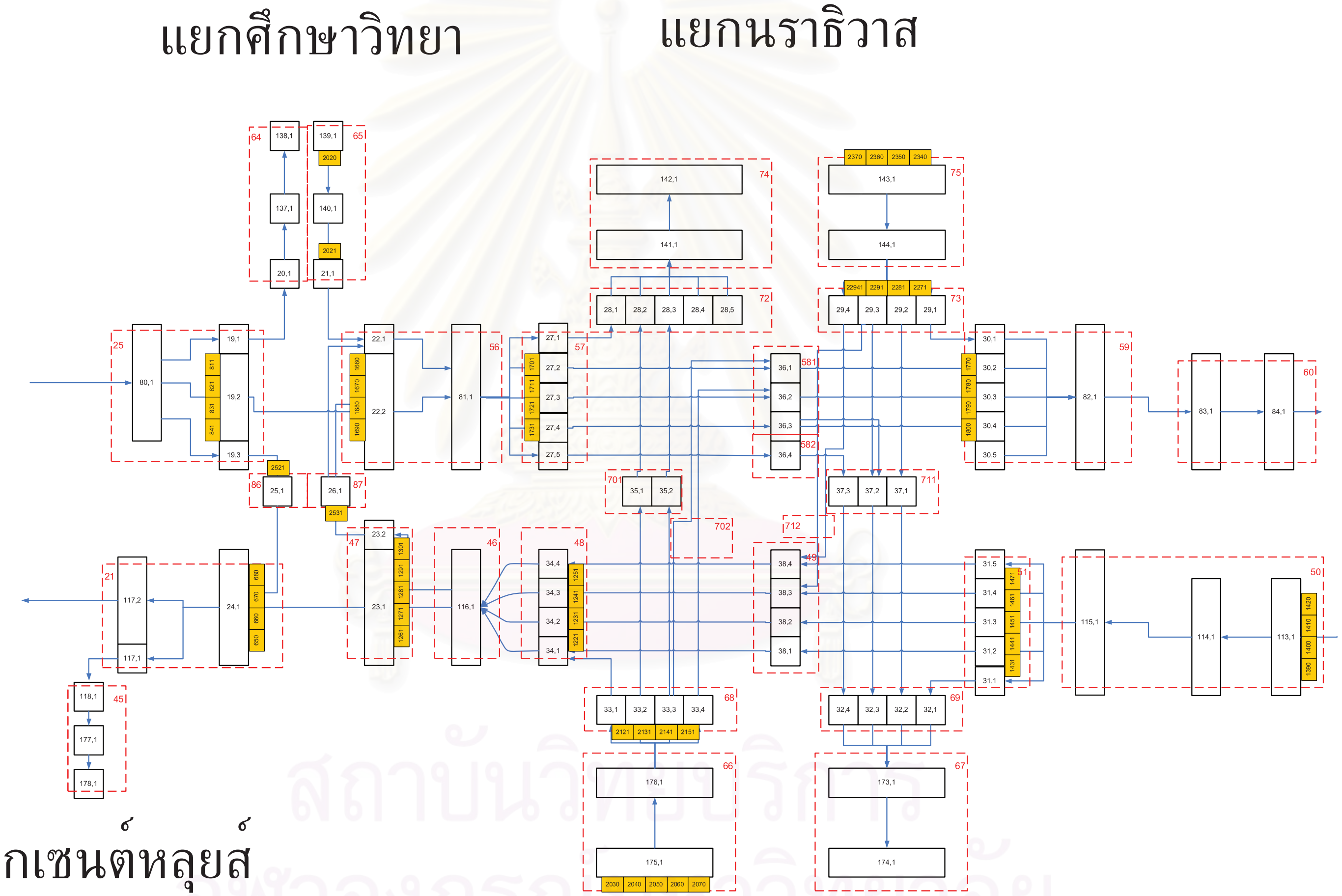
δ_i = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของแต่ละเซลล์ โดยกำหนดให้ทุกเซลล์มีค่าเท่ากัน

l_{bus} = ความยาวรถโดยสารประจำทางรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

$\tilde{v}_{bus}$ = ความเร็วสัมพัทธ์ของรถโดยสารประจำทางโดย l_{car}, q_i และ δ_i เป็นตัวแปรปรับเทียบของทั้ง S-CTM และ M-CTM ในขณะที่ l_{bus} และ $\tilde{v}_{bus}$ เป็นตัวแปรปรับเทียบเฉพาะของ M-CTM

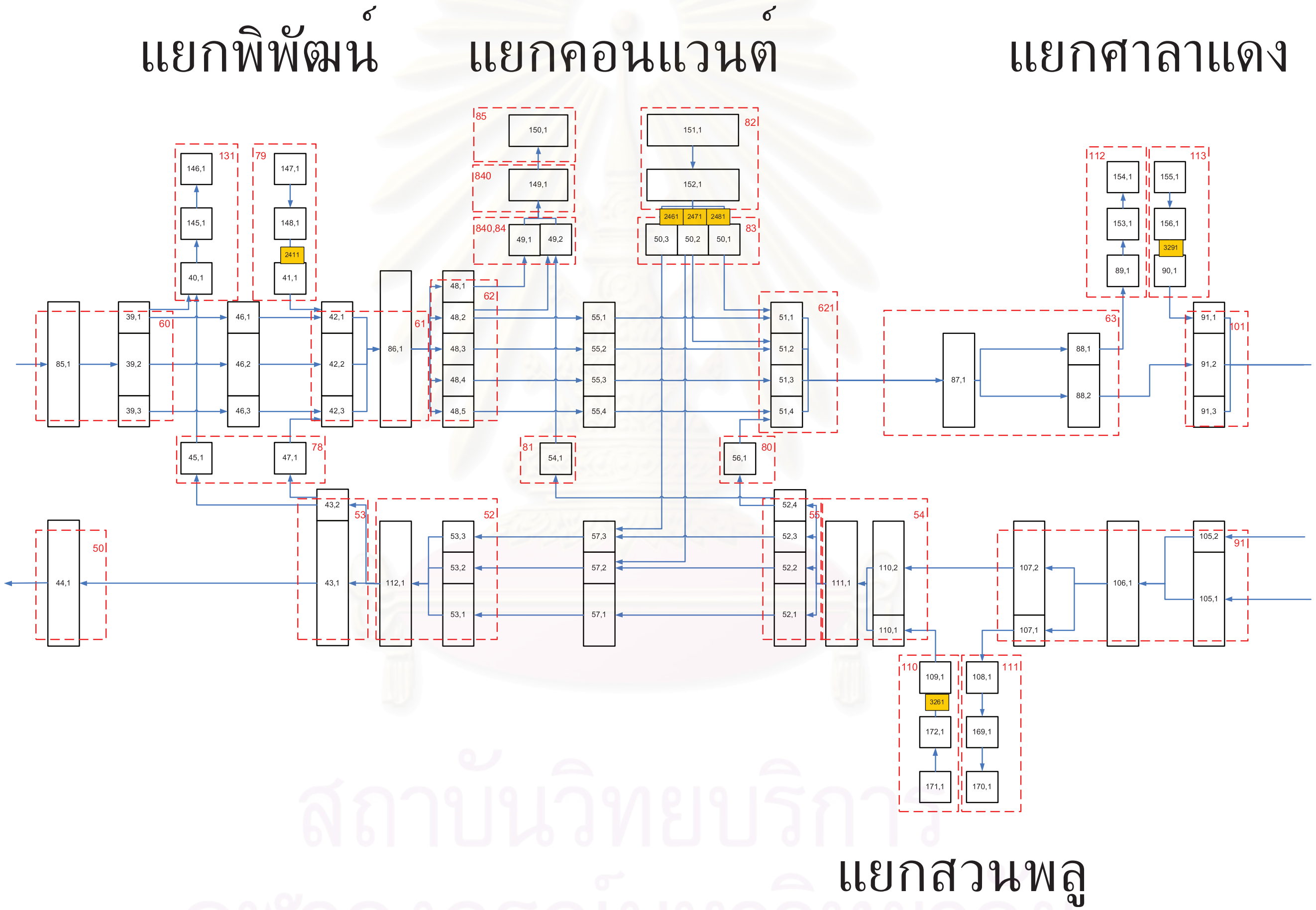


รูปที่ 6.9 แบบจำลองถนนสาทรส่วนที่ 1

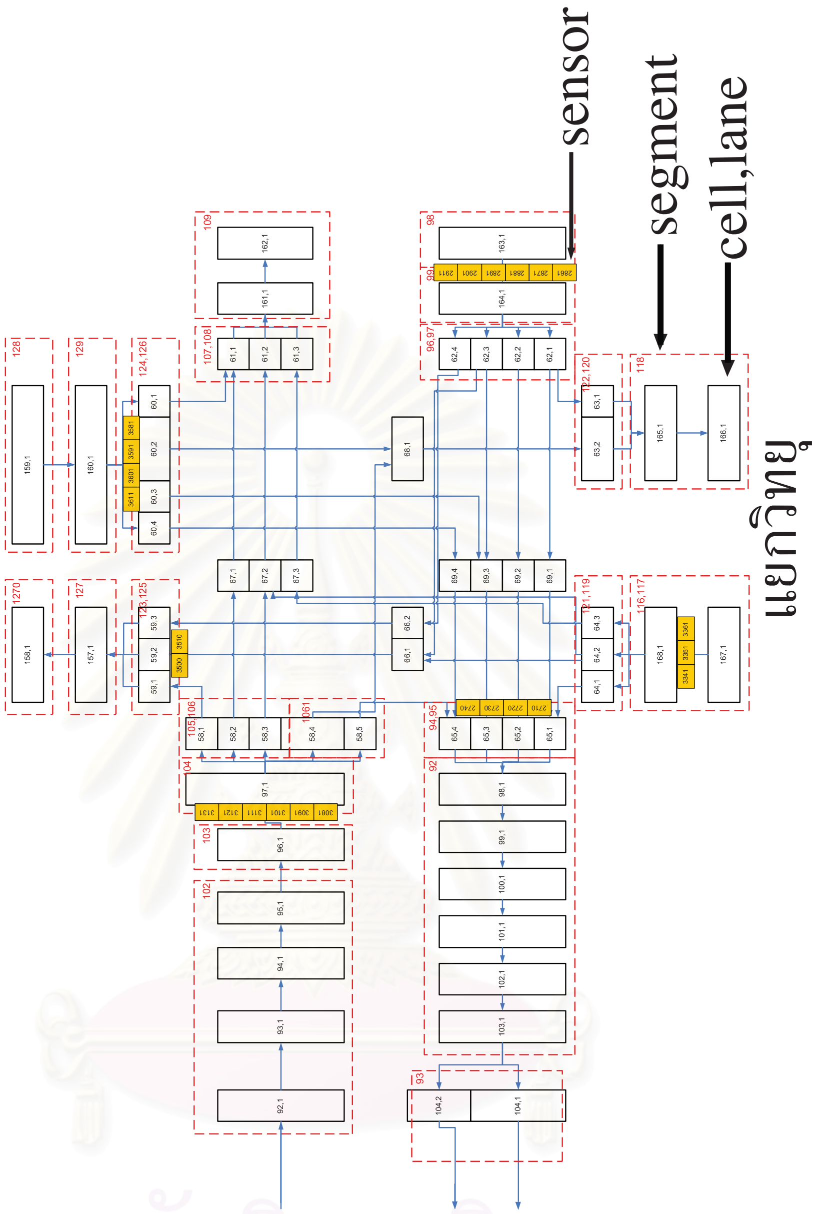


รูปที่ 6.10 แผนจำลองถนนสาทรส่วนที่ 2

68



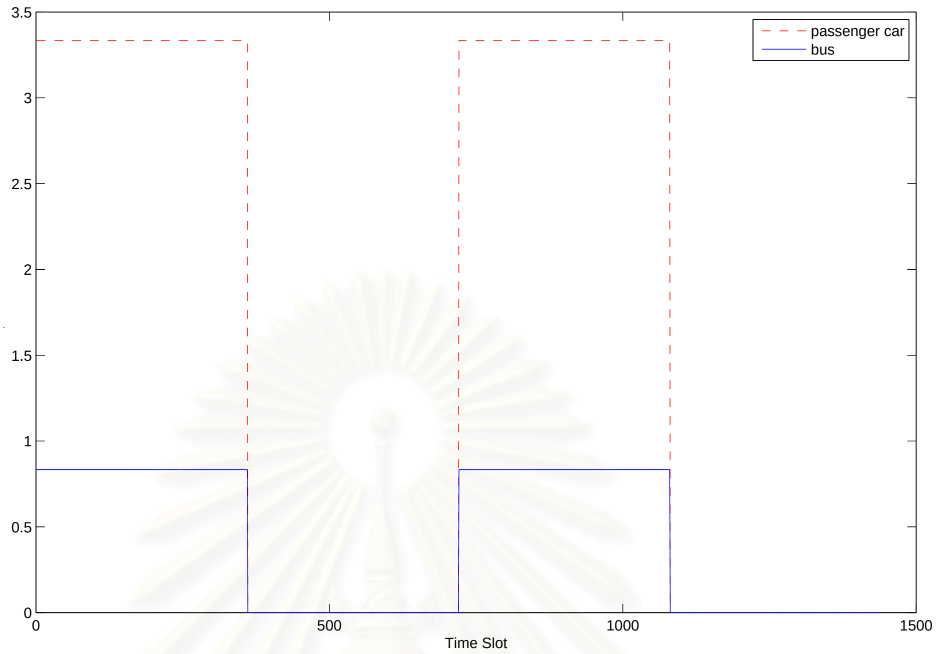
รูปที่ 6.11 แผนภาพถนนสาทรส่วนที่ 3



รูปที่ 6.12 แบบจำลองถนนสาทรส่วนที่ 4

ตารางที่ 6.3 ค่าตัวแปรปรับเทียบของสาทร

	S-CTM			M-CTM		
	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้
l_{car}	5.5	7	6.99924	5.5	7	5.8522
l_{bus}	-	-	-	12	16	13.95893
$\tilde{v}_{bus}$	-	-	-	0.5	1	0.9733
δ_i	0.3	1	0.4089	0.3	1	0.44287
q_i	2.3	2*2.3	1.47*2.3	2.3	2*2.3	1.76*2.3
Density Error	-	-	0.6293521	-	-	0.6245406



