บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

กำหนดให้ $\{(y_j, x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}), j=1,2,\ldots,n\}$ เป็นเซทของข้อมูลที่รวบรวมได้ทั้งหมด n ชุด

เมื่อ $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$ เป็นค่าของตัวแปรอิสระชุดหนึ่งที่ถูกกำหนดขึ้นโดยไม่มีความคลาดเคลื่อนแต่อย่างใด

y_j เป็นค่าของตัวแปรตามซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรอิสระ $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$ ที่ถูกกำหนดค่าขึ้น

จากความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรดังกล่าวสามารถเขียนตัวแบบทั่วไปของการถดถอยได้ดังนี้

$$y_j = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{ji} + e_j \quad , \quad j=1, 2, \ldots, n$$

หรือเขียนในรูปเวคเตอร์ได้เป็น

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

โดย β เป็นเวคเตอร์ของพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย

และ ε เป็นเวคเตอร์ของความคลาดเคลื่อน ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นเวคเตอร์ศูนย์

ค่าแปรปรวนเป็น $\sigma^2 I$ และมีการแจกแจงเป็นแบบปกติโดย e_i แต่ละตัวเป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ

$$\varepsilon \sim NID(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I)$$

และกำหนดให้ X เป็น $n \times k$ แมทริกซ์ที่มี rank เท่ากับ k เมื่อ $k < n$ นั่นคือตัวแบบการถดถอยดังกล่าวข้างต้นอาจเรียกได้ว่าเป็น general - linear - hypothesis model of full rank

ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย $(\hat{\beta})$ สำหรับกรณีที่มีการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่า β ซึ่งเขียนได้เป็น $H\beta=h$ นั้นโดยการใช้ข้อมูลขนาด n ทดสอบสมมติฐานและประมาณค่า β เมื่อพิจารณาการประมาณค่า Y จะมีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเกิดขึ้นคือ

$M(\theta,\lambda) = \sigma^2\{k-m+mr(\theta,\lambda)+2\theta(1-2r(\theta,\lambda)+S(\theta,\lambda))\}$ ดังแสดงวิธีการคำนวณในหัวข้อ 2.5

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ขนาดตัวอย่างจะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วน โดยมีข้อจำกัดว่าข้อมูลทั้งสองส่วนนั้นมีขนาดเท่ากันเป็นอิสระต่อกันและมีค่าของตัวแปรอิสระชุดเดียวกัน

ให้ T เป็นขนาดของข้อมูลในแต่ละชุด T จะมีค่าเท่ากับ $\frac{n}{2}$ นั่นคือ

$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ เมื่อ X_1 และ X_2 เป็น TXk แมทริกซ์โดย $X_1=X_2$

$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ เมื่อ Y_1 และ Y_2 เป็น TX1 เวคเตอร์

โดยจะใช้ข้อมูล X_1,Y_1 ในการทดสอบสมมติฐาน $H\beta=h$ และใช้ X_2,Y_2 ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย β

3.1 การทดสอบสมมุติฐาน $H\beta = h$ โดยใช้ข้อมูล X_1 และ Y_1

จาก $H_o : H\beta = h$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ U_1 โดย

$$u_1 = \frac{SSE(\hat{\beta}_1) - SSE(b_1)}{m} \div \frac{SSE(b_1)}{T-k} \qquad (3.1.1)$$

เมื่อ b_1 เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีข้อจำกัด ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$(X_1' X_1)^{-1} X_1' Y = L^{-1} X_1' Y_1 \qquad (3.1.2)$$

และ $\hat{\beta}_1$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$b_1 - L^{-1}H' [HL^{-1}H']^{-1} [Hb_1 - h] \qquad (3.1.3)$$

กำหนดให้ $Q_1 = SSE(\hat{\beta}_1) - SSE(b_1)$

ในทำนองเดียวกับการคำนวณในหัวข้อ 2.2 จะได้

$$Q_1 = (Hb_1 - h)' [HL^{-1}H']^{-1} (Hb_1 - h) \qquad (3.1.4)$$

และ $SSE(b_1) = (Y_1 - X_1 b_1)'(Y_1 - X_1 b_1)$

$$= Y_1' [I - X_1 \; L^{-1} X_1'] Y_1 \qquad (3.1.5)$$

แทนค่าใน (3.1.1) จะได้ $u_1 = \dfrac{Q_1}{m\hat{\sigma}_1^2}$ โดย $\hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{SSE(b_1)}{T-k}$

ตัวสถิติ u_1 จะมีการกระจายเป็นแบบ Non-Central F ที่มีพารามิเตอร์เป็น $m, T-k$ และ non-centrality parameter θ_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(H\beta - h)' [HL^{-1} H']^{-1} (H\beta - h)}{2\sigma^2} \qquad (3.1.6)$$

นั่นคือ $u_1 \sim F' (m, T-k, \theta_1)$

พิจารณาภายใต้สมมุติฐานเป็นจริง $H\beta = h$ u_1 จะมีการกระจายเป็นแบบ Central-F ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ $T-k$

ผลของการทดสอบสมมุติฐาน จะยอมรับ $H_0: H\beta = h$ ถ้า $u_1 \geq \lambda_1$ และจะปฏิเสธสมมุติฐานนั้นถ้า $u_1 < \lambda_1$ โดย λ_1 เป็นค่าวิกฤติของการทดสอบที่ได้จากตารางการแจกแจงแบบ F ด้วยองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ $T-k$ ที่ระดับนัยสำคัญ α ที่กำหนดขึ้น

3.2 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย β โดยใช้ข้อมูล X_2 และ Y_2

