

การจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น



นายสุรพงษ์ ศรีแก้ว

# ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

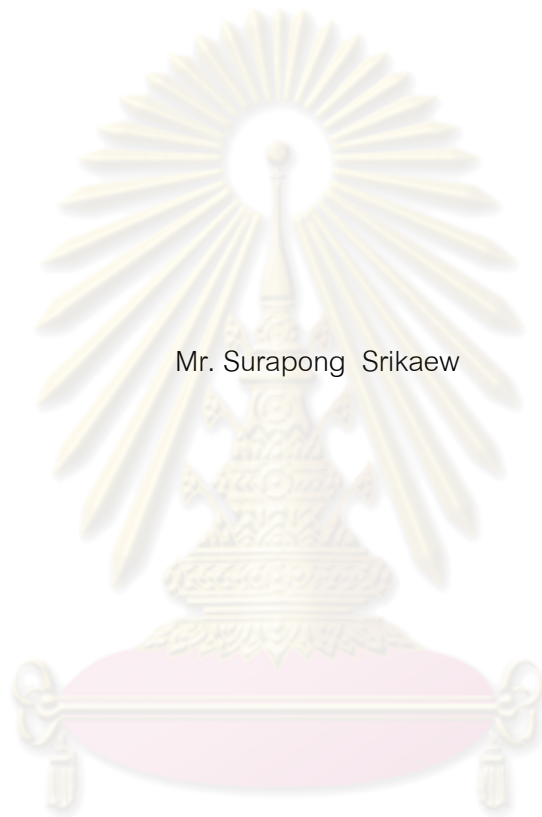
สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2552

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

SIMULATIONS OF THE PASSING STELLAR ENCOUNTERS TOWARD A DUST DISK



Mr. Surapong Srikaew

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science Program in Physics

Department of Physics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2009

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อ  
แผ่นจานฝุ่น

โดย

นายสุรพงษ์ ศรีแก้ว

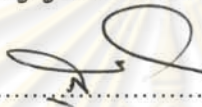
สาขาวิชา

ฟิสิกส์


อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

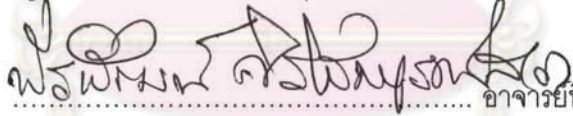
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พีรพัฒน์ ศิริสมบุญลาภ

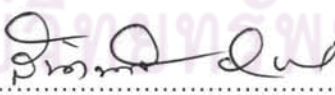
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัย  
ของ การศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต


  
..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

  
..... ประธานกรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญโชติ เผ่าสวัสดิ์ยรรยง)

  
..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พีรพัฒน์ ศิริสมบุญลาภ)

  
..... กรรมการ  
(อาจารย์ ดร. สันติพงศ์ บริบาล)

  
..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มาโนชย์ ศรีนางแย้ม)

สุรพงษ์ ศรีแก้ว : การจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น.  
(SIMULATIONS OF THE PASSING STELLAR ENCOUNTERS TOWARD A DUST  
DISK) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ. ดร. พีรพัฒน์ ศิริสมบุญธรรมาภ, 74 หน้า.

ดาวฤกษ์ที่ก่อตัวขึ้นมาเป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวมีโอกาสที่จะโคจรผ่านเข้ามาใกล้กัน ซึ่งการโคจรผ่านเข้ามาใกล้กันนั้นนอกจากจะมีผลทำให้กระจุกดาวถึงขั้นที่จะสูญเสียสมาชิกออกไปจากกระจุกดาวแล้วมันยังมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นของดาวฤกษ์ที่ถูกรบกวนนั้นเกิดการเปลี่ยนแปลงขึ้นมาได้อีกด้วย เพราะฉะนั้นจึงนำแนวคิดที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้นมาใช้ในการศึกษาตัวแปรแต่ละตัวของดาวฤกษ์ดวงหนึ่งที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวฤกษ์ที่มีแผ่นจานฝุ่นล้อมรอบอยู่ นั้นว่ามีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นของดาวฤกษ์ที่ถูกรบกวนนี้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรบ้างโดยการนำระเบียบวิธีการของรุ่งเก้-คุทดำอันดับที่ 5 มาใช้ในการแก้สมการการเคลื่อนที่พร้อมกับทำการปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งใน 4 ตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ การศึกษาตัวแปรแต่ละตัวของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวฤกษ์ที่มีแผ่นจานฝุ่นล้อมรอบอยู่ตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้นทำให้เราเห็นแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของครึ่งแกนเอก ความรีและความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนไปจากเดิม ผลการเปลี่ยนแปลงของครึ่งแกนเอก ความรีและความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนให้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมนี้นสามารถนำมาใช้ในการจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาซาดังภาพได้ โดยกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวบีตาซาดังภาพนี้มีความรีของวงโคจรเท่ากับ 1 มีความเอียงของวงโคจรเท่ากับ  $30^\circ$  มีระยะมุมของจุดใกล้ดาวบีตาซาดังภาพมากที่สุดเท่ากับ  $90^\circ$  มีลองจิจูดของจุดโหนดขึ้นเท่ากับ  $0^\circ$  และมีมวลเป็น 0.3 เท่าของมวลดาวบีตาซาดังภาพ ค่าตัวแปรต่างๆ ที่ได้ถูกกำหนดมาแล้วข้างต้นนี้มีผลทำให้เกิดกลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่มีความสอดคล้องใกล้เคียงกับภาพถ่ายกลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ปรากฏให้เห็นอยู่บนส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือจากดาวบีตาซาดังภาพ นอกจากนี้ยังพบว่าความยาวของส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือและส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวบีตาซาดังภาพนี้สามารถวัดออกไปได้ถึง  $\sim 2,398$  AU และ  $\sim 1,317$  AU ตามลำดับ

ภาควิชา..... ฟิสิกส์  
สาขาวิชา..... ฟิสิกส์  
ปีการศึกษา..... 2552

ลายมือชื่อผู้สมัคร..... สุรพงษ์ ศรีแก้ว  
ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....

## 497 25449 23 : MAJOR PHYSICS

KEYWORDS : STAR CLUSTER / PROTOPLANETARY DISK / PROTOSTAR /  
CELESTIAL MECHANICS

SURAPONG SRIKAEW : SIMULATIONS OF THE PASSING STELLAR  
ENCOUNTERS TOWARD A DUST DISK. THESIS ADVISOR : ASST. PROF.  
PIRAPAT SIRISOMBOONLARP, Ph.D., 74 pp.

Stars, which form as members of a stellar cluster, probably experience stellar encounters that would escape stars in the stellar cluster and that would also perturb circumstellar dust disk. Therefore the viewpoint stated above are studied of the effects of stellar encounter parameters on the gravitationally perturbed circumstellar dust disk by using fifth-order Runge-Kutta method for solving motion equations with changing values of one stellar encounter parameter. After having studied stellar encounter parameters, we found changes in semimajor axis, orbital eccentricity and orbital inclination of dusty disk particles. These changes can be simulated with the dust disk of  $\beta$  Pictoris by giving the orbital eccentricity of a passing star to be 1, the orbital inclination of the passing star to be  $30^\circ$ , the argument of periastron to be  $90^\circ$ , the longitude of ascending node to be  $0^\circ$  and the passing stellar mass that is scaled by the mass of  $\beta$  Pictoris to be 0.3. Parameters given above can result in the formation of dust clumps that are similar to the photograph of north-east extended dust clumps. Additionally the lengths of north-east and south-west extensions from  $\beta$  Pictoris are measured out to be  $\sim 2,398$  AU and  $\sim 1,317$  AU respectively.

Department : ..... Physics .....

Field of Study : ..... Physics .....

Academic Year : ..... 2009 .....

Student's Signature : *Surapong Srikaew*

Advisor's Signature : *Pirapat Sirisomboonlarp*

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้เสร็จสมบูรณ์ลงได้ด้วยความกรุณาจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ ที่ได้ถ่ายทอดวิชาความรู้ ให้คำปรึกษาแนะนำทางด้านวิชาการ รวมทั้งให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญโชติ เผ่าสวัสดิ์ยรรยง อาจารย์ ดร. สันติพงศ์ บริบาล และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มาโนชย์ ศรีนางแย้ม ที่ได้กรุณารับทำหน้าที่เป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้พร้อมทั้งตรวจสอบแก้ไขวิทยานิพนธ์เล่มนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ปัจฉา ฉัตรภรณ์ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ และที่จะขาดเสียไม่ได้นั่นก็คือนายอุดมศักดิ์ ศรีแก้ว กับนางพิศมัย ศรีแก้ว ที่เป็นบิดามารดาของผู้เขียนที่ได้ให้โอกาสในการศึกษาในระดับชั้นปริญญาโท รวมทั้งให้ความช่วยเหลือและคอยเป็นกำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้จนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนหวังว่าวิทยานิพนธ์เล่มนี้คงจะมีประโยชน์ไม่มากนักน้อยสำหรับผู้ ที่สนใจจะศึกษาการจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่นต่อไป

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ณ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่	
1. บทนำ.....	1
2. ทฤษฎีเกี่ยวกับดาวฤกษ์และแผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิด.....	4
2.1 กระจุกดาว.....	4
2.1.1 กระจุกดาวทรงกลม.....	4
2.1.2 กระจุกดาวเปิด.....	6
2.2 ดาวฤกษ์ก่อนเกิด.....	7
2.3 แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิด.....	8
3. แบบจำลองกับสมการพื้นฐาน.....	10
3.1 ตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปไกล.....	10
3.2 เงื่อนไขเริ่มต้นของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นและดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปไกล.....	10
3.3 การแกว่งการเคลื่อนที่ด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คูตต้าอันดับที่ 5.....	12
3.4 การหาค่าหลักมูลทางโคจร.....	14
4. ตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปไกลที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น.....	16
4.1 ความเร็วของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปไกลที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น..	16
4.2 ความเอียงของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปไกลที่ส่งผลต่อแผ่นจาน ฝุ่น.....	20
4.3 ระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดที่ส่งผลต่อแผ่น จานฝุ่น.....	24
4.4 อัตราส่วนมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปไกลต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุด กำเนิดที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น.....	28

บทที่	หน้า
5. แผนงานฝุ่นรอบดาวปีต้าขาตั้งภาพ.....	33
6. สรุปและอภิปรายผลการจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อ แผนงานฝุ่น.....	39
รายการอ้างอิง.....	41
บรรณานุกรม.....	43
ภาคผนวก	
ก. ปัญหาวัตถุ 2 ชั้น.....	45
ข. เรขาคณิตของวงโคจร.....	50
ค. หลักมูลทางโคจร.....	62
ง. ปัญหาวัตถุ 3 ชั้น.....	64
จ. ระเบียบวิธีการของรุ่งเก้-คุทต้าอันดับที่ 5.....	66
ฉ. การเขียนโปรแกรมจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อ แผนงานฝุ่นด้วยแมทแล็บ.....	68
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	74

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
5.1	การเปรียบเทียบแนวทางการสร้างแบบจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวบีต้าซาดั้ง ภาพ.....	38



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1.1	ภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาซาดังภาพที่ได้แสดงให้เห็นในระนาบ x-y (ภาพบน) และในระนาบ x-z (ภาพล่าง) นี้เป็นภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ พี. คา ลาส เจ. ลาร์วูด บี. เอ. สมิท และ เอ. ชูลซ์ ได้สร้างขึ้นมา ส่วนเส้นปะที่ได้ ปรากฏให้เห็นอยู่ในทั้ง 2 กรอบภาพนี้ก็คือเส้นทางโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจร จากทางด้านขวามือของกรอบภาพผ่านเข้าไปใกล้ดาวบีตาซาดังภาพ.....	1
2.1	เมสสิเยร์ 80 (Messier 80 หรือ M80) เป็นกระจุกดาวทรงกลมที่อยู่ในกลุ่มดาว แมงป่อง (Scorpius).....	5
2.2	กระจุกดาวลูกไก่ (Pleiades) เป็นกระจุกดาวเปิดที่อยู่ในกลุ่มดาววัว (Taurus).....	7
2.3	แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิด (Protoplanetary Disk) ที่กำลังก่อตัวขึ้นอยู่ใน เนบิวลานายพราน (Orion Nebula).....	9
3.1	แผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่ม.....	12
4.1	แผ่นจานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี $e_*$ เท่ากับ 1, 2, 4, 7 และ 11 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ออกห่างไปได้ 19.134q, 45.304q, 74.738q, 104.63q และ 134.62q จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด ตามลำดับ.....	17
4.2	ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาว ฤกษ์ที่มี $e_*$ เท่ากับ 1, 2, 4, 7 และ 11 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสี น้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว.....	18
4.3	ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น ที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาค แผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี $e_*$ เท่ากับ 1, 2, 4, 7 และ 11 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว.....	19

ภาพที่	หน้า
4.4 แผ่นจานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี $i_*$ เท่ากับ $5^\circ$ , $15^\circ$ , $30^\circ$ , $150^\circ$ , $165^\circ$ และ $175^\circ$ นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ออกห่างไปได้ $19.134q$ จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด.....	21
4.5 ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี $i_*$ เท่ากับ $5^\circ$ , $15^\circ$ , $30^\circ$ , $150^\circ$ , $165^\circ$ และ $175^\circ$ นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว.....	22
4.6 ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี $i_*$ เท่ากับ $5^\circ$ , $15^\circ$ , $30^\circ$ , $150^\circ$ , $165^\circ$ และ $175^\circ$ นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว.....	23
4.7 แผ่นจานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี $\omega_*$ เท่ากับ $0^\circ$ , $45^\circ$ , $90^\circ$ , $135^\circ$ , $180^\circ$ , $225^\circ$ , $270^\circ$ และ $315^\circ$ นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ออกห่างไปได้ $19.134q$ จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด.....	25
4.8 ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี $\omega_*$ เท่ากับ $0^\circ$ , $45^\circ$ , $90^\circ$ , $135^\circ$ , $180^\circ$ , $225^\circ$ , $270^\circ$ และ $315^\circ$ นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว.....	26
4.9 ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี $\omega_*$ เท่ากับ $0^\circ$ , $45^\circ$ , $90^\circ$ , $135^\circ$ , $180^\circ$ , $225^\circ$ , $270^\circ$ และ $315^\circ$ นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว.....	27

ภาพที่		หน้า
4.10	แผ่นจานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี $M_*$ เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, 4 และ 8 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ออกห่างไปได้ 15.518q, 16.456q, 17.303q, 19.134q, 22.034q, 26.294q และ 32.187q จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด ตามลำดับ.	29
4.11	ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี $M_*$ เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, 4 และ 8 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว.....	30
4.12	ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี $M_*$ เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, 4 และ 8 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว....	31
5.1	ภาพแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาซาดังภาพนี้ถ่ายได้โดยใช้กล้องโทรทรรศน์ที่มีโคโรนากราฟ (Coronagraph) เข้ามาช่วยในการปิดกั้นแสงที่มาจากโฟโตสเฟียร์ (Photosphere) ของดาวบีตาซาดังภาพ.....	33
5.2	ลำดับการเปลี่ยนแปลงของแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาซาดังภาพ (ดอกจันสีน้ำเงิน) ที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีเหลือง) ได้ใช้เวลาโคจรผ่านไปได้ประมาณ $-3,685$ ปี, $0$ ปี, $+3,685$ ปี และ $+86,893$ ปี ตามลำดับ.....	34
5.3	ภาพซ้ายมือเป็นภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาซาดังภาพที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไป ส่วนภาพขวามือที่ถ่ายได้โดยใช้กล้องโทรทรรศน์อวกาศฮับเบิลนี้เป็นภาพถ่ายกลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ปรากฏให้เห็นอยู่บนส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือจากดาวบีตาซาดังภาพ.....	35
5.4	ความรีกับความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น (ภาพแถบบนเป็นภาพจำลองของ เจ. ดี. ลาร์วูด กับ พี. จี. คาลาส ส่วนภาพแถวล่างเป็นภาพจำลองของเราเอง).....	36
ก.1	ตำแหน่งของจุดมวล $m_1$ กับ $m_2$ ในกรอบเฉื่อย.....	45
ก.2	ตำแหน่งสัมพัทธ์ของจุดมวล $m_2$ เทียบกับจุดมวล $m_1$ .....	47

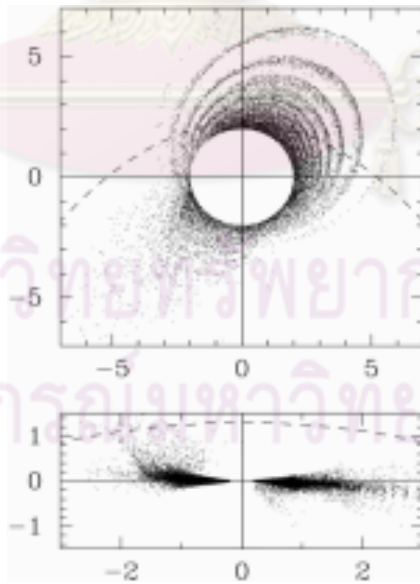
ภาพที่		หน้า
ข.1	เส้นทางโคจรวงรีของวัตถุท้องฟ้า P นี้แสดงด้วยเส้นสีเขียว ส่วนเส้นสีน้ำเงินนั้นคือวงกลมเสริม (Auxiliary Circle).....	50
ข.2	เส้นทางโคจรไฮเพอร์โบลาของวัตถุท้องฟ้า P นี้แสดงด้วยเส้นสีเขียวที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของภาพ ส่วนเส้นสีน้ำเงินที่อยู่ทางด้านขวามือของภาพนี้คือไฮเพอร์โบลาเสริม (Auxiliary Hyperbola).....	55
ข.3	เส้นทางโคจรพาราโบลาของวัตถุท้องฟ้า P นี้แสดงด้วยเส้นสีเขียวที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของภาพ ส่วนเส้นสีแดงที่เป็นเส้นตรงคงที่ที่อยู่ทางด้านขวามือของภาพนี้คือไดเรกตริกซ์.....	59
ค.1	ระนาบสีเขียวนี้เป็นระนาบทางโคจรของวัตถุท้องฟ้าที่โคจรรอบๆ จุด F ส่วนระนาบสีน้ำตาลนั้นเป็นระนาบอ้างอิง.....	62
ง.1	ตำแหน่งของจุดมวล $m_1$ , $m_2$ และ $m_3$ ในกรอบเฉื่อย.....	64


  
 ศูนย์วิทยทรัพยากร  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 1

## บทนำ

ภายในเมฆโมเลกุลที่มีขนาดใหญ่และมีความหนาแน่นมากนั้นสามารถให้กำเนิดดาวฤกษ์แต่ละดวงขึ้นมาได้ ดาวฤกษ์แต่ละดวงที่ก่อตัวขึ้นมานี้อาจจะถูกยึดติดให้อยู่รวมกันกลายเป็นกระจุกดาวได้โดยแรงโน้มถ่วงที่กระทำซึ่งกันและกันระหว่างดาวฤกษ์ เมื่อดาวฤกษ์แต่ละดวงที่เป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวนั้นมีการโคจรผ่านเข้ามาใกล้กันแล้วจะมีผลทำให้ดาวฤกษ์ที่ถูกรบกวนอันเนื่องมาจากมีดาวฤกษ์ดวงใดดวงหนึ่งโคจรผ่านเข้ามาใกล้นี้มีความเร็วเพิ่มสูงขึ้นและถ้าหากว่าความเร็วของดาวฤกษ์ที่ถูกรบกวนนี้เพิ่มสูงขึ้นจนกระทั่งมากกว่าความเร็วหลุดพ้นออกไปจากกระจุกดาวแล้วมันอาจจะมีผลทำให้กระจุกดาวถึงขั้นที่จะถูกทำลายหรือแตกกระจายออกไปได้<sup>[1]</sup> เพราะฉะนั้น พี. คาลาส (P. Kalas) เจ. ลาร์วูด (J. Larwood) บี. เอ. สมิธ (B. A. Smith) และ เอ. ชูลซ์ (A. Schultz) จึงได้สร้างแบบจำลองของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรรอบๆ ดาวปีศาจที่ตั้งภาพพร้อมกับกำหนดให้มีดาวฤกษ์ดวงหนึ่งโคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพ อนุภาคแผ่นจานฝุ่นจำลองเหล่านี้จะถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อได้รับแรงโน้มถ่วงของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพเท่านั้น ส่วนแรงดันเหตุรังสี (Radiation Pressure) พอยน์ติง-โรเบิร์ตสัน แดร์ริก (Poynting–Robertson Drag) การชนกันและการระเหิดที่จะไปรบกวนและกำจัดอนุภาคแผ่นจานฝุ่นออกไปนั้นไม่ต้องคำนึงถึง



ภาพที่ 1.1 ภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจที่ตั้งภาพที่ได้แสดงให้เห็นในระนาบ x-y (ภาพบน) และในระนาบ x-z (ภาพล่าง) นี่เป็นภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ พี. คาลาส เจ. ลาร์วูด บี. เอ. สมิธ และ เอ. ชูลซ์ ได้สร้างขึ้นมา ส่วนเส้นปะที่ได้ปรากฏให้เห็นอยู่ในทั้ง 2 กรอบภาพนี้ก็คือเส้นทางโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรจากทางด้านขวามือของกรอบภาพผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพ<sup>[2]</sup>

ในการจำลองของ พี. คาลาส เจ. ลาร์วูด บี. เอ. สมิธ และ เอ. ชูลซ์ นั้นได้นำอนุภาคทดสอบ  $\sim 10^6$  อนุภาคที่ไม่มีการชนกันนี้มาใช้แทนอนุภาคแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจที่ตั้งภาพที่ในตอนแรกโคจรอยู่บนระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มนี้เป็นวงกลมอยู่ภายในช่วงรัศมี 0.2 – 2 หน่วยความยาว ส่วนดาวฤกษ์ที่จะโคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพนั้นในตอนแรกจะถูกกำหนดให้อยู่ห่างออกไป 20 หน่วยความยาว จากดาวปีศาจที่ตั้งภาพ เมื่อ พี. คาลาส เจ. ลาร์วูด บี. เอ. สมิธ และ เอ. ชูลซ์ ได้นำระเบียบวิธีการก๊อกระโดด (Leapfrog Method) อันดับที่ 2 มาใช้ในการแก้สมการการเคลื่อนที่พร้อมกับกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพนี้มีความรีของวงโคจรเท่ากับ 1 มีความเอียงของวงโคจรเท่ากับ  $30^\circ$  มีระยะมุมของจุดใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพมากที่สุดเท่ากับ  $90^\circ$  และมีระยะจุดใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพมากที่สุดเท่ากับ 2.6 หน่วยความยาว แล้วจะสังเกตพบว่ากลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจที่ตั้งภาพที่ได้ปรากฏให้เห็นในระนาบ x-z ภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพนั้นได้ใช้เวลาโคจรผ่านจุดใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพมากที่สุดนี้ไปได้ 160 หน่วยเวลา นี่ก็คือวงแหวนที่มีรูปร่างเป็นวงรีที่ปรากฏให้เห็นได้ในระนาบ x-y<sup>[2]</sup>

ต่อมา เจ. ดี. ลาร์วูด (J. D. Larwood) กับ พี. จี. คาลาส (P. G. Kalas) ได้ทำการจำลองใหม่อีกครั้งเพื่ออยากทราบว่าผลการจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจที่ตั้งภาพที่ พี. คาลาส เจ. ลาร์วูด บี. เอ. สมิธ และ เอ. ชูลซ์ ได้ทำไปแล้วก่อนหน้านี้สามารถวัดความยาวของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือและทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวปีศาจที่ตั้งภาพนี้ได้สอดคล้องใกล้เคียงกับความยาวที่วัดได้ใหม่จากการสังเกตการณ์ (ความยาวของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือและทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวปีศาจที่ตั้งภาพนี้สามารถวัดออกไปได้ถึง  $\sim 1,835$  AU และ  $\sim 1,450$  AU ตามลำดับ) หรือไม่ได้โดยนำอนุภาคทดสอบ  $10^4$  อนุภาคที่ไม่มีการชนกันนี้มาใช้แทนอนุภาคแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจที่ตั้งภาพที่ในตอนแรกโคจรอยู่บนระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มนี้เป็นวงกลมอยู่ภายในช่วงรัศมี 0.5 – 2 หน่วยความยาว ส่วนดาวฤกษ์ที่จะโคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพนั้นในตอนแรกจะถูกกำหนดให้อยู่ห่างออกไป 20 หน่วยความยาว จากดาวปีศาจที่ตั้งภาพ เมื่อ เจ. ดี. ลาร์วูด กับ พี. จี. คาลาส ได้นำระเบียบวิธีการรุงเก้-คุทต้า-เฟห์ลเบิร์ก (Runge-Kutta-Fehlberg Method) อันดับที่ 5 มาใช้ในการแก้สมการการเคลื่อนที่พร้อมกับกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพนี้มีความรีของวงโคจรเท่ากับ 1 มีความเอียงของวงโคจรเท่ากับ  $30^\circ$  มีระยะมุมของจุดใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพมากที่สุดเท่ากับ  $90^\circ$  และมีระยะจุดใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพมากที่สุดเท่ากับ 2.6 หน่วยความยาว แล้วจะสามารถวัดความยาวของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือออกไปได้ถึง  $\sim 1,890$  AU จากดาวปีศาจ

ขาดังภาพ ส่วนความยาวของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวบีตาขาตั้งภาพนั้นจะสามารถวัดออกไปได้ถึง  $\sim 1,620 \text{ AU}^{[3]}$

จากผลการจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ได้ของทั้ง 2 คณะนั้น ถ้าเราได้ทำการสังเกตระนาบ x-z ของภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ได้ของทั้ง 2 คณะใหม่แล้วปรากฏว่ากลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ได้ปรากฏให้เห็นในระนาบ x-z นั้นยังไม่ค่อยชัดเจนและดูเหมือนว่าจะยังไม่สอดคล้องกับภาพถ่ายที่ถ่ายได้จากกล้องโทรทรรศน์ เพราะฉะนั้น ในการวิจัยนี้ เราจะเริ่มต้นจากการทำการศึกษาตัวแปรแต่ละตัวของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้นี้ดูว่ามีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรได้โดยการทำการปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งใน 4 ตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ หลังจากนั้นเราก็จะนำผลการศึกษาแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนั้นมาใช้เป็นแนวทางในการทำการจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาขาตั้งภาพให้มีความสอดคล้องใกล้เคียงกับภาพถ่ายที่ถ่ายได้จากกล้องโทรทรรศน์ให้ได้มากที่สุด

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับภายหลังจากที่เราได้ทำการจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้โดยดาวฤกษ์ดวงหนึ่งที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้นี้สำเร็จเรียบร้อยแล้วนั้น มีดังต่อไปนี้

1. ช่วยทำให้เราเข้าใจว่าตัวแปรแต่ละตัวของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้นี้มีผลอย่างไรต่อแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนเสียจนกระทั่งเปลี่ยนแปลงไป
2. ช่วยทำให้เราเข้าใจเกี่ยวกับพิสัยขั้น-เวลา (Time-Step Size) ว่ามีผลอย่างไรต่อแบบจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนที่เราได้สร้างขึ้นมานั้นเมื่อเทียบกับแบบจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนที่ เจ. ดี. ลาร์วูด กับ พี. จี. คาลาส ได้สร้างขึ้นมา

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 2

### ทฤษฎีเกี่ยวกับดาวฤกษ์และแผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิด

#### 2.1 กระจุกดาว

กระจุกดาว (Star Cluster) คือกลุ่มของดาวฤกษ์ที่ถูกยึดติดให้อยู่รวมกันไว้โดยแรงโน้มถ่วงที่กระทำซึ่งกันและกันระหว่างดาวฤกษ์<sup>[4]</sup> กระจุกดาวสามารถถูกจำแนกออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ ได้ดังนี้

##### 2.1.1 กระจุกดาวทรงกลม

กระจุกดาวทรงกลม (Globular Cluster) คือกลุ่มของดาวฤกษ์ที่ถูกยึดติดให้อยู่รวมกันอย่างหนาแน่นมากจนมีผลทำให้กลุ่มของดาวฤกษ์นี้มีรูปร่างดูเหมือนเป็นทรงกลม กระจุกดาวทรงกลมนี้มีดาวฤกษ์ที่เป็นสมาชิกอยู่ได้ตั้งแต่ 10,000 ถึง 1,000,000 ดวง และดาวฤกษ์ที่เป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวทรงกลมนี้ส่วนใหญ่มักจะเป็นดาวฤกษ์สีเหลืองกับสีแดง ส่วนดาวฤกษ์สีน้ำเงินที่มีมวลและอุณหภูมิสูงมากบางดวงที่พบเห็นได้ในกระจุกดาวทรงกลมนี้เชื่อกันว่าจะถูกสร้างขึ้นมาจากการชนกันและหลอมรวมกันของดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ บริเวณชั้นในที่หนาแน่นของกระจุกดาว ดาวฤกษ์สีน้ำเงินที่มีมวลและอุณหภูมิสูงมากเหล่านี้ถูกเรียกว่า ดาวแปลกพวกสีน้ำเงิน (Blue Straggler)<sup>[4][5]</sup>