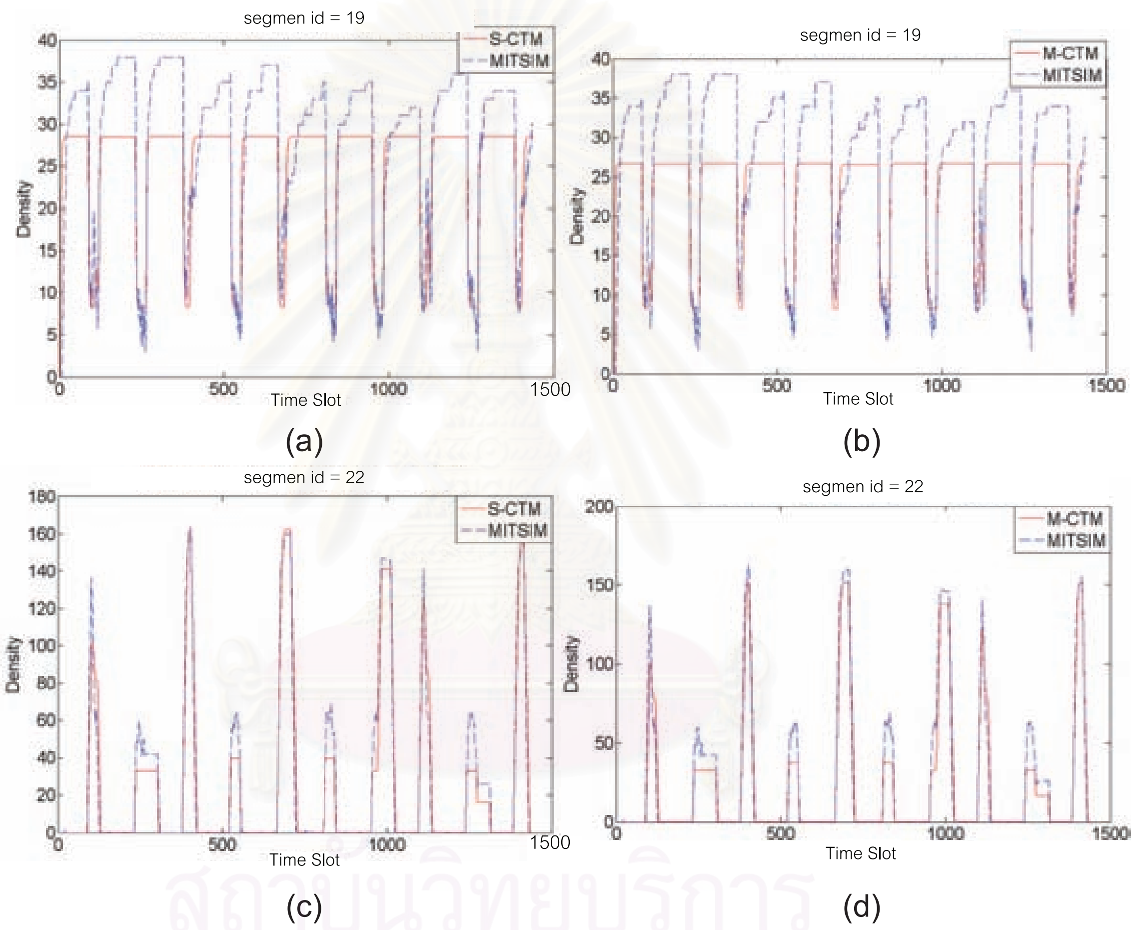
รูปที่ 6.13 อัตราส่วนทราฟฟิกที่เข้าสู่ระบบกรณีถนนสาทร

6.3 สรุปการวิเคราะห์ผลการจำลองพญาไทและสาทร

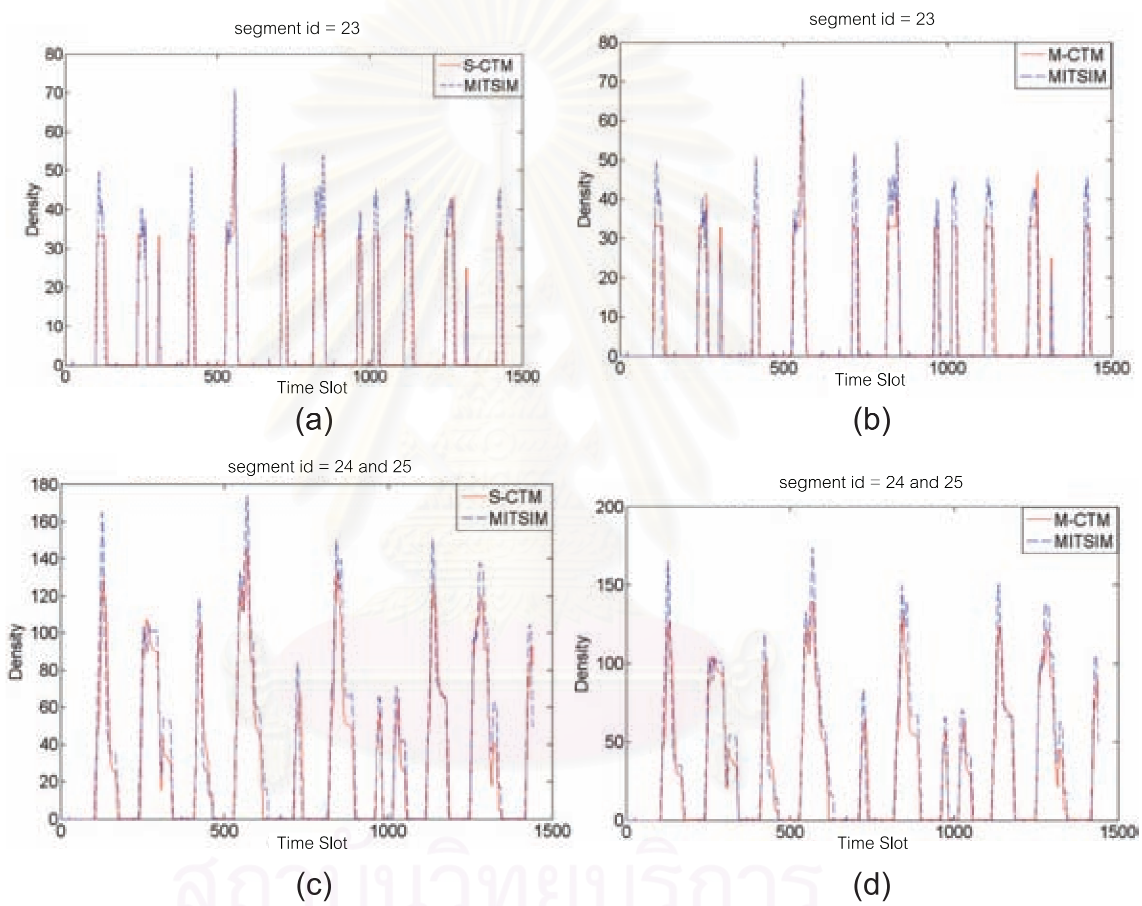
1. เมื่อเทียบความถูกต้อง ผลการจำลองของทั้ง S-CTM และ M-CTM สามารถใช้จำลองเครือข่ายจริงได้

2. S-CTM และ M-CTM ให้ผลที่ใกล้เคียงมากเนื่องจากอัตราการไหลถูกรบกวนด้วยสัญญาณไฟและทราฟฟิกที่เข้ามามีสัดส่วนยานพาหนะในระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา จึงทำให้ S-CTM สามารถปรับตัวให้เข้ากับส่วนประกอบของยานพาหนะที่เข้ามาได้ ทั้งนี้จะเห็นได้จากตาราง 6.3 ว่าค่า l_{car} ของแบบจำลองการส่งเซลล์ดั้งเดิมมีค่าใกล้เคียงค่าสูงสุด เพราะ S-CTM ต้องปรับค่า l_{car} เพื่อพยายามจำลองการมีรถโดยสารประจำทางในระบบ

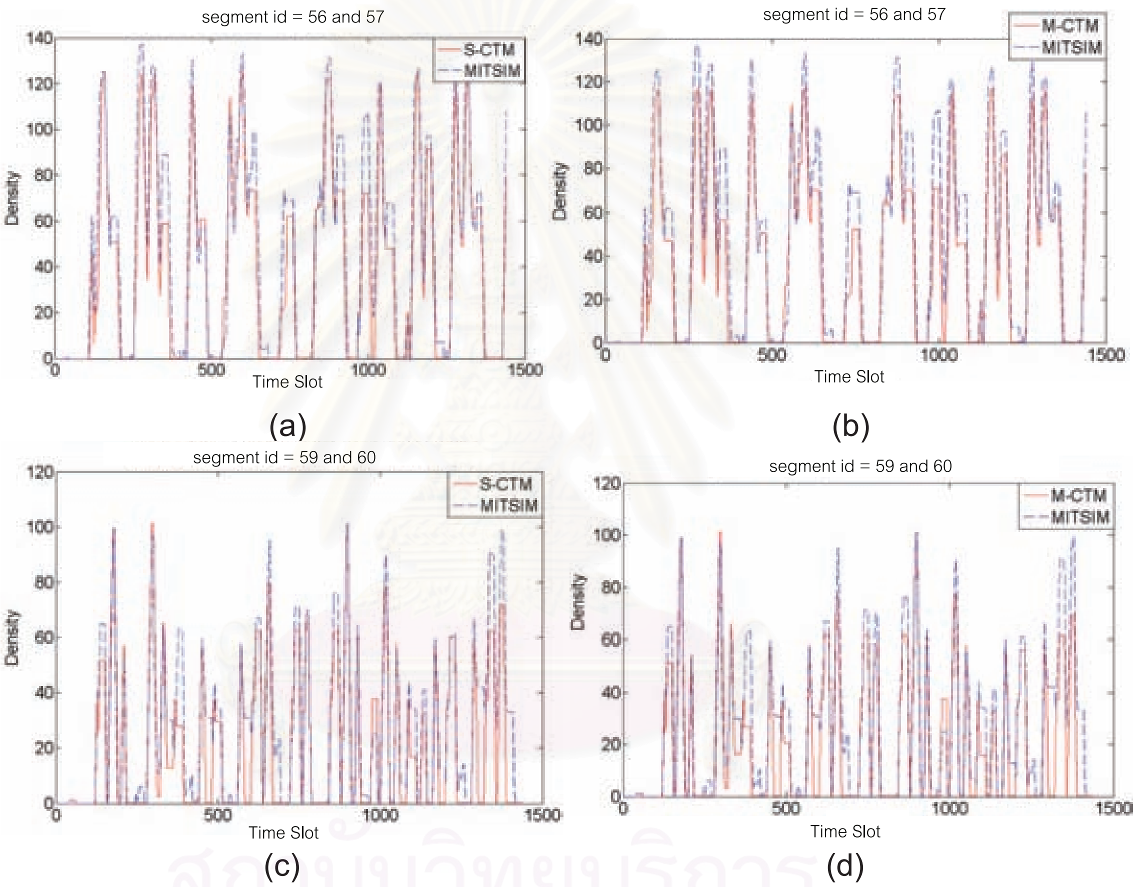
3. ทราฟฟิกที่เข้ามามีปริมาณค่อนข้างมาก ระบบอยู่ในสถานะติดขัด S-CTM และ M-CTM จึงให้ผลการทำนายที่ใกล้เคียงกัน เพราะยิ่งเมื่อเกิดการติดขัดมาก ความแตกต่างระหว่างความสามารถในการเคลื่อนที่จะมีค่าน้อยลงจนเท่าเทียมเมื่อยานพาหนะหยุดนิ่ง S-CTM และ M-CTM จึงให้ผลการจำลองที่ใกล้เคียงกัน ซึ่งสามารถอธิบายได้โดยพิจารณาการลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันของอัตราส่วนการครอบครองที่ว่างสัมพัทธ์ของยานพาหนะในทุกประเภทเมื่อค่าความหนาแน่นรวมของถนนเพิ่มขึ้นสู่สูงสุด (ดูรูปที่ 4.1)