จากการใช้ข้อมูล X_1 และ Y_1 ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย ผลที่ได้จากการทดสอบสมมุติฐานดังกล่าวทำให้สามารถตัดสินใจได้ว่าจะใช้ตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีข้อจำกัด (b) หรือตัวประมาณแบบมีข้อจำกัด $(\hat{\beta})$ เป็นตัวประมาณที่แท้จริงของสัมประสิทธิ์การถดถอย β กล่าวคือ

$$\beta^* = \begin{cases} b & \text{เมื่อปฏิเสธ } H_0: H\beta = h \text{ หรือ } u_1 \geq \lambda_1 \\ \hat{\beta} & \text{เมื่อยอมรับ } H_0: H\beta = h \text{ หรือ } u_1 < \lambda_1 \end{cases}$$

โดยใช้ข้อมูล X_2 และ Y_2 จะได้ค่าประมาณดังนี้

$$b_2 = (X_2' X_2)^{-1} X_2' Y_2 = Z^{-1} X_2' Y_2 \qquad (3.2.1)$$

$$\text{และ} \quad \hat{\beta}_2 = b_2 - Z^{-1} H' [H Z^{-1} H']^{-1} (H b_2 - h) \qquad (3.2.2)$$

ในที่นี้จะศึกษาการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยโดยพิจารณาจากการประมาณค่า Y แทน ทั้งนี้เพื่อให้การคำนวณสูตรต่าง ๆ ทำได้สะดวกขึ้น

กำหนดให้ Y^* เป็นค่าประมาณของ Y ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$Y^* = X_2 \beta^* = \begin{cases} X_2 b_2 & \text{ถ้า } u_1 \geq \lambda_1 \\ X_2 \hat{\beta}_2 & \text{ถ้า } u_1 < \lambda_1 \end{cases}$$

3.3 การคำนวณค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y^* ที่เกิดขึ้นจากการศึกษาครั้งนี้

กำหนดให้ $W_1 = \{u_1,\ u_1 \geq \lambda_1\}$

และ W_0 เป็น Complement ของเซท W_1 นั่นคือ $W_0 = \{u_1,\ u_1 < \lambda_1\}$

ค่าความน่าจะเป็นของเซท W_1 คือ $P(W_1)$ จะมีค่าดังนี้

$$P(W_1) = \int_{u_1 \geq \lambda_1} f_{u_1}(u_1 ; m, T-k, \theta_1)\, du_1$$

$$= P\{F'(m, T-k; \theta_1) \geq \lambda_1\} \qquad (3.3.1)$$

ซึ่งก็คือความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมติฐาน $H\beta=h$ นั่นเอง

เมื่อ $f_{u_1}(u_1; m, T-k, \theta_1)$ เป็น density function ของ central F ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ T-k และมีค่า non-centrality parameter θ_1 ดังกำหนดค่าใน (3.1.6)

ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เกิดจากการประมาณ Y ด้วย Y* นั้น สามารถเขียนได้เป็น $E(X_2\beta^* - X_2\beta)\ (X_2\beta^* - X_2\beta)'$ ในที่นี้จะพิจารณาจาก trace ของค่าเฉลี่ยดังกล่าวโดยใช้สัญญลักษณ์เป็น $M_1(\theta_1, \lambda_1)$ ซึ่งอาจเรียกได้ว่าเป็นค่ากำลังสองของความเสี่ยง (Quadratic risk function) ของ Y* นั่นคือ

$$M_1(\theta_1, \lambda_1) = E(X_2\beta^* - X_2\beta)'(X_2\beta^* - X_2\beta) \qquad (3.3.2)$$

พิจารณา E(Y*) สามารถเขียนได้เป็น

$$E(Y^*) = E(X_2\beta^*/W_0)\ P(W_0) + E(X_2\beta^*/W_1)\ P(W_1)$$

$$= E(X_2\hat{\beta}_2/W_0)\ P(W_0) + E(X_2b_2/W_1)\ P(W_1)$$

แต่ค่า u_1 ในเซท W_0 และ W_1 นั้นคำนวณโดยใช้ข้อมูลจากตัวอย่างชุดแรกซึ่งเป็นอิสระกับข้อมูลจากตัวอย่างชุดที่สองซึ่งใช้ในการประมาณค่า β

ดังนั้น b_2 และ $\hat{\beta}_2$ จึงเป็นอิสระกับ u_1 นั่นคือ

$$E(Y^*) = E(X_2\hat{\beta}_2)\ P(W_0) + E(X_2b_2)\ P(W_1)$$

ดังนั้นจะสามารถเขียน $M_1(\theta_1, \lambda_1)$ ได้เป็น

$$M_1(\Theta_1, \lambda_1) = E(X_2\beta^* - X_2\beta)'(X_2\beta^* - X_2\beta)$$
$$= E[(X_2\hat{\beta}_2 - X_2\beta)'(X_2\hat{\beta}_2 - X_2\beta)/W_0]\,P(W_0)$$
$$+ E[(X_2b - X_2\beta)'(X_2b - X_2\beta)/W_1]\,P(W_1)$$
$$= E[(\hat{\beta}_2 - \beta)'\,Z(\hat{\beta}_2 - \beta)]\,P(W_0)$$
$$+ E[(b_2 - \beta)'\,Z(b_2 - \beta)]\,P(W_1)$$

จากการแทนค่า $\hat{\beta}_2$ ดังแสดงใน (3.2.2) จะได้ค่า

$$= E\,[(b_2 - \beta - Z^{-1}H'[HZ^{-1}H']^{-1}(Hb_2 - h)]'Z$$
$$(b_2 - \beta - Z^{-1}H'[HZ^{-1}H']^{-1}(Hb_2 - h)]\,P(W_0)$$
$$+ E\,[(b_2 - \beta)'Z(b_2 - \beta)]\,P(W_1) \qquad (3.3.3)$$