นักดาราศาสตร์จำแนกรูปร่างลักษณะของกระจุกดาวทรงกลมได้โดยใช้รัศมีมาตรฐาน รัศมีมาตรฐานนี้ประกอบด้วยรัศมีแกนกลาง (Core Radius) รัศมีครึ่งแสง (Half-Light Radius) และรัศมีไทด์ล (Tidal Radius) รัศมีแกนกลางคือระยะห่างที่ความสว่างพื้นผิวปรากฏลดลงเหลือเพียงครึ่งหนึ่ง รัศมีครึ่งแสงที่ส่วนใหญ่มีค่ามากกว่ารัศมีแกนกลางนี้คือระยะห่างที่ความสว่างทั้งหมดของกระจุกดาวลดลงเหลือเพียงครึ่งหนึ่ง กระจุกดาวทรงกลมส่วนใหญ่มีรัศมีครึ่งแสงน้อยกว่า 10 พาร์เซก (Parsec หรือ pc) และสุดท้าย รัศมีไทด์ลคือระยะห่างที่แรงโน้มถ่วงภายนอก (แรงโน้มถ่วงที่ดาราจักรกระทำต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ในกระจุกดาว) มากกว่าแรงโน้มถ่วงภายใน (แรงโน้มถ่วงที่ดาวฤกษ์แต่ละดวงที่เป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวนั้นออกแรงกระทำซึ่งกันและกัน)

เมื่อกระจุกดาวทรงกลมโคจรผ่านไปใกล้กับวัตถุท้องฟ้าที่มีมวลมาก เช่น ยานแกนกลางของดาราจักร แล้วจะมีผลทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาระหว่างกันขึ้น ความแตกต่างระหว่างแรงโน้มถ่วงที่วัตถุมวลมากกระทำต่อส่วนที่อยู่ใกล้กับส่วนที่อยู่ไกลจากวัตถุมวลมากมากที่สุดของกระจุกดาวนั้นทำให้เกิดเป็นแรงไทด์ล (Tidal Force) แรงปฏิกิริยาไทด์ลนี้มีผลทำให้พลังงานจลน์ของกระจุกดาวทรงกลมนั้นเพิ่มสูงขึ้นหรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งเพื่อให้เห็นภาพได้อย่างชัดเจนก็คือมีผลทำให้ดาวฤกษ์ที่เป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวทรงกลมนั้นหลุดออกไปจากกระจุกดาวทรงกลมมากขึ้นและมีผลทำให้ขนาดของกระจุกดาวทรงกลมนั้นหดเล็กลง

ในปัจจุบันนี้ เราค้นพบกระจุกดาวทรงกลมที่อยู่ในดาราจักรทางช้างเผือก (Milky Way Galaxy) เป็นจำนวนทั้งสิ้น 151 แห่ง จากจำนวนทั้งหมด  $180 \pm 20$  แห่ง ที่คาดว่าจะพบเห็นได้ในดาราจักรทางช้างเผือก กระจุกดาวทรงกลมที่ยังค้นไม่พบนี้อาจจะซ่อนตัวอยู่หลังม่านแก๊สและฝุ่นที่อยู่ในดาราจักรทางช้างเผือกก็ได้<sup>[6]</sup>



ภาพที่ 2.1 เมสสิเยร์ 80 (Messier 80 หรือ M80) เป็นกระจุกดาวทรงกลมที่อยู่ในกลุ่มดาวแมงป่อง (Scorpius)<sup>[6]</sup>

### 2.1.2 กระจุกดาวเปิด

กระจุกดาวเปิด (Open Cluster) คือกลุ่มของดาวฤกษ์อายุน้อยที่พบเห็นได้ในดาราจักรชนิดก้นหอย (Spiral Galaxy) และในดาราจักรไร้รูปแบบ (Irregular Galaxy) โดยเฉพาะในดาราจักรชนิดก้นหอย เราเกือบจะพบเห็นกระจุกดาวเปิดได้อยู่เสมอในแขนกังหันและกระจุกดาวเปิดที่เราได้พบเห็นนี้ถูกรวบรวมให้อยู่ใกล้ๆ กับระนาบดาราจักรนั้นอย่างหนาแน่น เพราะฉะนั้นจึงสามารถเรียกกระจุกดาวเปิดได้อีกชื่อหนึ่งว่ากระจุกดาวดาราจักร (Galactic Cluster)<sup>[1]</sup>

กระจุกดาวเปิดถูกสร้างขึ้นมาอย่างต่อเนื่องได้โดยการยุบตัวลงอันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วงของเมฆโมเลกุลยักษ์ โดยเฉพาะในดาราจักรทางช้างเผือก อัตราการสร้างกระจุกดาวเปิดนี้อยู่ที่ประมาณหนึ่งครั้งต่อทุกๆ เวลาไม่กี่พันปี กระจุกดาวเปิดโดยทั่วไปมักจะมีดาวฤกษ์ที่เป็นสมาชิกอยู่ได้ตั้งแต่ 100 ถึง 1,000 ดวง และมีรัศมีได้ประมาณ 1 ถึง 10 พาร์เซก<sup>[7]</sup> กระจุกดาวเปิดนี้อาจจะถูกทำลายหรือแตกกระจายออกไป (ดาวฤกษ์แต่ละดวงที่เป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวเปิดนี้ไม่มีแรงโน้มถ่วงกระทำซึ่งกันและกันอีกต่อไป) ได้เมื่อกระจุกดาวเปิดโคจรผ่านไปใกล้กับเมฆโมเลกุลยักษ์หรือกระจุกดาวอื่นๆ นอกจากนี้การโคจรผ่านเข้ามาใกล้กับระหว่งดาวฤกษ์ที่เป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวเปิดนั้นอาจจะมีผลทำให้กระจุกดาวเปิดถึงขั้นที่จะถูกทำลายหรือแตกกระจายออกไปได้อีกด้วย<sup>[1][8]</sup> ระยะเวลาที่กระจุกดาวเปิดถูกทำลายหรือแตกกระจายออกไปนี้ขึ้นอยู่กับความหนาแน่นของกระจุกดาวเปิดในช่วงเริ่มต้น ยิ่งกระจุกดาวเปิดมีความหนาแน่นมากเท่าไรก็จะยิ่งใช้เวลานานมากขึ้นเท่านั้น ครึ่งชีวิตของกระจุกดาวเปิดโดยประมาณ (ภายหลังจากที่กระจุกดาวเปิดได้สูญเสียดาวฤกษ์ที่เป็นสมาชิกออกไปได้ครึ่งหนึ่ง) อยู่ในช่วงราว 150 ถึง 800 ล้านปี<sup>[1]</sup>

ภายหลังจากที่กระจุกดาวเปิดได้ถูกทำลายหรือแตกกระจายออกไปแล้ว ดาวฤกษ์ส่วนใหญ่ที่เคยเป็นสมาชิกอยู่ในกระจุกดาวเปิดนี้อาจจะยังคงเคลื่อนที่ผ่านห้วงอวกาศไปในทิศทางเดียวกันด้วยความเร็วพอๆ กัน ซึ่งเราเรียกลักษณะเช่นนี้ว่าชุมนุมดาว (Stellar Association) หรือกระจุกดาวเคลื่อนที่ (Moving Cluster) หรือกลุ่มเคลื่อนที่ (Moving Group) ยกตัวอย่างเช่น ดาวฤกษ์สุกสว่างหลายๆ ดวงที่อยู่ ณ บริเวณ "ก้านกระบวย (Plough)" ของกลุ่มดาวหมีใหญ่ (Ursa Major) นี้เคยเป็นสมาชิกของกระจุกดาวเปิดแห่งหนึ่งที่ได้เปลี่ยนสภาพกลายเป็นชุมนุมดาว<sup>[1]</sup>



ภาพที่ 2.2 กระจุกดาวลูกไก่ (Pleiades) เป็นกระจุกดาวเปิดที่อยู่ในกลุ่มดาววัว (Taurus)<sup>[4]</sup>

## 2.2 ดาวฤกษ์ก่อนเกิด

เมฆระหว่างดวงดาวชนิดหนึ่งที่มีขนาดใหญ่และมีความหนาแน่นมากพอที่จะยอมให้เกิดการสร้างโมเลกุล (ส่วนใหญ่มักจะเป็นไฮโดรเจนโมเลกุลหรือ  $H_2$ ) ขึ้นมาได้นี้ถูกเรียกว่าเมฆโมเลกุล (Molecular Cloud)<sup>[9]</sup> เมฆโมเลกุลนี้สามารถยุบตัวลงภายใต้แรงโน้มถ่วงของมันเองได้เมื่อเมฆโมเลกุลมีขนาดและมวลมากพอที่จะทำให้ความดันแก๊สที่อยู่ภายในเมฆโมเลกุลนี้ไม่มากพอที่จะผลักดันเมฆโมเลกุลนั้นเอาไว้ได้ การยุบตัวลงของเมฆโมเลกุลนั้นมีผลทำให้เมฆโมเลกุลแตกออกกลายเป็นก้อนเมฆโมเลกุลที่มีขนาดเล็กลงและมีความหนาแน่นมากขึ้นและถ้าหากว่าก้อนเมฆโมเลกุลนี้ยังคงยุบตัวลงต่อไปเรื่อยๆ แล้วจะมีผลทำให้อุณหภูมิของก้อนเมฆโมเลกุลนั้นเริ่มที่จะเพิ่มสูงขึ้น อุณหภูมิของก้อนเมฆโมเลกุลที่เพิ่มสูงขึ้นนี้ไม่ได้เกิดขึ้นมาจากปฏิกิริยานิวเคลียสแต่เกิดขึ้นมาจากการเปลี่ยนพลังงานโน้มถ่วงให้กลายเป็นพลังงานจลน์ความร้อน<sup>[10]</sup> เมื่อก้อนเมฆโมเลกุลที่ยุบตัวลงนั้นมีอุณหภูมิและความดันเพิ่มสูงขึ้นจนกระทั่งถึงระดับหนึ่งแล้วจะมีผลทำให้ก้อนเมฆโมเลกุลที่ยุบตัวลงนั้นอัดแน่นกลายเป็นทรงกลมของแก๊สที่หมุนรอบตัวเอง เมื่อทรงกลมของแก๊สที่หมุนรอบตัวเองนี้มีความร้อนมากพอที่จะต่อต้านการยุบตัวลงอันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วงของมันเองแล้วจะมีผลทำให้ทรงกลมของแก๊สนั้นพัฒนาตัวเองไปเป็นวัตถุที่ถูกเรียกว่าดาวฤกษ์ก่อนเกิด (Protostar)<sup>[11]</sup>

ดาวฤกษ์ก่อนเกิดนี้ยังสามารถพัฒนาต่อไปได้เป็นดาวฤกษ์ชนิดที่ว้าว (T Tauri Star) ที่มีมวลน้อยกว่า 2 เท่าของมวลดวงอาทิตย์ได้เมื่อดาวฤกษ์ก่อนเกิดมีมวลและอุณหภูมิพื้นผิวใกล้เคียงกับดาวลำดับหลัก ดาวฤกษ์ชนิดที่ว้าวที่มีอายุน้อยมากที่สุดที่สามารถมองเห็นได้ในระดับสเปกตรัม F, G, K และ M นี้ยังไม่ถือว่าเป็นดาวลำดับหลักเพราะว่าอุณหภูมิที่ใจกลางของดาวฤกษ์ชนิดที่ว้าวนี้ยังต่ำมากเกินไปที่จะทำให้เกิดปฏิกิริยานิวเคลียสขึ้นมาได้ เมื่อเวลาผ่านไปประมาณ 100 ล้านปีแล้วอุณหภูมิที่ใจกลางของดาวฤกษ์ชนิดที่ว้าวที่ได้ยุบตัวลงอีกนั้นก็จะมีอุณหภูมิเพิ่มสูงขึ้นจนกระทั่งมากพอที่จะทำให้เกิดปฏิกิริยานิวเคลียสขึ้นมาได้หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าดาวฤกษ์ชนิดที่ว้าวได้พัฒนาต่อไปเป็นดาวลำดับหลัก<sup>[12]</sup>

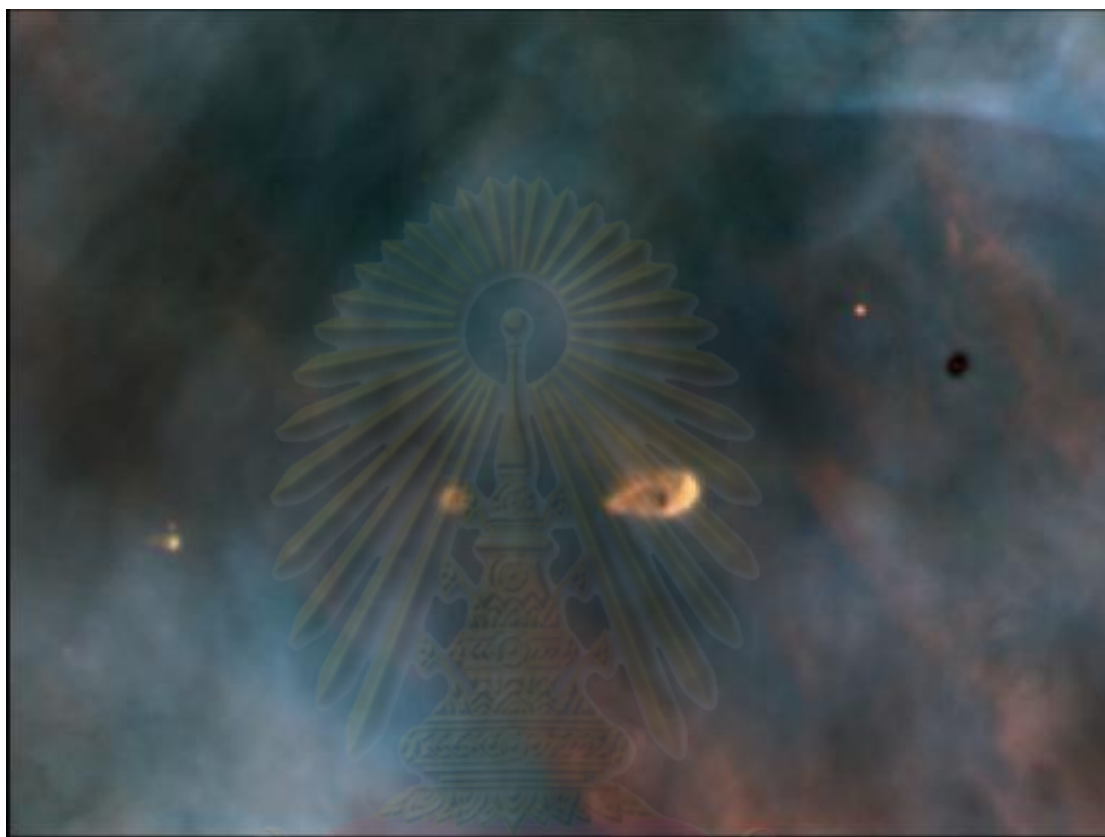
### 2.3 แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิด

แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิด (Protoplanetary Disk หรือ Proplyd) คือแผ่นจานที่อัดแน่นเต็มไปด้วยแก๊สที่กำลังหมุนวนไปรอบๆ ดาวฤกษ์ที่เพิ่งจะก่อตัวขึ้นมาใหม่ แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิดที่มีรัศมีได้ถึงประมาณ 1,000 AU และมีอุณหภูมิก่อนข้างต่ำยกเว้นส่วนที่อยู่ชั้นในสุดของแผ่นจานเท่านั้นที่จะมีอุณหภูมิได้มากกว่า 1,000 เคลวิน นี่อาจจะถือได้ว่าเป็นแผ่นจานพอกพูนมวล (Accretion Disk) ชนิดหนึ่ง เพราะว่าสสารที่อยู่ในสถานะแก๊สอาจจะกำลังไหลจากขอบชั้นในของแผ่นจานเข้าไปอยู่บนพื้นผิวของดาวฤกษ์ ซึ่งแตกต่างจากกระบวนการพอกพูนมวลของดาวเคราะห์<sup>[13]</sup>

แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิดที่อยู่ในช่วงระยะแรกนั้นมีอุณหภูมิสูงมากจนมีผลทำให้เกิดสสารที่ระเหยกกลายเป็นไอได้อย่างรวดเร็วขึ้นในบริเวณที่อยู่ชั้นในของแผ่นจาน(น้ำ, สสารอินทรีย์ และก้อนหินบางก้อนที่จะระเหยกกลายเป็นไอ) ยกเว้นธาตุที่ทนความร้อนได้เหมือนกับเหล็กเท่านั้นที่จะไม่ระเหยกกลายเป็นไอ แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิดมีอุณหภูมิต่ำลงและบางลงได้เมื่อดาวฤกษ์ก่อนเกิดที่ถูกล้อมรอบด้วยแผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิดนี้ได้พัฒนาตัวเองไปเป็นดาวฤกษ์ชนิดที่ว้าว สสารที่ระเหยกกลายเป็นไอได้ไม่มากนักเริ่มที่จะรวมตัวกันอัดแน่นให้กลายเป็นอนุภาคฝุ่นที่มีขนาด 0.1 ถึง 1  $\mu\text{m}$  ที่มีซิลิเกตตกผลึก<sup>[14]</sup> อนุภาคฝุ่นที่ก่อตัวขึ้นมาสามารถเคลื่อนที่เข้ามาชนกันและจับตัวให้ติดกันกลายเป็นวัตถุที่มีขนาดใหญ่ขึ้นได้เมื่อแผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิดอยู่ในสภาวะที่มีความหนาแน่นสูงมากและถ้าหากว่าวัตถุที่มีขนาดใหญ่ขึ้นนี้มีขนาดใหญ่ขึ้นจนกระทั่งถึงประมาณ 1 กิโลเมตร แล้วจะมีผลทำให้วัตถุที่มีขนาดใหญ่ขึ้นจนกระทั่งถึงประมาณ 1 กิโลเมตร นี้สามารถสร้างแรงโน้มถ่วงที่กระทำซึ่งกันและกันได้ เราเรียกวัตถุที่มีขนาดใหญ่ขึ้นจนกระทั่งถึงประมาณ 1 กิโลเมตร นี้ว่าดาวเคราะห์แรกเกิด (Planetesimal)<sup>[15]</sup>

ดาวเคราะห์แรกเกิดหลายๆ ดวงอาจจะแตกกระจายออกเป็นชิ้นเล็กชิ้นน้อยในระหว่างที่มีการชนกันอย่างรุนแรง (ความเร็วในการชนกันระหว่างดาวเคราะห์แรกเกิดมากกว่า

ความเร็วหลุดพ้นออกไปจากพื้นผิวของดาวเคราะห์แรกเกิด) แต่ดาวเคราะห์แรกเกิดที่มีขนาดใหญ่  
มากที่สุด 2 ถึง 3 ดวงสามารถเคลื่อนที่เข้ามาชนกันและจับตัวให้ติดกันต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่ง  
กลายเป็นดาวเคราะห์



ภาพที่ 2.3 แผ่นจานดาวเคราะห์ก่อนเกิด (Protoplanetary Disk) ที่กำลังก่อตัวขึ้นอยู่ในเนบิวลานายพราน  
(Orion Nebula)<sup>[13]</sup>

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### บทที่ 3

## แบบจำลองกับสมการพื้นฐาน

ก่อนที่จะทำการจำลองเราจำเป็นต้องกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ ของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นและดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ ทำการแก้สมการการเคลื่อนที่ต่างๆ ที่เป็นสมการอนุพันธ์สามัญด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุดต้า (Runge-Kutta Method) อันดับที่ 5 และทำการหาค่าหลักมูลทางโคจรทั้งหมด 3 ค่า ได้แก่ ครึ่งแกนเอก ความรีและความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ ตามลำดับ เพื่อที่จะได้นำไปใช้ในการสร้างแบบจำลองใน 3 มิติและแบบจำลองใน 2 มิติของความรีและความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นซึ่งในบทนี้จะได้กล่าวถึงสิ่งที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้นดังต่อไปนี้

#### 3.1 ตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้

ในการจำลองนี้จะใช้ตัวแปรทั้งหมด 5 ตัวแปร ได้แก่  $e_*$  คือความรีของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้  $i_*$  คือความเอียงของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้เทียบกับระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่ม  $\omega_*$  คือระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุด ( Argument of Periastron )  $\Omega_*$  คือลองจิจูดของจุดโหนดขึ้น ( Longitude of Ascending Node ) และ  $M_*$  คืออัตราส่วนมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดที่ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ  $M_2/M_1$  เมื่อ  $M_1$  คือมวลของดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด และ  $M_2$  คือมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด ซึ่งเราจำเป็นต้องกำหนดค่าตัวแปรเหล่านี้ก่อนที่จะเริ่มทำการจำลองทุกครั้ง

#### 3.2 เงื่อนไขเริ่มต้นของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นและดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้

ในการจำลองนี้เราใช้อนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ไม่มีการชนกันและไม่มีแรงโน้มถ่วงกระทำซึ่งกันและกันเป็นจำนวนทั้งหมด 21,960 อนุภาค หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าเราใช้วงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นเป็นจำนวนทั้งหมด 61 วงโคจร และในแต่ละวงโคจรมีจำนวนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นทั้งหมด 360 อนุภาค ในตอนแรกอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่อยู่บนระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มเหล่านี้โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เป็นวงกลมด้วยความเร็วที่มีค่าเท่ากับ  $1/\sqrt{r}$  เมื่อ  $r$  คือระยะห่างจากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดถึงอนุภาคแผ่นจานฝุ่นใน

หน่วยของระยะจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้ ( $q$ ) ซึ่งในตอนแรกค่า  $\tilde{r}$  นี้ถูกกำหนดให้มีค่าตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8

ในส่วนนของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนั้น ในตอนแรกเรากำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้อยู่ที่จุดไกลดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดหรือดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้มีมุมกวาดจริง (True Anomaly) ที่มีค่าเท่ากับ  $-180^\circ$  หรือ  $-\pi$  เรเดียน ถ้าวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้นั้นเป็นวงรี เมื่อต้องการที่จะหาเวลาเริ่มต้นของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้ให้เรานำค่ามุมกวาดจริงของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้ ( $f_*$ ) นี้แทนลงไปนสมการที่ (3.1)

$$u = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-e_*}{1+e_*}} \tan \left( \frac{f_*}{2} \right) \right) \quad (3.1)$$

ก็จะหาค่า  $u$  ได้ซึ่งค่า  $u$  ที่ได้มีค่าเท่ากับ  $-180^\circ$  หรือ  $-\pi$  เรเดียน ต่อไปให้เรานำค่า  $u$  ที่ได้แทนลงไปนสมการที่ (3.2)

$$\tilde{t} = \frac{u - e_* \sin u}{\sqrt{(1+M_*)(1-e_*)^3}} \quad (3.2)$$

ก็จะได้ค่า  $\tilde{t} = \sqrt{GM_1/q^3} t$  เมื่อ  $G$  คือค่าคงที่โน้มถ่วงสากลที่มีค่าเท่ากับ  $6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  หรือเท่ากับ  $1.985 \times 10^{-29} \text{ AU}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ y}^{-2}$  และ  $t$  คือเวลา ณ ตำแหน่งบนทางโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้ แต่ถ้าหากว่าวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้นั้นเป็นพาราโบลาและไฮเพอร์โบลา ในตอนแรกจะกำหนดให้  $\tilde{R}$  เท่ากับ 7 ซึ่ง  $\tilde{R}$  นี้คือระยะห่างจากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดถึงดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้ในหน่วยของ  $q$  เมื่อต้องการที่จะหาเวลาเริ่มต้นของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้ให้เรานำค่า  $\tilde{R}$  นี้แทนลงไปนสมการที่ (3.3)

$$\tilde{R} = \frac{1+e_*}{1+e_* \cos f_*} \quad (3.3)$$

ก็จะหาค่า  $f_*$  ได้ ต่อไปให้เรานำค่า  $f_*$  ที่ได้แทนลงไปนสมการที่ (3.4) ถ้าวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้นั้นเป็นพาราโบลา หรือสมการที่ (3.5) ถ้าวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไใกล้นั้นเป็นไฮเพอร์โบลา

$$u = \sqrt{2} \tan \left( \frac{f_*}{2} \right) \quad (3.4)$$

$$u = 2 \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{e_*-1}{e_*+1}} \tan \left( \frac{f_*}{2} \right) \right) \quad (3.5)$$

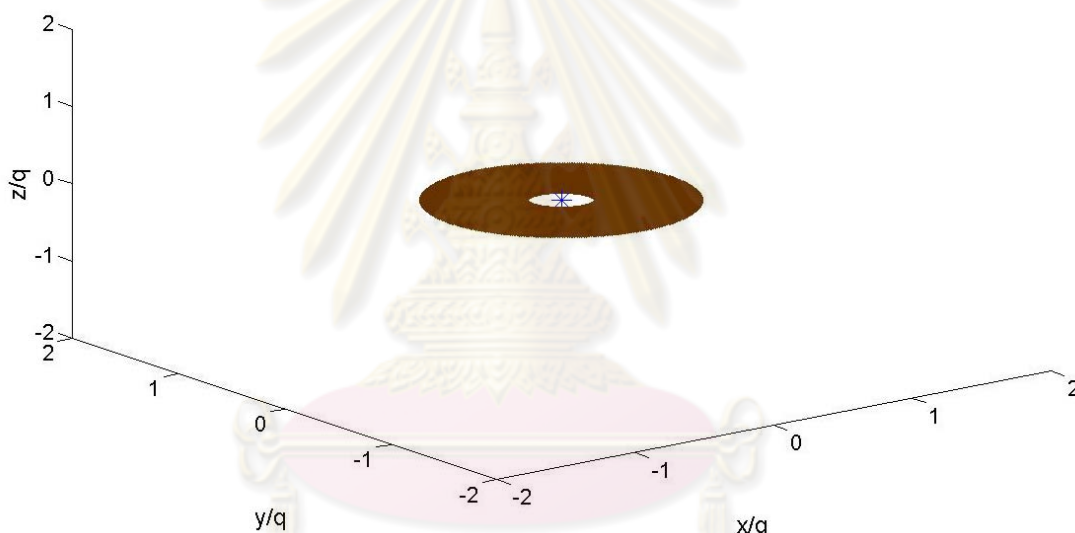


ก็จะหาค่า  $u$  ได้ ต่อไปนำค่า  $u$  ที่ได้แทนลงไปในสมการที่ (3.6) ถ้าวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่าน  
ไปใกล้นั้นเป็นพาราโบลา หรือสมการที่ (3.7) ถ้าวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านใกล้ใกล้เป็น  
ไฮเพอร์โบลา

$$\tilde{t} = \frac{\frac{u^3}{6} + u}{\sqrt{1+M_*}} \quad (3.6)$$

$$\tilde{t} = \frac{e_* \sinh u - u}{\sqrt{(1+M_*)(e_* - 1)^3}} \quad (3.7)$$

ก็จะได้ค่า  $\tilde{t}$  ตามที่ต้องการและค่า  $\tilde{t}$  ที่หาได้นี้มีค่าเป็นลบเพราะกำหนดให้เวลา ณ ตำแหน่ง  
จุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านใกล้ใกล้มีค่าเท่ากับศูนย์



ภาพที่ 3.1 แผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่ม

### 3.3 การแก้สมการการเคลื่อนที่ด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้าอันดับที่ 5

ภายหลังจากที่เราได้กำหนดค่าตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านใกล้และ  
เงื่อนไขเริ่มต้นของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นและดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านใกล้ใกล้เสร็จเรียบร้อยแล้วทำการ  
แก้สมการการเคลื่อนที่ต่างๆ ที่เป็นสมการอนุพันธ์สามัญด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้าอันดับ  
ที่ 5 เริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้

$$\frac{df_*}{d\tilde{t}} = \sqrt{\frac{1+M_*}{(1+e_*)^3}} (1+e_* \cos f_*)^2 \quad (3.8)$$

ก็จะหาค่า  $f_*$  ได้ ต่อไปนำค่า  $f_*$  ที่ได้แทนลงไปในสมการที่ (3.3) ก็จะหาค่า  $\tilde{R}$  ได้ ต่อไปนำค่า  $\tilde{R}$  และ  $f_*$  ที่ได้แทนลงไปในสมการที่ (3.9), (3.10) และ (3.11)