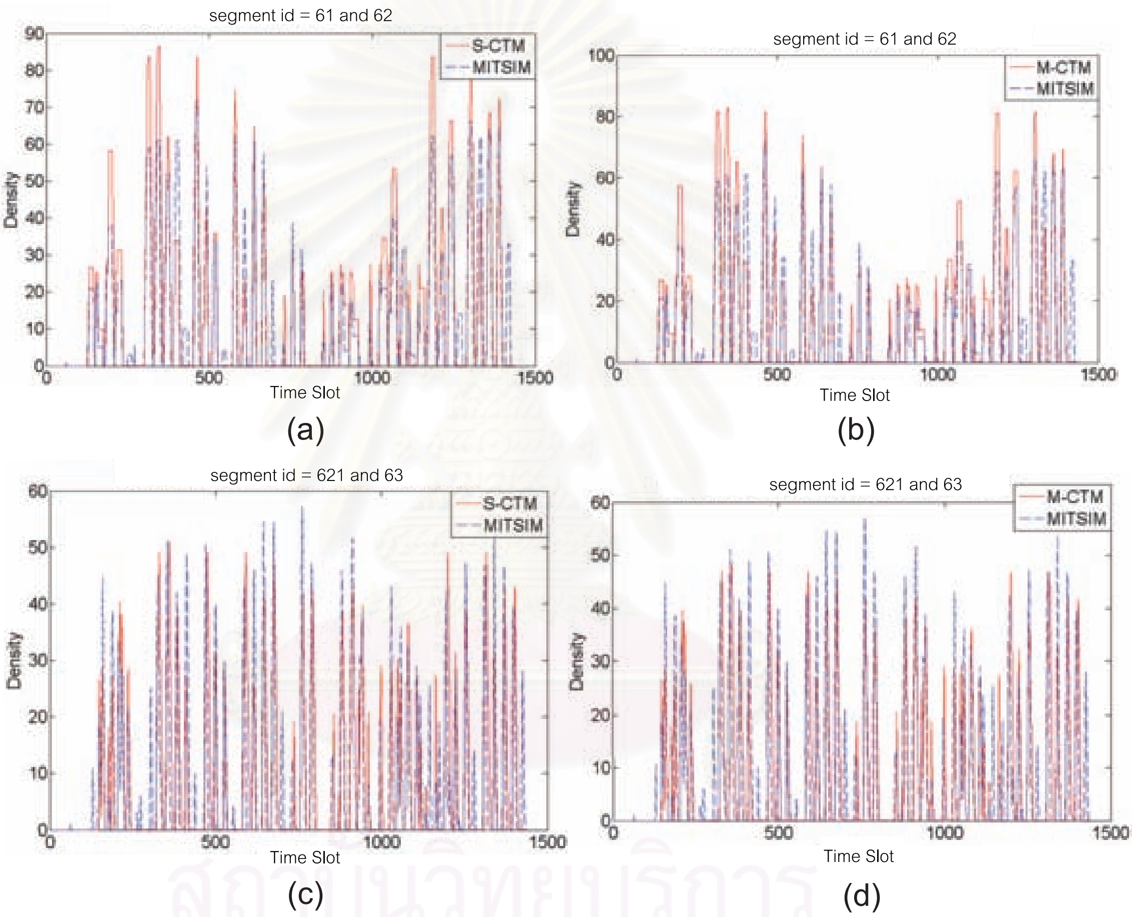
รูปที่ 6.14 ผลการจำลองสาทรของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม (S-CTM) และแบบจำลองที่นำเสนอ (M-CTM) เทียบกับแบบจำลองจุลภาคของ MITSIM



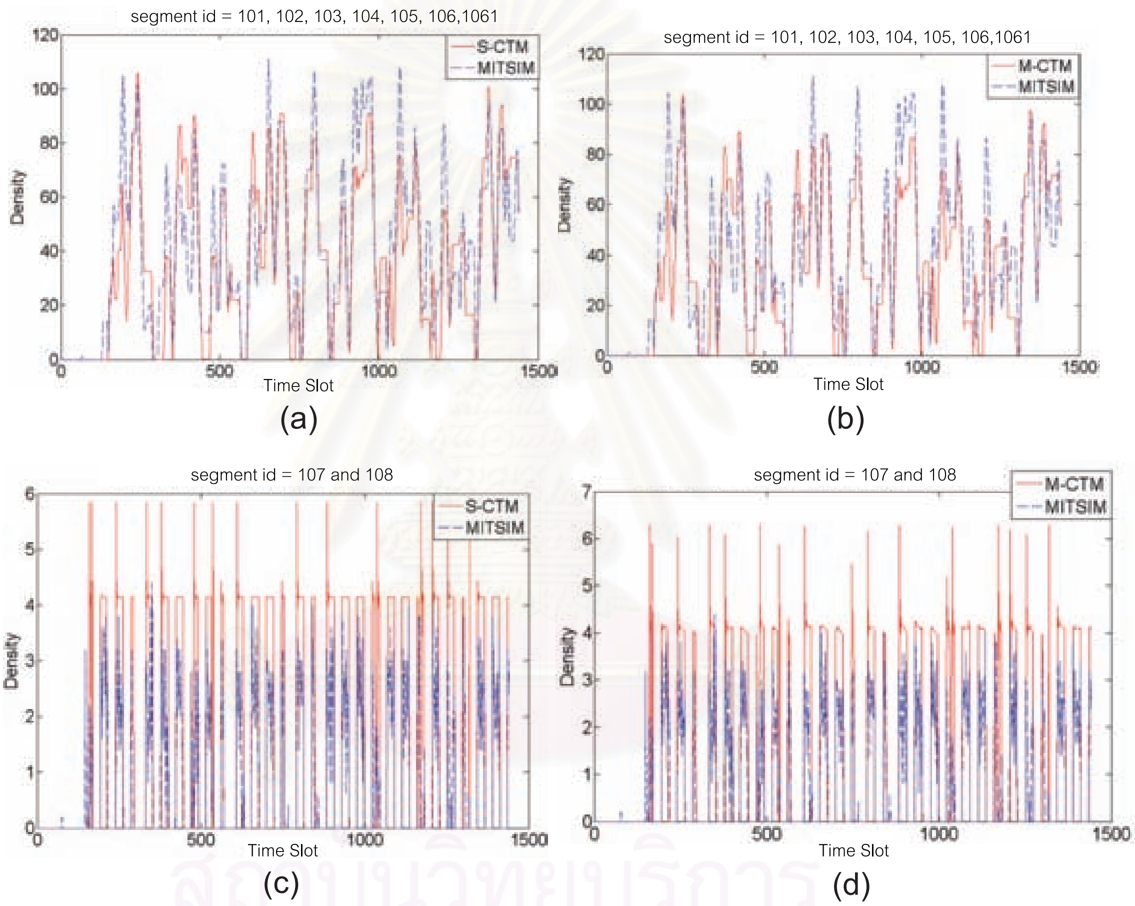
รูปที่ 6.15 ผลการจำลองสาทรของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม (S-CTM) และแบบจำลองที่นำเสนอ (M-CTM) เทียบกับแบบจำลองจุลภาคของ MITSIM



รูปที่ 6.16 ผลการจำลองสาทรของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม (S-CTM) และแบบจำลองที่นำเสนอ (M-CTM) เทียบกับแบบจำลองจุลภาคของ MITSIM



รูปที่ 6.17 ผลการจำลองสาทรของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม (S-CTM) และแบบจำลองที่นำเสนอ (M-CTM) เทียบกับแบบจำลองจุลภาคของ MITSIM



รูปที่ 6.18 ผลการจำลองสาทรของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม (S-CTM) และแบบจำลองที่นำเสนอ (M-CTM) เทียบกับแบบจำลองจุลภาคของ MITSIM

6.4 การจำลองเครือข่ายสมมุติเพื่อพิจารณาผลกระทบจากสัดส่วนยานพาหนะในแต่ละประเภท

เนื่องจาก ข้อจำกัด ใน การ เก็บ ข้อมูล จริง จึง ไม่ สามารถ ทดสอบ ปรากฏการณ์ กระจาย ตัว ออก เป็น กลุ่มก้อน (platoon dispersion) ด้วยแบบจำลองแบบไม่แยกประเภทยานพาหนะ ดังนั้นการศึกษาความแตกต่างอย่างชัดเจนของ S-CTM และ M-CTM จึงอาศัยทำการสร้างเครือข่ายสมมุติอย่างง่าย และกำหนดทราฟฟิกสมมุติเพื่อให้สามารถเห็นปรากฏการณ์และความต่างของแบบจำลองทั้งสองได้อย่างชัดเจน โดยได้มีการเทียบความถูกต้องกับ MITSIM แทนข้อมูลจริง โดยแยกการจำลองออกเป็น 3 กรณีได้ดังนี้

1. กรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา (stationary vehicle composition)
2. กรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบเปลี่ยนตามเวลา (non-stationary vehicle composition)
3. การทดสอบความสามารถในการจำลองปรากฏการณ์กระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อน

การจำลองทั้ง 3 กรณีจะมีค่าตัวแปรเหมือนกันดังนี้

- ความยาวเซลล์ = 80 เมตร
- ความยาวรถส่วนบุคคลไม่รวมช่องว่างระหว่างคัน = 5.5 เมตร
- ความยาวรถโดยสารประจำทางไม่รวมช่องว่างระหว่างคัน = 12 เมตร
- $v_{car} = 15$ เมตรต่อวินาที
- $v_{bus} = 10$ เมตรต่อวินาที
- ช่องเวลา = 5 วินาที

แบ่งกรณีศึกษาได้ดังนี้

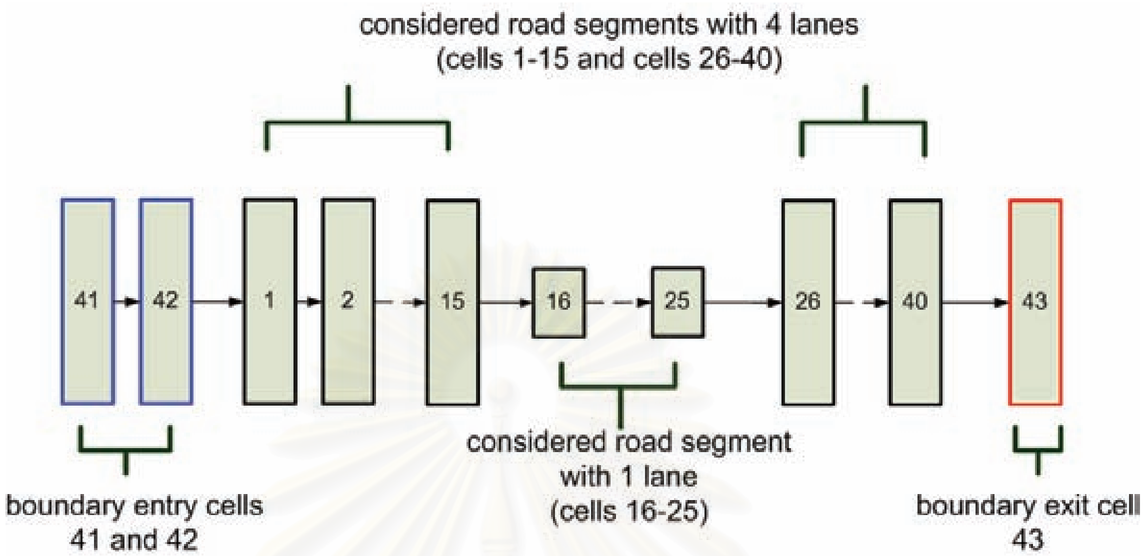
6.4.1 กรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา

เครือข่ายมีลักษณะดังรูปที่ 6.19 โดยมี ความยาวเซลล์เท่ากับ 80 เมตร เซลล์มี 4 ช่องทางจราจรยกเว้นเซลล์ที่ 16 ถึง 25 มี 1 ช่องทางจราจรส่วนเซลล์ที่ 41 ถึง 43 เป็นเซลล์ขอบเขต (boundary cell) เพื่อทำการจำลองการเข้ามาและออกจากเครือข่ายของยานพาหนะ ไม่ใช่เซลล์ที่จำลองเครือข่ายเหมือนเซลล์ที่ 1 ถึง 40

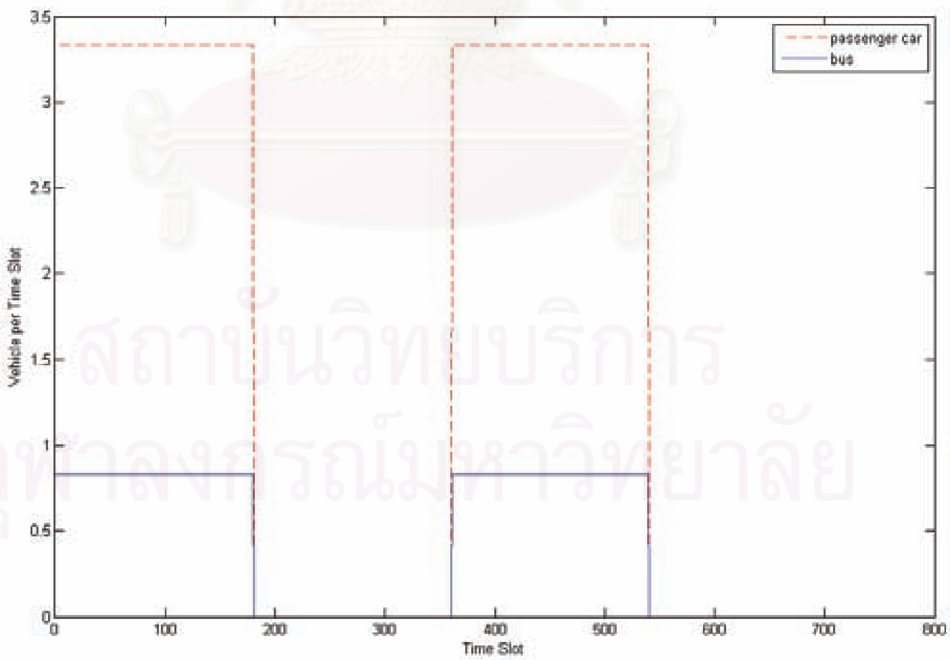
กรณีการจำลองทราฟฟิกที่เข้าสู่ระบบจะมีสัดส่วนยานพาหนะคงที่ไม่แปรตามเวลาจะแบ่งย่อยได้อีก 2 กรณีคือ