จากการกระจายเทอมแรกออกมา จะต้องคำนวณหา expected value ของเทอมต่อไปนี้คือ

(i) $(b_2 - \beta)'\,Z(b_2 - \beta)$

(ii) $-[Hb_2 - h)]'[HZ^{-1}H']^{-1}\;HZ^{-1}Z(b_2 - \beta)$

(iii) $-(b_2 - \beta)'\,ZZ^{-1}H'[HZ^{-1}H']^{-1}\,[Hb_2 - h]$

(iv) $[Hb_2 - h]'[HZ^{-1}H']^{-1}\,HZ^{-1}\,ZZ^{-1}H'[HZ^{-1}H']^{-1}\,[Hb_2 - h]$

จาก (iv) เขียนได้เป็น $[Hb_2 - h]'(HZ^{-1}H')^{-1}\,[Hb_2 - h]$ กำหนดให้เป็นค่าของ Q_2

พิจารณา $H(b_2 - \beta) = (Hb_2 - h) - (H\beta - h)$

ดังนั้น (ii)จะเขียนได้เป็น $-[Hb_2 - h]'[HZ^{-1}H']^{-1}\,[(Hb_2 - h) - (H\beta - h)]$

$$= -Q_2 + [Hb_2 - h]'[HZ^{-1}H']^{-1}[H\beta - h]$$

และจะเห็นว่า (iii) เป็นค่า transpose ของ(ii) แทนค่าใน (3.3.3) จะได้

$$M_1(\theta_1 , \lambda_1) = E\left[(b_2-\beta)'Z(b_2-\beta)\right](P(W_0)+P(W_1))$$
$$+ E\left[-Q_2+[Hb_2-h]'[HZ^{-1}H']^{-1}(H\beta-h)\right]P(W_0)$$
$$+ E\left[-Q_2'+(H\beta-h)'[HZ^{-1}H']^{-1}(Hb_2-h)\right]P(W_0)$$
$$+ E[Q_2]\,P(W_0) \qquad (3.3.4)$$

จากคุณสมบัติของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุด b_2 จะได้ $b_2 \sim N(\beta, Z^{-1}\sigma^2)$ และ $Z=X_2'X_2$ เป็นแมทริกซ์ขนาด kxk ซึ่งมี rank เท่ากับ k

ดังนั้น $E[(b_2-\beta)'Z(b_2-\beta)] = k\sigma^2$

และจาก $Q_2 = (Hb_2-h)'[HZ^{-1}H']^{-1}(Hb_2-h)$ จะได้ว่า $Q_2' = Q_2$

แทนค่าใน (3.3.4) จะได้

$$M_1(\theta_1 , \lambda_1) = k\sigma^2+E\left[(Hb_2-h)'(HZ^{-1}H')^{-1}(H\beta-h)\right]P(W_0)$$
$$+E\left[(H\beta-h)'(HZ^{-1}H')^{-1}(Hb_2-h)\right]P(W_0)-E(Q_2)\,P(W_0) \qquad (3.3.5)$$

<u>คำนวณหา $E(Q_2)$</u>

จากทฤษฎีบทที่ว่า เมื่อ $Y \sim N(\mu, v)$ แล้วจะได้ว่า $Y'BY$ จะมีการแจกแจงเป็นแบบ $\chi'^2(k, \lambda)$ โดย $\lambda= \frac{1}{2}\mu'B\mu$ และ k เป็นค่า rank ของ B ก็ต่อเมื่อ BV เป็น idempotent matrix (Graybill 1961 , หน้า 84)

ในที่นี้จะได้ว่า จาก $b_2 \sim N(\beta, Z^{-1}\sigma^2)$

$$(Hb_2-h) \sim N(H\beta - h , HZ^{-1}H'\sigma^2)$$

และจาก H เป็น mxk แมทริกซ์ที่มี rank เท่ากับ m Z เป็น kxk แมทริกซ์ที่มี rank เท่ากับ k ดังนั้นจะได้ว่า $HZ^{-1}H'$ จะเป็น mxm แมทริกซ์ที่มี rank เท่ากับ m

ดังนั้น $$\frac{Q_2}{\sigma^2} = \frac{(Hb_2-h)'[HZ^{-1}H']^{-1}(Hb_2-h)}{\sigma^2} \sim \chi'^2(m, \theta_2) \qquad (3.3.6)$$

โดย non-centrality parameter θ_2 จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2\sigma^2}(H\beta-h)'$ $(HZ^{-1}H')^{-1}(H\beta-h)$

กำหนดให้ $q_2 = \frac{Q_2}{\sigma^2}$

ดังนั้น $E(q_2) = \int_0^\infty q_2 f(q_2; m, \theta_2)dq_2$ (3.3.8)

โดย $f(q_2; m, \theta_2)$ เป็น density function ของ non-central Chi-Square ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ non-centrality parameter θ_2

ซึ่ง $f(q_2; m, \theta_2) = e^{-\theta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^i}{i!} \frac{e^{-\frac{q_2}{2}} q_2^{i+\frac{m}{2}-1}}{2^{i+\frac{m}{2}} \Gamma(i+\frac{m}{2})}$

เมื่อ $\Gamma(i+\frac{m}{2})$ เป็นฟังก์ชั่นแกมม่า

พิจารณา $q_2 f(q_2; m, \theta_2) = e^{-\theta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^i e^{-\frac{q_2}{2}} q_2^{i+\frac{m+2}{2}-1} 2[i+\frac{m}{2}]}{i!2^{i+\frac{m+2}{2}} \Gamma(i+\frac{m+2}{2})}$

เมื่อ $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ดังนั้นจะได้

$$= 2e^{-\theta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i\theta_2^i e^{-q_2/2} q_2^{i+\frac{m+2}{2}-1}}{i!2^{i+\frac{m+2}{2}} \Gamma(i+\frac{m+2}{2})}$$

$$+ me^{-\theta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^i e^{-q_2/2} q_2^{i+\frac{m+2}{2}-1}}{i!2^{i+\frac{m+2}{2}} \Gamma(i+\frac{m+2}{2})}$$