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= (\tilde{R} \cos f_*) (\cos \omega_* \cos \Omega_* - \sin \omega_* \sin \Omega_* \cos i_*) \\ &\quad - (\tilde{R} \sin f_*) (\sin \omega_* \cos \Omega_* + \cos \omega_* \sin \Omega_* \cos i_*)\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= (\tilde{R} \cos f_*) (\cos \omega_* \sin \Omega_* + \sin \omega_* \cos \Omega_* \cos i_*) \\ &\quad - (\tilde{R} \sin f_*) (\sin \omega_* \sin \Omega_* - \cos \omega_* \cos \Omega_* \cos i_*)\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$\tilde{Z} = (\tilde{R} \cos f_*) (\sin \omega_* \sin i_*) + (\tilde{R} \sin f_*) (\cos \omega_* \sin i_*) \quad (3.11)$$

ก็จะหาค่า  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$  และ  $\tilde{Z}$  ได้ เมื่อ  $\tilde{X}$  คือตำแหน่งในแนวแกน  $\tilde{x}$  ของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ในหน่วยของ  $q$ ,  $\tilde{Y}$  คือตำแหน่งในแนวแกน  $\tilde{y}$  ของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ในหน่วยของ  $q$  และ  $\tilde{Z}$  คือตำแหน่งในแนวแกน  $\tilde{z}$  ของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ในหน่วยของ  $q$

ต่อไปทำการแก้สมการการเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้ด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้า  
อันดับที่ 5

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = v_{\tilde{x}} \quad (3.12)$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = v_{\tilde{y}} \quad (3.13)$$

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} = v_{\tilde{z}} \quad (3.14)$$

$$\frac{dv_{\tilde{x}}}{d\tilde{t}} = \frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\frac{\tilde{x}}{|\tilde{r}|^3} + \frac{M_*(\tilde{X}-\tilde{x})}{|\tilde{r}-\tilde{R}|^3} - \frac{M_*\tilde{X}}{|\tilde{R}|^3} \quad (3.15)$$

$$\frac{dv_{\tilde{y}}}{d\tilde{t}} = \frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{t}^2} = -\frac{\tilde{y}}{|\tilde{r}|^3} + \frac{M_*(\tilde{Y}-\tilde{y})}{|\tilde{r}-\tilde{R}|^3} - \frac{M_*\tilde{Y}}{|\tilde{R}|^3} \quad (3.16)$$

$$\frac{dv_{\tilde{z}}}{d\tilde{t}} = \frac{d^2\tilde{z}}{d\tilde{t}^2} = -\frac{\tilde{z}}{|\tilde{r}|^3} + \frac{M_*(\tilde{Z}-\tilde{z})}{|\tilde{r}-\tilde{R}|^3} - \frac{M_*\tilde{Z}}{|\tilde{R}|^3} \quad (3.17)$$

ทำให้สามารถหาค่า  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{r} = |\tilde{r}| = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}$ ,  $v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}, v_{\tilde{z}}$  และ  $\tilde{v} = \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} =$

$\sqrt{v_{\tilde{x}}^2 + v_{\tilde{y}}^2 + v_{\tilde{z}}^2}$  ได้ เมื่อ  $\tilde{x}$  คือตำแหน่งในแนวแกน  $\tilde{x}$  ของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในหน่วยของ  $q$ ,  $\tilde{y}$  คือตำแหน่งในแนวแกน  $\tilde{y}$  ของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในหน่วยของ  $q$ ,  $\tilde{z}$  คือตำแหน่งในแนวแกน  $\tilde{z}$  ของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในหน่วยของ  $q$ ,  $v_{\tilde{x}}$  คือความเร็วของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในแนวแกน

$\tilde{x}$ ,  $v_{\tilde{y}}$  คือความเร็วของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในแนวแกน  $\tilde{y}$ ,  $v_{\tilde{z}}$  คือความเร็วของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในแนวแกน  $\tilde{z}$  และ  $\tilde{v}$  คือความเร็วของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น หลังจากนั้นให้เรานำค่า  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$  และ  $\tilde{Z}$  ที่หาได้นี้มาใช้ในการสร้างแบบจำลองใน 3 มิติ

### 3.4 การหาค่าหลักมูลทางโคจร

ภายหลังจากที่หาค่า  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{r}$ ,  $v_{\tilde{x}}$ ,  $v_{\tilde{y}}$ ,  $v_{\tilde{z}}$  และ  $\tilde{v}$  ได้แล้ว ให้นำค่า  $\tilde{r}$  และ  $\tilde{v}$  ที่หาได้นี้แทนลงไปในสมการที่ (3.18) และให้นำค่า  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ ,  $v_{\tilde{x}}$ ,  $v_{\tilde{y}}$  และ  $v_{\tilde{z}}$  ที่หาได้นี้แทนลงไป ในสมการที่ (3.19), (3.20) และ (3.21)

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} \right)^2 - \frac{1}{\tilde{r}} \quad (3.18)$$

$$h_{\tilde{x}} = \tilde{y}v_{\tilde{z}} - \tilde{z}v_{\tilde{y}} \quad (3.19)$$

$$h_{\tilde{y}} = \tilde{z}v_{\tilde{x}} - \tilde{x}v_{\tilde{z}} \quad (3.20)$$

$$h_{\tilde{z}} = \tilde{x}v_{\tilde{y}} - \tilde{y}v_{\tilde{x}} \quad (3.21)$$

ก็จะหาค่า  $\tilde{E} = (q/GM_1)E$  และ  $\tilde{h} = h/\sqrt{qGM_1} = \sqrt{h_{\tilde{x}}^2 + h_{\tilde{y}}^2 + h_{\tilde{z}}^2}$  ได้เมื่อ  $E$  คือพลังงานบนทางโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นและ  $h$  คือโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น

ต่อไปเมื่อต้องการที่จะหาครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นให้นำค่า  $\tilde{E}$  ที่หาได้นี้แทนลงไปในสมการที่ (3.22) ถ้าวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นเป็นวงรีหรืออนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นมี  $\tilde{E} < 0$  หรือสมการที่ (3.23) ถ้าวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นเป็นไฮเพอร์โบลาหรืออนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นมี  $\tilde{E} > 0$

$$\tilde{a} = -\frac{1}{2\tilde{E}} \quad (3.22)$$

$$\tilde{a} = \frac{1}{2\tilde{E}} \quad (3.23)$$

ก็จะหาค่า  $\tilde{a}$  ได้เมื่อ  $\tilde{a}$  คือครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในหน่วยของ  $q$  แต่ถ้าหากว่าวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นเป็นพาราโบลาหรืออนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นมี  $\tilde{E} = 0$  ให้ นำค่า  $\tilde{h}$  แทนลงไปในสมการที่ (3.24)

$$\tilde{q} = \frac{\tilde{h}^2}{2} \quad (3.24)$$

ก็จะหาค่า  $q$  ได้ซึ่งค่า  $q$  ที่หาได้นี้คือระยะจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในหน่วยของ  $a$  และนำค่า  $q$  ที่หาได้นี้มาใช้แทน  $\tilde{a}$  ต่อไปเมื่อต้องการที่จะหาความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นให้นำค่า  $\tilde{a}$  และ  $\tilde{h}$  ที่หาได้นี้แทนลงไปในสมการที่ (3.25) ถ้าวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นเป็นวงรีหรืออนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นมี  $\tilde{E} < 0$  หรือสมการที่ (3.26) ถ้าวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นเป็นไฮเพอร์โบลาหรืออนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นมี  $\tilde{E} > 0$

$$e = \sqrt{1 - \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{a}}} \quad (3.25)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{a}}} \quad (3.26)$$

ก็จะหาค่า  $e$  ได้เมื่อ  $e$  คือความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น แต่ถ้าหากว่าวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นเป็นพาราโบลาหรืออนุภาคแผ่นจานฝุ่นนั้นมี  $\tilde{E} = 0$  ให้กำหนดค่า  $e$  ให้เป็น 1 ต่อไปเมื่อต้องการที่จะหาความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นให้เรานำค่า  $\tilde{h}$  กับ  $h_z$  ที่หาได้นั้นแทนลงไปในสมการที่ (3.27)

$$i = \cos^{-1} \left( \frac{h_z}{\tilde{h}} \right) \quad (3.27)$$

ก็จะหาค่า  $i$  ได้เมื่อ  $i$  คือความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น หลังจากนั้นให้นำค่า  $\tilde{a}$ ,  $e$  และ  $i$  ที่หาได้นี้มาใช้ในการสร้างแบบจำลองใน 2 มิติของ  $e$  และ  $i$  เทียบกับ  $\tilde{a}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

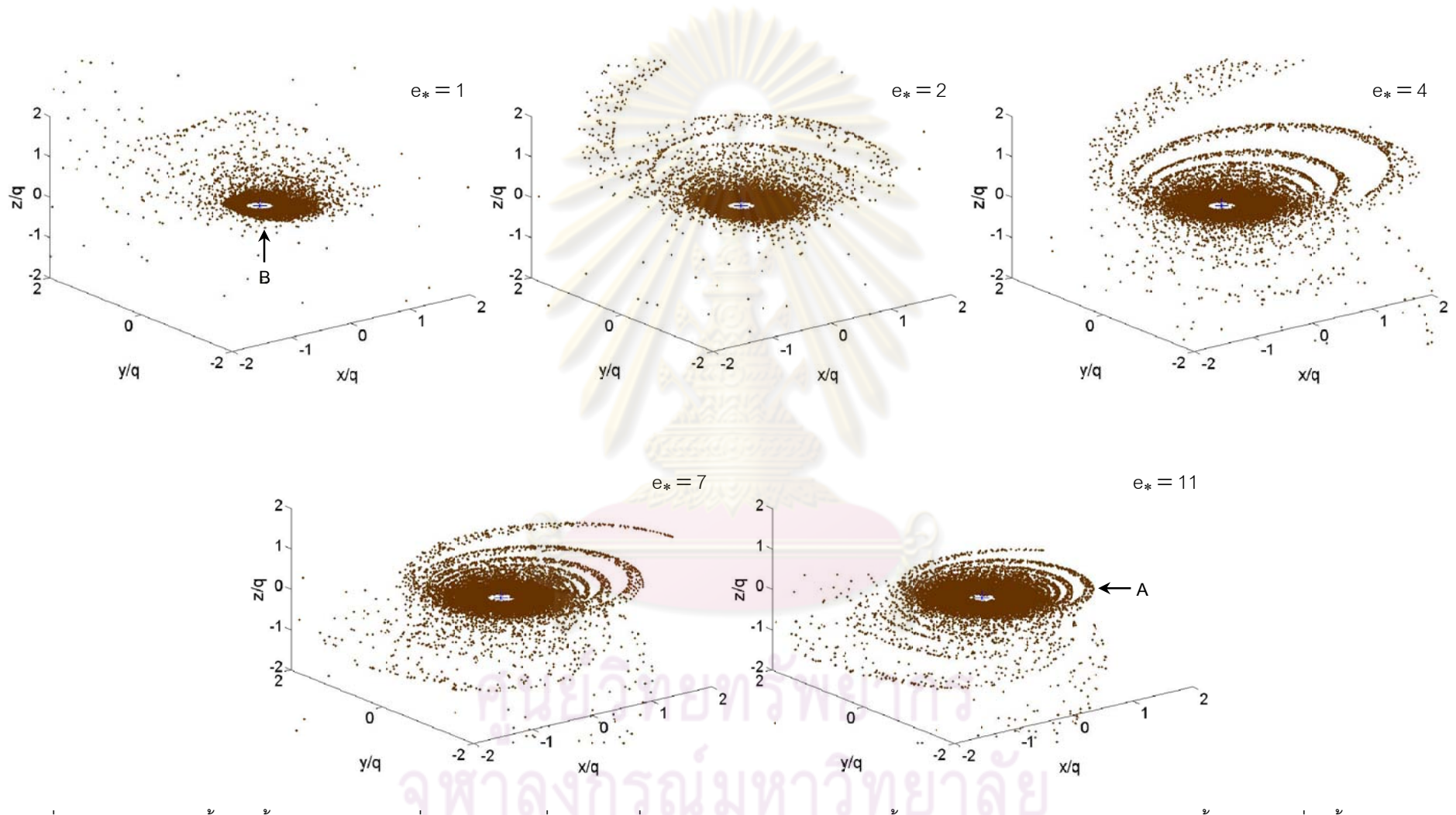
## บทที่ 4

### ตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น

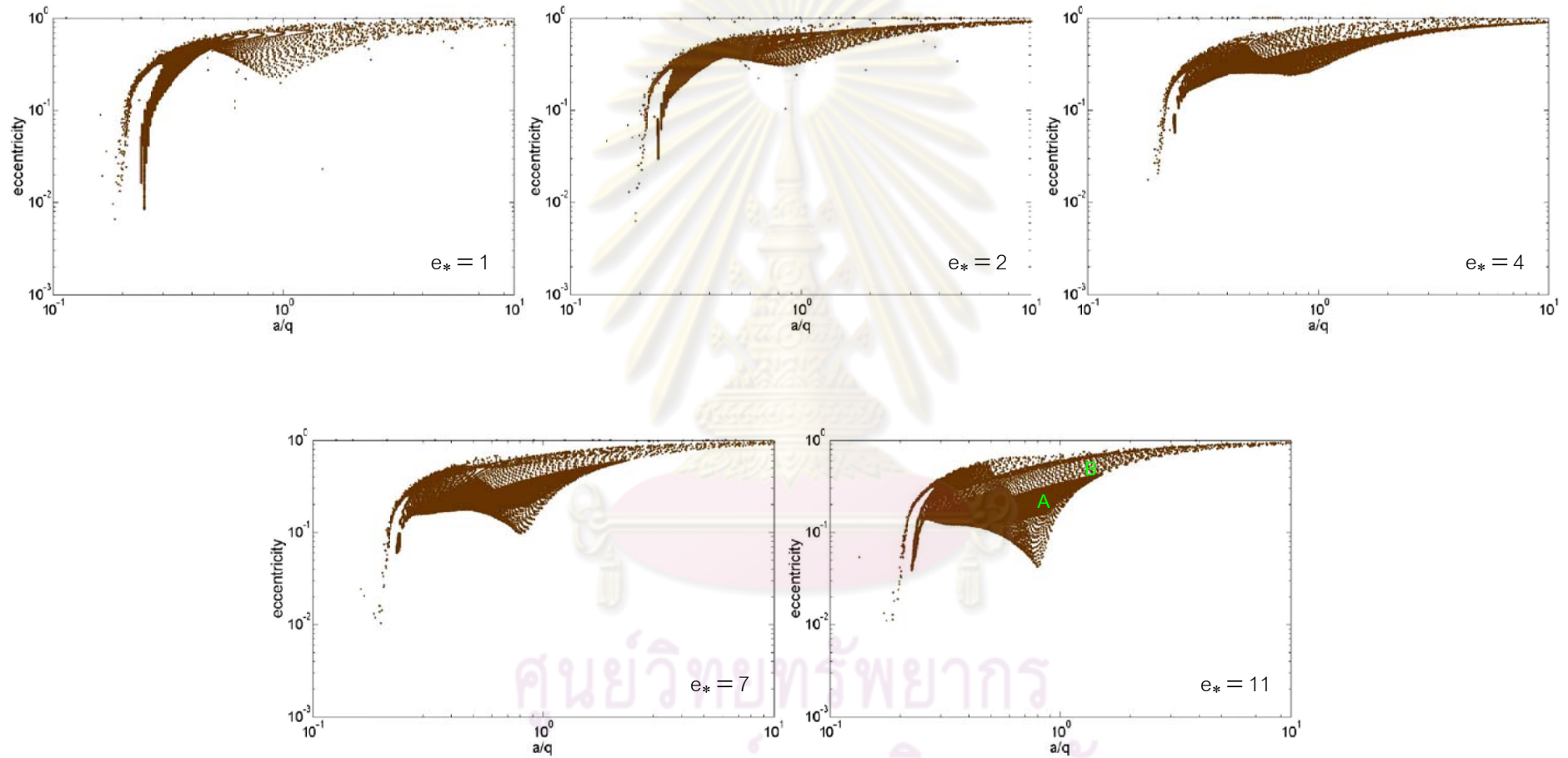
ในบทนี้เราจะทำการศึกษาดัวยแปรต่างๆ ของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ดูว่ามีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่อยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ตัวแปรที่เราจะนำมาศึกษามีเพียงแค่ 4 ตัวแปรเท่านั้น ได้แก่ ความริของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ ( $e_*$ ) ความเยื้องของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้เทียบกับระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่ม ( $i_*$ ) ระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุด ( $\omega_*$ ) และอัตราส่วนมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด ( $M_*$ ) ส่วนลองจิจูดของจุดโหนดขึ้น ( $\Omega_*$ ) นั้นเราจะไม่นำเอามาศึกษาเพราะว่าในตอนแรกเริ่มเราได้กำหนดให้อนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่อยู่บนระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มนั้นโคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เป็นวงกลมหรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าอนุภาคแผ่นจานฝุ่นเหล่านี้มีความริกับความเยื้องของวงโคจรเท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้นลองจิจูดของจุดโหนดขึ้นจึงไม่มีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นมีการเปลี่ยนแปลงไปแต่อย่างใด ในการศึกษาแต่ละตัวแปรที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้นเราจะกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ใช้เวลาโคจรผ่านจากจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดเป็นเวลาทั้งหมด 30 หน่วยเวลา

#### 4.1 ความริของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น

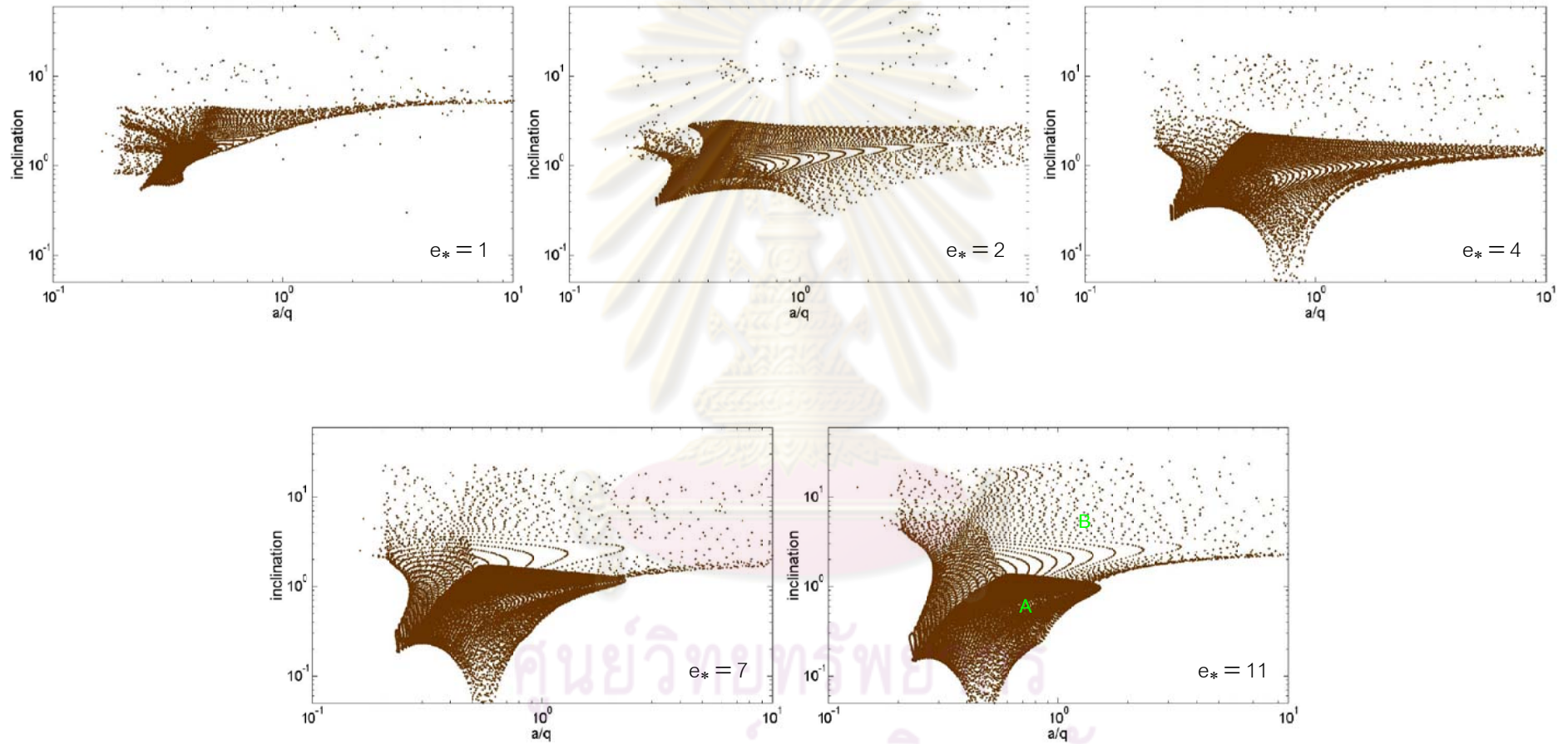
ในตอนนี้เราจะทำการศึกษาความริของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ดูว่ามีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่อยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรได้โดยทำการปรับเปลี่ยนค่าความริของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้จาก  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 11$  ตามลำดับ ส่วนตัวแปรที่เหลืออีก 4 ตัวแปรนั้นเราจะไม่ทำการปรับเปลี่ยนค่าแต่อย่างใดโดยจะกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มี  $i_*$  เท่ากับ  $5^\circ$  มี  $\omega_*$  เท่ากับ  $90^\circ$  มี  $\Omega_*$  เท่ากับ  $0^\circ$  และมี  $M_*$  เท่ากับ 1 เสมอ เมื่อเราได้ทำการจำลองตามสิ่งที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนอกจากจะมีผลทำให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีความเร็วของวงโคจรเพิ่มสูงขึ้นแล้วยังมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่เราได้สร้างขึ้นมานี้มีการเปลี่ยนแปลงไปดังนี้



ภาพที่ 4.1 แผนงานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี  $e_*$  เท่ากับ 1, 2, 4, 7 และ 11 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ออกห่างไปได้ 19.134q, 45.304q, 74.738q, 104.63q และ 134.62q จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด ตามลำดับ



ภาพที่ 4.2 ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $e_*$  เท่ากับ 1, 2, 4, 7 และ 11 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว



ภาพที่ 4.3 ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $e_*$  เท่ากับ 1, 2, 4, 7 และ 11 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว



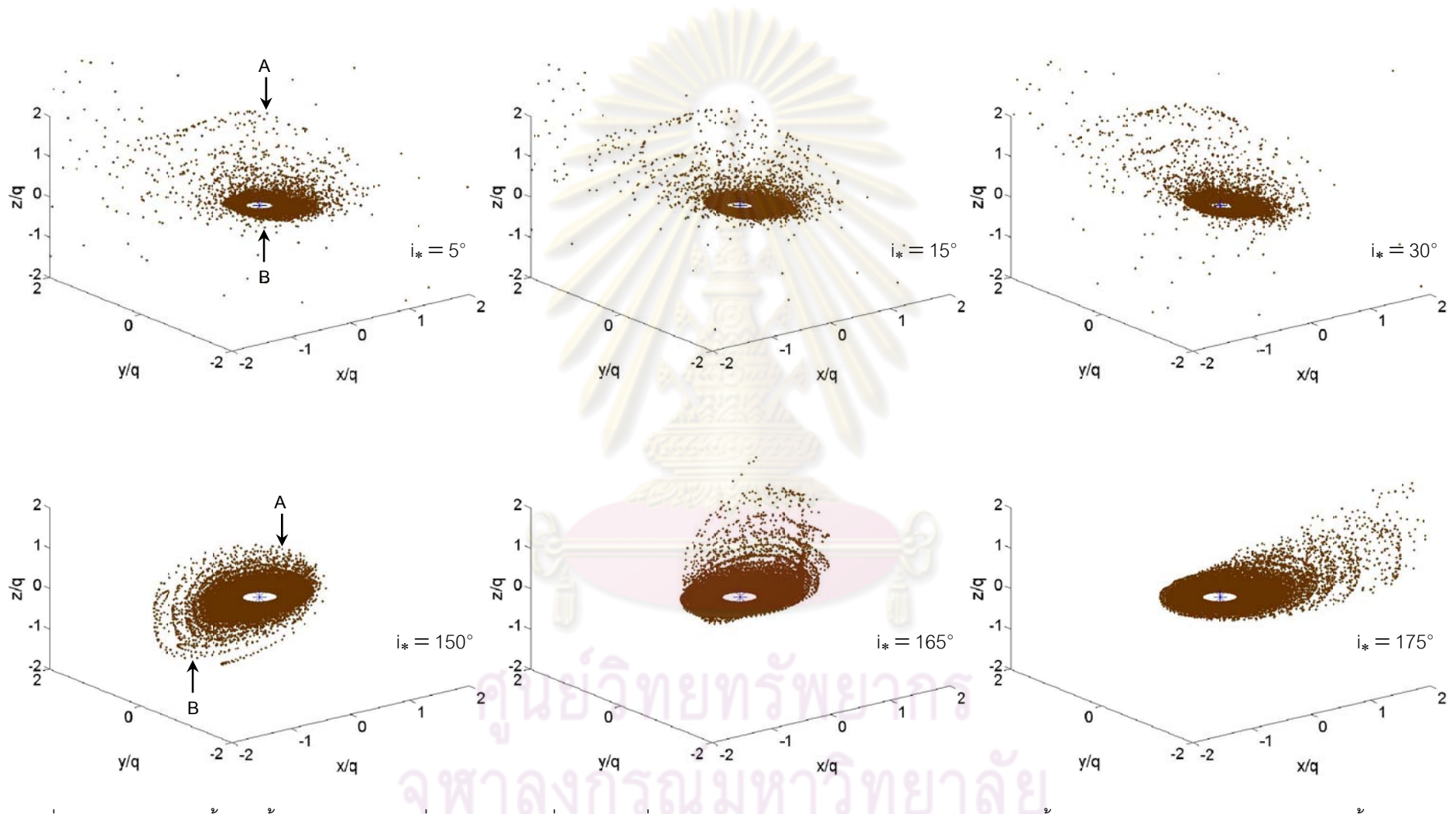
เมื่อเราได้พิจารณาภาพที่ 4.1, 4.2 และ 4.3 อย่างละเอียดแล้วพบว่า การปรับเปลี่ยนค่า  $e_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นนั้นมีผลทำให้

1. ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่ลดน้อยลง
2. ครึ่งแกนเอกกับความเยื้องของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ A นี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่ลดน้อยลง
3. ครึ่งแกนเอกกับความเยื้องของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ B นี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เพิ่มมากขึ้น

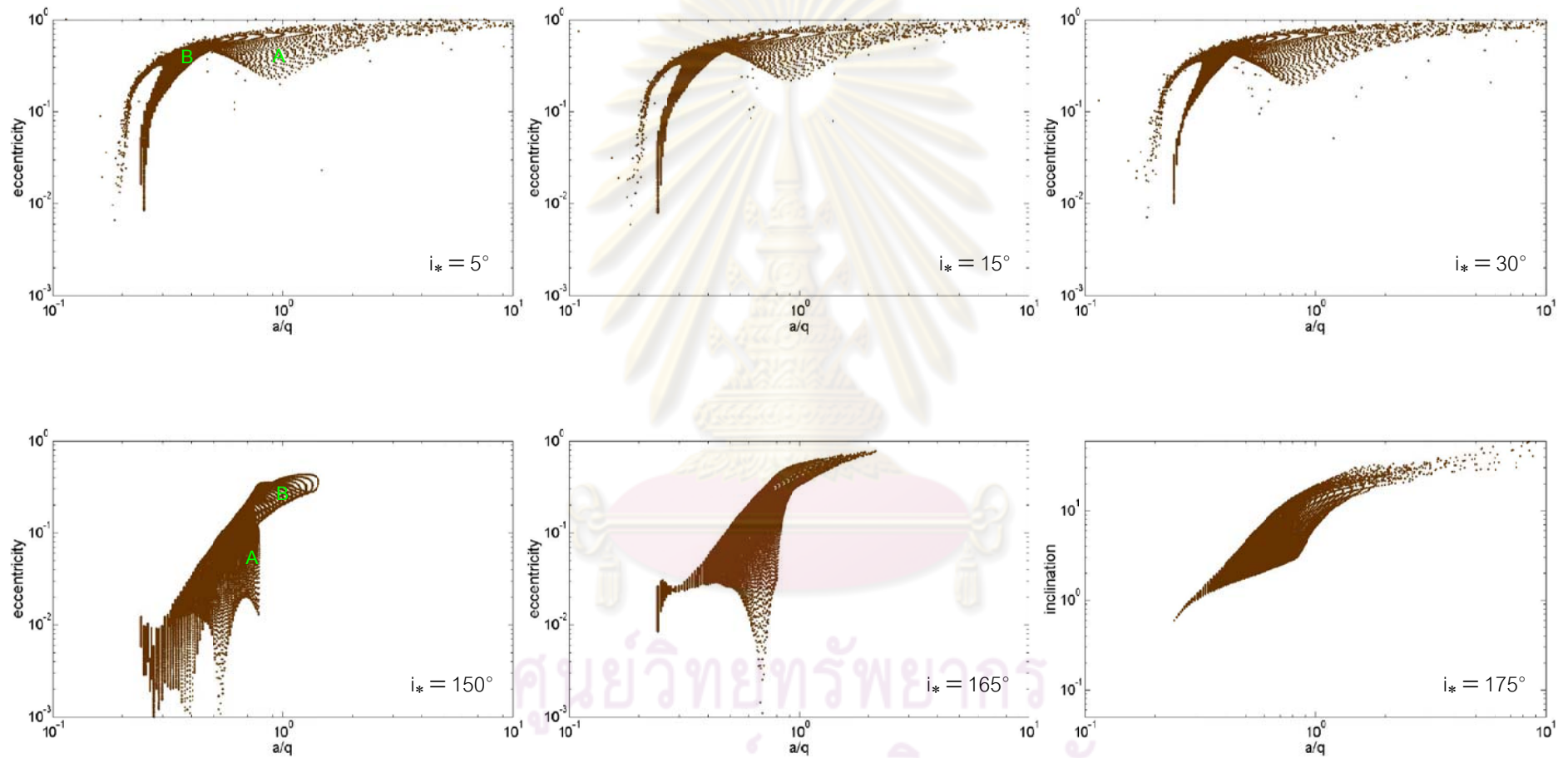
#### 4.2 ความเยื้องของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น