1. ไม่มีรถโดยสารประจำทางเข้าสู่เครือข่าย
2. มีรถโดยสารประจำทางเข้าสู่เครือข่ายในอัตราส่วน 20 % ของยานพาหนะทั้งหมด

โดยยานพาหนะทั้ง 2 ประเภทจะเข้ามาพร้อมกันเป็น 2 ช่วง โดยช่วงแรกจะเข้ามาในช่วงเวลา 15 นาทีแรก ช่วงที่สองจะเข้ามาในช่วงเวลาตั้งแต่นาทีที่ 30 ถึง 45 และมีจำนวนยานพาหนะที่เข้ามาในแต่ละช่วงทั้งหมดจะเท่ากับ 1500 คันในทั้ง 2 กรณีย่อย (จำนวนยานพาหนะรวมคงที่ในทั้ง 2 กรณี) ดังรูปที่ 6.20



รูปที่ 6.19 เครือข่ายตัวอย่างกรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา



รูปที่ 6.20 อัตราส่วนทราฟฟิกที่เข้าสู่ระบบกรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา

6.4.1.1 กรณีไม่มีรถโดยสารประจำทางเข้ามาในเครือข่าย

จะมีค่าตัวแปรปรับเทียบดังนี้

l_{car} = ความยาวรถยนต์ส่วนบุคคลรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

q_i = อัตราการไหลสูงสุด (คัน*เมตรต่อวินาทีต่อช่องทางจราจร)

δ_1 = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ที่มี 4 ช่องทางจราจร

δ_2 = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ที่มี 1 ช่องทางจราจร

จากการปรับเทียบด้วย genetic algorithm พบว่าตัวแปรที่ให้ความผิดพลาดของการจำลองน้อยที่สุดมีค่าดังแสดงในตารางที่ 6.4 และได้ผลการจำลองดังในรูปที่ 6.21

ตารางที่ 6.4 ค่าตัวแปรปรับเทียบของกรณีสัดส่วนยานพาหนะคงที่เมื่อไม่มีรถโดยสารประจำทาง

	S-CTM		
	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้
l_{car}	5.5	7	5.7718
δ_1	0.3	1	0.34334
δ_2	0.3	1	0.45732
q_i	2.3	2*2.3	1.4959*2.3
Density Error	-	-	0.6375491685646234

6.4.1.2 กรณีมีรถโดยสารประจำทางเข้ามาเป็นสัดส่วน 20 % ของยานพาหนะทั้งหมดที่เข้าสู่ระบบ

จะมีค่าตัวแปรปรับเทียบดังนี้

l_{car} = ความยาวรถยนต์ส่วนบุคคลรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

q_i = อัตราการไหลสูงสุด (คัน*เมตรต่อวินาทีต่อช่องทางจราจร)

δ_1 = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ที่มี 4 ช่องทางจราจร

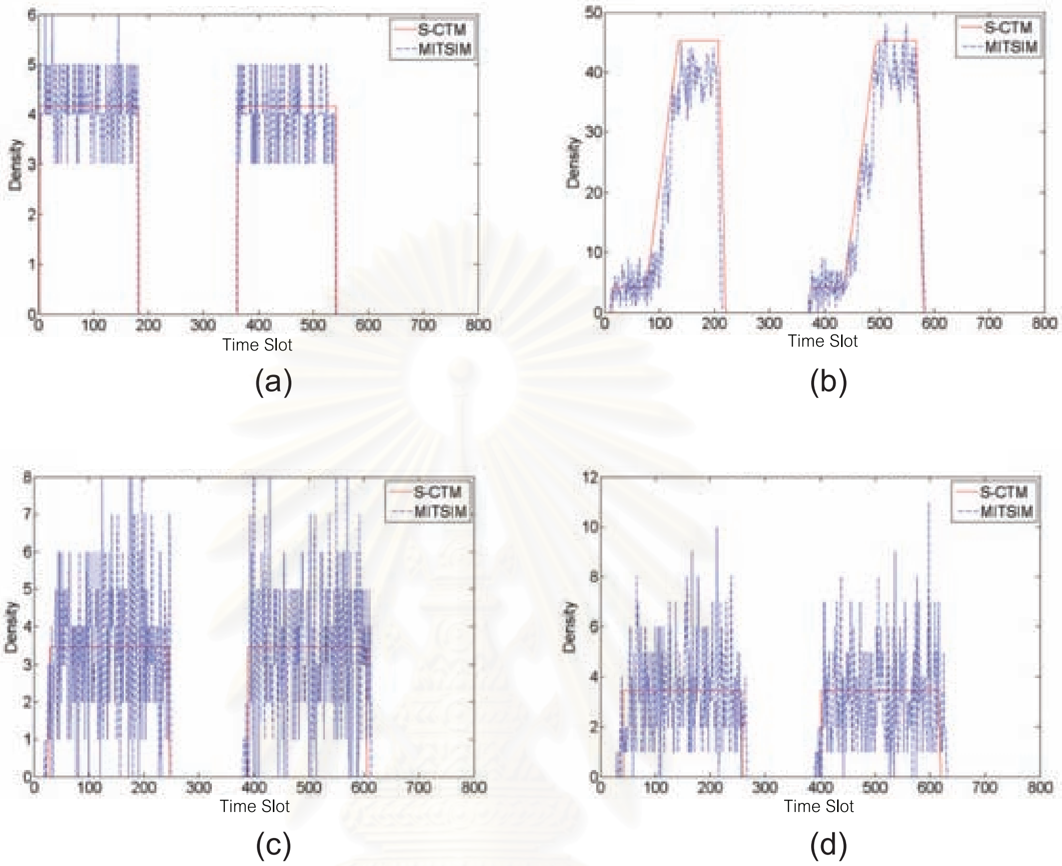
δ_2 = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ที่มี 1 ช่องทางจราจร

l_{bus} = ความยาวรถโดยสารประจำทางรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

$\tilde{v}_{bus}$ = ความเร็วสัมพัทธ์ของรถโดยสารประจำทาง

โดย l_{car}, q_i, δ_1 และ δ_2 เป็นตัวแปรปรับเทียบของทั้ง S-CTM และ M-CTM ในขณะที่ l_{bus} และ $\tilde{v}_{bus}$ เป็นตัวแปรปรับเทียบเฉพาะของ M-CTM

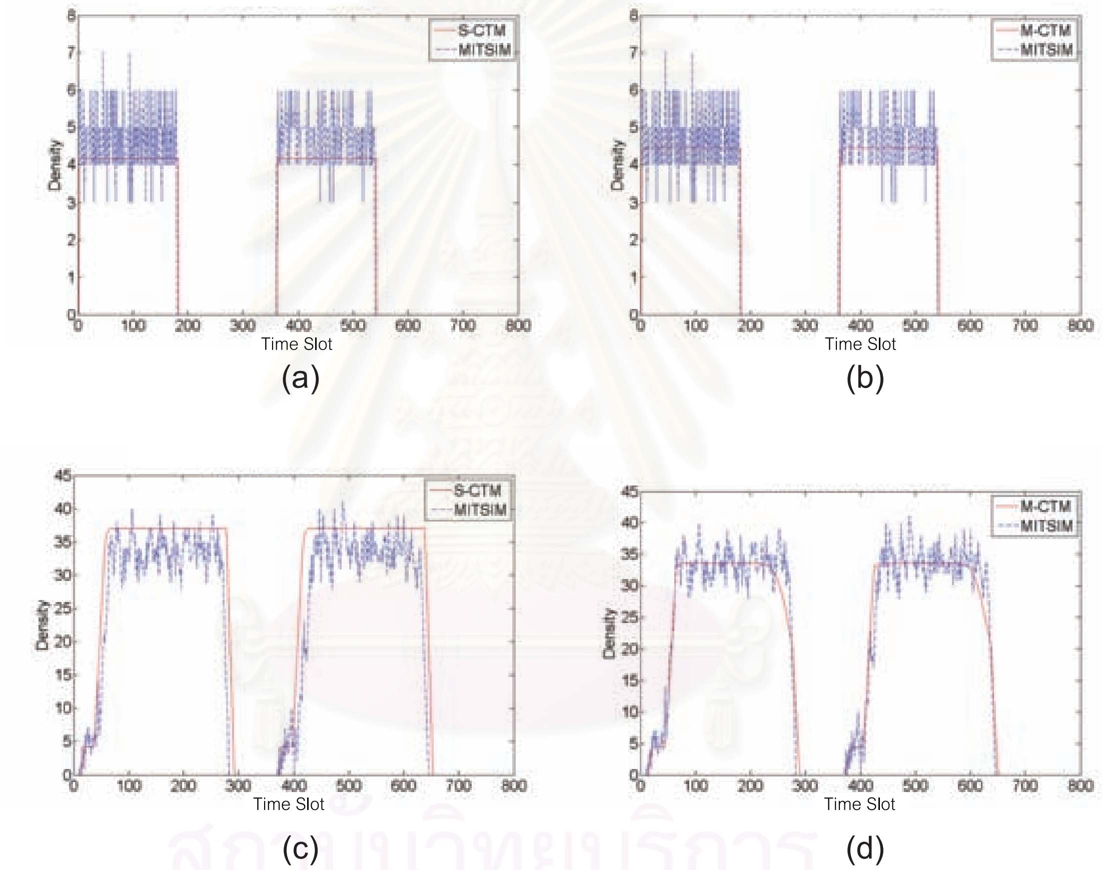
จากการปรับเทียบด้วย genetic algorithm พบว่าตัวแปรที่ให้ความผิดพลาดของการจำลองน้อยที่สุดมีค่าดังแสดงในตารางที่ 6.5 และได้ผลการจำลองดังในรูปที่ 6.22 และ 6.23



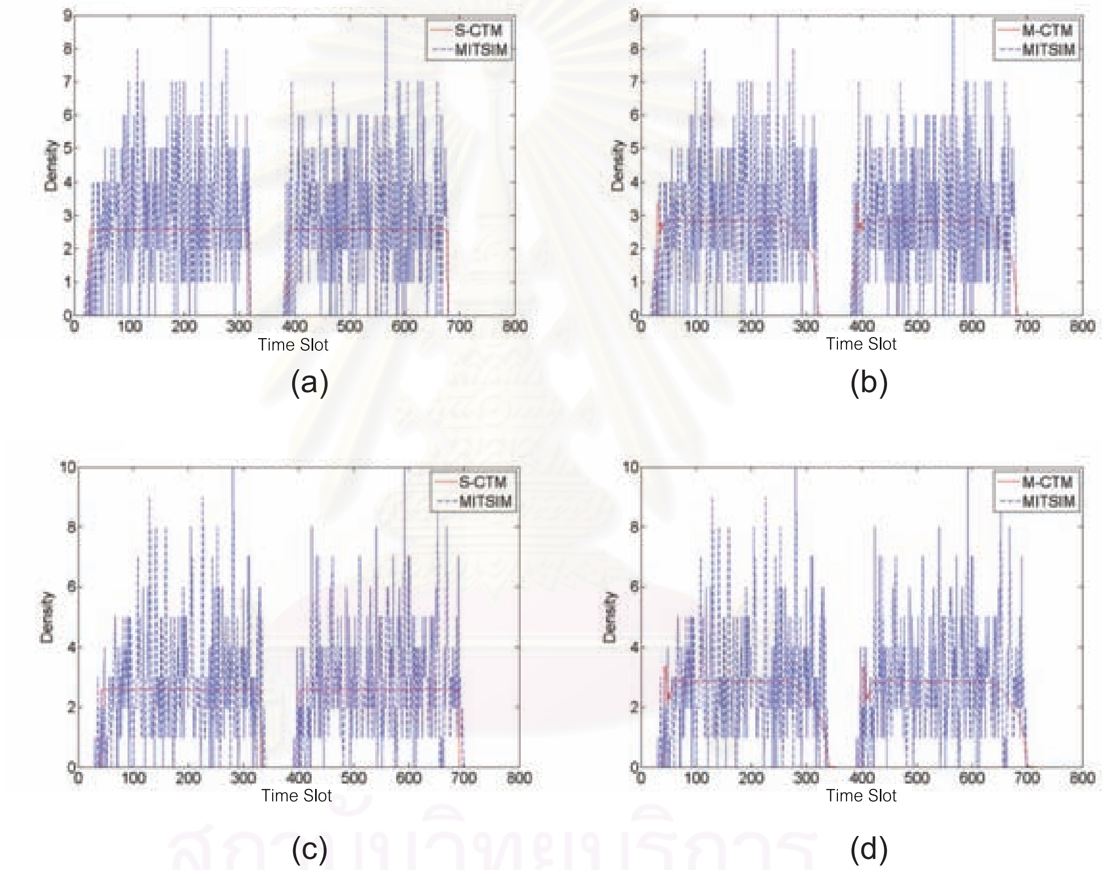
รูปที่ 6.21 ผล การ จำลอง กรณี สัดส่วน ยานพาหนะ ใน ระบบ ไม่ เปลี่ยน ตาม เวลา เมื่อ ไม่ มี รถโดยสารประจำทาง เซลล์ที่ (a) 1 (b) 14 (c) 27 (d) 40