ให้ $j = i-1$

$$= 2\Theta_2 e^{-\Theta_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Theta_2^{j} e^{-q_2/2} q_2^{j+\frac{m+4}{2}-1}}{j!2^{j+\frac{m+4}{2}} \Gamma(j+\frac{m+4}{2})}$$

$$+ m e^{-\Theta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Theta_2^{i} e^{-q_2/2} q_2^{i+\frac{m+2}{2}-1}}{i!2^{i+\frac{m+2}{2}} \Gamma(i+\frac{m+2}{2})}$$

$$= 2\Theta_2 f(q_2 ; m+4, \Theta_2) + m f(q_2 ; m+2, \Theta_2) \quad (3.3.9)$$

แทนค่าใน (3.3.8) จะได้

$$E(q_2) = \int_0^{\infty} (2\Theta_2 f(q_2 ; m+4, \Theta_2) + mf(q_2 ; m+2, \Theta_2)) dq_2$$

$$= 2\Theta_2 \int_0^{\infty} f(q_2 ; m+4, \Theta_2) dq_2 + m \int_0^{\infty} f(q_2 ; m+2, \Theta_2) dq_2$$

$$= 2\Theta_2 + m$$

นั่นคือ $E(Q_2) = \sigma^2 (m+2\Theta_2)$ (3.3.10)

พิจารณาค่าของ non-centrality parameter Θ_2 ใน (3.3.7) และ Θ_1 ใน (3.1.6)

จาก $\Theta_2 = \dfrac{(H\beta - h)'[HZ^{-1}H']^{-1}(H\beta - h)}{2\sigma^2}$

รู้ว่า

แต่ $Z^{-1} = (X_2' X_2)^{-1} = (X_1' X_1)^{-1} = L^{-1}$ เนื่องจาก $X_1 = X_2$

ดังนั้น $(H\beta - h)'(HZ^{-1}H')^{-1}(H\beta - h)$

$$= (H\beta - h)'(HL^{-1}H')^{-1}(H\beta - h)$$

$$= 2\Theta_1 \sigma^2 \qquad (3.3.11)$$

และจะได้ว่า Θ_1 มีค่าเท่ากับ Θ_2

แทนค่า (3.3.10) และ (3.3.11) ใน (3.3.5) จะได้

$$M_1(\Theta_1,\lambda_1) = k\sigma^2 + (H\beta - h)'(HZ^{-1}H')^{-1}(H\beta - h)\, P(W_0)$$

$$+ (H\beta - h)'(HZ^{-1}H')^{-1}(H\beta - h)\, P(W_0)$$

$$- \sigma^2(m+2\,\Theta_2)\, P(W_0)$$

$$= \sigma^2 \{ k + 4\Theta_1 P(W_0) - (m+2\Theta_1) P(W_0) \}$$

กำหนดให้ $g_1(\Theta_1 , \lambda_1) = P(W_1) = P\{ F'(m, T-k ; \Theta_1) \geqslant \lambda_1\}$

$$M_1(\theta_1,\lambda_1) = \sigma^2\{ k+4\theta_1(1-g_1(\theta_1, \lambda_1))-(m+2\theta_1)(1-g_1(\theta_1, \lambda_1))\}$$

$$= \sigma^2 \{k-m+m\, g_1(\theta_1 , \lambda_1)+2\theta_1(1-g_1(\theta_1, \lambda_1))\}$$

(3.3.12)

3.4 <u>ผลต่างของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง</u>

ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y* ที่เกิดขึ้นจากการใช้ตัวอย่างทั้งหมดที่รวบรวมได้มาประมาณค่า Y และทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าของสัมประสิทธิ์การถดถอย β ดังแสดงในหัวข้อ 2.5 จาก (2.5.9) จะได้

$$M(\theta, \lambda) = \sigma^2 \{k-m+mr(\theta, \lambda)+2\theta(1-2r(\theta , \lambda)+S(\theta, \lambda))\}$$

เมื่อ $r(\Theta,\lambda) = P\{\frac{m+2}{n-k} F'(m+2, n-k ; \Theta) \geqslant \frac{m\lambda}{n-k}\}$

และ $S(\Theta, \lambda) = P\{\frac{m+4}{n-k} F'(m+4, n-k ; \Theta) \geq \frac{m\lambda}{n-k}\}$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y^* ใน (3.3.12) จะได้ผลต่างดังนี้

$$M_1(\Theta_1,\lambda_1) - M(\Theta,\lambda) = \sigma^2\{ m[g_1(\Theta_1,\lambda_1)-r(\Theta,\lambda)]+2\Theta_1(1-g_1(\Theta_1,\lambda_1)) - 2\Theta[1-2r(\Theta,\lambda)+S(\Theta,\lambda)]\} \quad (3.4.1)$$

สำหรับ non-centrality parameter นั้น จะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง Θ และ Θ_1 ได้ดังนี้

จาก (2.2.6) $\Theta = \frac{(H\beta-h)'(HS^{-1}H')^{-1}(H\beta-h)}{2\sigma^2}$ เมื่อ $S = X'X$

และจาก (3.1.6) $\Theta_1 = \frac{(H\beta-h)'(HL^{-1}H')^{-1}(H\beta-h)}{2\sigma^2}$ เมื่อ $L = X_1'X_1$

โดย $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ ซึ่ง $X_1 = X_2$

$$X'X = (X_1' \ X_2')\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_1'X_1 + X_2'X_2 = 2X_1'X_1$$

ดังนั้น $(X'X)^{-1} = \frac{1}{2}(X_1'X_1)^{-1}$

หรือ $S^{-1} = \frac{1}{2}L^{-1}$

นั่นคือ $\Theta = 2\Theta_1$ (3.4.2)