ในตอนนี้เราจะทำการศึกษาความเยื้องของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ดูว่ามีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่อยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรได้โดยทำการปรับเปลี่ยนค่าความเยื้องของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้จาก  $5^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow 30^\circ$  และจาก  $150^\circ \rightarrow 165^\circ \rightarrow 175^\circ$  ตามลำดับ ส่วนตัวแปรที่เหลืออีก 4 ตัวแปรนั้นเราจะไม่ทำการปรับเปลี่ยนค่าแต่อย่างใดโดยจะกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มี  $e_*$  เท่ากับ 1 มี  $\omega_*$  เท่ากับ  $90^\circ$  มี  $\Omega_*$  เท่ากับ  $0^\circ$  และมี  $M_*$  เท่ากับ 1 เสมอ เมื่อเราได้ทำการจำลองตามสิ่งที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนอกจากจะมีผลทำให้ระนาบทางโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เอียงออกห่างไปจากระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มมากขึ้นถ้าเราได้ทำการปรับเปลี่ยนค่าความเยื้องของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้จาก  $5^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow 30^\circ$  ตามลำดับ และเอียงเข้าใกล้ระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มมากขึ้นถ้าเราได้ทำการปรับเปลี่ยนค่าความเยื้องของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้จาก  $150^\circ \rightarrow 165^\circ \rightarrow 175^\circ$  ตามลำดับ แล้วยังมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่เราได้สร้างขึ้นมาที่มีการเปลี่ยนแปลงไปดังนี้

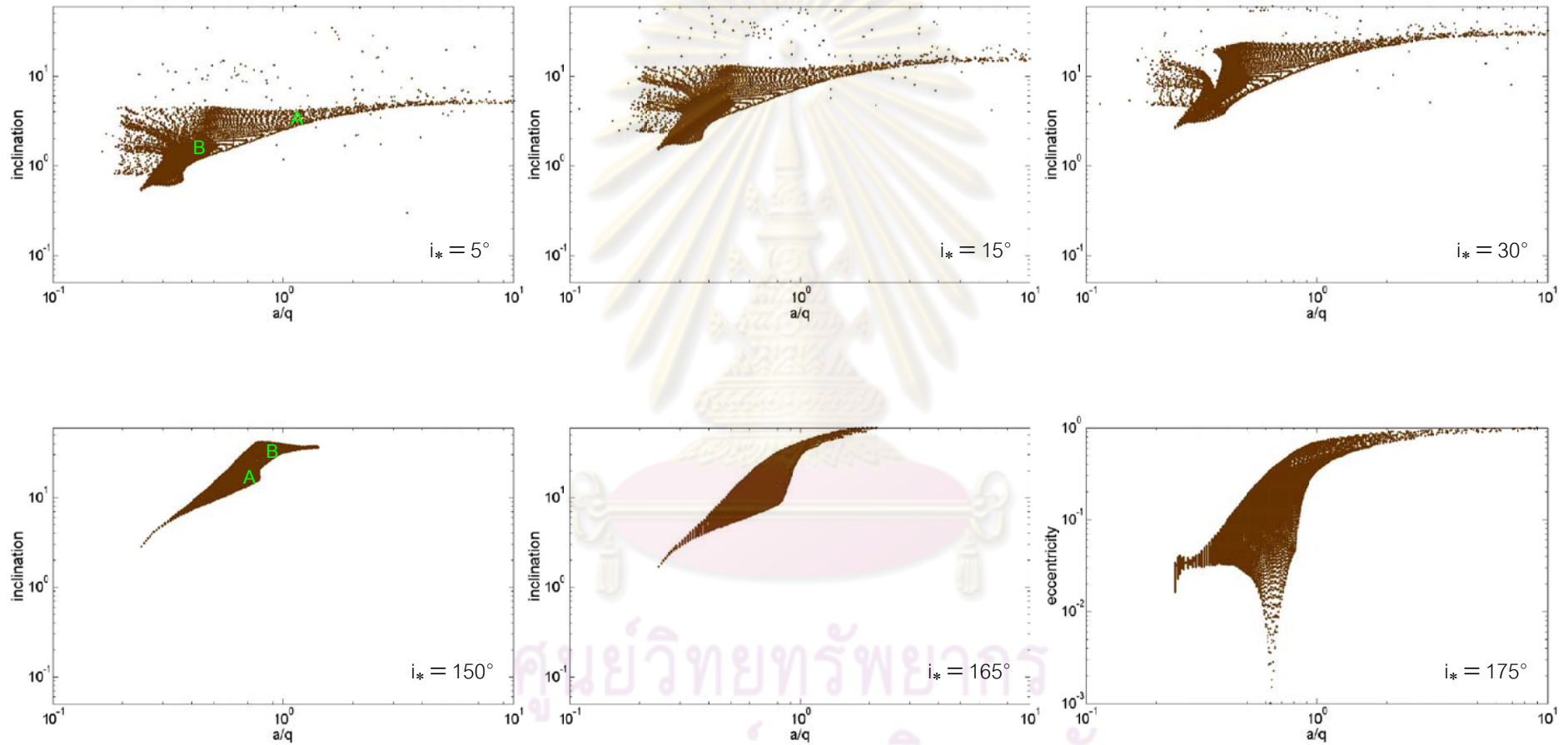
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาพที่ 4.4 แผนงานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี  $i_*$  เท่ากับ  $5^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $165^\circ$  และ  $175^\circ$  นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ออกห่างไปได้ 19.134q จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด



ภาพที่ 4.5 ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกกวาดจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $i_*$  เท่ากับ  $5^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $165^\circ$  และ  $175^\circ$  นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว



ภาพที่ 4.6 ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $i_*$  เท่ากับ  $5^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $165^\circ$  และ  $175^\circ$  นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว

เมื่อเราได้พิจารณาภาพที่ 4.4, 4.5 และ 4.6 อย่างละเอียดแล้วพบว่า การปรับเปลี่ยนค่า  $i_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก  $0^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $30^\circ$  นั้นมีผลทำให้

1. ความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เพิ่มมากขึ้น

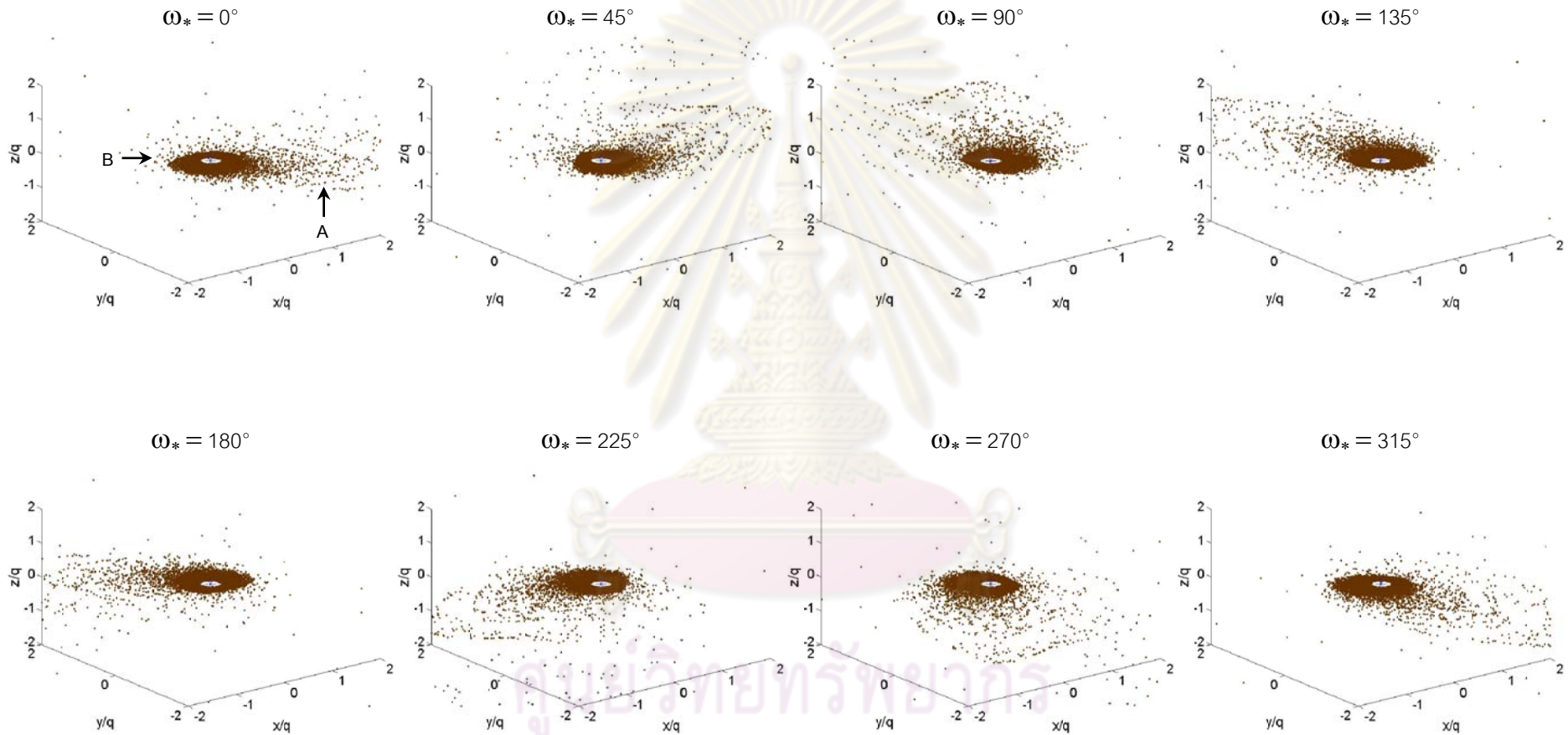
2. ครึ่งแกนเอกกับความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ A นี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่ลดน้อยลง

3. ครึ่งแกนเอกกับความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ B นี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เพิ่มมากขึ้น

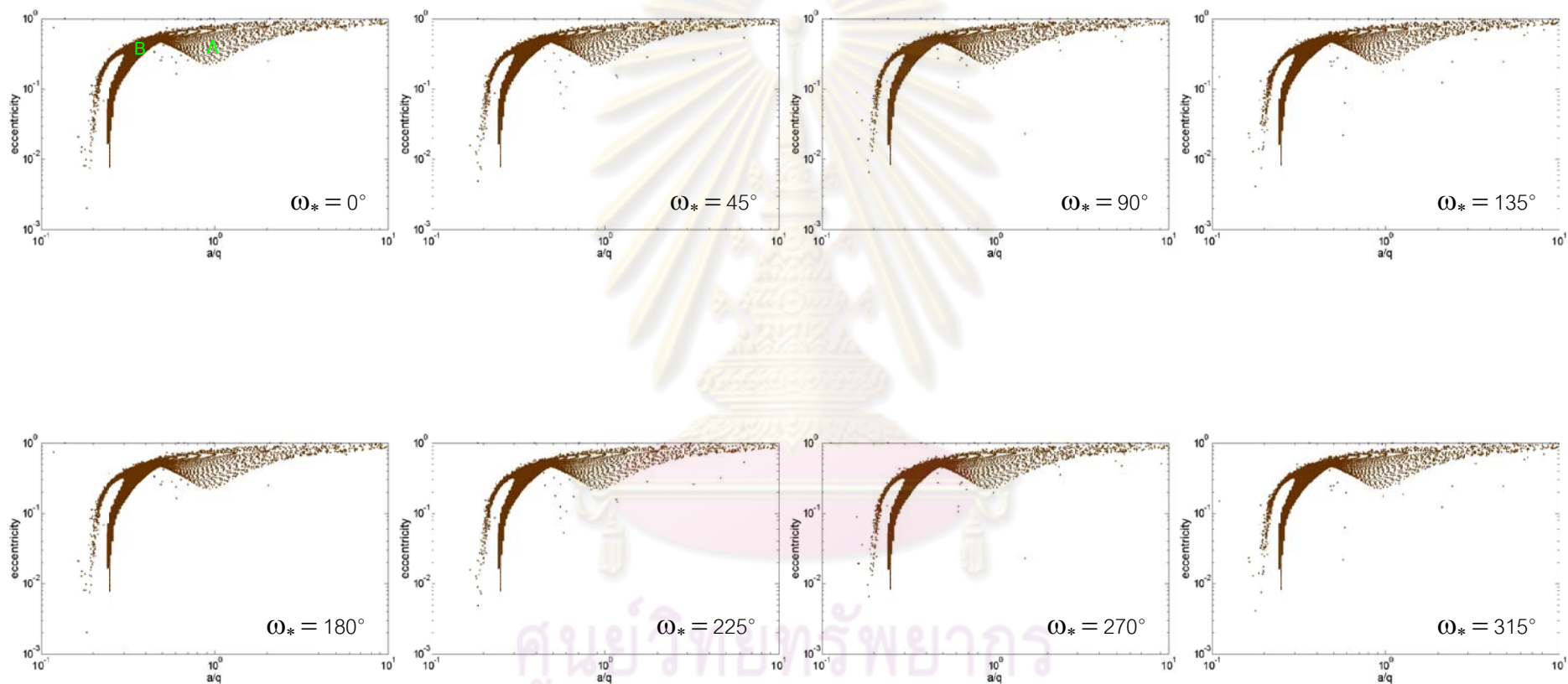
ส่วนการปรับเปลี่ยนค่า  $i_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก  $150^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $180^\circ$  นั้นนอกจากจะมีผลทำให้ความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่ลดน้อยลงแล้วยังมีผลทำให้ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เพิ่มมากขึ้นอีกด้วย

#### 4.3 ระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น

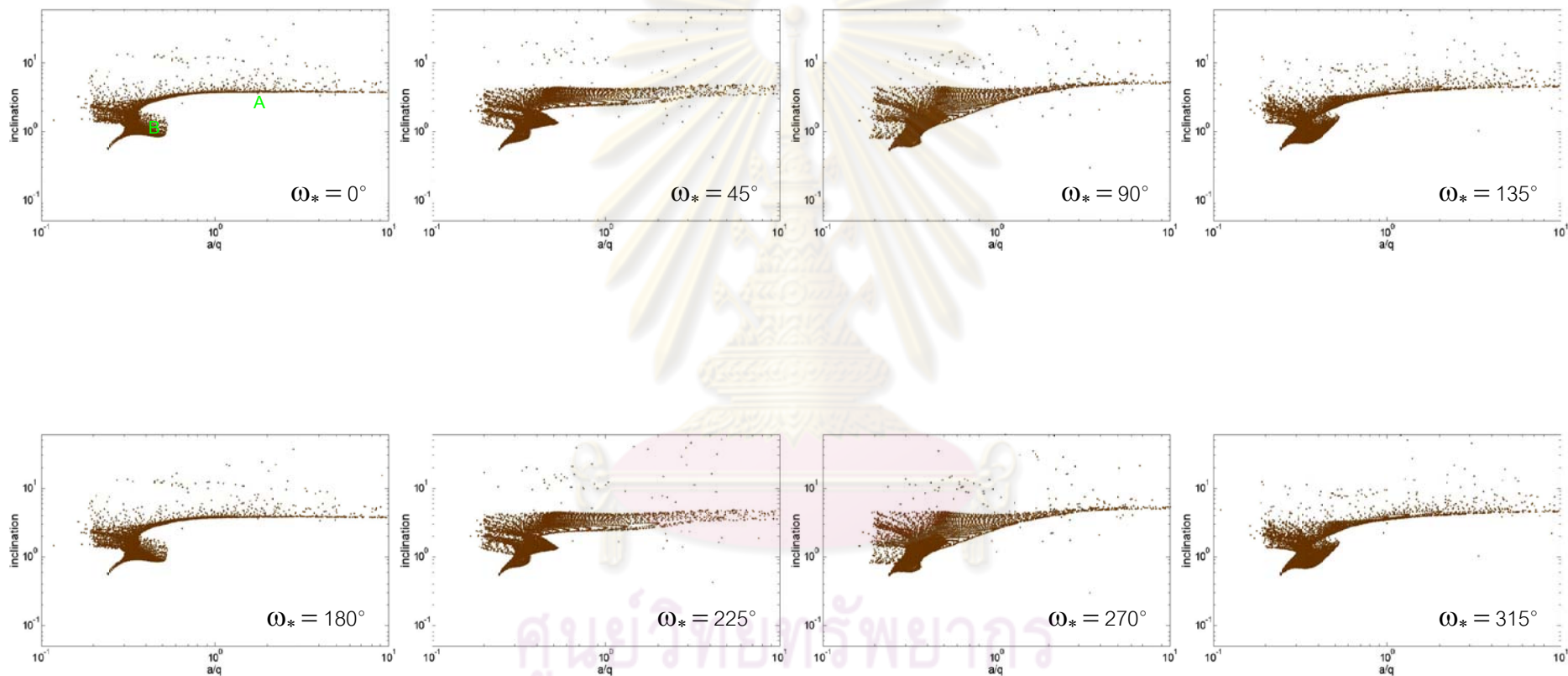
ในตอนนี้จะเราจะทำการศึกษาระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดนี้ดูว่ามีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่อยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรได้โดยทำการปรับเปลี่ยนค่าระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดจาก  $0^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow 90^\circ \rightarrow 135^\circ \rightarrow 180^\circ \rightarrow 225^\circ \rightarrow 270^\circ \rightarrow 315^\circ$  ตามลำดับ ส่วนตัวแปรที่เหลืออีก 4 ตัวแปรนั้นเราจะไม่ทำการปรับเปลี่ยนค่าแต่อย่างใดโดยจะกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มี  $e_*$  เท่ากับ 1 มี  $i_*$  เท่ากับ  $5^\circ$  มี  $\Omega_*$  เท่ากับ  $0^\circ$  และมี  $M_*$  เท่ากับ 1 เสมอ เมื่อเราได้ทำการจำลองตามสิ่งที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนอกจากจะมีผลทำให้จุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดนี้มีระยะห่างเชิงมุมห่างออกไปจากจุดโหนดขึ้น (Ascending Node) และจุดโหนดลง (Descending Node) ที่อยู่บนแนวเส้นโหนด (Line of Node) นี้มากขึ้นถ้าเราได้ทำการปรับเปลี่ยนค่าระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดจาก  $0^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $90^\circ$  และจาก  $180^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $270^\circ$  ตามลำดับ และมีระยะห่างเชิงมุมห่างออกไปจากจุดโหนดลงและจุดโหนดขึ้นที่อยู่บนแนวเส้นโหนดนี้ลดน้อยลงถ้าเราได้ทำการปรับเปลี่ยนค่าระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดจาก  $90^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $180^\circ$  และจาก  $270^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $360^\circ$  ตามลำดับ แล้วยังมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่เราได้สร้างขึ้นมานี้มีการเปลี่ยนแปลงไปดังนี้



ภาพที่ 4.7 แผนงานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี  $\omega_*$  เท่ากับ  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $270^\circ$  และ  $315^\circ$  นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำตาล) มากที่สุดนี้ออกห่างไปได้ 19.134q จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด



ภาพที่ 4.8 ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $\omega_*$  เท่ากับ  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $270^\circ$  และ  $315^\circ$  นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว



ภาพที่ 4.9 ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $\omega_*$  เท่ากับ  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $270^\circ$  และ  $315^\circ$  นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว



เมื่อเราได้พิจารณาภาพที่ 4.7, 4.8 และ 4.9 อย่างละเอียดแล้วพบว่า การปรับเปลี่ยนค่า  $\omega_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก  $0^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $180^\circ$  นั้นมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่อยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีการเปลี่ยนแปลงไปดังนี้

1. มีผลทำให้ครึ่งแกนเอกกับความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะไม่เปลี่ยนแปลง

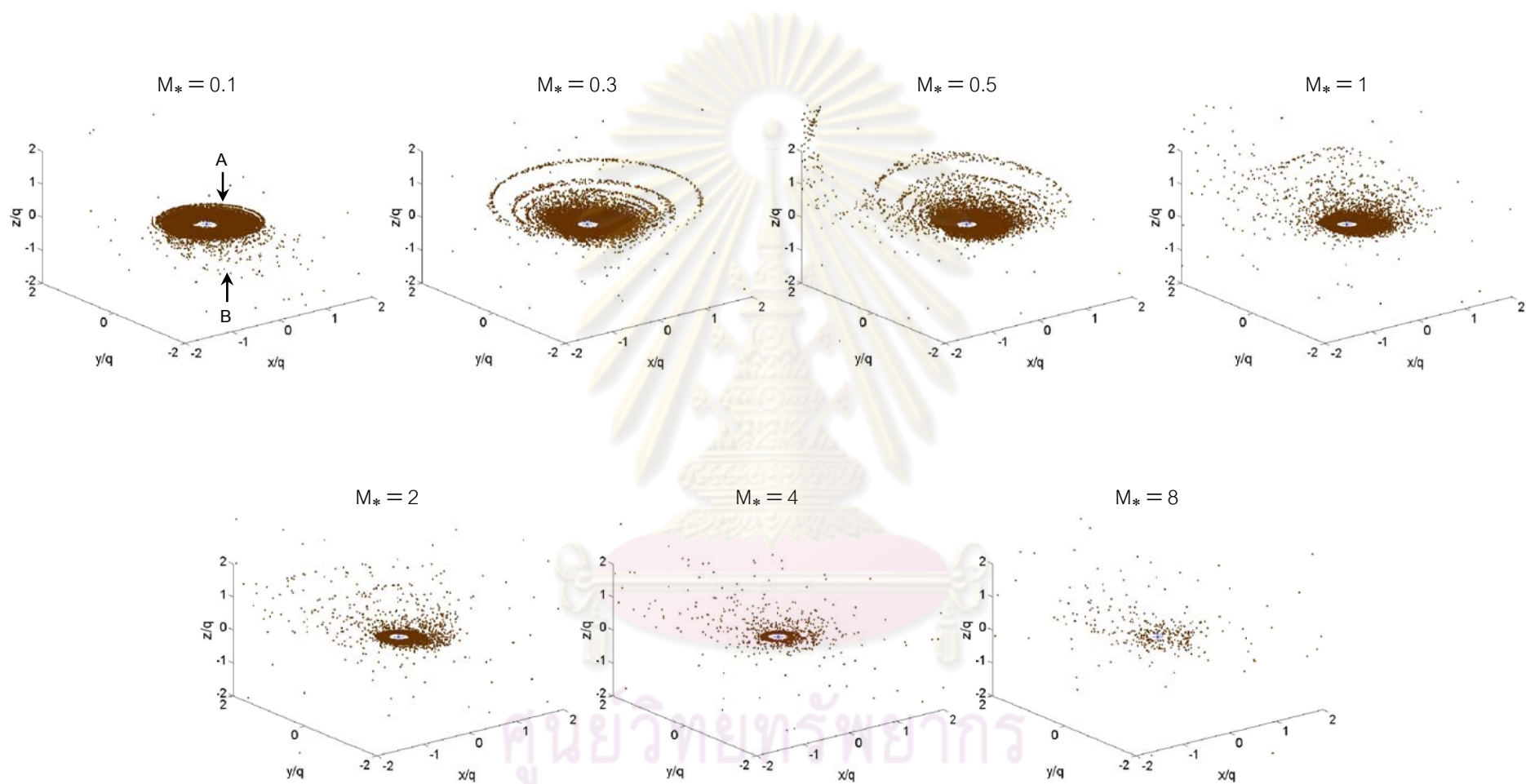
2. มีผลทำให้ความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เพิ่มมากขึ้นถ้าเราได้ทำการปรับเปลี่ยนค่า  $\omega_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก  $0^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $90^\circ$

3. มีผลทำให้ความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนนี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่ลดน้อยลงถ้าเราได้ทำการปรับเปลี่ยนค่า  $\omega_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก  $90^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $180^\circ$

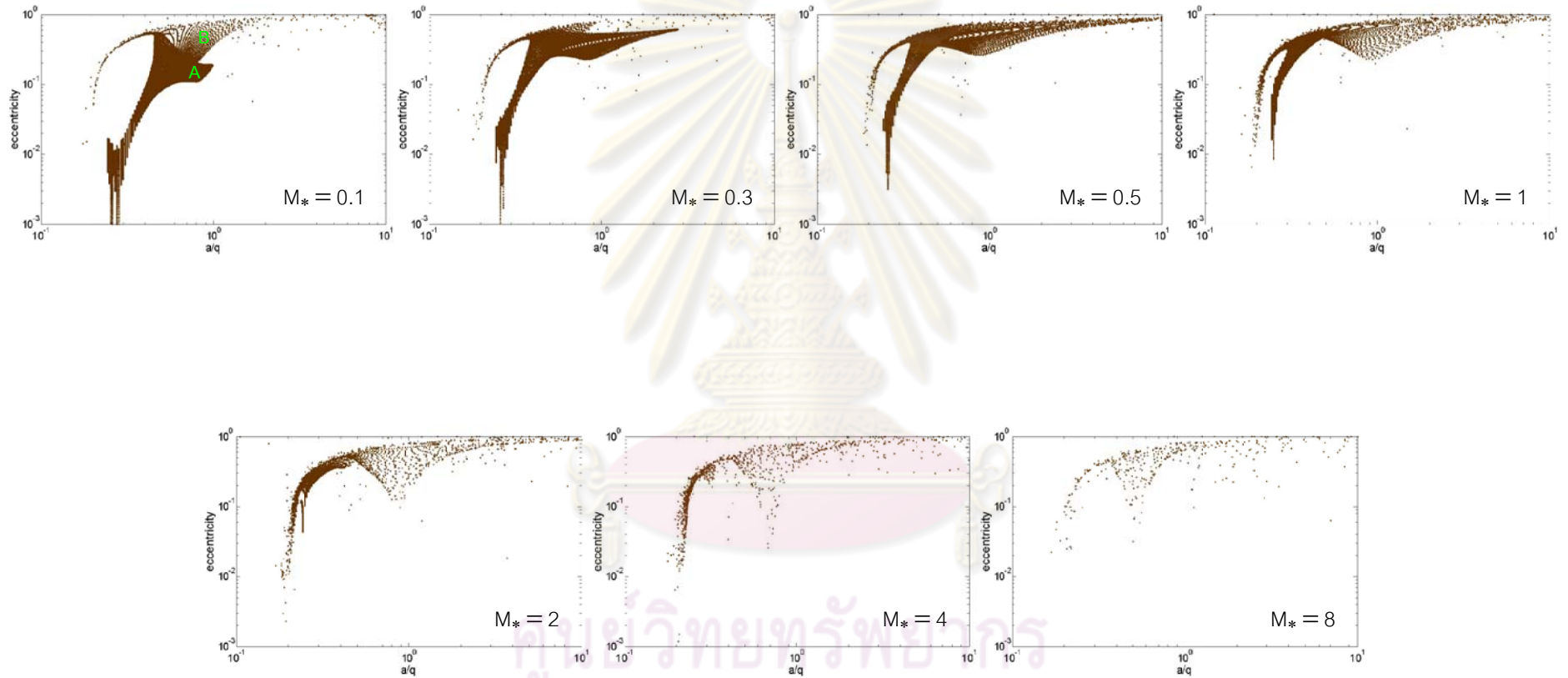
นอกจากนี้ยังพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงของแผ่นจานฝุ่นอันเนื่องมาจากการปรับเปลี่ยนค่า  $\omega_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก  $180^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $360^\circ$  นั้นมีผลที่ได้เหมือนกับผลการเปลี่ยนแปลงของแผ่นจานฝุ่นอันเนื่องมาจากการปรับเปลี่ยนค่า  $\omega_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก  $0^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $180^\circ$  แต่มีข้อแตกต่างกันอยู่ตรงที่ทิศทางของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปจากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนั้นมีทิศตรงข้ามกัน