ตารางที่ 6.5 ค่าตัวแปรปรับเทียบของกรณีสัดส่วนยานพาหนะคงที่เมื่อมีรถโดยสารประจำทาง

	S-CTM			M-CTM		
	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้
l_{car}	4	7	6.99998	4	7	4.49074
l_{bus}	-	-	-	12	16	14.62855
$\tilde{v}_{bus}$	-	-	-	0.5	1	0.67547
δ_1	0.3	1	0.3	0.3	1	0.54789
δ_2	0.3	1	0.36059	0.3	1	0.72837
q_i	2.3	2*2.3	1.11726*2.3	2.3	2*2.3	1.63814*2.3
Density Error	-	-	0.55908	-	-	0.52869



รูปที่ 6.22 ผลการจำลองกรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา เซลล์ที่ (a), (b) 1 (c), (d) 27



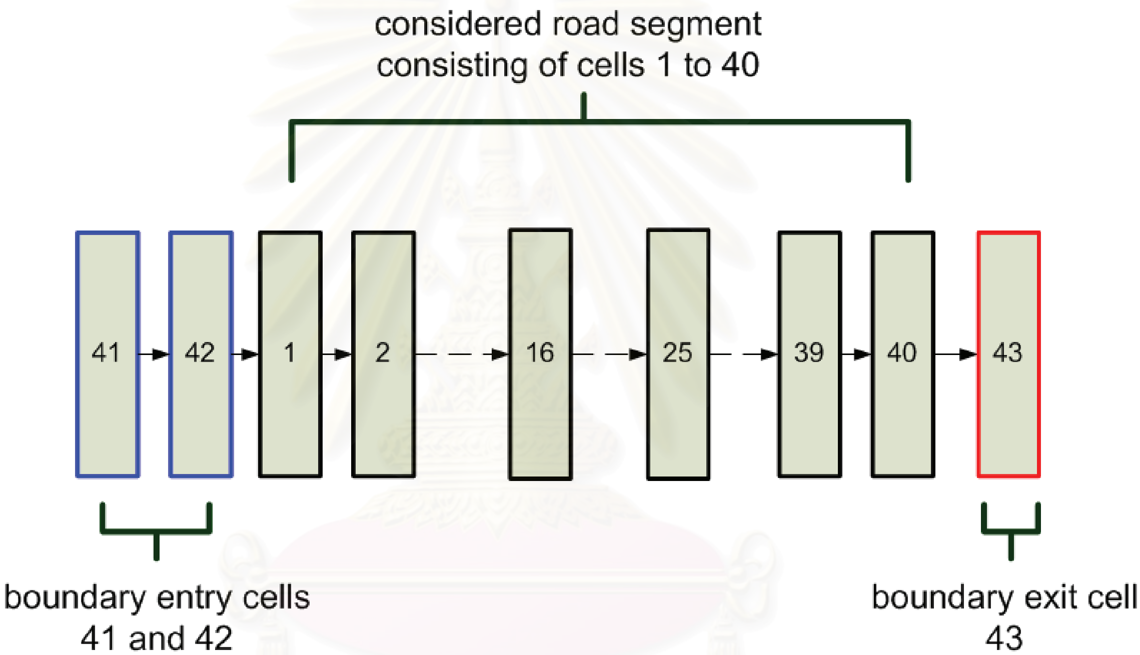
รูปที่ 6.23 ผลการจำลองกรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา เซลล์ที่ (a), (b) 27 (c), (d) 40

6.4.2 กรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบเปลี่ยนตามเวลา

กรณีนี้สัดส่วนยานพาหนะในระบบในแต่ละช่วงเวลาจะไม่คงที่ เพื่อทดสอบความสามารถในการปรับตัวได้ของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมและแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ที่นำเสนอ

ยานพาหนะทั้ง 2 ประเภทจะเข้าสู่ระบบไม่พร้อมกันโดยรถยนต์ส่วนบุคคลจะเข้ามาในช่วง 15 นาทีแรก และนาทีที่ 30 ถึง 45 แต่รถโดยสารประจำทางจะเข้ามาในช่วงนาทีที่ 7.5 ถึง 22.5 และ 45 ถึง 60 ดังรูปที่ 6.25

จำนวนช่องทางของทุกเซลล์ในกรณีนี้จะถูกกำหนดให้เท่ากับ 4 ดังรูปที่ 6.24 และมีเซลล์ที่ 41 ถึง 43 เป็นเซลล์ขอบเขต (boundary cell) เพื่อจำลองการเข้ามาและออกจากเครือข่ายของยานพาหนะ ไม่ใช่เซลล์ที่จำลองเครือข่ายเหมือนเซลล์ที่ 1-40



รูปที่ 6.24 เครือข่ายตัวอย่างกรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบเปลี่ยนตามเวลา

จะมีค่าตัวแปรปรับเทียบดังนี้

l_{car} = ความยาวรถยนต์ส่วนบุคคลรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

q_i = อัตราการไหลสูงสุด (คัน*เมตรต่อวินาทีต่อช่องทางจราจร)

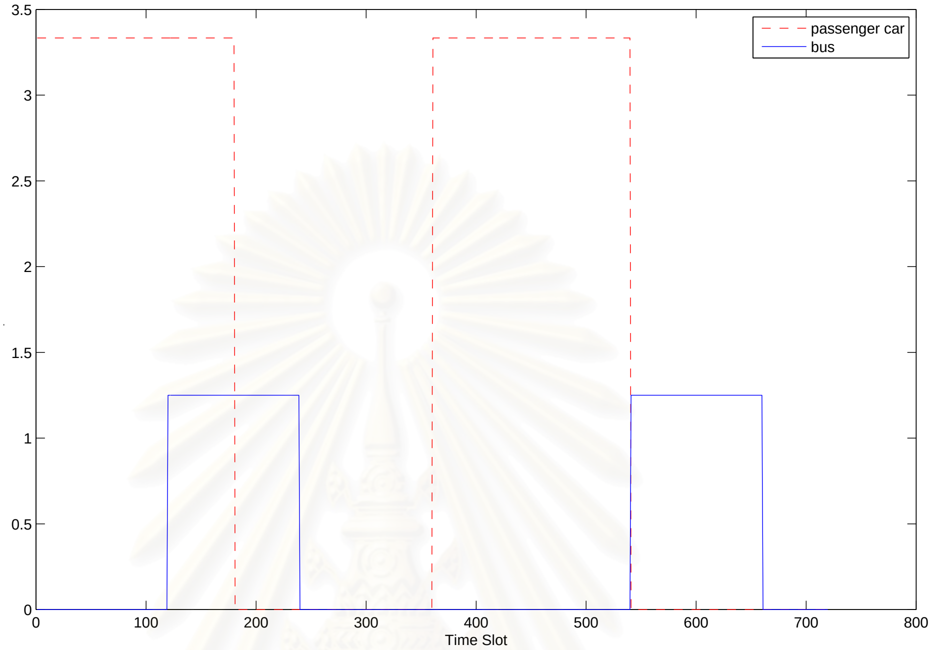
δ_i = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ที่มี 4 ช่องทางจราจร

l_{bus} = ความยาวรถโดยสารประจำทางรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

$\tilde{v}_{bus}$ = ความเร็วสัมพัทธ์ของรถโดยสารประจำทาง

จากการปรับเทียบด้วย genetic algorithm พบว่าตัวแปรที่ให้ความผิดพลาดของการจำลองน้อยที่สุดมีค่าดังแสดงในตารางที่ 6.6 และได้ผลการจำลองดังในรูปที่ 6.26 และ 6.27

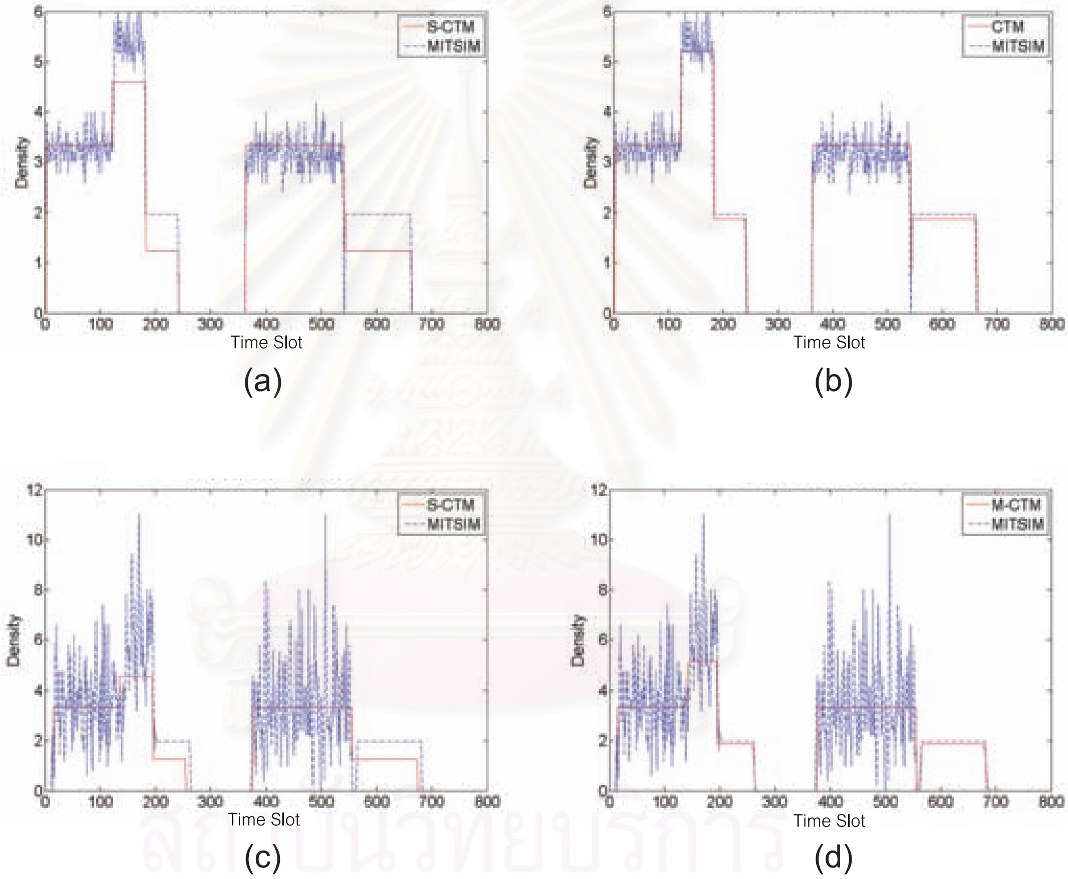
จากตารางที่ 6.6 สังเกตได้ว่าค่าตัวแปรปรับเทียบที่ได้เป็นค่าต่ำสุดในช่วงที่กำหนดทั้งหมด เนื่องจากสภาพทราฟฟิกที่เข้ามาไม่หนาแน่นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งมากนักค่าตัวแปรปรับเทียบจึงไม่มีผลต่อการจำลอง