แทนค่าใน (3.4.1) จะได้ผลต่าง

$$M_1(\theta_1,\lambda_1) - M(\theta_1,\lambda) = \sigma^2\{m[g_1'(\theta_1,\lambda_1)-r(\theta_1,\lambda)] +2\theta_1(1-g_1(\theta_1,\lambda_1)) -4\theta_1(1-2r(\theta_1,\lambda)+S(\theta_1,\lambda))\} \quad (3.4.3)$$

3.5 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y^*

ในการศึกษาครั้งนี้จะทำการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์คำนวณค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y^* ในแต่ละกรณีและผลต่างที่เกิดขึ้น เมื่อกำหนดค่าของพารามิเตอร์ต่อไปนี้

1) m องศาแห่งความเป็นอิสระของเศษใน non-central F ratio

2) $T-k$ องศาแห่งความเป็นอิสระของส่วนใน non-central F ratio

3) λ_1, λ ค่าวิกฤตของการทดสอบแบบ F ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ $(m,T-k)$ และ $(m,n-k)$ ตามลำดับ

4) θ_1 non-centrality parameter โดย $\theta_1 \geq 0$

ในการคำนวณและเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง จะกำหนดค่าวิกฤตคือ λ_1 (ซึ่งได้จากตารางการแจกแจงแบบ F ที่ระดับองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ $T-k$) เป็นตัวคงที่สำหรับทั้งสองกรณี ซึ่งการกำหนดเช่นนี้ไม่ได้ทำให้การคำนวณค่าต่างไปจากที่ควรจะเป็นเท่าใดนัก เพราะเมื่อองศาแห่งความเป็นอิสระของส่วนมีค่ามากสำหรับ m ค่าเดียวกัน λ และ λ_1 จะมีค่าใกล้เคียงกันมาก

จากการกำหนดค่าของพารามิเตอร์ดังกล่าวได้คำนวณหาค่าต่อไปนี้คือ

1) ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y^* ที่เกิดขึ้นจากการประมาณค่า Y โดยแบ่งขนาดข้อมูลทั้งหมดออกเป็นสองส่วนให้มีขนาดเท่ากัน เป็นอิสระต่อกัน และมีค่าของตัวแปรอิสระชุดเดียวกัน แล้วใช้ข้อมูลชุดหนึ่งในการทดสอบสมมติฐานอีกชุดหนึ่งในการประมาณค่า ซึ่งมีค่าดังนี้

$$M_1(\theta_1,\lambda_1) = \sigma^2\{k-m+mg_1(\theta_1,\lambda_1)+2\theta_1(1-g_1(\theta_1,\lambda_1))\}$$

เมื่อ $g_1(\theta_1,\lambda_1) = P\{\frac{m}{T-k} F'(m,T-k;\theta_1) \geq \frac{m\lambda}{T-k}\}$

2) ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของY^* ที่เกิดขึ้นจากการใช้ตัวอย่างทั้งหมดที่รวบรวมได้มาประมาณ ค่า Y และทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าของสัมประสิทธิ์การถดถอย β ซึ่งมีค่าดังนี้

$$M(\theta_1, \lambda_1) = \sigma^2 \{k-m+mr(\theta_1, \lambda_1)+4\theta_1(1-2r(\theta_1,\lambda_1) + S(\theta_1, \lambda_1))\}$$

เมื่อ

$$r(\theta_1, \lambda_1) = P\left\{\frac{m+2}{n-k} F'(m+2, n-k ; \theta_1) \geq \frac{m\lambda_1}{n-k}\right\}$$

$$S(\theta_1, \lambda_1) = P\left\{\frac{m+4}{n-k} F'(m+4, n-k ; \theta_1) \geq \frac{m\lambda_1}{n-k}\right\}$$

3) ผลต่างของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ y^* ที่เกิดขึ้นจากข้อ 1) และ 2) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} D &= M_1(\theta_1, \lambda_1) - M(\theta_1, \lambda_1) \\ &= \sigma^2 \{m [g_1(\theta_1, \lambda_1)-r(\theta_1, \lambda_1)] + 2\theta_1 [1-g_1(\theta_1,\lambda_1)] \\ &\quad -4\theta_1[1-2r(\theta_1, \lambda_1)+S(\theta_1, \lambda_1)]\} \end{aligned}$$

การคำนวณหาค่า $g_1(\theta_1,\lambda_1)$, $r(\theta_1,\lambda_1)$ และ $S(\theta_1,\lambda_1)$ นั้น ในการศึกษาครั้งนี้จะใช้วิธีประมาณการแจกแจงแบบ **non-central F** จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้คือ

$$\int_0^F g(u; m, q, \theta)du \approx \int_{-\infty}^{x'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

เมื่อ

$$x' = \frac{\left(\frac{mF}{m+2\theta}\right)^{1/3}\left[1-\frac{2}{9q}\right] - \left[1-\frac{2(m+4\theta)}{9(m+2\theta)^2}\right]}{\left[\frac{2(m+4\theta)}{9(m+2\theta)^2} + \frac{2}{9q}\left(\frac{mF}{m+2\theta}\right)^{2/3}\right]^{1/2}}$$

และ $\int_{-\infty}^{x'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1+ERF(x'/\sqrt{2})}{2}$

เมื่อ ERF(x) เป็น Standard Error Function ซึ่งมีค่าดังนี้

$$ERF(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

ฟอร์แทรนฟังก์ชั่นต่อไปนี้ใช้ในการประมาณ non-central F integrals ตามรูปแบบ $\int_{F'}^{\infty} g(F; m,, q, \theta)dF$ โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังกล่าวแล้วข้างต้น มีรายละเอียดดังนี้คือ

```
      REAL FUNCTION PGNCF*8(F,NUMDF, DENDF, THETA)
      IMPLICIT REAL*8 (A-Z)
      INTEGER NUMDF, DENDF
C
      EVALUATES PROBABILITY OF A GREATER NON-CENTRAL F
C     IF(F.GT.0.DO.AND.NUMDF.GT.0.AND.DENDF.GT.0.AND.THETA.GE.O.DO)GØTØ 5
      PGNCF  =  1.DO
      RETURN
5     N2L    =  NUMDF+2.DO*THETA
      N4L    =  N2L+2.DO*THETA
      T9     =  2.DO/9.DO
      X1     =  (NUMDF*F/N2L)**(1.DO/3.DO)
      X2     =  X1*(1.DO-T9/DENDF)-1.DO+T9*N4L/N2L*N2L)
      X2     =  X2/DSQRT(2.DO*(T9*N4L/N2L*N2L)+T9/DENDF*X1*X1))
      PGNCF  =  .5DO*DERFC(X2)
      RETURN
      END
```