#### 4.4 อัตราส่วนมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น

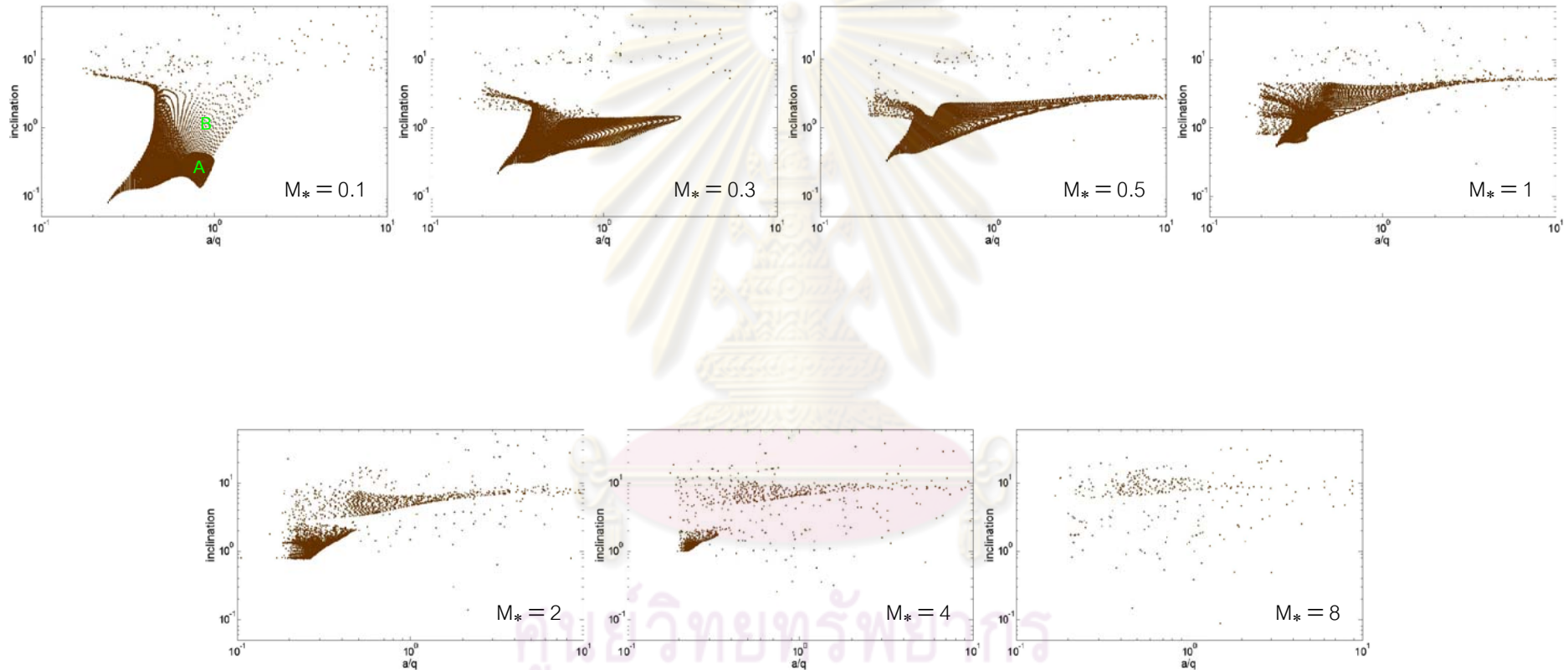
ในตอนนี้เราจะทำการศึกษาอัตราส่วนมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ดูว่ามีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่อยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรได้โดยทำการปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วนมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดจาก  $0.1 \rightarrow 0.3 \rightarrow 0.5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$  ตามลำดับ ส่วนตัวแปรที่เหลืออีก 4 ตัวแปรนั้นเราจะไม่ทำการปรับเปลี่ยนค่าแต่อย่างใดโดยจะกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มี  $e_*$  เท่ากับ 1 มี  $i_*$  เท่ากับ  $5^\circ$  มี  $\omega_*$  เท่ากับ  $90^\circ$  และมี  $\Omega_*$  เท่ากับ  $0^\circ$  เสมอ เมื่อเราได้ทำการจำลองตามสิ่งที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นแล้วจะมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่เราได้สร้างขึ้นมานี้มีการเปลี่ยนแปลงไปดังนี้



ภาพที่ 4.10 แผ่นจานฝุ่นสีน้ำตาลนี้ได้ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อดาวฤกษ์ที่มี  $M_*$  เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, 4 และ 8 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ ออกห่างไปได้ 15.518q, 16.456q, 17.303q, 19.134q, 22.034q, 26.294q และ 32.187q จากดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด ตามลำดับ



ภาพที่ 4.11 ความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $M_*$  เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, 4 และ 8 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดไปแล้ว



ภาพที่ 4.12 ความเอียง (ที่แสดงอยู่ในหน่วยขององศา) ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ที่มี  $M_*$  เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, 4 และ 8 นี้ได้โคจรผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีน้ำเงิน) มากที่สุดนี้ไปแล้ว

เมื่อเราได้พิจารณาภาพที่ 4.10, 4.11 และ 4.12 อย่างละเอียดแล้วพบว่า การปรับเปลี่ยนค่า  $M_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นแต่น้อยกว่า 1 นั้นมีผลทำให้

1. ครึ่งแกนเอก ความรีและความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ A นี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เพิ่มมากขึ้น

2. ครึ่งแกนเอก ความรีและความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ B นี้มีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไปในทางที่ลดน้อยลง

แต่ถ้าหากว่าเราได้ทำการปรับเปลี่ยนค่า  $M_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นตั้งแต่ 1 ขึ้นไป แล้วพบว่า มีผลทำให้อนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีแนวโน้มที่จะลดจำนวนน้อยลงไปเรื่อยๆ

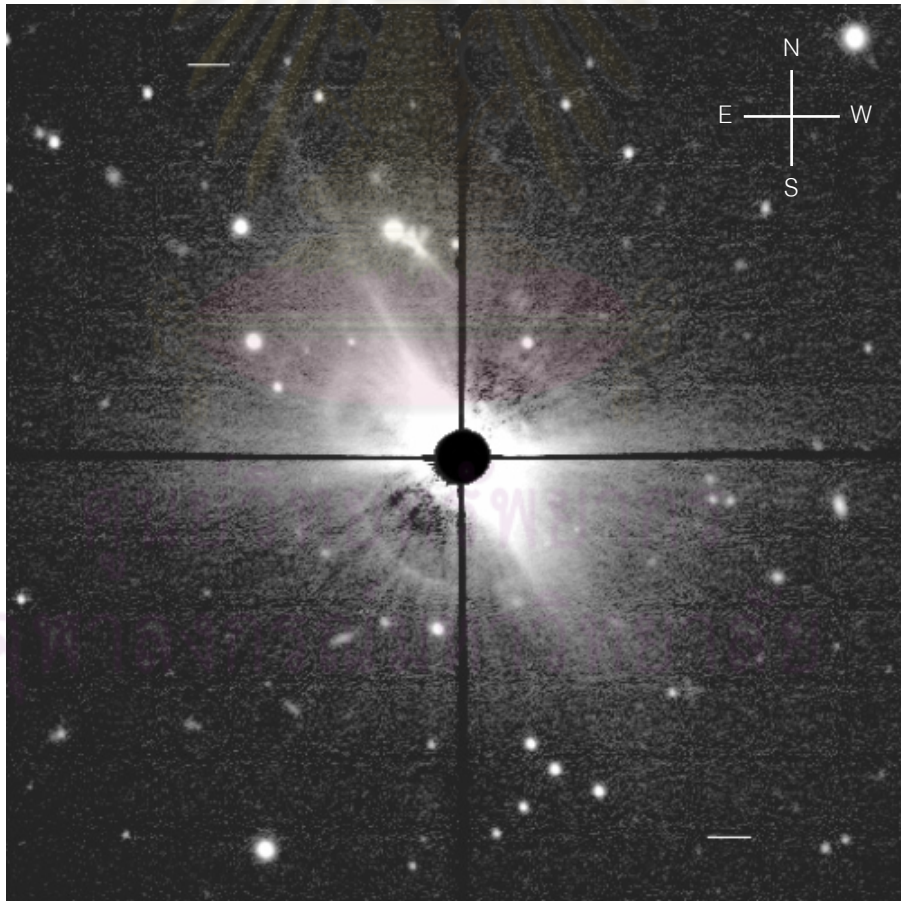


ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

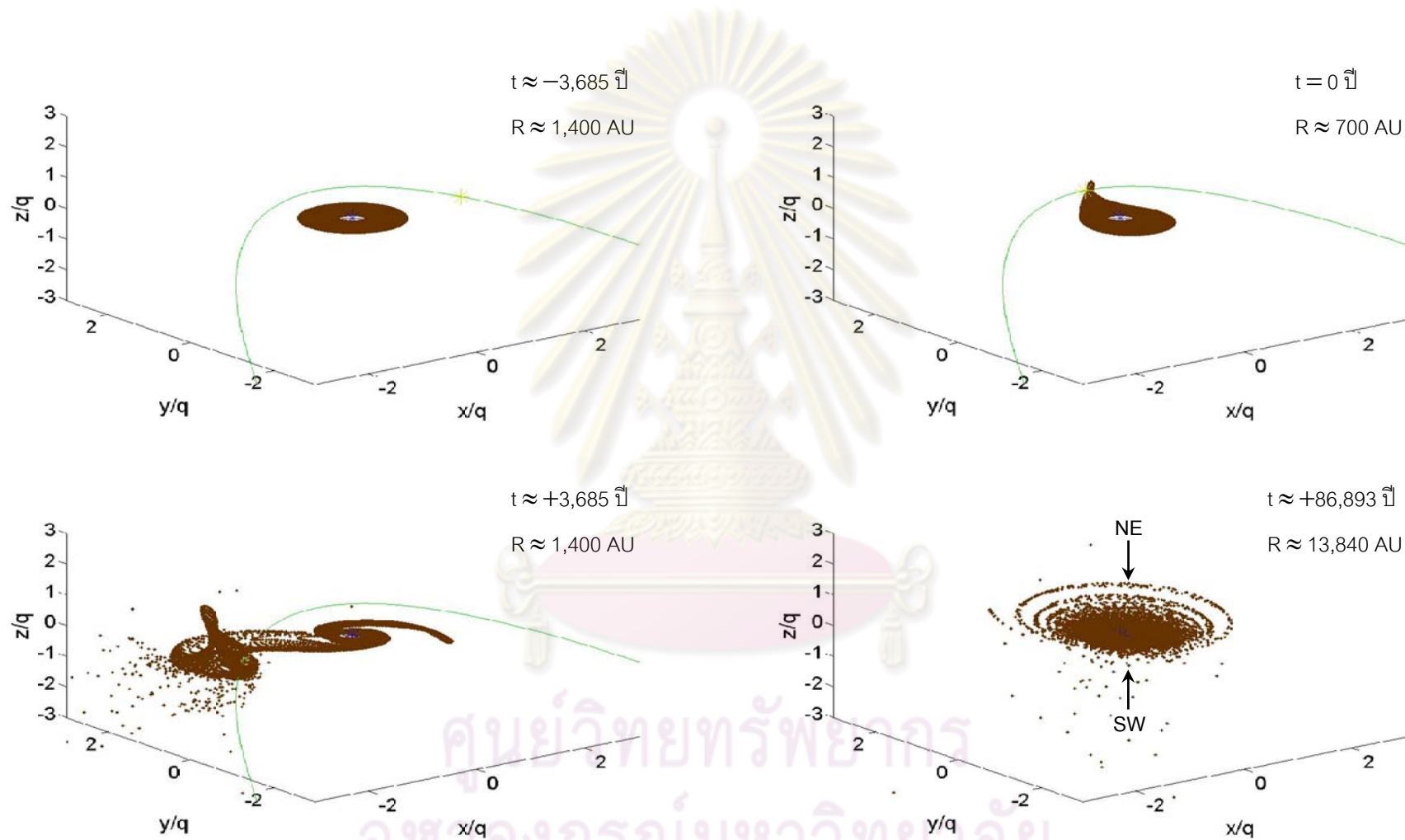
## บทที่ 5

### แผ่นจานฝุ่นรอบดาวปีศาจตั้งภาพ

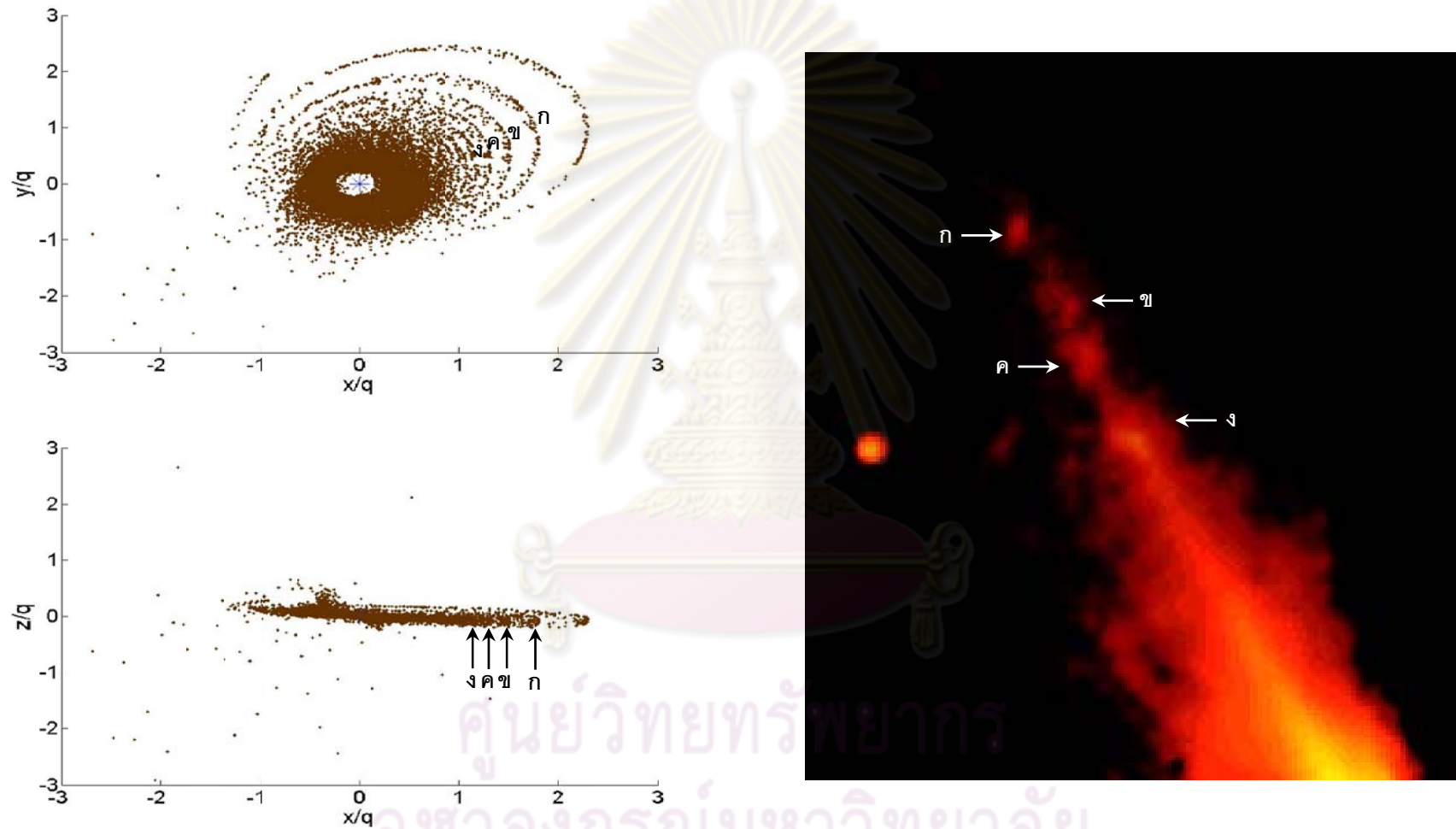
ดาวปีศาจตั้งภาพ ( $\beta$  Pic หรือ  $\beta$  Pictoris) ที่อยู่ห่างออกไปจากระบบสุริยะของเราประมาณ 63.4 ปีแสงนี้เป็นดาวฤกษ์สีขาวยุคแรกที่มีโซติมาตรปรากฏเป็นอันดับที่ 2 ของกลุ่มดาวขาตั้งภาพ (Pictor) ดาวปีศาจตั้งภาพนี้มีมวลเป็น 1.75 เท่าของมวลดวงอาทิตย์ มีความสว่างเป็น 8.7 เท่าของความสว่างดวงอาทิตย์และมีชนิดสเปกตรัมเป็น A6V<sup>[16]</sup> ภาพที่ 5.1 นี้ได้แสดงให้เห็นแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจตั้งภาพที่ได้หันขอบของแผ่นจานเข้าหาผู้สังเกตการณ์ที่อยู่บนโลก แผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจตั้งภาพนี้มีทั้งส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือและส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวปีศาจตั้งภาพ โดยเฉพาะส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือจากดาวปีศาจตั้งภาพนี้มีลักษณะเป็นกลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปได้ถึงประมาณ 1,835 AU ในขณะที่ส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวปีศาจตั้งภาพนี้ยื่นขยายออกไปได้ถึงประมาณ 1,450 AU<sup>[3]</sup>



ภาพที่ 5.1 ภาพแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจตั้งภาพนี้ถ่ายได้โดยใช้กล้องโทรทรรศน์ที่มีโคโรนากราฟ (Coronagraph) เข้ามาช่วยในการปิดกั้นแสงที่มาจากโฟโตสเฟียร์ (Photosphere) ของดาวปีศาจตั้งภาพ<sup>[3]</sup>

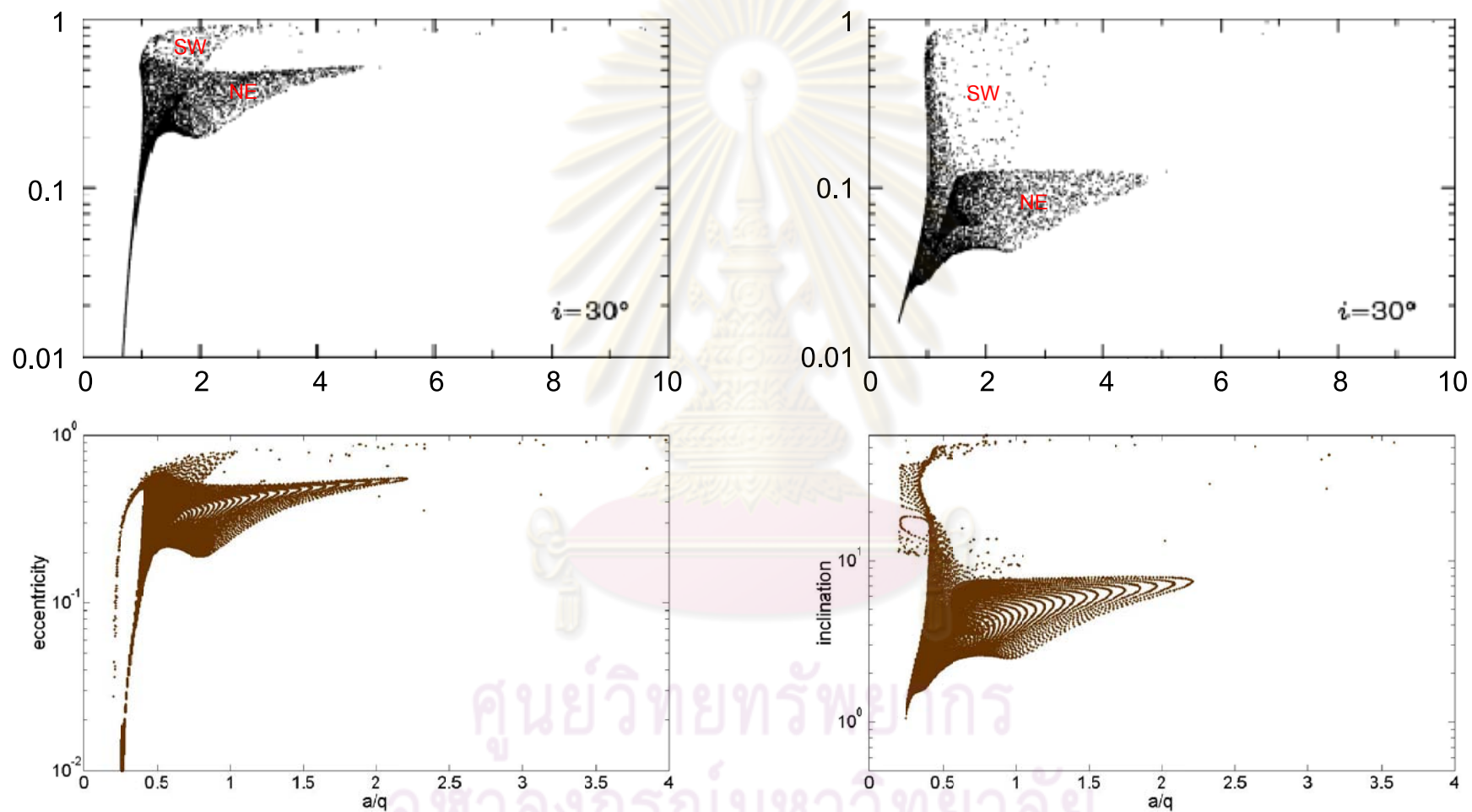


ภาพที่ 5.2 ลำดับการเปลี่ยนแปลงของแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาซาดังภาพ (ดอกจันสีน้ำเงิน) ที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไปนี้เกิดขึ้นภายหลังจากที่ดาวฤกษ์ (ดอกจันสีเหลือง) ได้ใช้เวลาโคจรผ่านไปได้ประมาณ  $-3,685$  ปี,  $0$  ปี,  $+3,685$  ปี และ  $+86,893$  ปี ตามลำดับ



ภาพที่ 5.3 ภาพซ้ายมือเป็นภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวบีตาขาตั้งภาพที่ถูกรบกวนจนเปลี่ยนแปลงไป ส่วนภาพขวามือที่ถ่ายได้โดยใช้กล้องโทรทรรศน์อวกาศฮับเบิลนี้เป็นภาพถ่ายกลุ่มก้อนก่อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ปรากฏให้เห็นอยู่บนส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือจากดาวบีตาขาตั้งภาพ<sup>[17]</sup>





ภาพที่ 5.4 ความสัมพันธ์กับความเยื้องของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกกระทบจนเปลี่ยนแปลงไปเทียบกับครึ่งแกนเอกของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น (ภาพแถวบนเป็นภาพจำลองของ เจ. ดี. ลาร์วูด กับ พี. จี. คาลาส<sup>[3]</sup> ส่วนภาพแถวล่างเป็นภาพจำลองของเราเอง)

เมื่อกำหนดให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านจุดใกล้ดาวปีศาจตั้งภาพมากที่สุดนี้มีความรีของวงโคจร ( $e_*$ ) เท่ากับ 1 มีความเอียงของวงโคจร ( $i_*$ ) เท่ากับ  $30^\circ$  มีระยะมุมของจุดใกล้ดาวปีศาจตั้งภาพมากที่สุด ( $\omega_*$ ) เท่ากับ  $90^\circ$  มีลองจิจูดของจุดโหนดขึ้น ( $\Omega_*$ ) เท่ากับ  $0^\circ$  มีมวลเป็น 0.3 เท่าของมวลดาวปีศาจตั้งภาพ ( $M_*$ ) และมีระยะจุดใกล้ดาวปีศาจตั้งภาพมากที่สุด ( $q$ )  $\sim 700$  AU<sup>[3]</sup> แล้วจะทำให้ได้ภาพจำลองลำดับการเกิดแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจตั้งภาพตามที่ได้แสดงให้เห็นอยู่ในภาพที่ 5.2

เมื่อได้พิจารณาภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจตั้งภาพตามที่ได้แสดงให้เห็นอยู่ในภาพที่ 5.3 แล้วจะสังเกตเห็นว่าในระนาบ  $x/q - z/q$  นั้นมีกลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ปรากฏให้เห็นอยู่บนส่วนที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ NE จากดอกจันสีน้ำเงิน กลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ได้ปรากฏให้เห็นได้ค่อนข้างชัดเจนอยู่บนส่วนที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ NE จากดอกจันสีน้ำเงินนี้ค่อนข้างชัดได้ว่าสอดคล้องกับภาพถ่ายกลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ปรากฏให้เห็นอยู่บนส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือจากดาวปีศาจตั้งภาพและถ้าหากว่าเราได้ทำการสังเกตภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจตั้งภาพตามที่ได้แสดงให้เห็นอยู่ในระนาบ  $x/q - y/q$  แล้วจะสังเกตเห็นว่ากลุ่มก้อนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ได้ปรากฏให้เห็นอยู่บนส่วนที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ NE จากดอกจันสีน้ำเงินนี้ก็คือวงแหวนที่มีรูปร่างเป็นวงรีที่ถูกกระทำให้เกิดขึ้นมาได้โดยแรงโน้มถ่วงที่ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจตั้งภาพกระทำต่อดาวปีศาจตั้งภาพ

จากภาพแฉกของภาพที่ 5.4 เมื่อเราได้ทำการวัดความยาวของส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือจากดาวปีศาจตั้งภาพ (NE) แล้วปรากฏว่าวัดออกไปได้ถึง  $\sim 2,398$  AU ในขณะที่ส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวปีศาจตั้งภาพ (SW) นี้ถูกวัดออกไปได้ถึง  $\sim 1,317$  AU ค่าที่เราวัดได้ 2 ค่านี้มีค่าแตกต่างไปจากค่าที่วัดได้จากภาพจำลองแผ่นจานฝุ่นที่ได้ของ เจ. ดี. ลาร์วูด กับ พี. จี. คาลาส (ภาพแฉกของภาพที่ 5.4) ที่ได้ทำการวัดความยาวของส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือออกไปได้ถึง  $\sim 1,890$  AU จากดาวปีศาจตั้งภาพ ในขณะที่ส่วนที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวปีศาจตั้งภาพถูกวัดออกไปได้ถึง  $\sim 1,620$  AU<sup>[3]</sup>

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบแนวทางการสร้างแบบจำลองแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจที่ตั้งภาพ

	พี. คาลาส เจ. ลาร์วูด บี. เอ. สมิธ เอ. ชูลซ์	เจ. ดี. ลาร์วูด พี. จี. คาลาส	ตนเอง
จำนวนอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวปีศาจที่ตั้งภาพ	$\sim 10^6$ อนุภาค	$10^4$ อนุภาค	21,960 อนุภาค
ช่วงขนาดรัศมีแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่ม (หน่วยความยาว)	0.2 – 2	0.5 – 2	0.2 – 0.8
หน่วยความยาว	$\sim 270$ AU	$\sim 270$ AU	$q$ ( $\sim 700$ AU)
หน่วยมวล	มวลดาวปีศาจที่ตั้งภาพ	มวลดาวปีศาจที่ตั้งภาพ	มวลดาวปีศาจที่ตั้งภาพ
หน่วยเวลา	$\sim 530$ ปี	$\sim 530$ ปี	$\sqrt{q^3/GM_1}$ ( $\sim 2,228$ ปี)
ระเบียบวิธีการแก้สมการการเคลื่อนที่	ระเบียบวิธีการก้าวกระโดด อันดับที่ 2	ระเบียบวิธีการรุงเก้-คูทต้า-เฟห์ลเบิร์ก อันดับที่ 5	ระเบียบวิธีการรุงเก้-คูทต้า อันดับที่ 5
ตัวแปรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านเข้าไปใกล้ดาวปีศาจที่ตั้งภาพ	$e_*, i_*, \omega_*, M_*, q$	$e_*, i_*, \omega_*, M_*, q$	$e_*, i_*, \omega_*, \Omega_*, M_*$