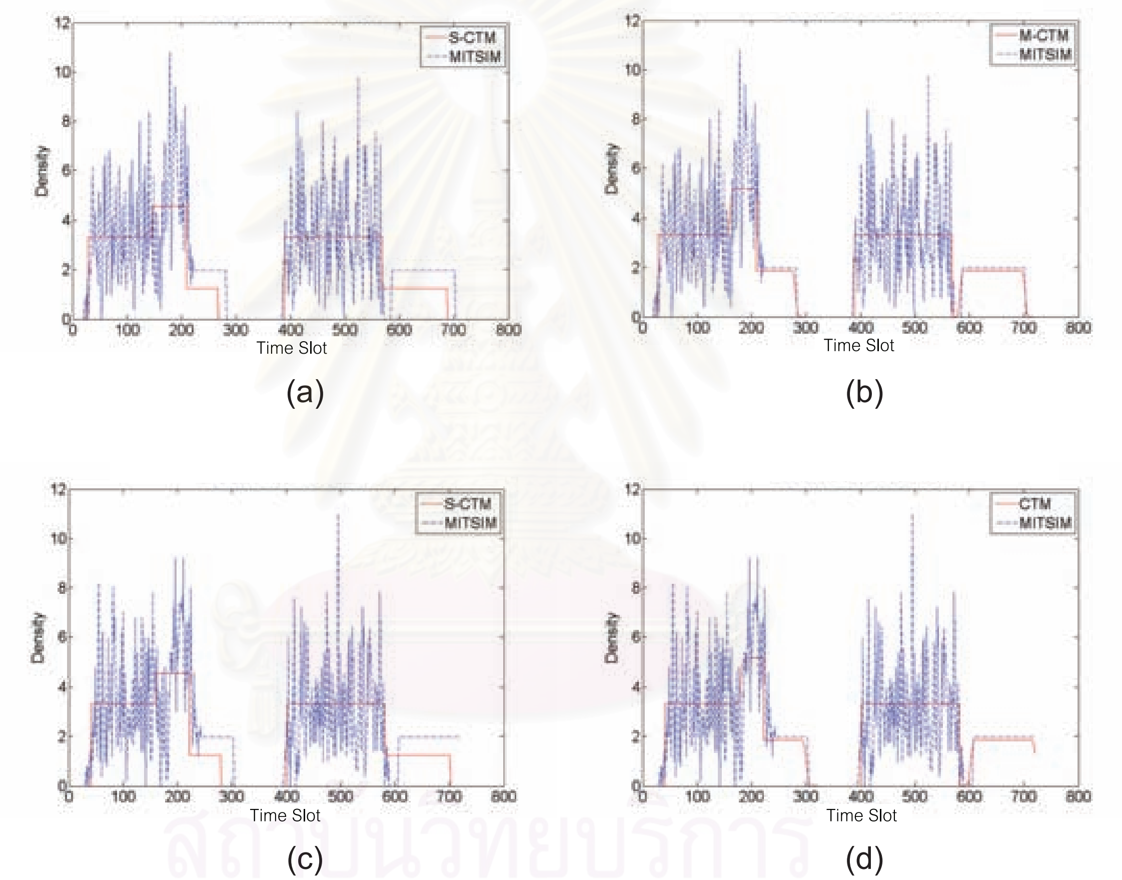
รูปที่ 6.25 จำนวนยานพาหนะที่เข้าสู่ระบบที่เซลล์ที่ 1

ตารางที่ 6.6 ค่าตัวแปรปรับเทียบของกรณีสัดส่วนยานพาหนะไม่คงที่

	S-CTM			M-CTM		
	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้
l_{car}	5.5	7	5.5	5.5	7	5.5
l_{bus}	-	-	-	12	16	12
$\tilde{v}_{bus}$	-	-	-	0.5	1	0.5
δ_i	0.3	1	0.3	0.3	1	0.3
q_i	2.3	2*2.3	2.3	2.3	2*2.3	2.3
Density Error	-	-	0.57075	-	-	0.51010



รูปที่ 6.26 ผลการจำลองกรณีสัดส่วนยานพาหนะไม่คงที่ของเซลล์ที่ (a), (b) 1 (c), (d) 14

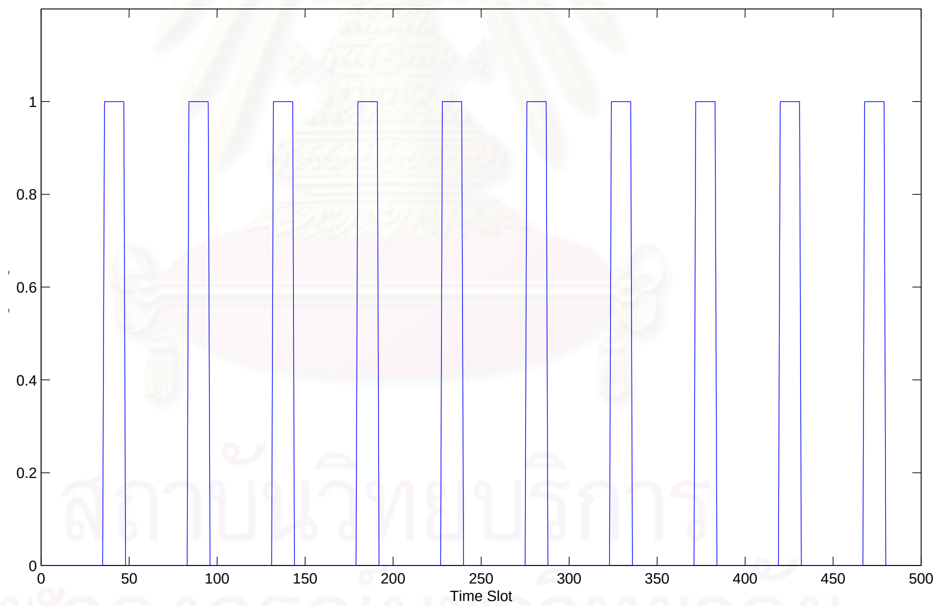


รูปที่ 6.27 ผลการจำลองกรณีสัดส่วนยานพาหนะไม่คงที่ของเซลล์ที่ (a), (b) 27 (c), (d) 40

6.4.3 การทดสอบความสามารถในการจำลองปรากฏการณ์กระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อน

การกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนของยานพาหนะจะเกิดขึ้นเมื่อสภาพการจราจรเบาบางมาก และจะเห็นได้ชัดเจนเมื่อยานพาหนะที่เข้าสู่ระบบมีลักษณะไม่ต่อเนื่อง หรือมีการเข้ามาเป็นช่วง ๆ เช่นรถที่ผ่านทางเมื่อสัญญาณไฟเขียวเป็นต้น การจำลองในกรณีนี้จึงมีลักษณะดังนี้

1. มีการนำสัญญาณไฟมาใช้จำลองเพื่อสังเกตปรากฏการณ์ข้างต้น โดยให้มีคาบสัญญาณไฟเท่ากับ 4 นาที เป็นช่วงสัญญาณไฟแดงและไฟเขียวเท่ากับ 3 นาที และ 1 นาทีตามลำดับดังรูปที่ 6.28
2. ทราฟฟิกที่เข้าสู่ระบบจะมีลักษณะเป็นยานพาหนะจำนวนมากต่อคิวรอสัญญาณไฟ ดังนั้นจำนวนยานพาหนะจึงถูกกำหนดด้วยสัญญาณไฟเป็นหลัก
3. เครือข่ายในกรณีนี้ ทุกเซลล์มี 4 ช่องทางจราจรเหมือนกรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบเปลี่ยนตามเวลาดังรูปที่ 6.24 และมีเซลล์ที่ 41-43 เป็นเซลล์ขอบเขต (boundary cell) เพื่อทำการจำลองการเข้ามาและออกจากเครือข่ายของยานพาหนะ ไม่ใช่เซลล์ที่จำลองเครือข่ายเหมือนเซลล์ที่ 1-40



รูปที่ 6.28 สัญญาณไฟที่อยู่ระหว่างเซลล์ที่ 1 และ 2 (ค่า 1 = ไฟเขียว, ค่า 0 = ไฟแดง)

6.4.3.1 กรณีไม่มีรถโดยสารประจำทางเข้ามาในเครือข่าย

จะมีตัวแปรปรับเทียบดังนี้

$l_{car} =$ ความยาวรถยนต์ส่วนบุคคลรวมกับช่องว่างระหว่างคัน (เมตร)

$q_i =$ อัตราการไหลสูงสุด (คัน*เมตรต่อวินาทีต่อช่องทางจราจร)

δ_i = ค่าสัมประสิทธิ์การเพิ่มขึ้นของยานพาหนะของเซลล์ที่มี 4 ช่องทางจราจร

จากการปรับเทียบด้วย genetic algorithm พบว่าตัวแปรที่ให้ความผิดพลาดของการจำลองน้อยที่สุดมีค่าดังแสดงในตารางที่ 6.7 และได้ผลการจำลองดังในรูปที่ 6.29

ตารางที่ 6.7 ค่าตัวแปรปรับเทียบของการทดสอบความสามารถในการจำลองปรากฏการณ์กระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนเมื่อไม่มีรถโดยสารประจำทางเข้ามาในระบบ

	S-CTM		
	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้
l_{car}	5.5	7	6.59399
δ_i	0.3	1	0.7246
q_i	2.3	2*2.3	1.19947*2.3
Density Error	-	-	1.19517

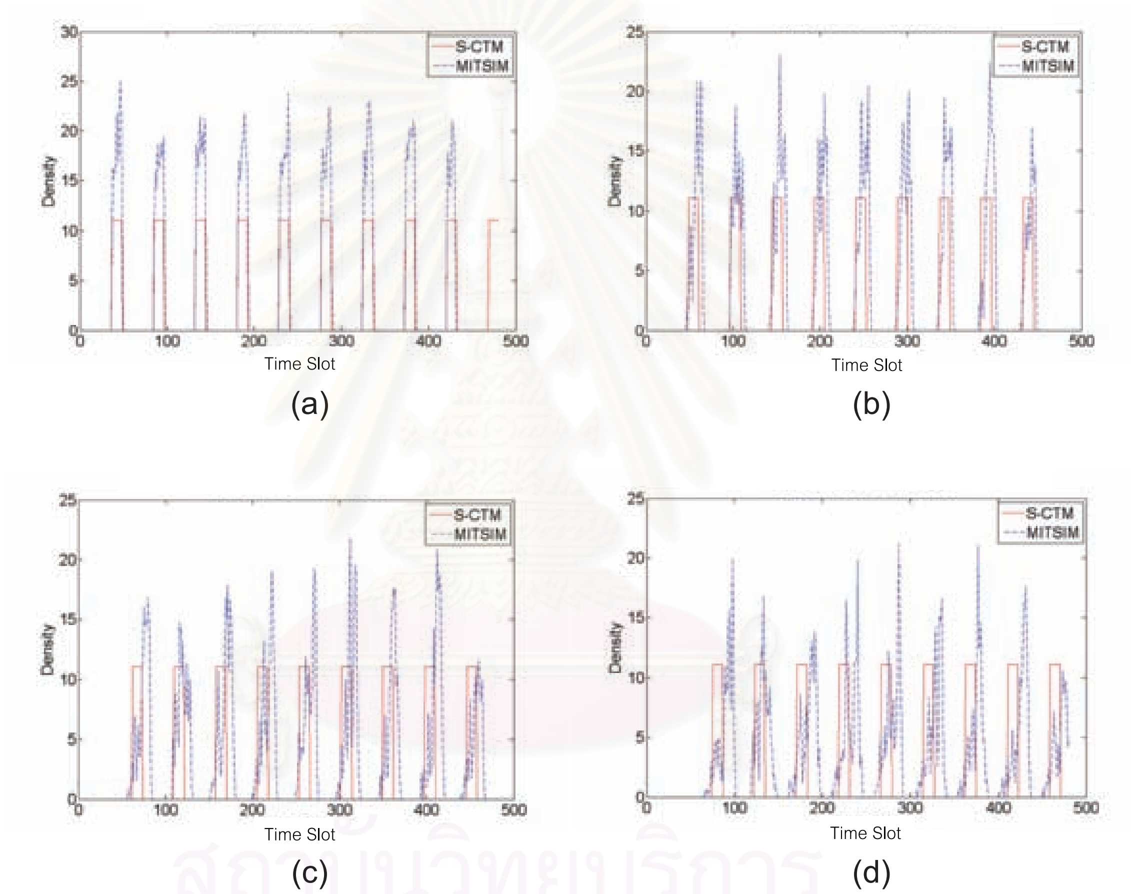
6.4.3.2 กรณีมีรถโดยสารประจำทางเข้ามาในเครือข่ายเป็นสัดส่วน 20 เปอร์เซนต์ของยานพาหนะทั้งหมดที่เข้าสู่ระบบ

จากการปรับเทียบด้วย genetic algorithm พบว่าตัวแปรที่ให้ความผิดพลาดของการจำลองน้อยที่สุดมีค่าดังแสดงในตารางที่ 6.8 และได้ผลการจำลองดังในรูปที่ 6.30 และ 6.31

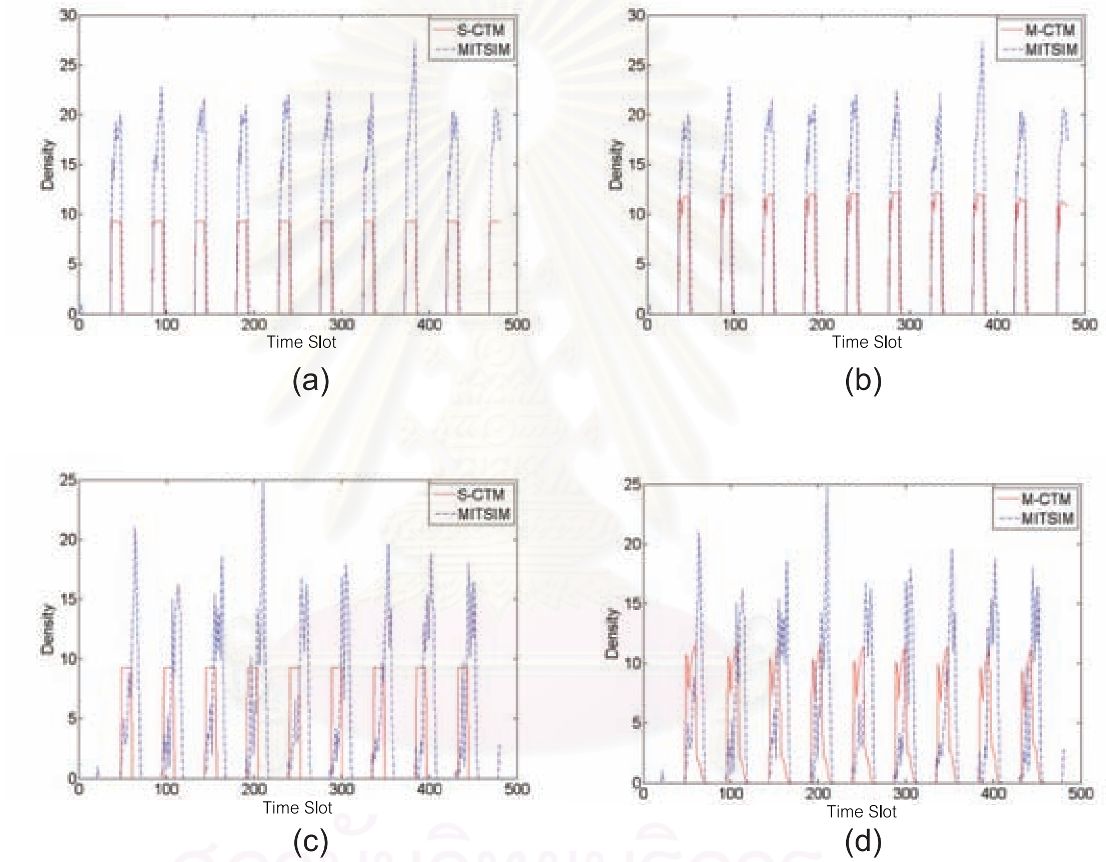
ซึ่งแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ที่นำเสนอจะสามารถสังเกตปรากฏการณ์กระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนได้อย่างชัดเจน ในขณะที่แบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมไม่สามารถสังเกตปรากฏการณ์นี้ได้ดังแสดงในรูปที่ 6.32

ตารางที่ 6.8 ค่าตัวแปรปรับเทียบของการทดสอบความสามารถในการจำลองปรากฏการณ์กระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนเมื่อมีรถโดยสารประจำทางเข้ามาในระบบ

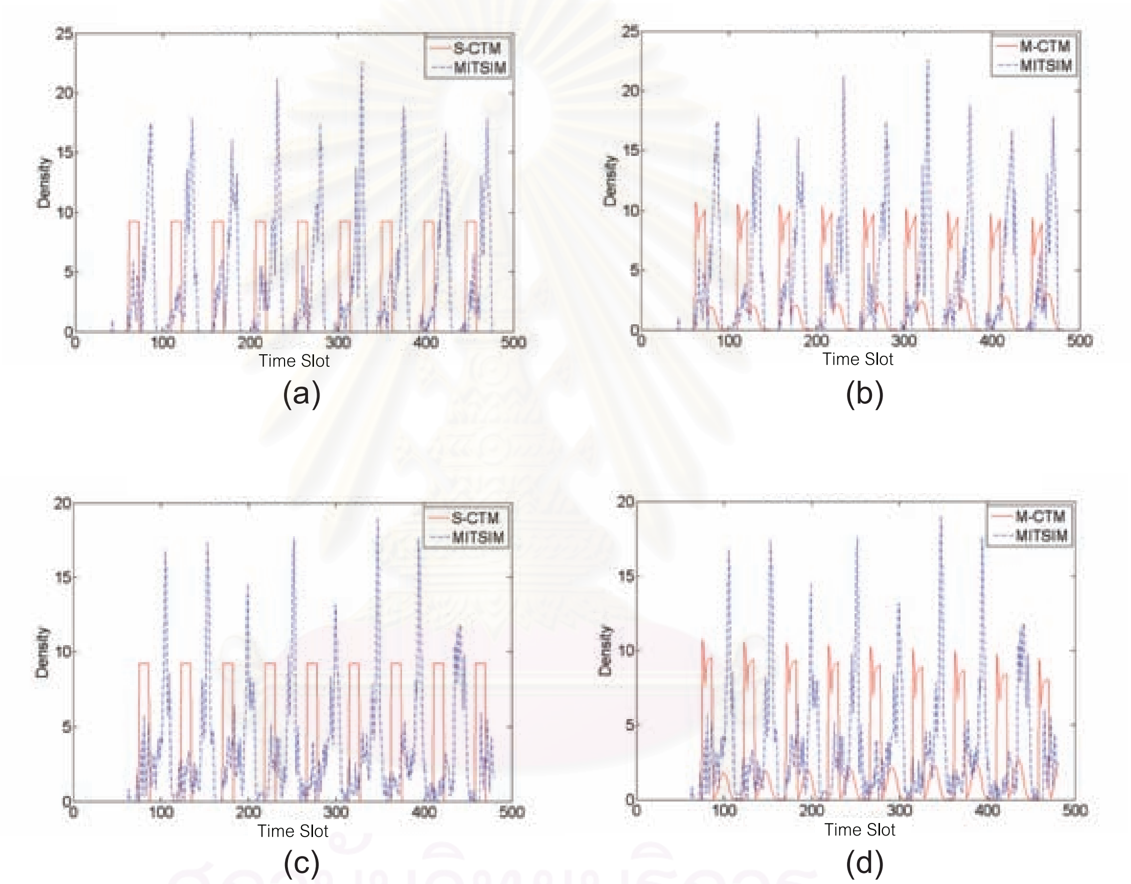
	S-CTM			M-CTM		
	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าที่ปรับเทียบได้
l_{car}	5.5	7	5.5001	5.5	7	7
l_{bus}	-	-	-	12	16	14.09759
$\tilde{v}_{bus}$	-	-	-	0.5	1	0.52083
δ_i	0.3	1	0.72462	0.3	1	0.49723
q_i	2.3	2*2.3	2.3	2.3	2*2.3	1.31752*2.3
Density Error	-	-	1.5732	-	-	1.36536



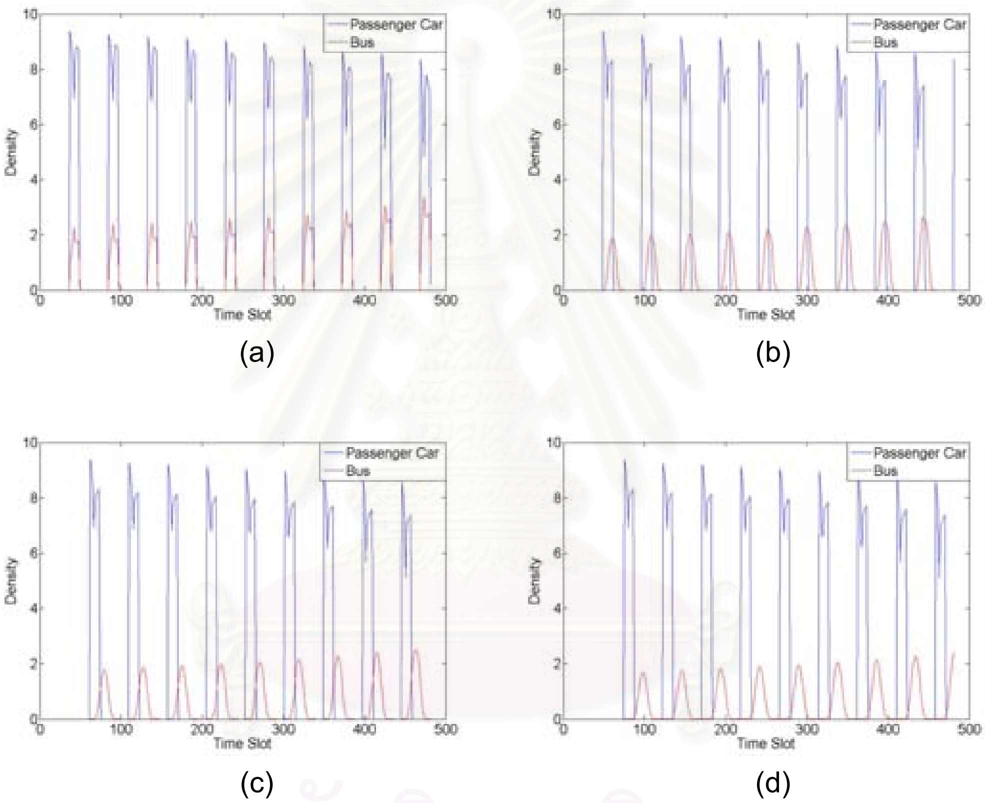
รูปที่ 6.29 ผลการจำลองการกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนเมื่อไม่มีรถโดยสารประจำทางด้วยแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมของเซลล์ที่ (a) 1 (b) 14 (c) 27 (d) 40



รูปที่ 6.30 ผล การ จำลอง การ กระจาย ตัว ออก เป็น กลุ่มก้อน เมื่อ มี รถโดยสารประจำทาง เปรียบเทียบแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมกับแบบจำลองที่นำเสนอ (a) และ (b) ผลการจำลองของเซลล์ที่ 2 (c) และ (d) ผลการจำลองของเซลล์ที่ 14



รูปที่ 6.31 ผลการจำลองการกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนเมื่อไม่มีรถโดยสารประจำทาง เปรียบเทียบแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมกับแบบจำลองที่นำเสนอ (a) และ (b) ผลการจำลองของเซลล์ที่ 27 (c) และ (d) ผลการจำลองของเซลล์ที่ 40



รูปที่ 6.32 ผลการจำลองการกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนเมื่อมีรถโดยสารประจำทางโดยแยกพิจารณาความหนาแน่นยานพาหนะแต่ละประเภท ของเซลล์ที่ (a) 2 (b) 14 (c) 27 (d) 40

6.5 สรุปผลการทดลอง

1. M-CTM จะให้ผลการจำลองที่ดีกว่า S-CTM อย่างชัดเจนเมื่อสภาพการจราจรค่อนข้างเบาบาง หรือกรณีสัดส่วนยานพาหนะในระบบเปลี่ยนตามเวลา

2. ทั้ง S-CTM และ M-CTM ไม่สามารถจำลองสภาพการจราจรที่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็วบ่อยหรือรวดเร็วได้ดีนักเนื่องจากข้อจำกัดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ซึ่งในอนาคตอาจปรับแก้ได้โดยการปรับที่ค่าอัตราการไหลสูงสุดตามจังหวะเริ่มและหยุดของสัญญาณไฟเขียว

3. S-CTM สามารถปรับตัวให้ใกล้เคียงกับ M-CTM ได้ แต่เมื่ออัตราส่วนยานพาหนะเปลี่ยนไป ค่าตัวแปรปรับเทียบจะเปลี่ยนตามไปด้วย ในขณะที่ M-CTM ไม่เปลี่ยนแปลงตามอัตราส่วนยานพาหนะมากนัก

4. M-CTM สามารถจำลองการกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อนได้ แต่ความถูกต้องเมื่อทดสอบกับ MITSIM ยังไม่ถูกต้องนัก เนื่องจากยังไม่สามารถจำลองผลของการบังโดยยานพาหนะที่มีความสามารถในการเคลื่อนที่น้อยกว่าได้

5. MITSIM มีการสุ่มค่าในกระบวนการแบบจำลองเองเพราะเป็นกระบวนการสโทแคสติกในขณะที่ CTM เป็นกระบวนการเชิงกำหนดในบางครั้ง CTM จึงไม่สามารถทำนายให้ผลตรงกับ MITSIM ได้ตลอดช่วงเวลาที่ทำการจำลอง ทั้งนี้ในอนาคตอาจสามารถทดสอบค่าโดยเทียบกับค่าเฉลี่ยจากผลการจำลองด้วย MITSIM หลายครั้ง และวิเคราะห์ดูที่แนวโน้มแทนได้

บทที่ 7

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

7.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เริ่มกล่าวถึงแบบจำลองสภาพจราจร 3 ประเภท ได้แก่แบบจำลองมหภาค แบบจำลองมัชฌิม และแบบจำลองจุลภาค โดยเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างแบบจำลองทั้ง 3 ชนิด และชี้ให้เห็นถึงความสำคัญและข้อดีของแบบจำลองมหภาคเหนือแบบจำลองทั้ง 2 ชนิดที่เหลือในด้านการนำไปจำลองเครือข่ายขนาดใหญ่ที่มีข้อจำกัดด้านเวลาในการประมวลผลของแบบจำลอง จากนั้นได้กล่าวถึงความจำเป็นของแบบจำลองมหภาคแบบคิดแยกประเภทยานพาหนะซึ่งสามารถจำลองปรากฏการณ์ที่แบบจำลองมหภาคแบบไม่คิดแยกประเภทยานพาหนะไม่สามารถจำลองได้ถูกต้องเช่นการกระจายตัวออกเป็นกลุ่มก้อน (platoon dispersion) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจริง

สำหรับแบบจำลองมหภาคที่ได้เลือกเป็นพื้นฐานการพัฒนาได้แก่แบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ (CTM) ซึ่งสามารถจำลองเครือข่ายที่มีข่ายเชื่อมโยงหลายเส้นทาง มีความซับซ้อนน้อย ปรับปรุงได้ง่าย ใช้เวลาในการจำลองน้อย สามารถแบ่งเครือข่ายใหญ่เป็นเครือข่ายย่อยและลดเวลาในการจำลองให้น้อยลงด้วยการจำลองแบบขนานได้ รวมทั้งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ซึ่งสามารถจำลองได้ใกล้เคียงเครือข่ายจริงไม่ด้อยกว่าแบบจำลองที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 มากนักจึงง่ายต่อการเก็บข้อมูลจริงในทางปฏิบัติ อย่างไรก็ตาม แบบจำลองการส่งผ่านเซลล์ยังไม่สามารถคิดแยกประเภทยานพาหนะได้

เนื่องจากความสามารถในการเคลื่อนและความยาวที่แตกต่างกันของยานพาหนะแต่ละประเภทมีผลต่อสภาพการจราจรเป็นอย่างมาก วิทยานิพนธ์นี้จึงได้เสนอแนวทางการพัฒนาแบบจำลองการผ่านแบบเซลล์ให้สามารถคิดแยกประเภทยานพาหนะโดยพิจารณาแยกแยะด้วยความสามารถในการเคลื่อนที่และความยาวของยานพาหนะ โดยการพิจารณาทั้ง 3 กรณีได้แก่ การเชื่อมต่อแบบตามลำดับ, การเชื่อมต่อแบบรวม และการเชื่อมต่อแบบแยก จากนั้นได้แสดงให้เห็นด้วยการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ว่าแบบจำลองที่นำเสนอทั้ง 3 กรณีสามารถลดรูปเป็นแบบจำลองการผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมได้เมื่อมีประเภทของยานพาหนะเพียง 1 ประเภท แบบจำลองที่นำเสนอจึงเป็นกรณีทั่วไปของแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิม โดยแบบจำลองที่เสนอได้ให้การจำลองเครือข่ายที่เป็นอิสระจากประเภทยานพาหนะที่เข้าสู่เครือข่ายและไม่ต้องปรับค่าช่องเวลาเมื่อประเภทยานพาหนะในเครือข่ายเปลี่ยนแปลง ดังนั้นค่าตัวแปรที่ปรับเทียบได้ใกล้เคียงกับค่าความเป็นจริงและค่อนข้างคงที่ จึงไม่ต้องทำการปรับเทียบทุกเวลาเพื่อให้ค่าความผิดพลาดน้อยสุด

นอกจากนี้เพื่อความเรียบง่ายและประโยชน์ในการนำไปใช้งานด้านอื่นต่อในอนาคตเช่นในทางการควบคุมสัญญาณไฟอย่างเป็นระบบ วิทยานิพนธ์นี้จึงได้เสนอสมการของแบบจำลองที่นำเสนอในรูปแบบทั่วไปด้วยสมการเวกเตอร์แทนสมการสเกลาร์ก่อนหน้านี้ด้วย

การทดสอบความถูกต้องของแบบจำลองที่นำเสนอด้วยแบบจำลองที่นำเสนอเทียบกับแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบ ดั้งเดิมและข้อมูลจริงในกรณีการจำลองพญาไท ด้วยการกำหนดให้มียานพาหนะ 2 ประเภทได้แก่ รถยนต์ส่วนบุคคล และรถโดยสารประจำทางซึ่งมีความสามารถในการเคลื่อนที่ช้ากว่าและความยาวมากกว่าเข้ามาในเครือข่าย และใช้ผลการจำลองจาก MITSIM แทนข้อมูลจริงในกรณีการจำลองสาทรและเครือข่ายสมมุติ ซึ่งจากผลการจำลองพบว่า ทั้งแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบ

ดั้งเดิมและแบบจำลองที่นำเสนอสามารถจำลองการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของความหนาแน่นยานพาหนะบนถนนในแต่ละช่วงได้อย่างถูกต้องสำหรับเครือข่ายที่มีสัญญาณไฟและไม่มีสัญญาณไฟ ซึ่งมีขนาดเล็ก เช่นกรณีถนนพญาไทและมีขนาดใหญ่เช่น กรณีถนนสาทร ทั้งนี้ในกรณีที่สัญญาณไฟจราจร เช่นถนนในตัวเมืองหรือการจราจรค่อนข้างหนาแน่น และกรณีสัดส่วนยานพาหนะไม่เปลี่ยนตามเวลา แบบจำลองที่นำเสนอและแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมให้ผลที่ไม่แตกต่างกันมากนักเนื่องจากความแตกต่างด้านความสามารถในการเคลื่อนที่มีน้อยและแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมยังสามารถปรับเทียบค่าตัวแปรปรับเทียบให้ใกล้เคียงกับสภาพการจราจรจริงได้ แต่เมื่อทำการจำลองในกรณีที่สัดส่วนยานพาหนะไม่คงที่แปรตามเวลา จากผลการจำลองจะเห็นได้ว่าแบบจำลองที่นำเสนอสามารถให้ผลในการจำลองที่ใกล้เคียงสภาพจราจรจริงได้ดีกว่าอย่างเห็นได้ชัดเนื่องจากแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมไม่สามารถปรับเทียบให้เข้ากับสัดส่วนยานพาหนะหลายสัดส่วนได้ อย่างไรก็ตาม แม้ว่าแบบจำลองที่นำเสนอ สามารถจำลองปรากฏการณ์แยกตัวเป็นกลุ่มก้อนได้ แต่เมื่อเทียบกับผลการจำลองจาก MITSIM แล้วยังไม่ถูกต้องเท่าที่ควรเพราะแบบจำลองที่นำเสนอยังไม่สามารถจำลองการถูกบังจากยานพาหนะที่มีความสามารถในการเคลื่อนที่น้อยกว่าได้ จึงเสนอแนะให้เพิ่มการพิจารณาการถูกบังเข้าไปในแบบจำลองในอนาคต

7.2 ข้อเสนอแนะ

1. ปรับแก้สมมุติฐานข้อ 4 ในบทที่ 4 ซึ่งกล่าวว่า ยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์จะกระจายอยู่ในเซลล์แบบสม่ำเสมอ (Uniform) และเปลี่ยนค่าความสามารถในการส่งของยานพาหนะที่อยู่ท้ายเซลล์ให้สอดคล้องกับสภาพการจราจรจริงมากยิ่งขึ้น

2. พิจารณค่า อัตรา การ ไหล สูงสุด บริเวณ ทางแยก ให้ ปรับ เปลี่ยน ตาม จังหวะ การ เริ่ม และ หยุด ของสัญญาณไฟเขียวเพื่อพิจารณาผลของการออกตัวหรือชะลอตัวได้

3. M-CTM ยังไม่สามารถจำลองการที่ยานพาหนะที่วิ่งเร็วถูกบังโดยยานพาหนะที่วิ่งช้าได้ในช่วงอัตราการไหลคงที่หรือจำนวนช่องทางจราจรน้อย ในขณะที่ S-CTM ไม่สามารถจำลองได้เลยเพราะไม่คิดแยกประเภทยานพาหนะ จึงเสนอให้ปรับปรุงค่าความสามารถในการเคลื่อนที่ให้แปรตามสภาพจราจรเพื่อพิจารณาผลของการบังได้

4. จากข้อ 1, M-CTM สามารถพัฒนาต่อให้ความยาวของเซลล์ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกเซลล์เพื่อให้ขอบเขตความยาวเซลล์สามารถปรับได้ตรงตามโครงสร้างกายภาพของถนนมากยิ่งขึ้น เช่น โดยใช้แนวทางคล้ายกับการนำเสนอแบบจำลองการส่งผ่านเซลล์แบบดั้งเดิมซึ่งปรับความยาวเซลล์ได้ใน [5]

รายการอ้างอิง

[1] Carlos F. Daganzo. The Cell Transmission Model: A Dynamic Representation Of Highway Traffic Consistent With The Hydrodynamic Theory. Transportation Research Part B 28B, 4 (1994) :269-287.

[2] Carlos F. Daganzo. The Cell Transmission Model Part II: Network Traffic. Transportation Research Part B 29B, 2 (1995) :79-93.

[3] Geetam Tiwari. Traffic Flow and Safety: Need for New Models for Heterogeneous Traffic. web.iitd.ac.in/tripp/publications/paper/planning/gtfiwoco.PDF

[4] Hong K Lo, Elbert Chang, and Yiu Cho Chan. Dynamic Network Control. Transportation Research Part A 35 (2001) :721-744.

[5] Laura, Xiaotian Sun, Roberto Horowitz, and Luis Alvarez. Traffic Density Estimation with Cell Transmission Model. Proceedings of the American Control Conference 5 (2003) :3750-3755.

[6] Xiaotian Sun, and Roberto Horowitz. A localized Switching Ramp Metering Controller with a Queue Length Regulator for Congested Freeways. American Control Conference (2005).

[7] Xiaotian Sun, Laura Munoz, and Roberto Horowitz. Mixture Kalman Filter Based Highway Congestion Mode and Vehicle Density Estimator and its Application. Proceeding of the 2004 American Control Conference (2004).

[8] Xiaotian Sun, Laura Munoz, and Roberto Horowitz. Highway Traffic State Estimation Using Improved Mixture Kalman Filters for Effective Ramp Metering Control. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control 6 (2003) :6333-6338.

[9] J. H. Banks. Introduction to Transportation Engineering. 2nded.. Singapore: Mc-GrawHill, 2002

[10] Serge P. Hoogendoorn, and Piet HL Bovy. Continuum modeling of multi class traffic flow. Transportation research Part B: Methodological 34B, 2 (2000) :123-146.

[11] Hsun Jung Cho, and Shih Ching Lo. Modeling Self consistant multiclass dynamic traffic flow. Physica A 312, (2000) :342-362.

[12] M. J. Lighthill, and G.B. Whitham. On kinematic waves: II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Proceedings of the Royal Society Series A 229 (1955) :317-345.

[13] P.J. Richards. Shock waves on the highway. Operations Research 4, 1 (1956) :42-51.

[14] J. Payne Harold. FREFLO: A Macroscopic Simulation Model Of Freeway traffic. Transportation Research Record 722 (1979) :68-77.

[15] M. Papageorgiou, J. M. Blosseville, and H. Hadj Salem. Macroscopic modelling of traffic flow on the Boulevard Peripherique in Paris. Transportation Research 23B, 1 (1989) :29-47.

[16] P. G. Michalopoulus, P. Yi, and A. S. Lyrintzis. Continuum modelling of traffic dynamics for congested freeways. Transportation Research Part B: Methodological 27, 4 (1993) :315-332.

[17] H. M. Zhang. Theory of nonequilibrium traffic flow. Transportation Research Part B: Methodological 32B, 7 (1998) :485-498.

[18] R. D. Kühne, J. Volmuller, and R. Hamerslag. Proceedings of the Ninth International Symposium on Transportation and Traffic Theory. VNU Transportation Science 19, 3 (1985).

[19] B. S. Kerner P. Cluster effect in initially homogeneous traffic flow. Physical Review E. Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics 48, 4 (1993) :R2335.

[20] B. S. Kerner P. Structure and parameters of clusters in traffic flow. Physical Review E 50 (1994) :54-83.

[21] W. F. Phillips. Kinetic Model for Traffic Flow. National Technical Information Service (1997).

[22] Carlos F. Daganzo. Requiem for Second Order Fluid Approximations of Traffic Flow. Transportation Research Part B: Methodological 29B, 4 (1995) :277-289.

[23] A. Aw and M. Rascle. Resurrection of second order models of traffic flow. SIAM Journal on Applied Mathematics 60, 3 (2000) :916-938.

[24] M. Günther, A. Klar, T. Materne, and R. Wegener. An explicitly solvable kinetic model for vehicular traffic and associated macroscopic equations. Comput. Math. Appl. preprint Modelling 35 (2001) :591-606.

[25] G. C. K. Wong, and S. C. Wong. A multi-class flow model—an extension of LWR model with heterogeneous drivers. Transportation Research Part A 36 (2002) :827-841.

[26] Zuojin Zhu, Ganglen Chang, and Tongqiang Wu. Numerical Analysis of Freeway Traffic Flow Dynamics for Multiclass Drivers. Transportation Research Record, 03-2188 (2003) :201-208.

[27] J. S. Drake, J. L. Schofer, and A. D. May. A statistical analysis of speed density hypothesis. Highway Research Record, 154 (1967) :53-87.

[28] เชาวน์ดิศ อัศวกุล, วดิส กสานติกุล. การศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของข้อมูลสื่อสารบนเครือข่ายในประเทศไทย (กรณีศึกษาแบบจำลองการเคลื่อนที่ในโครงข่ายของถนนในตัวเมือง). โครงการวิจัยร่วมระหว่างภาควิศวกรรมไฟฟ้าและภาคเอกชน, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[29] บริษัท ทรานส์คอนซัลท์ จำกัด. โครงการวิเคราะห์และเพิ่มประสิทธิภาพการดำเนินงานแก้ไขปัญหาการจราจรในพื้นที่วิกฤต. รายงานฉบับสุดท้าย เล่มที่ 4 การแก้ไขปัญหาจราจรพื้นที่สาทร-สีลม, มกราคม 2548

[30] Qi Yang. A Simulation Labaratory for Evaluation of Dynamic Traffic Management Systems Doctor of Philosophy in Transportation at the Massuachusetts Institute of technology June 1997

[31] Qi Yang and Haris N. Koutsopoulos. A microscopic traffic simulator for evaluation of dynamic traffic management systems. Transportation Research Part C, 4 (1996) :1-3.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายกมลเทพ เตียประเสริฐ เกิดวันที่ 30 สิงหาคม 2525 ณ อำเภอดอนเมือง จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2546 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2547