เมื่อ DERFC เป็น Double Precision complemented error function ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1-ERF(X)

4) คำนวณหาค่าของ non-centrality parameter Θ ที่ทำให้ผลต่าง (D) มีค่าเป็นลบ

นั่นคือคำนวณหา Θ_L, Θ_u ซึ่งเป็นค่าต่ำสุดและสูงสุดของ Θ ที่ทำให้ D มีค่าเป็นลบ ซึ่งหมายถึงหาช่วงของค่า Θ ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y* ที่เกิดขึ้นจากกรณีที่เราสนใจศึกษามีค่าต่ำกว่ากรณีเดิมนั่นเอง

3.6 คุณสมบัติที่สำคัญบางประการของ $M_1(\Theta_1, \lambda_1)$ และ $g_1(\Theta_1, \lambda_1)$

เพื่อช่วยในการวิเคราะห์บทที่ 4 ในหัวข้อนี้จะแสดงคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชั่นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y* ที่เกิดขึ้นจากการศึกษาครั้งนี้โดยแยกพิสูจน์เป็นเลมม่าดังต่อไปนี้

<u>เลมม่าที่ 3.6.1</u>

$M_1(\Theta_1, \lambda_1)$ เมื่อ $\lambda_1=0$ จะเป็นฟังก์ชั่นคงที่ของ Θ_1 และเมื่อ $\lambda_1=+\infty$ จะเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นของ Θ_1

<u>พิสูจน์</u>

$$\because M_1(\Theta_1,\lambda_1) = \sigma^2\{ k-m+mg_1(\Theta_1,\lambda_1)+2\Theta_1(1-g_1(\Theta_1,\lambda_1))\} \quad (3.6.1)$$

จากการกำหนดให้ $g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ เป็นค่าความน่าจะเป็นในการปฏิเสธ $H_0:H\beta=h$ ดังแสดงใน (3.3.1) จะเห็นได้ชัดเจนว่า $g_1(\Theta_1, 0)$ จะมีค่าเป็น 1 และ $g_1(\Theta_1, \infty)$ มีค่าเป็น 0 แทนค่าลงใน (3.6.1) จะได้ผลดังนี้ คือ

$$M_1(\Theta_1, 0) = k\sigma^2 \quad (3.6.2)$$

และ
$$M_1(\Theta_1, \infty) = \sigma^2\{ k - m + 2\Theta_1\} \quad (3.6.3)$$

ทั้งนี้จะเห็นว่า $M_1(\theta_1, 0)$ ก็คือค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เกิดขึ้นจากการประมาณ $Y=X_2\beta$ ด้วย $X_2 b_2$ และ $M_1(\theta_1, \infty)$ ก็คือค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เกิดขึ้นจากการประมาณ $Y=X_2\beta$ ด้วย $X_2\hat{\beta}_2$ นั่นเอง

เลมม่าที่ 3.6.2

เมื่อ $\theta_1 = 0$ และสำหรับ λ_1 ในช่วง $(0, +\infty)$, $M_1(\theta_1, \lambda_1)$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง $M_1(\theta_1, \infty)$ และ $M_1(\theta_1, 0)$

นั่นคือ $M_1(0, \infty) < M_1(0, \lambda_1) < M_1(0, 0)$

พิสูจน์ จาก (3.6.1) แทนค่า $\theta_1 = 0$ จะได้

$$M_1(0, \lambda_1) = \sigma^2 \{k-m+mg_1(0, \lambda_1)\}$$

ซึ่งสามารถเห็นได้ชัดเจนว่ามีค่าอยู่ระหว่าง $M_1(0, +\infty) = \sigma^2(k-m)$ และ $M_1(0, 0) = k\sigma^2$

เลมม่าที่ 3.6.3

$M_1(\theta_1, \lambda_1)$ จะมีค่าต่ำสุดเป็น $M_1(\theta_1, +\infty)$ เมื่อ $\theta_1 < \frac{m}{2}$ และเป็น $M_1(\theta_1, 0)$ เมื่อ $\theta_1 \geq \frac{m}{2}$

พิสูจน์

สำหรับ $\theta_1 < \frac{m}{2}$ และ λ_1 ในช่วง $(0, +\infty)$ นั้นจะได้ว่า $0 < g_1(\theta_1, \lambda_1) < 1$

$$M_1(\theta_1, \lambda_1) = \sigma^2\{k-m+mg_1(\theta_1, \lambda_1)+2\theta_1(1-g_1(\theta_1, \lambda_1))\}$$
$$= \sigma^2\{k-m+2\theta_1+g_1(\theta_1, \lambda_1)(m-2\theta_1)\}$$

เมื่อ $\theta_1 < \frac{m}{2}$ จะได้ว่า $(m-2\theta_1) > 0$

ดังนั้น $M_1(\theta_1, \lambda_1) > \sigma^2\{k-m+2\theta_1\} = M_1(\theta_1, \infty)$

เช่นเดียวกันเมื่อ $\theta_1 \geq \frac{m}{2}$ นั่นคือ $(2\theta_1 - m) \geq 0$

จาก $M_1(\theta_1,\lambda_1) = \sigma^2\{k-m+mg_1(\theta_1,\lambda_1)+2\theta_1(1-g(\theta_1,\lambda_1))\}$