## บทที่ 6

### สรุปและอภิปรายผลการจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่น

ในการปรับเปลี่ยนค่า  $e_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นนั้นจะมีผลทำให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีความเร็วของวงโคจรเพิ่มสูงขึ้นซึ่งความเร็วของวงโคจรที่มีค่าเพิ่มสูงขึ้นนี้มีผลทำให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีความสามารถในการจับอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ได้น้อยลง เพราะฉะนั้นจึงมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่ล้อมรอบดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เปลี่ยนแปลงไปตามผลการเปลี่ยนแปลงที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 4.1

ในการปรับเปลี่ยนค่า  $i_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นตั้งแต่  $0^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $30^\circ$  นั้นนอกจากจะมีผลทำให้ระนาบทางโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เอียงออกห่างไปจากระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มมากขึ้นแล้วยังมีผลทำให้อันตรกิริยาโน้มถ่วงระหว่างดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดกับอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ลดน้อยลงอีกด้วย ส่วนการปรับเปลี่ยนค่า  $i_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นตั้งแต่  $150^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $180^\circ$  นั้นนอกจากจะมีผลทำให้ระนาบทางโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เอียงเข้าใกล้ระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มมากขึ้นแล้วยังมีผลทำให้อันตรกิริยาโน้มถ่วงระหว่างดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดกับอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เพิ่มมากขึ้นอีกด้วย เพราะฉะนั้นจึงมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่ล้อมรอบดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เปลี่ยนแปลงไปตามผลการเปลี่ยนแปลงที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 4.2

ในการปรับเปลี่ยนค่า  $\omega_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นตั้งแต่  $0^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $90^\circ$  และตั้งแต่  $180^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $270^\circ$  นั้นนอกจากจะมีผลทำให้จุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดนี้มีระยะห่างเชิงมุมห่างออกไปจากจุดโหนดขึ้นและจุดโหนดลงมากขึ้น ตามลำดับ แล้วยังมีผลทำให้อันตรกิริยาโน้มถ่วงระหว่างดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดกับอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ลดน้อยลงอีกด้วย ส่วนการปรับเปลี่ยนค่า  $\omega_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นตั้งแต่  $90^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $180^\circ$  และตั้งแต่  $270^\circ$  ไปจนกระทั่งถึง  $360^\circ$  นั้นนอกจากจะมีผลทำให้จุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุดนี้มีระยะห่างเชิงมุมห่างออกไปจากจุดโหนดลงและจุดโหนดขึ้นลดน้อยลง ตามลำดับ แล้วยังมีผลทำให้อันตรกิริยาโน้มถ่วงระหว่างดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดกับอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เพิ่มมากขึ้นอีกด้วย เพราะฉะนั้นจึงมีผล

ทำให้แผ่นจานฝุ่นที่ล้อมรอบดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เปลี่ยนแปลงไปตามผลการเปลี่ยนแปลงที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 4.3

ในการปรับเปลี่ยนค่า  $M_*$  ให้มีค่าเพิ่มมากขึ้นนั้นมีผลทำให้อันตรกิริยาโน้มถ่วงระหว่างดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดกับอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เพิ่มมากขึ้นซึ่งอันตรกิริยาโน้มถ่วงที่เพิ่มมากขึ้นนี้มีผลทำให้ดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้มีความสามารถในการจับอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่โคจรอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้ได้มากขึ้น เพราะฉะนั้นจึงมีผลทำให้แผ่นจานฝุ่นที่ล้อมรอบดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดนี้เปลี่ยนแปลงไปตามผลการเปลี่ยนแปลงที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 4.4

จากการพิจารณาภาพที่ 5.4 นั้นอย่างละเอียดแล้วพบว่าภาพจำลองที่ได้ของเรา นั้นมีความแตกต่างไปจากภาพจำลองที่ได้ของ เจ.ดี. ลาร์วูด กับ พี.จี. คาลาส ดังต่อไปนี้

1. ภาพจำลองของ เจ.ดี. ลาร์วูด กับ พี.จี. คาลาส ไม่เผยให้เห็นอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่เคลื่อนที่เข้าหาดาวบีต่าขาตั้งภาพแต่ภาพจำลองที่ได้ของเรานั้นกลับเผยให้เห็นอนุภาคแผ่นจานฝุ่นอยู่จำนวนหนึ่งที่ได้เคลื่อนที่เข้าหาดาวบีต่าขาตั้งภาพ สาเหตุแรกที่ภาพจำลองของเรานั้นได้เผยให้เห็นอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่เคลื่อนที่เข้าหาดาวบีต่าขาตั้งภาพนี้ก็คือการใช้ระเบียบวิธีการแก้สมการการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกัน (เจ.ดี. ลาร์วูด กับ พี.จี. คาลาส นั้นใช้ระเบียบวิธีการของรุ่งเก้-คูทต้า-เฟ็ลเบิร์ก อันดับที่ 5 ที่มีค่าพิสัยขั้น-เวลาไม่คงที่ ส่วนของเรานี้ใช้ระเบียบวิธีการของรุ่งเก้-คูทต้า อันดับที่ 5 ที่มีค่าพิสัยขั้น-เวลาคงที่) และสาเหตุที่ 2 ก็คือค่าพิสัยขั้น-เวลาที่เรากำหนดขึ้นมานั้นมีค่าไม่น้อยมากนักจึงเลยมีผลทำให้คำนวณหาตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงไปของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ถูกรบกวนให้มีความเร็วสูงมากขึ้นจนกระทั่งเกินระดับหนึ่งไปแล้วมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมา

2. อนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือจากดาวบีต่าขาตั้งภาพนั้นถูกวัดออกไปได้ยาวมากกว่าในภาพจำลองที่ได้ของ เจ.ดี. ลาร์วูด กับ พี.จี. คาลาส สาเหตุที่ทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าขนาดแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มที่เราได้กำหนดขึ้นมาให้มีขนาดเท่ากับ  $0.8q$  นี้มีขนาดใกล้เคียงกับขนาดแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่มที่ เจ.ดี. ลาร์วูด กับ พี.จี. คาลาส ได้กำหนดขึ้นมาให้มีขนาด  $\sim 0.8q$

3. อนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้จากดาวบีต่าขาตั้งภาพนั้นถูกวัดออกไปได้ยาวน้อยกว่าในภาพจำลองที่ได้ของ เจ.ดี. ลาร์วูด กับ พี.จี. คาลาส สาเหตุที่ทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าอนุภาคแผ่นจานฝุ่นที่ยื่นขยายออกไปตามส่วนของ SW จากตอกจันส์น้ำเงินนั้นมีบางอนุภาคเคลื่อนที่กลับเข้าหาดอกจันส์น้ำเงิน

## รายการอ้างอิง

- [1] Open cluster. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Open\\_cluster](http://en.wikipedia.org/wiki/Open_cluster) [2008, February 13]
- [2] Kalas, P., Larwood, J., Smith, B. A., and Schultz, A. Rings in the planetesimal disk of  $\beta$  Pictoris. The Astrophysical Journal 530 (February 2000): L133-L137.
- [3] Larwood, J. D., and Kalas, P. G. Close stellar encounters with planetesimal discs: The dynamics of asymmetry in the  $\beta$  Pictoris system. Mon. Not. R. Astron. Soc. 323 (2001): 402-416.
- [4] Star cluster. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Star\\_cluster](http://en.wikipedia.org/wiki/Star_cluster) [2007, November 8]
- [5] วิมุติ วสะหลาย. ดาวนอกคอกใน M80 [Online]. 2542. แหล่งที่มา: <http://thaiastro.nectec.or.th/news/1999/news1999aug02.html> [2552, กรกฎาคม 16]
- [6] Globular cluster. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Globular\\_cluster](http://en.wikipedia.org/wiki/Globular_cluster) [2008, March 15]
- [7] Binney, J., and Tremaine, S. Galactic dynamics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.
- [8] Ida, S., Larwood, J., and Burkert, A. Evidence for early stellar encounters in the orbital distribution of Edgeworth-Kuiper belt objects. The Astrophysical Journal 528 (January 2000): 351-356.
- [9] Molecular cloud. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular\\_cloud](http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_cloud) [2007, September 28]
- [10] Protostar. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: <http://en.wikipedia.org/wiki/Protostar> [2009, July 4]
- [11] Star formation. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Star\\_formation](http://en.wikipedia.org/wiki/Star_formation) [2008, July 17]
- [12] T Tauri star. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/T\\_Tauri\\_star](http://en.wikipedia.org/wiki/T_Tauri_star) [2009, August 2]
- [13] Protoplanetary disk. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Protoplanetary\\_disk](http://en.wikipedia.org/wiki/Protoplanetary_disk) [2008, April 19]

- [14] Nebular hypothesis. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Nebular\\_hypothesis](http://en.wikipedia.org/wiki/Nebular_hypothesis) [2008, May 26]
- [15] Planetesimal. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: <http://en.wikipedia.org/wiki/Planetesimal> [2008, August 28]
- [16] Beta Pictoris. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Beta\\_pictoris](http://en.wikipedia.org/wiki/Beta_pictoris) [2008, May 4]
- [17] NASA. Beta Pictoris disk hides giant elliptical ring system [Online]. 2000.  
Available from: <http://www.hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2000/2000/02/> [2008, August 7]



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บรรณานุกรม

- [1] พีรพัฒน์ ศิริสมบุญธโรลาภ. กลศาสตร์ท้องฟ้าทั่วไป. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2533.
- [2] คิโนะซิตะ, ฮิโรชิ. กลศาสตร์ของวัตถุท้องฟ้าและวงโคจร. แปลโดย พีรพัฒน์ ศิริสมบุญธโรลาภ. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547.
- [3] Boulet, D. L. Methods of orbit determination for the micro computer. 1<sup>st</sup> ed. Richmond, Virginia: Willmann-Bell, 1991.
- [4] Apsis. Wikipedia [Online]. (n.d.). Available from: <http://en.wikipedia.org/wiki/Apsis> [2008, June 4]
- [5] ลัญฉกร วุฒิสถิตินุกุลกิจ และคนอื่นๆ. การใช้งานโปรแกรม Matlab เบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549.
- [6] Chapra, S. C. Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists. 2<sup>nd</sup> ed. Singapore: McGraw-Hill, 2008.

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก ปัญหาวัตถุ 2 ชั้น

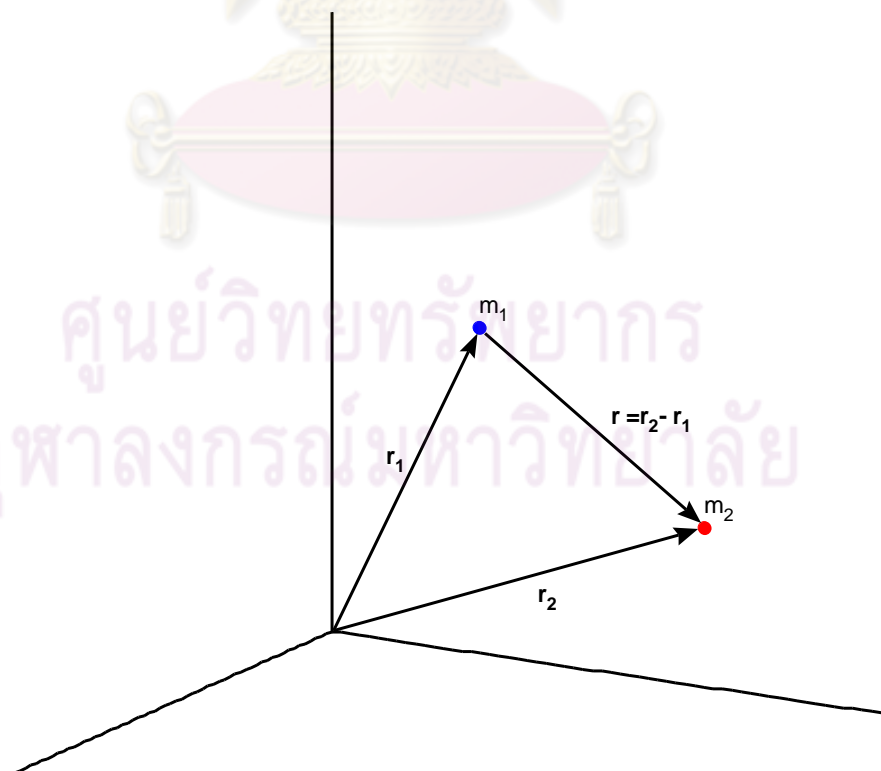
ในเรื่องของปัญหาวัตถุ 2 ชั้นนั้น เราจะใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเป็นหลัก นั่นคือ เมื่อมีแรง  $F$  มากระทำต่อจุดมวล  $m$  แล้วจะทำให้จุดมวล  $m$  นี้เกิดความเร่ง  $a$  ในทิศทางเดียวกับแรง  $F$  ที่เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$F = ma \quad (\text{ก.1})$$

เนื่องจากว่าความเร่ง  $a$  นั้นเป็นอนุพันธ์ของความเร็ว  $v$  เทียบกับเวลา  $t$  และความเร็ว  $v$  เป็นอนุพันธ์ของการขจัด  $r$  เทียบกับเวลา  $t$  เพราะฉะนั้นความเร่ง  $a$  จึงเป็นอนุพันธ์ของการขจัด  $r$  เทียบกับเวลา  $t$  2 ครั้ง ซึ่งทำให้เราเขียนสมการที่ (ก.1) ใหม่ได้ว่า

$$F = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (\text{ก.2})$$

ถ้าแรงที่กระทำระหว่างวัตถุ 2 ชั้นนั้นคือแรง  $F$  แล้วเราจะเรียกแรง  $F$  นี้ว่าแรงโน้มถ่วงระหว่างวัตถุ 2 ชั้นที่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลคูณระหว่างมวลของวัตถุ 2 ชั้นและที่เป็นสัดส่วนผกผันกับระยะห่างระหว่างวัตถุ 2 ชั้นยกกำลังสอง



ภาพที่ ก.1 ตำแหน่งของจุดมวล  $m_1$  กับ  $m_2$  ในกรอบเฉื่อย

จากภาพที่ ก.1 เมื่อเรากำหนดเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดมวล  $m_1$  และ  $m_2$  ในกรอบเฉื่อยให้เป็น  $r_1$  และ  $r_2$  ตามลำดับ และจุดมวล 2 จุดนี้อยู่ห่างกันเป็นระยะห่างเท่ากับ  $r = |r_2 - r_1|$  แล้วแรงโน้มถ่วงที่จุดมวล  $m_2$  กระทำต่อจุดมวล  $m_1$  หรือ  $F_{21}$  จะเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$F_{21} = Gm_1m_2 \frac{r}{r^3} \quad (\text{ก.3})$$

และแรงโน้มถ่วงที่จุดมวล  $m_1$  กระทำต่อจุดมวล  $m_2$  หรือ  $F_{12}$  จะเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$F_{12} = -Gm_1m_2 \frac{r}{r^3} \quad (\text{ก.4})$$

โดยที่  $r/r$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับทิศทางของ  $r$  และขนาดของแรง  $F_{21}$  กับ  $F_{12}$  คือ  $Gm_1m_2/r^2$  เมื่อเรานำสมการที่ (ก.2) มาใช้กับสมการที่ (ก.3) และสมการที่ (ก.4) แล้วเราจะได้สมการการเคลื่อนที่ของจุดมวล  $m_1$  ตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน คือ

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = Gm_1m_2 \frac{r}{r^3} \quad (\text{ก.5})$$

และสมการการเคลื่อนที่ของจุดมวล  $m_2$  คือ

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -Gm_1m_2 \frac{r}{r^3} \quad (\text{ก.6})$$

เมื่อเราต้องการหาสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของจุดมวล  $m_2$  เทียบกับจุดมวล  $m_1$  นั้น เราจะหาได้โดยนำสมการที่ (ก.5) ที่หารทั้ง 2 ข้างของสมการด้วย  $m_1$  ไปลบกับสมการที่ (ก.6) ที่หารทั้ง 2 ข้างของสมการด้วย  $m_2$  แล้วจะได้

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\mu \frac{r}{r^3} \quad (\text{ก.7})$$

โดยที่  $\mu = G(m_1 + m_2)$

เมื่อเราทำผลคูณเวกเตอร์ทั้ง 2 ข้างของสมการที่ (ก.7) ด้วยเวกเตอร์  $r$  แล้วจะได้

$$r \times \frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \quad (\text{ก.8})$$

และเมื่อเรานำ  $\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$  มาใช้โดยกำหนดให้  $A = r$  และ  $B = \frac{dr}{dt}$  แล้วจะได้

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h} \quad (\text{ก.9})$$

โดยที่  $\mathbf{h}$  คือเวกเตอร์คงที่ที่ถูกเรียกว่าเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมสัมพัทธ์จำเพาะ เมื่อเราทำผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์  $\mathbf{r}$  กับเวกเตอร์  $\mathbf{h}$  พร้อมกับใช้กฎการแปลงของผลคูณ 3 ชั้นของเวกเตอร์ นั่นคือ  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  แล้วจะได้

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{ก.10})$$

จากสมการที่ (ก.10) แสดงให้เห็นได้ว่า  $\mathbf{r}$  ตั้งฉากกับ  $\mathbf{h}$  หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าจุดมวล  $m_2$  กำลังเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางโคจรที่อยู่บนระนาบทางโคจรที่ตั้งฉากกับ  $\mathbf{h}$

เมื่อเราทำผลคูณสเกลาร์ทั้ง 2 ข้างของสมการที่ (ก.7) ด้วยเวกเตอร์ความเร็ว  $\mathbf{v}$  แล้วจะได้

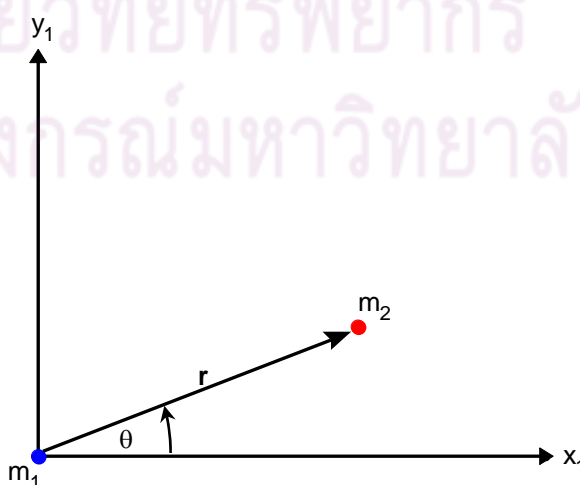
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \left( \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \quad (\text{ก.11})$$

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) \quad (\text{ก.12})$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = E \quad (\text{ก.13})$$

สมการที่ (ก.13) นี้บ่งบอกถึงการอนุรักษ์ของพลังงานของวงโคจรจำเพาะ  $E$  ที่เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต เทอมที่ 1 และเทอมที่ 2 ที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (ก.13) นี้คือพลังงานจลน์และศักย์ของแรงโน้มถ่วงสากล ตามลำดับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาพที่ ก.2 ตำแหน่งสัมพัทธ์ของจุดมวล  $m_2$  เทียบกับจุดมวล  $m_1$

เมื่อเราพิจารณาระบบพิกัดฉากบนระนาบทางโคจรจากภาพที่ ก.2 ที่มีจุดมวล  $m_1$  อยู่ที่จุดกำเนิดและที่มีจุดมวล  $m_2$  กำลังเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางโคจรที่อยู่บนระนาบทางโคจรเทียบกับจุดมวล  $m_1$  แล้วจากสมการที่ (ก.9) จะได้

$$h = x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad (\text{ก.14})$$

และจากสมการที่ (ก.13) จะได้

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_1}{dt} \right)^2 \right) - \frac{\mu}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = E \quad (\text{ก.15})$$

ต่อไปเราจะเขียนสมการที่ (ก.14) และสมการที่ (ก.15) ที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดฉากให้แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วแทนได้โดยแทน  $x_1 = r \cos \theta$  และ  $y_1 = r \sin \theta$  ลงในสมการที่ (ก.14) และสมการที่ (ก.15) ทำให้เราได้

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{ก.16})$$

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{\mu}{r} = E \quad (\text{ก.17})$$

เพื่อที่จะหาคำตอบของสมการที่ (ก.7) ให้เราทำการเปลี่ยนอนุพันธ์ของ  $r$  เทียบกับ  $t$  ที่แสดงอยู่ในสมการที่ (ก.17) ให้เป็นอนุพันธ์ของ  $r$  เทียบกับ  $\theta$  แทน เมื่อเราทำตามสิ่งที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นจะได้

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{\mu}{r} = E \quad (\text{ก.18})$$

แทน  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$  ลงไปในสมการที่ (ก.18) และจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2E - \frac{h^2}{r^2} \quad (\text{ก.19})$$

เพื่อที่จะอินทิเกรตสมการที่ (ก.19) ให้เรานำ  $s = h/r - \mu/h$  ไปใช้กับสมการที่ (ก.19) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$d\theta = \frac{ds}{\sqrt{2E + \frac{\mu^2}{h^2} - s^2}} \quad (\text{ก.20})$$

เมื่ออินทิเกรตสมการที่ (ก.20) แล้วจะได้

$$\theta = -\cos^{-1} \left( \frac{s}{\sqrt{2E + \frac{\mu^2}{h^2}}} \right) + \omega \quad (\text{ก.21})$$

โดยที่  $\omega$  คือค่าคงที่ของการอินทิเกรต เมื่อเราแทน  $s = h/r - \mu/h$  กลับลงไปในสมการที่ (ก.21) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่แล้ว จะได้

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2} \cos(\theta - \omega)}} \quad (\text{ก.22})$$

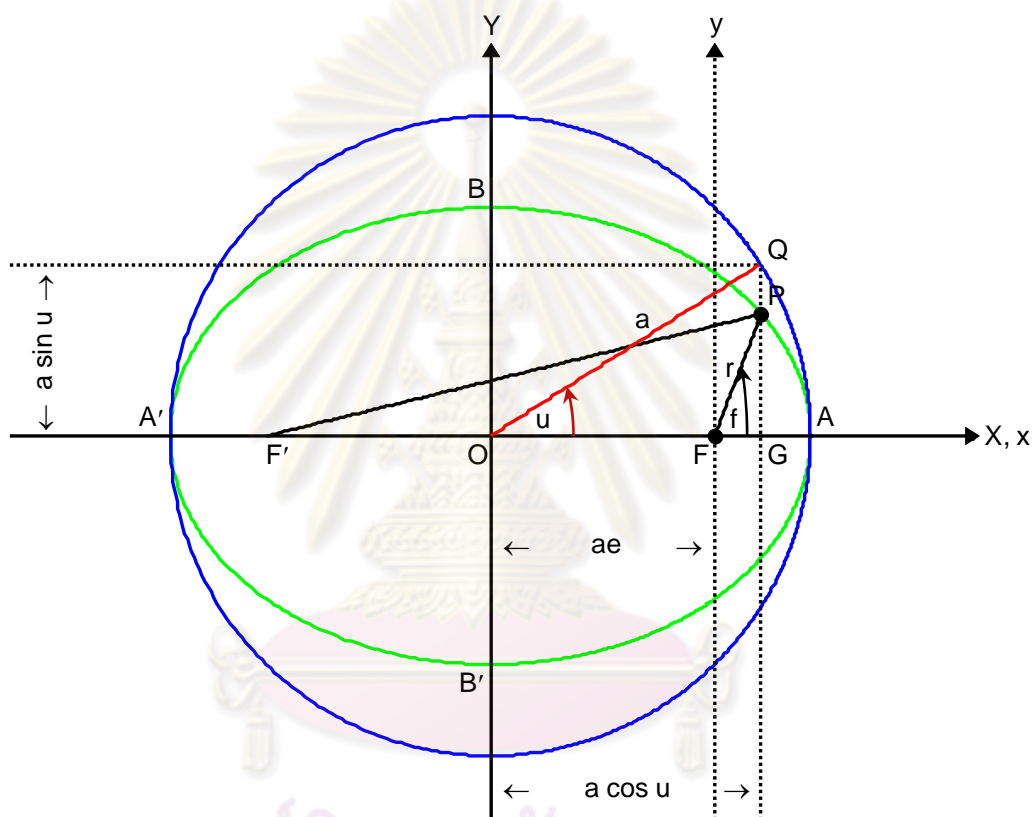
สมการที่ (ก.22) นี้คือคำตอบของสมการที่ (ก.7) นั่นเอง

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ข เรขาคณิตของวงโคจร

### ข.1 วงรี

วงรีนั้นถูกนิยามได้เป็นเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวโดยค่าคงตัวมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง



ภาพที่ ข.1 เส้นทางโคจรรวรีของวัตถุท้องฟ้า P นี้แสดงด้วยเส้นสีเขียว ส่วนเส้นสีน้ำเงินนั้นคือวงกลมเสริม (Auxiliary Circle)

ในภาพที่ ข.1 เราได้แสดงวัตถุท้องฟ้า  $P(X,Y)$  ที่กำลังเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางโคจรรวรีรอบจุด  $F(c,0)$  โดยที่วัตถุท้องฟ้า  $P(X,Y)$  อยู่ห่างจากจุด  $F(c,0)$  เป็นระยะห่างเท่ากับ  $r$  เราเรียกจุด  $F(c,0)$  และจุด  $F'(-c,0)$  ที่เป็นจุดคงที่ว่าจุดโฟกัสของวงรี ส่วน  $r$  นั้นเราเรียกว่าจลนวิถี (Radius Vector) จากคำนิยามที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น จะได้

$$PF' + PF = 2a \quad \text{เมื่อ } 2a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$\sqrt{(X+c)^2 + (Y-0)^2} + \sqrt{(X-c)^2 + (Y-0)^2} = 2a \quad (\text{ข.1})$$

$$\sqrt{(X+c)^2 + Y^2} = 2a - \sqrt{(X-c)^2 + Y^2} \quad (ข.2)$$

ให้ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.2) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$4cX - 4a^2 = -4a\sqrt{(X-c)^2 + Y^2} \quad (ข.3)$$

ให้หารทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.3) ด้วย  $-4a$

$$a - \frac{cX}{a} = \sqrt{(X-c)^2 + Y^2} \quad (ข.4)$$

ให้ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.4)

$$a^2 - 2cX + \frac{c^2 X^2}{a^2} = X^2 - 2cX + c^2 + Y^2 \quad (ข.5)$$

$$a^2 - c^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)X^2 + Y^2 \quad (ข.6)$$

$$a^2 - c^2 = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)X^2 + Y^2 \quad (ข.7)$$

ให้หารทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.7) ด้วย  $a^2 - c^2$  จะได้

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (ข.8)$$

สมการที่ (ข.8) นี้เป็นสมการของวงรีที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดฉากโดยมีจุด  $O$  ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงรีเป็นจุดกำเนิด เมื่อเรานำตัวแปร  $c$  ที่มีค่าเท่ากับ  $ae$  แทนลงไปในสมการที่ (ข.8) แล้วจะได้

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \quad (ข.9)$$

เราเรียกตัวแปร  $e$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.9) ว่าความรีหรือความเยื้องศูนย์กลาง (Eccentricity) ซึ่งความรีหรือความเยื้องศูนย์กลางนี้เป็นปริมาณที่แสดงถึงการที่จุดโฟกัสเลื่อนห่างออกไปจากจุดกำเนิดหรือจุด  $O$  ส่วนตัวแปร  $a$  นั้นเราเรียกว่าครึ่งแกนเอก (Semi-Major Axis)

ต่อไปเราจะทำการเปลี่ยนสมการของวงรีที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดฉากให้แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้โดยนำ  $X = r \cos f + ae$  เมื่อ  $x = r \cos f$  กับ  $Y = y = r \sin f$  แทนลงไป ในสมการที่ (ข.9) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r^2 - e^2 r^2 \cos^2 f + 2ae(1-e^2)r \cos f = a^2(1-e^2)^2 \quad (ข.10)$$



บวก  $e^2 r^2 \cos^2 f$  และลบ  $2ae(1-e^2)r \cos f$  ทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.10) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r^2 = (a(1-e^2) - er \cos f)^2 \quad (ข.11)$$

ให้หารากที่ 2 ของสมการที่ (ข.11) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (ข.12)$$

สมการที่ (ข.12) นี้เป็นสมการของวงรีที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยมีจุด F เป็นจุดกำเนิดและเราเรียกตัวแปร  $f$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.12) ว่ามุมกวาดจริง (True Anomaly) ซึ่งมุมกวาดจริงนี้เป็นมุมที่ถูกวัดอยู่บนระนาบทางโคจรจากแกน  $x$  บวกวนทวนเข็มนาฬิกาไปจนกระทั่งถึงเส้นตรง PF เมื่อคูณ  $1+e \cos f$  ทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.12) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่แล้วจะได้

$$a(1-e^2) = r + ex \quad (ข.13)$$

แทน  $x = a(\cos u - e)$  ลงไปในสมการที่ (ข.13) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (ข.14)$$

สมการที่ (ข.14) นี้เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $r$  กับ  $u$  และเราเรียกตัวแปร  $u$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.14) นี้ว่ามุมกวาดเยื้อง (Eccentric Anomaly) ซึ่งมุมกวาดเยื้องนี้เป็นมุมที่ถูกวัดอยู่บนระนาบทางโคจรจากแกน  $x$  บวกวนทวนเข็มนาฬิกาไปจนกระทั่งถึงเส้นตรง QO เมื่อเราต้องการที่จะหา  $y$  เราก็สามารถหาได้โดยแทน  $x = a(\cos u - e)$  กับ  $r = a(1 - e \cos u)$  ลงไปใน  $r^2 = x^2 + y^2$  ซึ่งจะได้

$$y = a\sqrt{1-e^2} \sin u \quad (ข.15)$$

เมื่อหารสมการที่ (ข.15) ด้วย  $x = a(\cos u - e)$  แล้วจะได้

$$\tan f = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin u}{\cos u - e} \quad (ข.16)$$

แต่เนื่องจากว่าสมการที่ (ข.16) นี้ไม่ได้อยู่ในรูปเชิงใช้งานจริง เพราะฉะนั้นเราจะแปลงรูปทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.16) ใหม่ได้โดยนำสูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติมาใช้ ซึ่งจะได้

$$\frac{2 \tan(f/2)}{1 - \tan^2(f/2)} = \frac{2\sqrt{(1+e)/(1-e)} \tan(u/2)}{1 - [(1+e)/(1-e)] \tan^2(u/2)} \quad (ข.17)$$

เพราะฉะนั้นจากสมการที่ (ข.17) ก็จะได้

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \quad (\text{ข.18})$$

จากภาพที่ ข.1 เราพบว่าจุด A เป็นจุดที่อยู่ใกล้จุด F มากที่สุด ส่วนจุด A' นั้นเป็นจุดที่อยู่ไกลจากจุด F มากที่สุด เพราะฉะนั้นเราจึงเรียกจุด A ว่าจุดใกล้ (Pericentre หรือ Periapsis) ส่วนจุด A' นั้นเราเรียกว่าจุดไกล (Apocentre, Apoapsis หรือ Apapsis) ในกรณีที่ดวงอาทิตย์อยู่ที่จุด F เราเรียกจุดใกล้และจุดไกลว่าจุดใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด (Perihelion) และจุดไกลดวงอาทิตย์มากที่สุด (Aphelion) ตามลำดับ ส่วนในกรณีที่ดาวฤกษ์อยู่ที่จุด F เราเรียกจุดใกล้และจุดไกลว่าจุดใกล้ดาวฤกษ์มากที่สุด (Periastron) และจุดไกลดาวฤกษ์มากที่สุด (Apastron) ตามลำดับ เมื่อเรานำตัวแปร  $q$  ที่เป็นระยะห่างระหว่างจุด F กับจุด A และมีค่าเท่ากับ  $a(1-e)$  ไปใช้กับสมการที่ (ข.12) แล้วจะได้

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos f} \quad (\text{ข.19})$$

เราเรียกตัวแปร  $q$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.19) ว่าระยะจุดใกล้ (Distance of Pericentre) ถ้าเราต้องการที่จะหาความสัมพันธ์ของ  $a$ ,  $e$  ที่เป็นปริมาณทางเรขาคณิตกับ  $E$ ,  $h$  ที่เป็นปริมาณทางฟิสิกส์เชิงกลศาสตร์แล้วเราก็จะสามารถหาได้โดยนำสมการที่ (ก.22) มาเปรียบเทียบกับสมการที่ (ข.12) ซึ่งจะได้

$$h = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \quad (\text{ข.20})$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}} \quad (\text{ข.21})$$

และ  $f = \theta - \omega$  เมื่อเรานำ  $h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$  แทนลงไปในสมการที่ (ข.21) แล้วเราจะได้

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (\text{ข.22})$$

หรือ

$$a = -\frac{\mu}{2E} \quad (\text{ข.23})$$

ต่อจากนี้ไป เราจะสามารถหาสมการของเคปเลอร์ (Kepler's Equation) ได้โดย

นำ  $x = a(\cos u - e)$  กับ  $y = a\sqrt{1-e^2} \sin u$  แทนลงไปใน  $h = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$  พร้อมกับจัดรูป

สมการใหม่ ก็จะได้

$$h = a^2 \sqrt{1-e^2} (1-e\cos u) \frac{du}{dt} \quad (ข.24)$$

แทน  $h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$  ลงไปในสมการที่ (ข.24) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ ก็จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = (1-e\cos u) \frac{du}{dt} \quad (ข.25)$$

เมื่อเราอินทิเกรตสมการที่ (ข.25) แล้วก็จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) = u - e\sin u \quad (ข.26)$$

เราเรียก  $\tau$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.26) นี้ว่าเวลา ณ ตำแหน่งจุดใกล้จุด F มากที่สุด เมื่อเรากำหนดให้มุมกวาดเฉลี่ย (Mean Anomaly)  $M = n(t - \tau)$  โดยที่มีการเคลื่อนที่เฉลี่ย (Mean Motion)  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  แล้วจะทำให้เราสามารถเขียนสมการที่ (ข.26) ใหม่ได้ดังนี้

$$M = u - e\sin u \quad (ข.27)$$

ซึ่งเราเรียกสมการที่ (ข.27) นี้ว่าสมการของเคปเลอร์

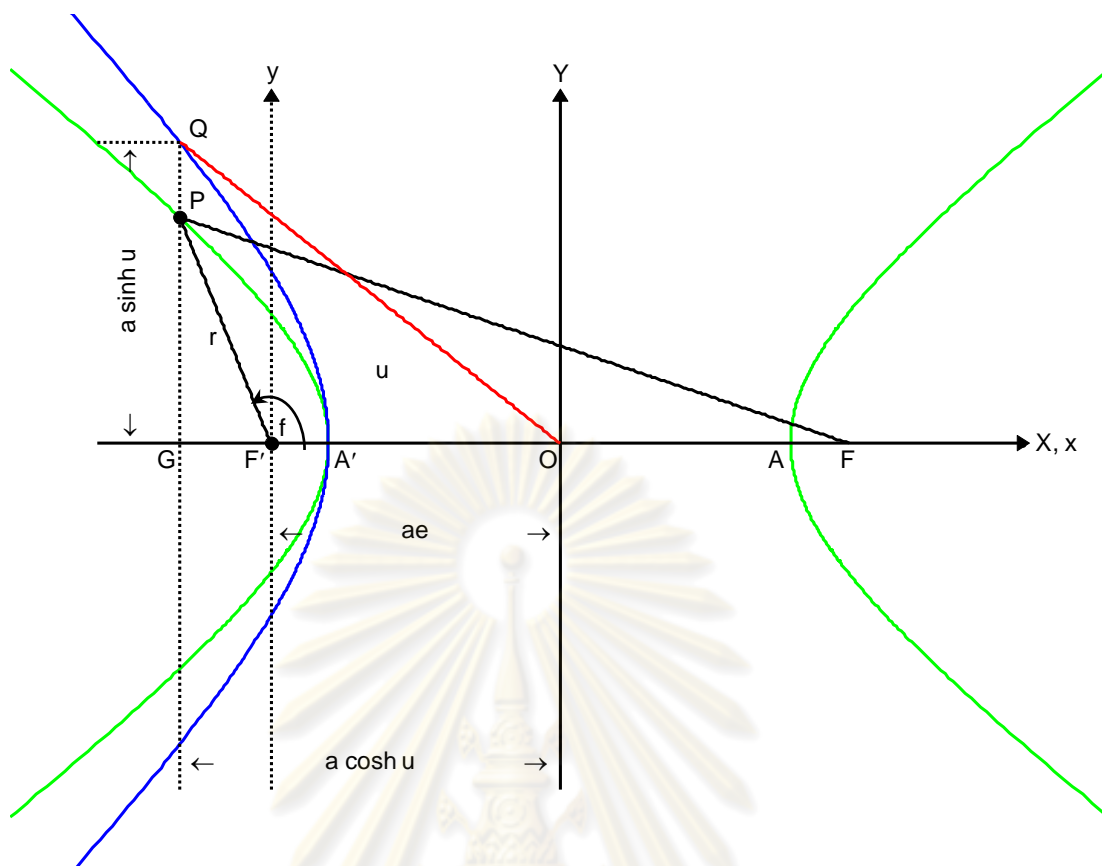
## ข.2 ไฮเพอร์โบล่า

ไฮเพอร์โบล่านั้นถูกนิยามได้เป็นเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวซึ่งมากกว่าศูนย์แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง

ในภาพที่ ข.2 เราได้แสดงวัตถุท้องฟ้า  $P(X,Y)$  ที่กำลังเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางโคจรไฮเพอร์โบลารอบจุด  $F'(-c,0)$  โดยที่วัตถุท้องฟ้า  $P(X,Y)$  อยู่ห่างจากจุด  $F'(-c,0)$  เป็นระยะห่างเท่ากับ  $r$  เราเรียกจุด  $F(c,0)$  และจุด  $F'(-c,0)$  ที่เป็นจุดคงที่ว่าจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบล่า ส่วน  $r$  นั้นเราเรียกว่าจลนรัศมี จากค่านิยามที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น จะได้

$$|PF - PF'| = 2a \quad \text{เมื่อ } 2a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$\sqrt{(X+c)^2 + (Y-0)^2} - \sqrt{(X-c)^2 + (Y-0)^2} = \pm 2a \quad (ข.28)$$



ภาพที่ ข.2 เส้นทางโคจรไฮเพอร์โบลาของวัตถุท้องฟ้า P นี้แสดงด้วยเส้นสีเขียวที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของภาพ ส่วนเส้นสีน้ำเงินที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของภาพนี้คือไฮเพอร์โบลาเสริม (Auxiliary Hyperbola)

$$\sqrt{(X+c)^2 + Y^2} = \pm 2a + \sqrt{(X-c)^2 + Y^2} \quad (\text{ข.29})$$

ให้ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.29) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$4cX - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(X-c)^2 + Y^2} \quad (\text{ข.30})$$

ให้หารทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.30) ด้วย  $4a$

$$\frac{cX}{a} - a = \pm \sqrt{(X-c)^2 + Y^2} \quad (\text{ข.31})$$

ให้ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.31)

$$\frac{c^2 X^2}{a^2} - 2cX + a^2 = X^2 - 2cX + c^2 + Y^2 \quad (\text{ข.32})$$

$$\frac{c^2 X^2}{a^2} - X^2 - Y^2 = c^2 - a^2 \quad (\text{ข.33})$$

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)X^2 - Y^2 = c^2 - a^2 \quad (ข.34)$$

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)X^2 - Y^2 = c^2 - a^2 \quad (ข.35)$$

ให้หารทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.35) ด้วย  $c^2 - a^2$  จะได้

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{c^2 - a^2} = 1 \quad (ข.36)$$

สมการที่ (ข.36) นี้เป็นสมการของไฮเพอร์โบลาที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดฉากโดยมีจุด  $O$  ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาเป็นจุดกำเนิด เมื่อเรานำตัวแปร  $c$  ที่มีค่าเท่ากับ  $ae$  แทนลงไป ในสมการที่ (ข.36) แล้วจะได้

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1 \quad (ข.37)$$

ต่อไปเราจะทำการเปลี่ยนสมการของไฮเพอร์โบลาที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดฉากให้แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้โดยนำ  $X = -r \cos f + ae$  เมื่อ  $x = r \cos f$  กับ  $Y = y = r \sin f$  แทนลงไป ในสมการที่ (ข.37) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$e^2 r^2 \cos^2 f - r^2 - 2ae(e^2 - 1)r \cos f + a^2 e^2 (e^2 - 1) = a^2 (e^2 - 1) \quad (ข.38)$$

บวก  $r^2$  และลบ  $a^2 (e^2 - 1)$  ทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.38) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$(a(e^2 - 1) - er \cos f)^2 = r^2 \quad (ข.39)$$

ให้หารากที่ 2 ของสมการที่ (ข.39) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} \quad (ข.40)$$

สมการที่ (ข.40) นี้เป็นสมการของไฮเพอร์โบลาที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยมีจุด  $F'$  เป็นจุดกำเนิด เมื่อคูณ  $1 + e \cos f$  ทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.40) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่แล้ว จะได้

$$a(e^2 - 1) = r + ex \quad (ข.41)$$

แทน  $x = -a(\cosh u - e)$  ลงไปในสมการที่ (ข.41) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r = a(e \cosh u - 1) \quad (ข.42)$$

สมการที่ (ข.42) นี้เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $r$  กับ  $u$  และเราเรียกตัวแปร  $u$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.42) นี้ว่ามุมกวาดเยื้องไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic Eccentric Anomaly) ซึ่งมุมกวาดเยื้องไฮเพอร์โบลานี้ไม่ใช่มุมแต่เป็นเลขจำนวนจริงที่ไม่มีหน่วยที่สอดคล้องกับพื้นที่รูปสามเหลี่ยม  $QOA'$  เมื่อเราต้องการที่จะหา  $y$  เราก็สามารถหาได้โดยแทน  $x = -a(\cosh u - e)$  กับ  $r = a(e \cosh u - 1)$  ลงไปใน  $r^2 = x^2 + y^2$  ซึ่งจะได้

$$y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh u \quad (\text{ข.43})$$

เมื่อหารสมการที่ (ข.43) ด้วย  $x = -a(\cosh u - e)$  แล้วจะได้

$$\tan f = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh u}{e - \cosh u} \quad (\text{ข.44})$$

แต่เนื่องจากว่าสมการที่ (ข.44) นี้ไม่ได้อยู่ในรูปเชิงใช้งานจริง เพราะฉะนั้นเราจะแปลงรูปทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.44) ใหม่ได้โดยนำทั้งสูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติและสูตรของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกมาใช้ ซึ่งจะได้

$$\frac{2 \tan(f/2)}{1 - \tan^2(f/2)} = \frac{2 \sqrt{(e+1)/(e-1)} \tanh(u/2)}{1 - [(e+1)/(e-1)] \tanh^2(u/2)} \quad (\text{ข.45})$$

เพราะฉะนั้นจากสมการที่ (ข.45) ก็จะได้

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh\left(\frac{u}{2}\right) \quad (\text{ข.46})$$

จากภาพที่ ข.2 เราพบว่าจุด  $A'$  เป็นจุดที่อยู่ใกล้จุด  $F'$  มากที่สุด เพราะฉะนั้นเราจึงเรียกจุด  $A'$  ว่าจุดใกล้ (Pericentre หรือ Periapsis) เมื่อเรานำตัวแปร  $q$  ที่เป็นระยะห่างระหว่างจุด  $F'$  กับจุด  $A'$  และมีค่าเท่ากับ  $a(e-1)$  ไปใช้กับสมการที่ (ข.40) แล้วจะได้สมการที่ (ข.19) ถ้าเราต้องการที่จะหาความสัมพันธ์ของ  $a$ ,  $e$  ที่เป็นปริมาณทางเรขาคณิตกับ  $E$ ,  $h$  ที่เป็นปริมาณทางฟิสิกส์เชิงกลศาสตร์แล้วเราก็จะสามารถหาได้โดยนำสมการที่ (ก.22) มาเปรียบเทียบกับสมการที่ (ข.40) ซึ่งจะได้

$$h = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)} \quad (\text{ข.47})$$

สมการที่ (ข.21) และ  $f = \theta - \omega$  เมื่อเรานำ  $h = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)}$  แทนลงไปในสมการที่ (ข.21) แล้วเราจะได้

$$E = \frac{\mu}{2a} \quad (\text{ข.48})$$

หรือ

$$a = \frac{\mu}{2E} \quad (ข.49)$$

ต่อจากนี้ไป เราจะสามารถหาสมการของเคปเลอร์ได้โดยนำ  $x = -a(\cosh u - e)$  กับ  $y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh u$  แทนลงไปใน  $h = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$  พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ ก็จะได้

$$h = a^2 \sqrt{e^2 - 1} (e \cosh u - 1) \frac{du}{dt} \quad (ข.50)$$

แทน  $h = \sqrt{\mu a (e^2 - 1)}$  ลงไปในสมการที่ (ข.50) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ ก็จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = (e \cosh u - 1) \frac{du}{dt} \quad (ข.51)$$

เมื่อเราอินทิเกรตสมการที่ (ข.51) แล้วจะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) = e \sinh u - u \quad (ข.52)$$

เราเรียก  $\tau$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.52) นี้ว่าเวลา ณ ตำแหน่งจุดใกล้จุด  $F'$  มากที่สุด เมื่อเรากำหนดให้มุมกวาดเฉลี่ย (Mean Anomaly)  $M = n(t - \tau)$  โดยที่มีการเคลื่อนที่เฉลี่ย (Mean Motion)  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  แล้วจะทำให้เราสามารถเขียนสมการที่ (ข.52) ใหม่ได้ดังนี้

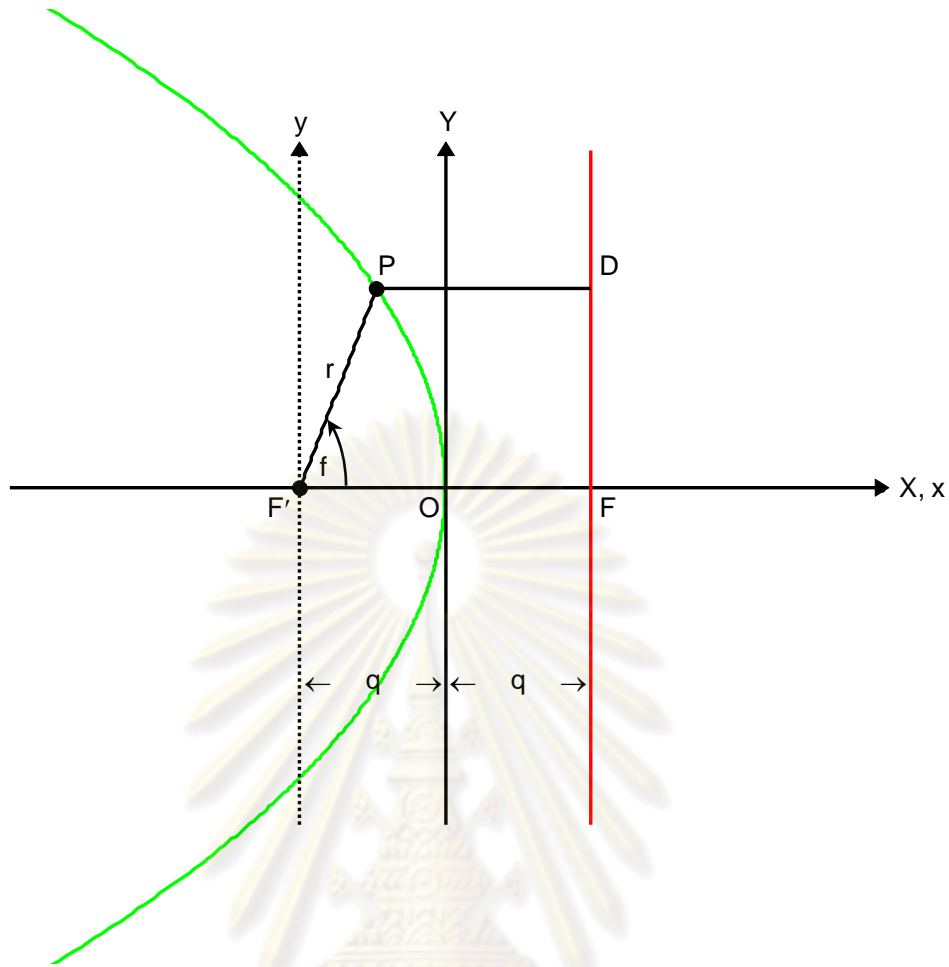
$$M = e \sinh u - u \quad (ข.53)$$

ซึ่งเราเรียกสมการที่ (ข.53) นี้ว่าสมการของเคปเลอร์

### ข.3 พาราโบลา

พาราโบลานั้นถูกนิยามได้เป็นเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งบนระนาบและจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบนอกเส้นตรงคงที่นั้นเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

ในภาพที่ ข.3 เราได้แสดงวัตถุท้องฟ้า  $P(X,Y)$  ที่กำลังเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางโคจรพาราโบลารอบจุด  $F'(-q,0)$  โดยที่วัตถุท้องฟ้า  $P(X,Y)$  อยู่ห่างจากจุด  $F'(-q,0)$  เป็นระยะห่างเท่ากับ  $r$  เราเรียกจุด  $F'(-q,0)$  ที่เป็นจุดคงที่ว่าจุดโฟกัสของพาราโบลา ส่วน  $r$  นั้นเราเรียกว่าจลนรัศมี จากคำนิยามที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น เราจะได้  $PF' = PD$  นั่นคือ



ภาพที่ ข.3 เส้นทางโคจรพาราโบลาคของวัตถุท้องฟ้า P นี้แสดงด้วยเส้นสีเขียวที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของภาพ ส่วนเส้นสีแดงที่เป็นเส้นตรงคงที่ที่อยู่ทางด้านขวามือของภาพนี้คือไดเรกทริกซ์

$$\sqrt{(X-q)^2 + (Y-0)^2} = |X+q| \quad (\text{ข.54})$$

ให้ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.54)

$$X^2 - 2qX + q^2 + Y^2 = X^2 + 2qX + q^2 \quad (\text{ข.55})$$

$$Y^2 = 4qX \quad (\text{ข.56})$$

สมการที่ (ข.56) นี้เป็นสมการของพาราโบลาคที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดฉากโดยมีจุด O ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ใกล้จุด F' มากที่สุดเป็นจุดกำเนิดและเราเรียกจุด O นี้ว่าจุดใกล้ (Pericentre หรือ Periapsis)

ต่อไปเราจะทำการเปลี่ยนสมการของพาราโบลาคที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดฉากให้แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้โดยนำ  $X = -r \cos f + q$  เมื่อ  $x = r \cos f$  กับ  $Y = y = r \sin f$  แทนลงไปนสมการที่ (ข.56) ก็จะได้

$$r^2 \sin^2 f = -4qr \cos f + 4q^2 \quad (\text{ข.57})$$



$$r^2(1 - \cos^2 f) = -4qr \cos f + 4q^2 \quad (ข.58)$$

$$r^2 - r^2 \cos^2 f = -4qr \cos f + 4q^2 \quad (ข.59)$$

บวก  $r^2 \cos^2 f$  ทั้งสองข้างของสมการที่ (ข.59) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r^2 = (2q - r \cos f)^2 \quad (ข.60)$$

ให้หารากที่ 2 ของสมการที่ (ข.60) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r = \frac{2q}{1 + \cos f} \quad (ข.61)$$

สมการที่ (ข.61) นี้เป็นสมการของพาราโบลาที่แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยมีจุด  $F'$  เป็นจุดกำเนิด เมื่อนำ  $r = 2q/(1 + \cos f)$  นี้แทนลงใน  $Y = y = r \sin f$  แล้วจะได้

$$Y = y = \sqrt{2}qu \quad (ข.62)$$

โดยที่  $u = \sqrt{2} \tan(f/2)$  เมื่อนำ  $Y = \sqrt{2}qu$  นี้แทนลงในสมการที่ (ข.56) แล้วจะได้

$$\frac{1}{2}qu^2 = X \quad (ข.63)$$

ให้แทน  $X = -x + q$  ลงในสมการที่ (ข.63) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$x = q \left( 1 - \frac{u^2}{2} \right) \quad (ข.64)$$

เมื่อนำ  $x = q(1 - (u^2/2))$  กับ  $y = \sqrt{2}qu$  นี้แทนลงใน  $r^2 = x^2 + y^2$  พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่แล้วจะได้

$$r^2 = \left( q \left( 1 + \frac{u^2}{2} \right) \right)^2 \quad (ข.65)$$

เมื่อหารากที่ 2 ของสมการที่ (ข.65) แล้วจะได้

$$r = q \left( 1 + \frac{u^2}{2} \right) \quad (ข.66)$$

สมการที่ (ข.66) นี้เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $r$  กับ  $u$  ถ้าเรานำสมการที่ (ก.22) มาเปรียบเทียบกับสมการที่ (ข.61) แล้วจะได้  $E = 0$ ,  $f = \theta - \omega$  และ

$$h = \sqrt{2\mu q} \quad (ข.67)$$

ซึ่งสมการที่ (ข.67) นี้คือความสัมพันธ์ของ  $q$  ที่เป็นปริมาณทางเรขาคณิตกับ  $h$  ที่เป็นปริมาณทางฟิสิกส์เชิงกลศาสตร์ สำหรับความเร็วของวงโคจรนั้นสามารถหาได้โดยนำสมการที่ (ข.19) มาเปรียบเทียบกับสมการที่ (ข.61) จากการเปรียบเทียบนี้ทำให้ความเร็วของวงโคจรมีค่าเป็น 1

ต่อจากนี้ไป เราจะสามารถหาสมการของบาร์คเกอร์ (Barker's Equation) ได้โดย

นำ  $x = q(1 - (u^2/2))$  กับ  $y = \sqrt{2}qu$  แทนลงใน  $h = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$  พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ ก็จะได้

$$h = \sqrt{2}q^2 \left( 1 + \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{dt} \quad (\text{ข.68})$$

แทน  $h = \sqrt{2\mu q}$  ลงไปในสมการที่ (ข.68) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{q^3}} = \left( 1 + \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{dt} \quad (\text{ข.69})$$

เมื่อเราอินทิเกรตสมการที่ (ข.69) แล้วจะได้

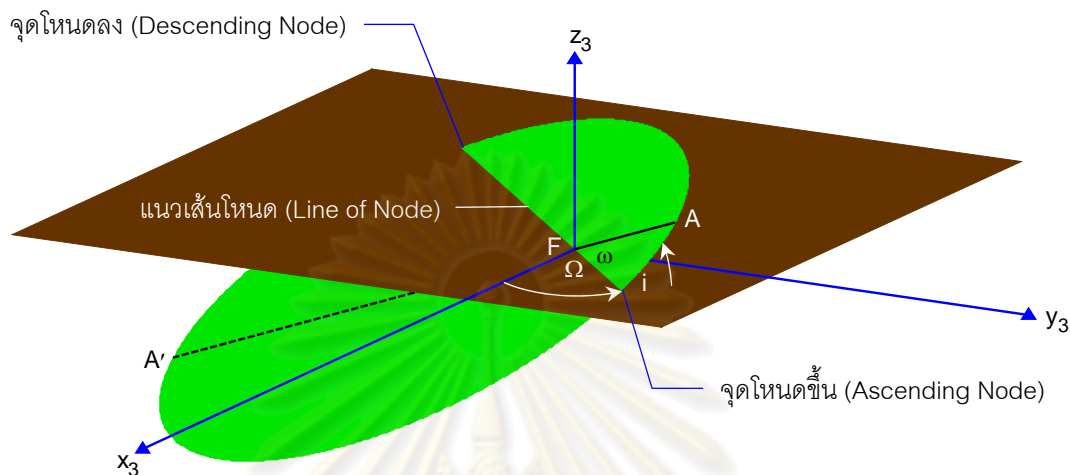
$$\sqrt{\frac{\mu}{q^3}} (t - \tau) = u + \frac{u^3}{6} \quad (\text{ข.70})$$

เราเรียก  $\tau$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (ข.70) นี้ว่าเวลา ณ ตำแหน่งจุดใกล้จุด  $F'$  มากที่สุด เมื่อเรากำหนดให้มุมกวาดเฉลี่ย (Mean Anomaly)  $M = n(t - \tau)$  โดยที่มีการเคลื่อนที่เฉลี่ย (Mean Motion)  $n = \sqrt{\mu/q^3}$  แล้วจะทำให้เราสามารถเขียนสมการที่ (ข.70) ใหม่ได้ดังนี้

$$M = u + \frac{u^3}{6} \quad (\text{ข.71})$$

ซึ่งเราเรียกสมการที่ (ข.71) นี้ว่าสมการของบาร์คเกอร์

## ภาคผนวก ค หลักมูลทางโคจร



ภาพที่ ค.1 ระนาบสีเขียวนั้นเป็นระนาบทางโคจรของวัตถุท้องฟ้าที่โคจรอยู่รอบๆ จุด F ส่วนระนาบสีน้ำตาลนั้นเป็นระนาบอ้างอิง

หลักมูลทางโคจรคือปริมาณที่ถูกนำมาใช้บ่งบอกถึงขนาด รูปร่างและทิศทางการวางตัวของวงโคจรของวัตถุท้องฟ้าที่เคลื่อนที่อยู่ในห้วงอวกาศ 3 มิตินั้นได้อย่างชัดเจน หลักมูลทางโคจรนี้ประกอบด้วย