$= \sigma^2\{k-m(1-g_1(\theta_1,\lambda_1))+2\theta_1(1-g_1(\theta_1,\lambda_1))\}$

$= \sigma^2\{k+(1-g_1(\theta_1,\lambda_1))(2\theta_1-m)\}$

$> k\sigma^2 = M_1(\theta_1, 0)$

เลมม่าที่ 3.6.4

กราฟของ $M_1(\theta_1,\lambda_1)$ ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $X\beta^*$ จะตัดกับกราฟของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Xb ที่จุด $\theta = \theta_c$ เมื่อ $\theta_c = \frac{m}{2}$ สำหรับค่า λ ใด ๆ ในช่วง $(0, +\infty)$

พิสูจน์

จาก (3.6.1) และ (3.6.2) จะสามารถกำหนดค่า θ_c ได้ดังนี้

$$k\sigma^2 = \sigma^2\{k-m+mg_1(\theta_c,\lambda_1)+2\theta_c(1-g_1(\theta_c,\lambda_1))\}$$

$$\theta_c = \frac{m(1-g_1(\theta_c,\lambda_1))}{2(1-g_1(\theta_c,\lambda_1))} = \frac{m}{2}$$

เลมม่าที่ 3.5.5

เมื่อ θ_1 มีค่ามากเข้าใกล้ค่าอนันต์ $M_1(\theta_1,\lambda_1)$ จะมีค่าเข้าใกล้ $M_1(\theta_1, 0)$

พิสูจน์

จากคุณสมบัติของ $g_1(\theta_1,\lambda_1)$ ที่ว่า $g_1(\theta_1,\lambda_1)$ เป็น increasing function ของ θ_1 (ดังแสดงการพิสูจน์ในเลมม่าที่ 3.6.8) จะได้ว่า

$$\lim_{\theta_1 \to +\infty} g_1(\theta_1,\lambda_1) = 1$$

ดังนั้นจาก $M_1(\theta_1, \lambda_1) = \sigma^2\{k+(1-g_1(\theta_1,\lambda_1))(2\theta_1-m)\}$

จะได้ว่า $M_1(\theta_1, \lambda_1) \longrightarrow k\sigma^2 \quad \theta \to +\infty$

<u>เลมม่าที่ 3.6.6</u> สำหรับ Θ และ λ ในช่วง $(0,+\infty)$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} g_1(\theta_1,\lambda_1) = -g_1(\theta_1,\lambda_1)+r_1(\theta_1,\lambda_1)$$

เมื่อ $r_1(\theta_1,\lambda_1) = P\left[F'(m+2,T-k;\theta_1) \geq \frac{m\lambda_1}{m+2}\right]$

<u>พิสูจน์</u>

จากการกำหนดให้ $g_1(\theta_1,\lambda_1) = P\left[F'(m,T-k;\theta_1) \geq \lambda_1\right]$

$$= \int_{u_1 \geq \lambda_1} f_{u_1}(u_1;m,T-k,\theta_1)\,du_1 \qquad (3.6.4)$$

เมื่อ $f_{u_1}(u_1;m,T-k,\theta_1)$ เป็น density function ของ non-central F ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ T-k

นั่นคือ $u_1 \sim F'(m,T-k;\theta_1)$

ให้ $T = \frac{mu_1}{T-k} = \frac{Q_1}{(T-k)\hat{\sigma}_1^2}$ จากการแทนค่า $\hat{\sigma}_1$ ดังแสดงใน (3.1.6)

จะเห็นว่า t จะเป็นอัตราส่วนของผลบวกของกำลังสองที่เป็นอิสระต่อกัน

ให้ $f_t(t;m,T-k,\theta_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_1^i\, e^{-\theta_1}\, t^{i+\frac{m}{2}-1}}{i!\,B(\frac{m}{2}+i,\ \frac{T-k}{2})(1+t)^{i+\frac{m+T-k}{2}}}$ [3] (3.6.5)

เมื่อ B(p,q) เป็นฟังก์ชั่นเบต้าที่มีพารามิเตอร์เป็น p และ q โดยจะมีค่า

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

นั่นคือ (3.6.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$g_1(\theta_1,\lambda_1) = \int_{t \geq \frac{m\lambda_1}{T-k}} f_t(t;m,T-k,\theta_1)\,dt \qquad (3.6.6)$$

---

[3] Kempthorne, O., <u>The Design and Analysis of Experiments.</u> (New York : John Wiley and sons., Inc., 1967) หน้า 221.

ซึ่งสามารถดิฟเฟอเรนชิเอทได้ต่อเมื่อ $f_t(t;m,T-k,\Theta_1)$ และ $\frac{\partial}{\partial\Theta_1} f_t(t;m,T-k,\Theta_1)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ Θ_1 [4] .

จาก (3.6.5) และ (3.6.7) ดังแสดงต่อไปนี้จะสามารถเห็นได้ชัดเจนว่าเงื่อนไขเป็นจริง ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial\Theta} f_t(t;m,T-k,\Theta_1) = -f_t(t;m,T-k,\Theta_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\Theta_1^{i-1}\, e^{-\Theta_1}\, t^{i+\frac{m}{2}-1}}{i!B(\frac{m}{2}+i,\frac{T-k}{2})(1+t)^{i+\frac{m+T-k}{2}}} \tag{3.6.7}$$

พิจารณาเทอมที่ 2 ใน (3.6.7) เมื่อกำหนดให้ $j=i-1$ จะได้ค่าเท่ากับ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_1^{i-1}\, e^{-\Theta_1}\, t^{i+\frac{m}{2}-1}}{(i-1)!B(\frac{m}{2}+i,\frac{T-k}{2})(1+t)^{i+\frac{m+T-k}{2}}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Theta_1^{j}\, e^{-\Theta_1}\, t^{j+1+\frac{m}{2}-1}}{j!B(\frac{m}{2}+1+j,\frac{T-k}{2})(1+t)^{j+1+\frac{m+T-k}{2}}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Theta_1^{j}\, e^{-\Theta_1}\, t^{j+\frac{m^*}{2}-1}}{j!B(\frac{m^*}{2}+j,\frac{T-k}{2})(1+t)^{j+\frac{m^*+T-k}{2}}} \quad \text{เมื่อ } m^*=m+2$$

$= f_t(t;m+2,T-k,\Theta_1)$ ซึ่งก็คือ density function ของอัตราส่วนของผลบวกของกำลังสองที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น m+2 และ T-k นั่นเอง

4/ Bartle, R.G., The Elements of Real Analysis. (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1964) หน้า 307

แทนค่าใน (3.6.7) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial\Theta_1} f_t(t;m,T-k,\Theta_1) = -f_t(t;m,T-k,\Theta_1)+f_t(t;m+2,T-k,\Theta_1) \quad (3.6.8)$$

ให้ $$r_1(\Theta_1,\lambda_1) = \int_{t\geq\frac{m\lambda_1}{T-k}} f_t(t;m+2,T-k,\Theta_1)dt$$

$$= P\{\frac{m+2}{T-k} F'(m+2,T-k,\Theta_1)\geq\frac{m\lambda_1}{T-k}\}$$

เพื่อการเปรียบเทียบสามารถเขียน $g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ ได้เป็น

$$g_1(\Theta_1,\lambda_1)= P\{\frac{m}{T-k} F'(m;T-k,\Theta_1)\geq\frac{m\lambda_1}{T-k}\}$$

จากนิยามของ $r_1(\Theta_1,\lambda_1)$ และจาก (3.6.8) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial\Theta_1} g_1(\Theta_1,\lambda_1) = -g_1(\Theta_1,\lambda_1)+r_1(\Theta_1,\lambda_1)$$

เลมม่าที่ 3.6.7

สำหรับ Θ_1 และ λ_1 ในช่วง $(0,\infty)$ ใด ๆ $g_1(\Theta_1,\lambda_1)<r_1(\Theta_1,\lambda_1)$

พิสูจน์

โดยการแปลง $g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ และ $r_1(\Theta_1,\lambda_1)$ ซึ่งอยู่ในรูป non-central F function ให้อยู่ในรูป Incomplete Beta Function จะได้ผลดังนี้

$$g_1(\Theta_1,\lambda_1) = P[F'(m,T-k;\Theta_1) \geq \lambda_1]$$

$$= 1-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\Theta_1}\Theta_1^j}{j!} I_{Y_1}(\frac{m}{2}+j,\frac{T-k}{2})$$

และ $r_1(\Theta_1,\lambda_1) = P\left[F'(m+2,T-k;\Theta_1) \geq \frac{m\lambda_1}{m+2}\right]$

$$= 1-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\Theta_1}\,\Theta_1^{\,j}}{j!}\; I_{Y_1}\left(\frac{m}{2}+1+j,\frac{T-k}{2}\right)$$

เมื่อ $Y_1 = \frac{m\lambda_1}{m\lambda_1+T-k}$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$r_1(\Theta_1,\lambda_1)-g_1(\Theta_1,\lambda_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\Theta_1}\,\Theta_1^{\,j}}{j!}\left[I_{Y_1}\left(\frac{m}{2}+j,\frac{T-k}{2}\right)-I_{Y_1}\left(\frac{m}{2}+1+j,\frac{T-k}{2}\right)\right] \quad (3.6.9)$$

จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$I_Y(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}\, Y^p(1-Y)^q + I_Y(p+1,q)$$ [5]

หรือ $$I_Y(p,q)-I_Y(p+1,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}\, Y^p(1-Y)^q$$

แทนค่าใน (3.6.9) จะได้

$$r_1(\Theta_1,\lambda_1)-g_1(\Theta_1,\lambda_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\Theta_1}\,\Theta_1^{\,j}}{j!}\; \frac{\Gamma\left(\frac{m+2j+T-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2+2j}{2}\right)\Gamma\left(\frac{T-k}{2}\right)}$$

$$Y^{\frac{m+2j}{2}}\,(1-Y)^{\frac{T-k}{2}}$$

5/ Jordan, K., Calculus of Finite Differences. (New York: Chelsea Publishing Company, 1962) หน้า 84.

ซึ่งมีค่ามากกว่า 0 เนื่องจาก Y มีค่าอยู่ภายในช่วง (0,1)

ดังนั้นจะได้ว่า $g_1(\Theta_1,\lambda_1) < r_1(\Theta_1,\lambda_1)$

<u>เลมม่าที่ 3.6.8</u>

สำหรับ Θ_1,λ_1 ในช่วง $(0,+\infty)$, $g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ จะเป็น decreasing function ของ λ_1 แต่เป็น increasing function ของ Θ_1

<u>พิสูจน์</u>

จาก $g_1(\Theta_1,\lambda_1) = P[F'(m,T-k;\Theta_1)\geq\lambda_1]$

ตามนิยามของ $g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ สามารถเห็นได้ชัดเจนว่า เมื่อ λ_1 มีค่าเพิ่มขึ้น $g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ จะมีค่าลดลง

จากเลมม่าที่ 3.6.5 และ 3.6.6 ได้แสดงแล้วว่า

$$\frac{\partial}{\partial\Theta_1}g_1(\Theta_1,\lambda_1) = -g_1(\Theta_1,\lambda_1)+r_1(\Theta_1,\lambda_1)$$

และ $g_1(\Theta_1,\lambda_1)<r_1(\Theta_1,\lambda_1)$

ดังนั้น $\frac{\partial}{\partial\Theta_1}g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ จะมีค่าเป็นบวก

นั่นคือ $g_1(\Theta_1,\lambda_1)$ จะเป็น increasing function ของ Θ_1