1. ครึ่งแกนเอกของวงโคจร ( $a$ ) ที่ถูกกำหนดให้เป็นระยะห่างระหว่างจุด  $O$  กับจุด  $A$  หรือจุด  $A'$  นั้นถูกนำมาใช้บ่งบอกถึงขนาดของวงโคจรที่เป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลา สำหรับวงโคจรที่เป็นพาราโบลานั้นเราใช้ระยะจุดใกล้จุด  $F'$  มากที่สุดนี้เป็นตัวบ่งบอกถึงขนาดของวงโคจร (ให้ดูภาพที่ ข.1, ข.2 และ ข.3 นั้นมาประกอบด้วย)
2. ความรีของวงโคจร ( $e$ ) ที่ถูกนิยามได้เป็นระยะห่างระหว่างจุด  $O$  กับจุด  $F$  หรือจุด  $F'$ หารด้วยครึ่งแกนเอกของวงโคจรนั้นถูกนำมาใช้บ่งบอกถึงรูปร่างของวงโคจร
3. ความเอียงของวงโคจร (i) คือมุมที่ถูกวัดจากระนาบสีน้ำตาลวนทวนเข็มนาฬิกาไปจนกระทั่งถึงระนาบสีเขียวดังที่ได้มองเข้าหาแกนที่ชี้ไปยังจุดโหนดขึ้น ถ้า  $i$  มีค่าน้อยกว่า  $90^\circ$  แล้วการโคจรของวัตถุท้องฟ้ารอบจุด  $F$  นั้นจะมีทิศวนเข็มนาฬิกาแต่ถ้า  $i$  มีค่ามากกว่า  $90^\circ$  แต่ไม่เกิน  $180^\circ$  แล้วการโคจรของวัตถุท้องฟ้ารอบจุด  $F$  นั้นจะมีทิศตามนาฬิกาตามที่ได้มองเข้าหาแกน  $+z_3$

4. ลองจิจูดของจุดโหนดขึ้น ( $\Omega$ ) คือมุมที่ถูกวัดจากแกน  $+x_3$  วนทวนเข็มนาฬิกา ไปจนกระทั่งถึงแกนที่ชี้ไปยังจุดโหนดขึ้นตามที่ได้มองเข้าหาแกน  $+z_3$  ลองจิจูดของจุดโหนดขึ้นนี้ ถูกวัดอยู่บนระนาบสีน้ำตาลและมีค่าได้ไม่เกิน  $360^\circ$  ถ้า  $i$  มีค่าเท่ากับศูนย์แล้วจะทำให้ระบุค่า ลองจิจูดของจุดโหนดขึ้นนี้ไม่ได้

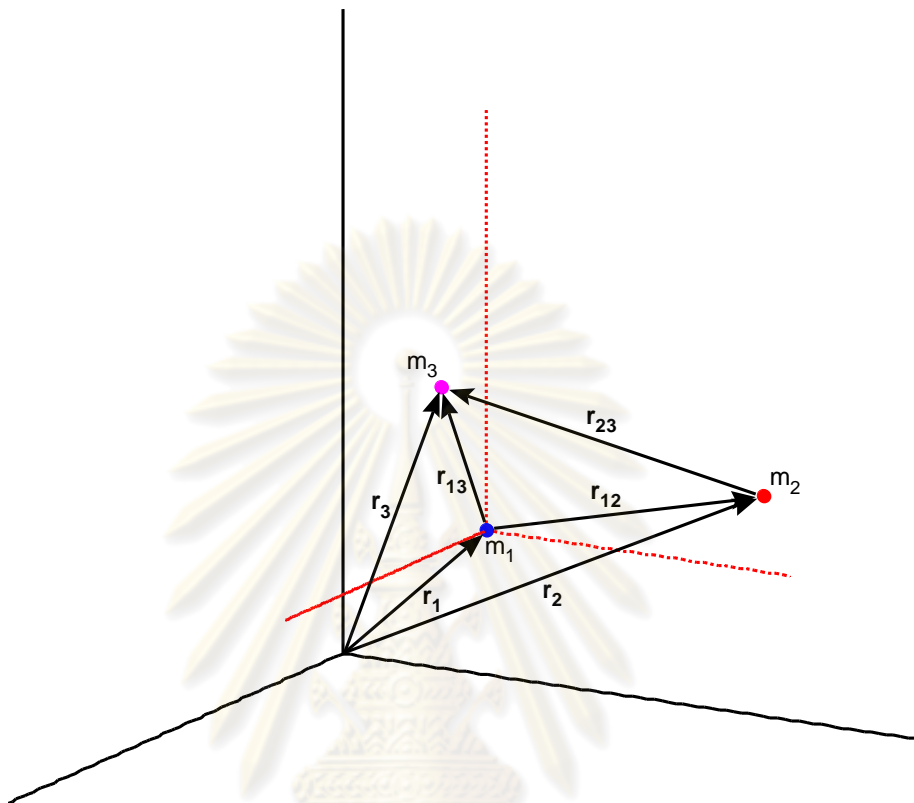
5. ระยะมุมของจุดใกล้จุด F มากที่สุด ( $\omega$ ) คือมุมที่ถูกวัดจากแกนที่ชี้ไปยังจุด โหนดขึ้นวนตามทิศทางการโคจรของวัตถุท้องฟ้ารอบจุด F ไปจนกระทั่งถึงแกนที่ชี้ไปยังจุดใกล้จุด F มากที่สุด ระยะมุมของจุดใกล้จุด F มากที่สุดนี้ถูกวัดอยู่บนระนาบสีเขียวและมีค่าได้ไม่เกิน  $360^\circ$  ถ้า  $e$  หรือ  $i$  มีค่าเท่ากับศูนย์แล้วจะทำให้ระบุค่าระยะมุมของจุดใกล้จุด F มากที่สุดนี้ไม่ได้

6. เวลา ณ ตำแหน่งจุดใกล้จุด F มากที่สุด ( $\tau$ ) คือเวลาที่วัตถุท้องฟ้าโคจรผ่าน มาถึง ณ ตำแหน่งจุดใกล้จุด F มากที่สุด ถ้า  $e$  มีค่าเท่ากับศูนย์แล้วจะทำให้ระบุเวลา ณ ตำแหน่ง จุดใกล้จุด F มากที่สุดนี้ไม่ได้



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ง  
ปัญหาวัตถุ 3 ชั้น



ภาพที่ ง.1 ตำแหน่งของจุดมวล  $m_1$ ,  $m_2$  และ  $m_3$  ในกรอบเฉื่อย

พิจารณาปัญหาวัตถุ 3 ชั้นที่มีจุดมวล  $m_1$ ,  $m_2$  และ  $m_3$  กำลังเคลื่อนที่อยู่ที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงสากล ในภาพที่ ง.1 นั้น กำหนดเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดมวล  $m_1$ ,  $m_2$  และ  $m_3$  ที่อยู่ในกรอบเฉื่อยให้เป็น  $r_1$ ,  $r_2$  และ  $r_3$  ตามลำดับ กำหนดเวกเตอร์ที่มีทิศทางจากจุดมวล  $m_1$  ไปยังจุดมวล  $m_2$  ให้เป็น  $r_{12} = r_2 - r_1$  กำหนดเวกเตอร์ที่มีทิศทางจากจุดมวล  $m_1$  ไปยังจุดมวล  $m_3$  ให้เป็น  $r_{13} = r_3 - r_1$  และกำหนดเวกเตอร์ที่มีทิศทางจากจุดมวล  $m_2$  ไปยังจุดมวล  $m_3$  ให้เป็น  $r_{23} = r_3 - r_2 = r_{13} - r_{12}$

เมื่อพิจารณาภาพที่ ง.1 แล้วเราพบว่าแรงที่กระทำต่อจุดมวล  $m_1$  ก็คือแรงโน้มถ่วงสากลอันเนื่องมาจากจุดมวล  $m_2$  กับจุดมวล  $m_3$  พร้อมกับเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = Gm_1 m_2 \frac{r_{12}}{r_{12}^3} + Gm_1 m_3 \frac{r_{13}}{r_{13}^3} \quad (\text{ง.1})$$

เมื่อหารทั้งสองข้างของสมการที่ (ง.1) ด้วย  $m_1$  แล้วจะได้

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = Gm_2 \frac{r_{12}}{r_{12}^3} + Gm_3 \frac{r_{13}}{r_{13}^3} \quad (\text{ง.2})$$

สมการที่ (ง.2) นี้เป็นสมการการเคลื่อนที่ของจุดมวล  $m_1$  ในกรอบเฉื่อยและในทำนองเดียวกัน สมการการเคลื่อนที่ของจุดมวล  $m_2$  และจุดมวล  $m_3$  ในกรอบเฉื่อยนี้ก็คือ

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{r_{12}}{r_{12}^3} + Gm_3 \frac{r_{23}}{r_{23}^3} \quad (\text{ง.3})$$

$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{r_{13}}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{r_{23}}{r_{23}^3} \quad (\text{ง.4})$$

ตามลำดับ ถ้าหากว่าจุดมวล  $m_3$  มีมวลน้อยกว่าจุดมวล  $m_1$  และจุดมวล  $m_2$  อยู่มากๆ (แรงโน้มถ่วงสากลที่จุดมวล  $m_3$  กระทำต่อจุดมวล  $m_1$  และจุดมวล  $m_2$  นี้น้อยกว่าแรงโน้มถ่วงสากลที่จุดมวล  $m_1$  กับจุดมวล  $m_2$  กระทำซึ่งกันและกันอยู่มากๆ) แล้วจะทำให้เราสามารถเขียนสมการที่ (ง.2) และ (ง.3) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = Gm_2 \frac{r_{12}}{r_{12}^3} \quad (\text{ง.5})$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{r_{12}}{r_{12}^3} \quad (\text{ง.6})$$

เมื่อนำสมการที่ (ง.5) ไปลบกับสมการที่ (ง.6) แล้ว จะได้

$$\frac{d^2 r_{13}}{dt^2} = -Gm_1 \frac{r_{13}}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{r_{23}}{r_{23}^3} - Gm_2 \frac{r_{12}}{r_{12}^3} \quad (\text{ง.7})$$

สมการที่ (ง.7) นี้เป็นสมการการเคลื่อนที่ของจุดมวล  $m_3$  ในระบบพิกัดที่มีจุดมวล  $m_1$  เป็นจุดกำเนิด

## ภาคผนวก จ

### ระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้าอันดับที่ 5

ระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้าสามารถทำให้การลู่เข้าอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) มีความถูกต้องแม่นยำได้โดยไม่ต้องคำนวณหาค่าอนุพันธ์ที่มากกว่าอันดับที่ 1 ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้าจะมีวิธีการที่แตกต่างกันอยู่มากมายแต่เราจะนำระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้าอันดับที่ 5 ของบุทเชอร์ (Butcher) มาใช้ในการแก้สมการการเคลื่อนที่ที่เป็นสมการอนุพันธ์สามัญเท่านั้น ถ้ากำหนดให้สมการอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 1 มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (จ.1)$$

แล้วเราสามารถแสดงผลเฉลยของการอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต้าอันดับที่ 5 ที่มีพิสัยขั้น (Step Size) เท่ากับ  $h$  ได้ดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (จ.2)$$

เมื่อ  $y_i$  คือค่า  $y$  ที่จุดเริ่มต้นของพิสัยขั้น,  $y_{i+1}$  คือค่า  $y$  ที่จุดสุดท้ายของพิสัยขั้นและ  $\phi$  คือฟังก์ชันเพิ่ม (Increment Function) ซึ่งมีค่าเป็นดังนี้

$$\phi = \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (จ.3)$$

ซึ่ง

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (จ.3ก)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right) \quad (จ.3ข)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right) \quad (จ.3ค)$$

$$k_4 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right) \quad (จ.3ง)$$

$$k_5 = f\left(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right) \quad (จ.3จ)$$

$$k_6 = f\left(t_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right) \quad (จ.3ฉ)$$

ในโปรแกรมแมทแลบ (MATLAB) เราจำเป็นที่จะต้องสร้างไฟล์ฟังก์ชันของระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต์อันดับที่ 5 ขึ้นมาเพื่อนำไปใช้ในการแก้สมการการเคลื่อนที่และไฟล์ฟังก์ชันดังกล่าวข้างต้นนี้มีรูปแบบการเขียนโปรแกรมดังนี้

```
function ynew = RK5(ydot,tt,yold,hh,varargin)
% RK5 คือฟังก์ชันของระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุทต์อันดับที่ 5 สำหรับนำไปใช้แก้สมการอนุพันธ์
สามัญ
% อาร์กิวเมนต์ที่ป้อนเข้าฟังก์ชัน ได้แก่
% ydot คือชื่อของ M-file ที่นำมาใช้หาค่าสมการอนุพันธ์สามัญ
% tt คือ ณ เวลาหนึ่ง
% yold คือค่าของตัวแปรตามที่จุดเริ่มต้นของพิสัยขั้น
% hh คือพิสัยขั้น
% p1,p2,... คือตัวแปรเพิ่มเติมที่ถูกนำมาใช้โดย ydot
% อาร์กิวเมนต์ที่ได้จากฟังก์ชัน คือ
% ynew คือค่าของตัวแปรตามที่จุดสุดท้ายของพิสัยขั้น
if nargin<4,error('input arguments are required at the very least 4. '), end
y(1,:) = yold;
k1 = ydot(tt,y(1,:),varargin{:});
y2 = y(1,:) + (1/4)*k1*hh;
k2 = ydot(tt+(hh/4),y2,varargin{:});
y3 = y(1,:) + (1/8)*k1*hh + (1/8)*k2*hh;
k3 = ydot(tt+(hh/4),y3,varargin{:});
ymid = y(1,:) - (1/2)*k2*hh + k3*hh;
k4 = ydot(tt+(hh/2),ymid,varargin{:});
y5 = y(1,:) + (3/16)*k1*hh + (9/16)*k4*hh;
k5 = ydot(tt+(3*hh/4),y5,varargin{:});
yend = y(1,:) - (3/7)*k1*hh + (2/7)*k2*hh + (12/7)*k3*hh - (12/7)*k4*hh + (8/7)*k5*hh;
k6 = ydot(tt+hh,yend,varargin{:});
phi = (7*k1 + 32*k3 + 12*k4 + 32*k5 + 7*k6)/90;
y(1,:) = y(1,:) + phi*hh;
ynew = y(1,:)
```



**ภาคผนวก จ**  
**การเขียนโปรแกรมจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์**  
**ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่นด้วยแมทแลบ**

% ใช้คำสั่ง close, clear และ clc เพื่อปิดหน้าต่าง Figure กำจัดตัวแปรต่างๆ ออกไปจาก Workspace และกำจัดคำสั่งที่ได้ป้อนเข้าไปและผลลัพธ์ที่ได้แสดงออกมาออกไปจาก Command Window ตามลำดับ

```
close all; clear all; clc;
```

% ให้ป้อนค่าความรีของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ ความเอียงของวงโคจรของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้เทียบกับระนาบแผ่นจานฝุ่นในระยะแรกเริ่ม ระยะมุมของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิดมากที่สุด ลองจิจูดของจุดเหนือขั้วและอัตราส่วนมวลของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้ต่อดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด เข้าไป ตามลำดับ

```
e = input('The orbital eccentricity of the passing star = ');
```

```
i = input('The orbital inclination of the passing star relative to the initial dust disk in degrees = ')*pi/180;
```

```
w = input('The argument of periastron in degrees = ')*pi/180;
```

```
O = input('The longitude of ascending node in degrees = ')*pi/180;
```

```
M = input('The mass ratio of the passing star to the primary star = ');
```

% กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้

```
if e == 1 % ถ้าดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้มีเส้นทางโคจรเป็นพาราโบลา
```

```
    Ri = 7; fi = -acos((((1+e)/Ri)-1)/e);
```

```
    ui = sqrt(2)*tan(fi/2);
```

```
    ti = (((ui^3)/6)+ui)/sqrt(1+M);
```

```
    tf = input('The final time of the passing star = ');
```

```
elseif e > 1 % ถ้าดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้มีเส้นทางโคจรเป็นไฮเพอร์โบลา
```

```
    Ri = 7; fi = -acos((((1+e)/Ri)-1)/e);
```

```
    ui = 2*atanh(sqrt((e-1)/(e+1))*tan(fi/2));
```

```
    ti = ((e*sinh(ui))-ui)/sqrt((1+M)*((e-1)^3));
```

```
    tf = input('The final time of the passing star = ');
```

```
else % ถ้าดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้มีเส้นทางโคจรเป็นวงรี
```

```
    nu = input('The orbital frequency of the passing star in eccentric orbit = ');
```

```

fi = -pi; Ri = (1+e)/(1+e*cos(fi));
ti = -pi/sqrt((1+M)*((1-e)^3)); tf = (((2*nu)-1)*pi)/sqrt((1+M)*((1-e)^3));
end
h = 0.09; % กำหนดพิสัยขั้น-เวลา
t = (ti:h:tf)'; nt = length(t);
if t(nt) < tf
    t(nt+1) = tf;
    nt = nt+1;
end
% กำหนดตำแหน่งเริ่มต้นของดาวฤกษ์ที่โคจรผ่านไปใกล้
Xii = Ri*cos(fi); Yii = Ri*sin(fi);
Xi = (cos(w)*cos(O) - sin(w)*cos(i)*sin(O))*Xii - (sin(w)*cos(O) + cos(w)*cos(i)*sin(O))*Yii;
Yi = (cos(w)*sin(O) + sin(w)*cos(i)*cos(O))*Xii - (sin(w)*sin(O) - cos(w)*cos(i)*cos(O))*Yii;
Zi = (sin(w)*sin(i))*Xii + (cos(w)*sin(i))*Yii;
Pi = [ ];
for m = 1:1/20:4 % กำหนดจำนวนของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น
    r0 = 0.2*m;
    for k = 1:360 % กำหนดจำนวนของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นในแต่ละวงโคจร
        N = 360; theta = 2*k*pi/N;
        x0 = r0*cos(theta); vx0 = -sin(theta)/sqrt(r0);
        y0 = r0*sin(theta); vy0 = cos(theta)/sqrt(r0);
        Pi = [Pi;x0 vx0 y0 vy0 0 0];
    end
end
% กำหนดครึ่งแกนเอกเริ่มต้นของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น
ai_dust = sqrt((Pi(:,1).^2)+(Pi(:,3).^2)+(Pi(:,5).^2));
% กำหนดให้ควมรึกับความเอียงเริ่มต้นของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นมีค่าเท่ากับศูนย์
ei_dust = zeros(length(Pi),1); ii_dust = zeros(length(Pi),1);
% สร้างเมนู Models ไว้บนแถบเมนูของหน้าต่าง Figure ซึ่งภายในเมนู Models นี้ประกอบด้วย
เมนู Resume เมนู Pause เมนู Grid และเมนู Views
Me_models = uimenu(gcf,'Label','Models');

```

```

Me_resume = uimenu(Me_models,'Label','Resume','CallBack','uiresume(gcf)',...
'Accelerator','N');
Me_pause = uimenu(Me_models,'Label','Pause','CallBack','uiwait(gcf)','Accelerator','U');
Me_grid = uimenu(Me_models,'Label','Grid','Separator','on');
% สร้างเมนูย่อย grid on และเมนูย่อย grid off ไว้ในเมนู Grid
Me_grid_on = uimenu(Me_grid,'Label','grid on','CallBack','grid minor');
Me_grid_off = uimenu(Me_grid,'Label','grid off','CallBack','grid off');
% สร้างแบบจำลอง 3 มิติ
subplot(2,2,1:2)
% กำหนดให้ดาวฤกษ์สีน้ำเงินที่มีอนุภาคแผ่นจานฝุ่นล้อมรอบอยู่ที่จุดกำเนิด
star1 = plot3(0,0,0,'*','MarkerFaceColor',[0 0 1],'MarkerEdgeColor',[0 0 1],...
'MarkerSize',15);
hold on; axis([-4 4 -4 4 -1 1]); xlabel('x/q','FontSize',12); ylabel('y/q','FontSize',12);
zlabel('z/q','FontSize',12);
% กำหนดให้ดาวฤกษ์สีเหลืองอยู่ที่ตำแหน่งเริ่มต้น
star2 = plot3(Xi,Yi,Zi,'*','MarkerFaceColor',[0.9 0.9 0],'MarkerEdgeColor',[0.9 0.9 0],
'MarkerSize',15);
% กำหนดให้อนุภาคแผ่นจานฝุ่นสีน้ำตาลอยู่รอบๆ ดาวฤกษ์สีน้ำเงินที่อยู่ ณ จุดกำเนิด
dust = plot3(Pi(:,1),Pi(:,3),Pi(:,5),'.','MarkerFaceColor',[0.4 0.2 0],'MarkerEdgeColor',
[0.4 0.2 0],'MarkerSize',5);
Me_v = uimenu(Me_models,'Label','Views');
% สร้างเมนูย่อย 3 Dimension เมนูย่อย The Orbital Plane of The Passing Star เมนูย่อย X-Y
Plane เมนูย่อย X-Z Plane และเมนูย่อย Y-Z Plane ไว้ในเมนู Views
Me_3d = uimenu(Me_v,'Label','3 Dimension','CallBack','view(3)');
Me_3d2 = uimenu(Me_v,'Label','The Orbital Plane of The Passing Star','CallBack',
'view(O*180/pi,90-(i*180/pi)');
Me_xy = uimenu(Me_v,'Label','X-Y Plane','CallBack','view(2)','Separator','on');
Me_xz = uimenu(Me_v,'Label','X-Z Plane','CallBack','view(0,0)');
Me_yz = uimenu(Me_v,'Label','Y-Z Plane','CallBack','view(90,0)');
subplot(2,2,3)

```

```

% สร้างแบบจำลอง 2 มิติของความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นเทียบกับครึ่งแกนเอกของ
วงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น
e_dust = semilogy(ai_dust,ei_dust,',' ,MarkerFaceColor',[0.4 0.2 0],MarkerEdgeColor',
[0.4 0.2 0],MarkerSize',5);
axis([0 2 0.001 1]); xlabel('a/q','FontSize',12); ylabel('eccentricity','FontSize',12);
subplot(2,2,4)
% สร้างแบบจำลอง 2 มิติของความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นเทียบกับครึ่งแกนเอก
ของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น
i_dust = semilogy(ai_dust,ii_dust,',' ,MarkerFaceColor',[0.4 0.2 0],MarkerEdgeColor',
[0.4 0.2 0],MarkerSize',5);
axis([0 2 0.05 60]); xlabel('a/q','FontSize',12); ylabel('inclination','FontSize',12);
tt = ti; ft = fi; Xt = Xi; Yt = Yi; Zt = Zi; Pt = Pi;
ntt = 1;
while(1)
    tend = t(ntt+1);
    hh = t(ntt+1) - t(ntt);
    if hh > h, hh = h; end
    while(1)
        if tt+hh > tend, hh = tend - tt; end
        % แก๊สมการที่ (3.8) ด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุดต่ำอันดับที่ 5
        ft = RK5(@true_anomaly,tt,ft,hh,e,M);
        Rt = (1+e)/(1+e*cos(ft)); Xtt = Rt*cos(ft); Ytt = Rt*sin(ft);
        Xt = (cos(w)*cos(O) - sin(w)*cos(i)*sin(O))*Xtt -...
            (sin(w)*cos(O) + cos(w)*cos(i)*sin(O))*Ytt;
        Yt = (cos(w)*sin(O) + sin(w)*cos(i)*cos(O))*Xtt -...
            (sin(w)*sin(O) - cos(w)*cos(i)*cos(O))*Ytt;
        Zt = (sin(w)*sin(i))*Xtt + (cos(w)*sin(i))*Ytt;
        % แก๊สมการที่ (3.12) ถึงสมการที่ (3.17) ด้วยระเบียบวิธีการของรุงเก้-คุดต่ำอันดับที่ 5
        for n_dust = 1:length(Pt)
            Pt(n_dust,:) = RK5(@position,tt,Pt(n_dust,:),hh,Rt,Xt,Yt,Zt,M);
        end
    end
end

```

```

rt = sqrt((Pt(:,1).^2)+(Pt(:,3).^2)+(Pt(:,5).^2));
vt = sqrt((Pt(:,2).^2)+(Pt(:,4).^2)+(Pt(:,6).^2));
Et = ((vt.^2)/2)-(1./rt);
hxt = (Pt(:,3).*Pt(:,6))-(Pt(:,5).*Pt(:,4));
    hyt = (Pt(:,5).*Pt(:,2))-(Pt(:,1).*Pt(:,6));
    hzt = (Pt(:,1).*Pt(:,4))-(Pt(:,3).*Pt(:,2));
ht = sqrt((hxt.^2)+(hyt.^2)+(hzt.^2));
    % หาค่าครึ่งแกนเอกและความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น
for n_dust2 = 1:length(Pt)
    % ถ้าอนุภาคแผ่นจานฝุ่นมีเส้นทางโคจรเป็นวงรี
    if Et(n_dust2,:) < 0
        at_dust(n_dust2,:) = -1./(2*Et(n_dust2,:));
        et_dust(n_dust2,:) = sqrt(1-((ht(n_dust2,:).^2)/at_dust(n_dust2,:)));
        % ถ้าอนุภาคแผ่นจานฝุ่นมีเส้นทางโคจรเป็นไฮเพอร์โบลา
    elseif Et(n_dust2,:) > 0
        at_dust(n_dust2,:) = 1./(2*Et(n_dust2,:));
        et_dust(n_dust2,:) = sqrt(1+((ht(n_dust2,:).^2)/at_dust(n_dust2,:)));
        % ถ้าอนุภาคแผ่นจานฝุ่นมีเส้นทางโคจรเป็นพาราโบลา
    else
        at_dust(n_dust2,:) = (ht(n_dust2,:).^2)/2
        et_dust(n_dust2,:) = 1;
    end
end
    % หาค่าความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่น
it_dust = acos(hzt./ht)*(180/pi);
tt = tt+hh;
if tt >= tend,break,end
end
    % ถ้าความรีของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 แล้วเราจะ
    กำหนดให้ความเอียงของวงโคจรของอนุภาคแผ่นจานฝุ่นมีค่าเท่ากับศูนย์
for n_dust3 = 1:length(Pt)

```

```

if et_dust(n_dust3,:) >= 1,it_dust(n_dust3,:) = 0;end
end
% ทำให้แบบจำลอง 3 มิติและแบบจำลอง 2 มิติมีการเคลื่อนไหว
drawnow
set(star2,'XData',Xt,'YData',Yt,'ZData',Zt)
set(dust,'XData',Pt(:,1),'YData',Pt(:,3),'ZData',Pt(:,5))
set(e_dust,'XData',at_dust,'YData',et_dust)
set(i_dust,'XData',at_dust,'YData',it_dust)
ntt = ntt+1;
if tt >= tf,break,end
end

```

จากการเขียนโปรแกรมที่ผ่านมาแล้วข้างต้น เราได้สร้างฟังก์ชันขึ้นมาเองถึง 3 ฟังก์ชัน ได้แก่ 1. ฟังก์ชัน true\_anomaly ที่มีรูปแบบการเขียนโปรแกรมดังนี้

```

function fdot = true_anomaly(t,f,e,M)
fdot = sqrt((1+M)/(1+e)^3)*(1+e*cos(f))^2;

```

2. ฟังก์ชัน position ที่มีรูปแบบการเขียนโปรแกรมดังนี้

```

function xdot = position(t,x,R,X,Y,Z,M)
r = sqrt((x(1)^2)+(x(3)^2)+(x(5)^2));
d = sqrt(((x(1)-X)^2)+((x(3)-Y)^2)+((x(5)-Z)^2));
xdot = [x(2);(-x(1)/r^3)+(M*(X-x(1))/d^3)-(M*X/R^3);...
x(4);(-x(3)/r^3)+(M*(Y-x(3))/d^3)-(M*Y/R^3);...
x(6);(-x(5)/r^3)+(M*(Z-x(5))/d^3)-(M*Z/R^3)];

```

และสุดท้าย 3. ฟังก์ชัน RK5 ที่มีรูปแบบการเขียนโปรแกรมดังที่ได้กล่าวไปแล้วในภาคผนวก จ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ – นามสกุล	นายสุรพงษ์ ศรีแก้ว
วัน เดือน ปี เกิด	วันพฤหัสบดีที่ 9 สิงหาคม พ.ศ. 2527
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลศิริราช จังหวัดกรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เมื่อวันที่ 6 มีนาคม พ.ศ. 2549
ผลงานทางวิชาการ	สุรพงษ์ ศรีแก้ว และ พีรพัฒน์ ศิริสมบุญธน์ลาม. การจำลองการโคจรผ่านระยะใกล้ของดาวฤกษ์ที่ส่งผลต่อแผ่นจานฝุ่นของดาวปีศาจที่ตั้งภาพ. ใน <u>การประชุมเสนอผลงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษาแห่งชาติ ครั้งที่ 15</u>

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย