บทที่ ๓

การวิเคราะห์ข้อมูล และการประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter) ที่เกี่ยวข้อง

๓.๑ การเก็บข้อมูล

ข้อมูลเก็บจากกรมการบินพลเรือน และใช้ข้อมูลในรอบ ๗ วัน เท่านั้น คือเริ่มเก็บตั้งแต่วันที่ ๑๘ – ๒๔ ต.ค.๑๔ ข้อมูลที่ได้นี้ถือว่าเป็นตัวแทนที่ดีของข้อมูลทั้งหมดได้ก็เพราะสายการบินต่าง ๆ จะมีตารางปฏิบัติเกี่ยวกับการบินในแต่ละรอบสัปดาห์อยู่แล้ว จำนวนเครื่องบินที่ขอใช้บริการของหอบังคับการบินอาจผิดกันไปบ้างในแต่ละรอบสัปดาห์ จะขึ้นอยู่กับเครื่องบินจรอื่นๆ ซึ่งมีจำนวนไม่มากนัก

การเก็บข้อมูลในช่วงเวลานี้ จะได้ข้อมูลที่ปกติมากที่สุด จากสถิติของกรมการบินพลเรือน เมื่อปีที่แล้วในช่วงเวลาเดียวกัน จำนวนเครื่องบินที่ขอใช้บริการของหอจะมากกว่าปีนี้ ทั้งนี้ ก็เพราะว่ากำลังทางอากาศของสหรัฐ ได้มาอาศัยสนามบินดอนเมืองเพื่อปฏิบัติการรบส่วนหนึ่ง ทำให้การจราจรทางอากาศคับคั่ง และประสพปัญหาอื่นอีกมาก เมื่อสหรัฐถอนกำลังทางอากาศส่วนนี้ออกไป ทำให้การจราจรทางอากาศบริเวณสนามบินดอนเมืองลดความคับคั่งลงไปบ้าง แต่ก็ยังมีปัญหาอื่น ๆ อีกที่ส่งผลกระทบกระเทือนในด้านความคับคั่งของ บ.เหนือสนามบินดอนเมือง เช่น การสู้รบระหว่างอินเดียกับปากีสถาน เครื่องบินที่เคยใช้สนามบินของประเทศทั้งสองไม่ได้รับความสะดวก จึงพยายามมาใช้บริการของสนามบินกรุงเทพ ฯ มากขึ้น ก็เป็นสาเหตุอันหนึ่งที่ทำให้เกิดการจราจรทางอากาศคับคั่ง ติดต่อกันตลอดเวลาแต่ก็เป็นช่วงที่เกิดจากการผิดปกติเท่านั้น

จากข้อมูลจริง ๆ ที่แสดงไว้ในตารางที่ ๒ เป็นข้อมูลที่เก็บจากระยะของเครื่องบินที่เข้ามาในรัศมี ๒๕ ไมล์ โดยรอบ (apraoch control) เครื่องบิเหล่านี้ได้รับการส่งต่อมาจากวิทยุการบินต่างประเทศที่ทุ่งมหาเมฆ จึงเห็นได้ว่าในระยะควบคุมของหอบังคับการบินเครื่องบินจะติดต่อกับหอเพื่อขอลงสนามตลอดเวลา จึงถือว่าเป็น discrete – state continuous time และถ้าหากเครื่องบินเข้ามามากในชั่วโมงที่คับคั่งที่สุด ก็จะต้องมาบินวกวนเหนือที่แห่งหนึ่งที่กำหนดไว้เช่นที่รังสิต (ใช้ลำคลื่นวิทยุกำหนด) ในระยะสูงต่าง ๆ

กัน ตั้งแต่ ๓๐๐๐ – ๖๐๐๐ ฟุต ในการวิเคราะห์ข้อมูลนี้ได้ถือเอาจำนวนเครื่องบินที่บินเข้ามาเพื่อขอลงสนามเท่านั้น จะยังไม่รวมถึงเครื่องบินที่ต้องการบินขึ้นเพราะมีขบวนการที่ขอใช้บริการของหอแตกต่างกัน แต่อย่างไรก็ตามก็จะมีผลเกี่ยวพันกัน เพราะเมื่อมีเครื่องบินขออนุญาตจากหอเพื่อวิ่งขึ้น เครื่องบินที่จะขอลงก็ต้องบินวนรอ (stack) ทำให้เกิดคิวยาวขึ้น ข้อมูลที่เก็บได้นี้จะแบ่งเป็นช่วงเวลา ช่วงละ ๑ ช.ม. ใน ๑ วัน แบ่งออกเป็น ๒๔ ช่วง จนครบรอบ ๗ วัน เพื่อหาค่าเฉลี่ยของจำนวนเครื่องบินแต่ละช่วง แล้วนำมาหาเวลาที่เครื่องบินเข้ามาห่างกันกี่นาที (interarrival time) เพื่อจะดูความน่าจะเป็น (probability) ของเครื่องบินที่บินเข้ามาในเวลาที่น้อยที่สุด และนานที่สุด และเมื่อนำเอาความน่าจะเป็นสะสม (accumulative prob.) มาเขียนโค้งระหว่างความน่าจะเป็นสะสมกับ ช่วงเวลาก็จะได้ distribution ของความน่าจะเป็น ซึ่งจะนำไปใช้กับ model ที่กล่าวไว้ในบทที่ ๒

ตารางที่ ๒ จะแสดงถึงจำนวนข้อมูลของเครื่องบินที่บินเข้าสู่สนามตั้งแต่เวลา ๐๘๐๐–๐๘๐๐ ของวันรุ่งขึ้นในวันที่ ๑๘ – ๒๔ ต.ค.๑๔

ถ้านับจำนวนเครื่องบินจากตารางที่ ๒ จะปรากฏผลดังนี้

ในช่วง ๑ ช.ม. มีเครื่องบินเข้ามาจำนวน ๑๕ เครื่อง, ๑๔ เครื่อง และ ๑๓ เครื่อง อย่างละหนึ่งครั้ง ซึ่งเป็นช่วงที่มี interarrival time เฉลี่ยสั้นที่สุด ส่วน inter–arrival time ที่ยาวที่สุด คือ ใน ๑ ช.ม. มีเครื่องบินเข้ามา ๑ เครื่อง มีจำนวน ๘ ครั้ง

ตารางที่ ๒ แสดงเครื่องบินเข้าในรอบ ๒๔ ช.ม.

วัน / เวลา	วันที่ ๑๘ – ๒๔ ต.ค. ๑๔							รวมใน รอบ๗วัน	จำนวน เฉลี่ย
	๑๘	๑๙	๒๐	๒๑	๒๒	๒๓	๒๔		
๐๘๐๐ – ๐๙๐๐	๖	๘	๔	๖	๕	๔	๖	๓๙	๕.๕๗
๐๙๐๐ – ๑๐๐๐	๑๑	๗	๑๒	๘	๗	๖	๔	๕๕	๗.๘๕
๑๐๐๐ – ๑๑๐๐	๑๔	๕	๗	๑๐	๙	๘	๕	๕๘	๘.๒๘
๑๑๐๐ – ๑๒๐๐	๑๕	๑๓	๕	๗	๙	๖	๔	๕๙	๘.๔๒
๑๒๐๐ – ๑๓๐๐	๖	๗	๑๑	๘	๕	๔	๓	๔๔	๖.๒๘
๑๓๐๐ – ๑๔๐๐	๖	๕	๗	๙	๖	๓	๔	๔๐	๕.๗๑
๑๔๐๐ – ๑๕๐๐	๑๐	๖	๔	๕	๖	๕	๔	๔๐	๕.๗๑
๑๕๐๐ – ๑๖๐๐	๘	๗	๔	๘	๗	๔	๖	๔๔	๖.๒๘
๑๖๐๐ – ๑๗๐๐	๗	๖	๖	๗	๔	๕	๓	๓๘	๕.๔๒
๑๗๐๐ – ๑๘๐๐	๕	๘	๕	๓	๖	๕	๒	๓๔	๔.๘๕
๑๘๐๐ – ๑๙๐๐	๓	๕	๒	๓	๔	๒	๕	๒๔	๓.๔๒
๑๙๐๐ – ๒๐๐๐	๕	๒	๔	๒	๕	๔	๓	๒๕	๓.๕๗
๒๐๐๐ – ๒๑๐๐	๔	๓	๕	๔	๔	๓	๒	๒๕	๓.๕๗
๒๑๐๐ – ๒๒๐๐	๓	๔	๒	๕	๔	๔	๓	๒๕	๓.๕๗
๒๒๐๐ – ๒๓๐๐	๔	๓	๑	๕	๔	๓	๑	๒๑	๓.๐๐
๒๓๐๐ – ๒๔๐๐	๕	๒	๔	๓	๓	๔	๑	๒๒	๓.๑๔
๒๔๐๐ – ๐๑๐๐	๒	๔	๑	๒	๐	๑	๒	๑๒	๑.๗๑
๐๑๐๐ – ๐๒๐๐	๑	๐	๐	๑	๑	๐	๐	๓	๐.๔๒
๐๒๐๐ – ๐๓๐๐	๐	๐	๑	๐	๑	๐	๐	๒	๐.๒๘
๐๓๐๐ – ๐๔๐๐	๐	๐	๐	๑	๐	๐	๑	๒	๐.๒๘
๐๔๐๐ – ๐๕๐๐	๑	๐	๐	๑	๑	๐	๐	๓	๐.๔๒
๐๕๐๐ – ๐๖๐๐	๐	๑	๐	๐	๐	๐	๑	๒	๐.๒๘
๐๖๐๐ – ๐๗๐๐	๓	๑	๒	๒	๑	๐	๐	๙	๑.๒๘
๐๗๐๐ – ๐๘๐๐	๓	๓	๑	๒	๓	๓	๓	๑๗	๒.๔๒
รวม	๑๒๒	๑๐๐	๘๘	๑๐๒	๙๕	๗๔	๖๒	๖๔๓	๙๑.๘๕

ตารางที่ ๓ แสดงการหาความน่าจะเป็นของ interarrival time

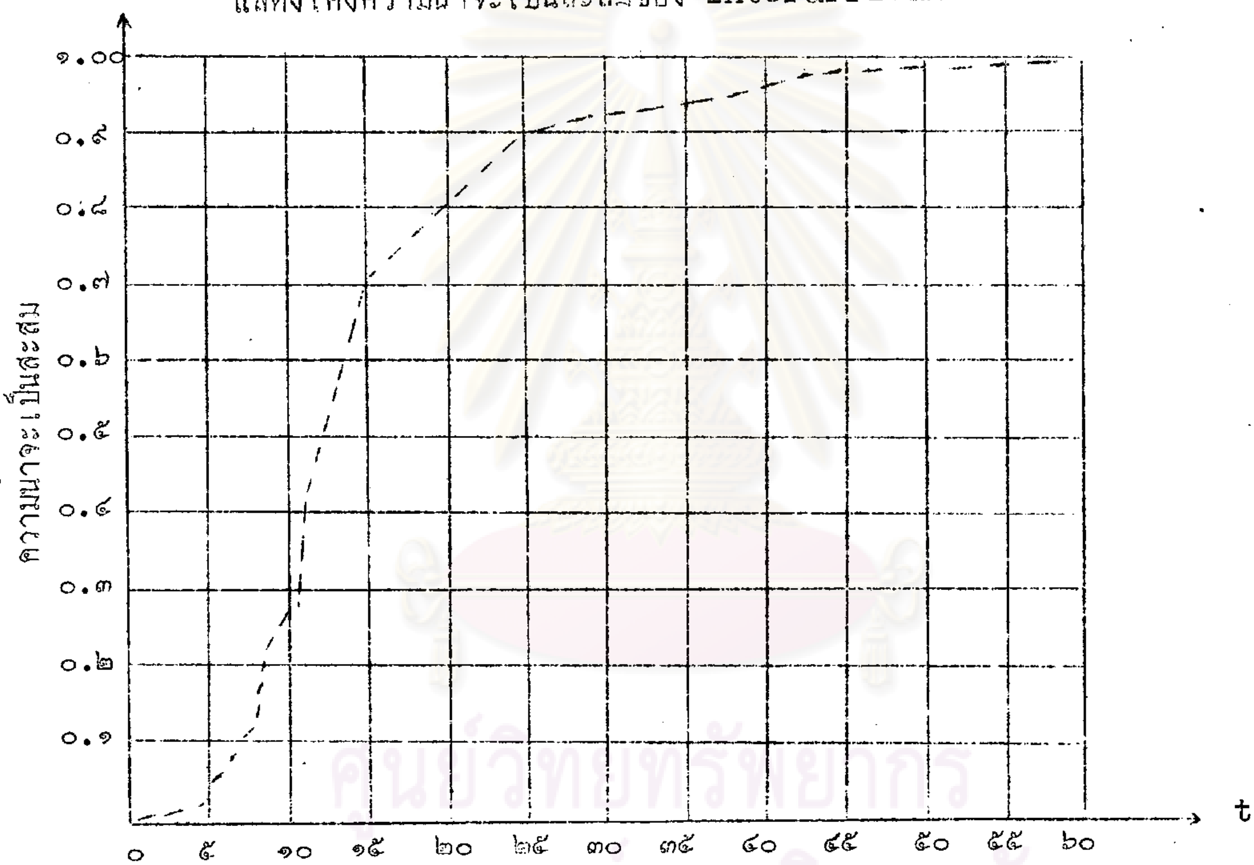
จำนวน ป. ในแตละชวง ๑ ช.ม.	interarrival time (min.)	ความถี่	ความถี่สะสม	ความน่าจะเป็นสะสม
๑๕	๖๐/๑๕ = ๔.๐	๑	๑	๐.๐๐
๑๔	๖๐/๑๔ = ๔.๓	๑	๒	๐.๐๑
๑๓	๖๐/๑๓ = ๔.๖	๑	๓	๐.๐๒
๑๒	๖๐/๑๒ = ๕.๐	๑	๔	๐.๐๓
๑๑	๖๐/๑๑ = ๕.๔	๒	๖	๐.๐๕
๑๐	๖๐/๑๐ = ๖.๐	๒	๘	๐.๐๖
๙	๖๐/๙ = ๖.๖	๓	๑๑	๐.๐๘
๘	๖๐/๘ = ๗.๕	๗	๑๘	๐.๑๓
๗	๖๐/๗ = ๘.๕	๑๐	๒๘	๐.๒๑
๖	๖๐/๖ = ๑๐.๐	๑๔	๔๒	๐.๓๒
๕	๖๐/๕ = ๑๒.๐	๒๐	๖๒	๐.๔๗
๔	๖๐/๔ = ๑๕.๐	๒๕	๘๗	๐.๖๗
๓	๖๐/๓ = ๒๐.๐	๒๐	๑๐๗	๐.๘๒
๒	๖๐/๒ = ๓๐.๐	๑๕	๑๒๒	๐.๙๓
๑	๖๐/๑ = ๖๐.๐	๘	๑๓๐	๑.๐๐

นำเอาค่า interarrival กับความน่าจะเป็นสะสม จากตารางที่ ๓ มาเขียนโค้ง จะได้โค้งของ exponential ดังในกราฟเลขที่ ๗

จากกราฟเลขที่ ๗ แสดงให้เห็นว่าโค้งของความน่าจะเป็นของเครื่องบินที่เข้ามาในแต่ละ inter-arrival time จะมีลักษณะเป็นเอ็กโพเนียนเชียล คือมีความน่าจะเป็น

กราฟเลขที่ ๗

แสดงโค้งความน่าจะเป็นสะสมของ interarrival time



$$P_n(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่ไม่มีเครื่องบินเข้ามาถึง

$$P_o(t) = 1 - P_n(t)$$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda t})$$

$$= e^{-\lambda t}$$

๓.๑.๑ จากทฤษฎีของ Pure Birth Process คือสมมุติว่ามีเครื่องบินต้องการใช้บริการของหอบังคับการบินเข้ามาเรื่อย ๆ จึงเท่ากับมีหน่วยมาเพิ่มแต่อย่างเดียว การบริการ (service time) ไม่มีคือ $\mu = 0$ และจาก model จะได้

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

นั่นคือ เมื่อ $t = 0$ state P_o $n = 0$

$$P_o(0) = 1$$

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = \lambda P_o(t) - \lambda P_1(t)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} P_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda P_o(t)$$

$$= \lambda e^{-\lambda t}$$

เนื่องจากเป็น function ของเวลา จึงใช้ Laplace Transform ได้ ดังนี้

$$\left\{ S\, P_1(S) - \cancel{P_1(0)}^{\,0} \right\} + \lambda P_1(S) = \frac{\lambda}{S+\lambda}$$

$$P_1(S) \left\{ S + \lambda \right\} = \frac{\lambda}{S+\lambda}$$

$$P_1(S) = \frac{\lambda}{(S+\lambda)(S+\lambda)}$$

$$= \frac{\lambda}{(S+\lambda)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} P_1(S) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\lambda}{(S+\lambda)^2} \right]$$

$$P_1(t) = \lambda . \, t\, e^{-\lambda t}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $n = 2$ แทนใน model จะได้

$$\frac{d}{dt} P_2(t) = \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_2(t) + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$
$$= \lambda . \lambda_t e^{-\lambda t}$$
$$= \lambda^2 . t e^{-\lambda t}.$$

ใช้ Laplace Transform สมการข้างบน จะได้

$$\left\{S P_2(S) + \lambda P_2(S)\right\} = \frac{\lambda^2}{2!(S+\lambda)^2}$$

$$\therefore \quad P_2(S)\left[S+\lambda\right] = \frac{\lambda^2}{2!(S+\lambda)^2}$$

$$P_2(S) = \frac{\lambda^2}{2!(S+\lambda)^3}$$

เมื่อ inverse Laplace Transform จะได้

$$P_2(t) = \frac{\lambda^2 . t^2 e^{-\lambda t}}{2!}$$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถจะหา $P_n(t)$ ได้คือ

$$P_n(t) = \frac{(\lambda . t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

ซึ่งจะเป็น Poisson process นั่นเอง จึงกล่าวได้ว่า distribution ของเครื่องบินที่ต้องการใช้บริการของหอบังคับการบิน มีลักษณะเป็น Poisson distribution และถ้าแบ่งช่วงเวลาในรอบ ๑ วัน ออกเป็นช่วงละ ๑ ช.ม. จะหาค่าเฉลี่ยได้ดังนี้คือ

(t = ๑ ช.ม.)

๓.๑.๒ ค่าเฉลี่ยของเครื่องบินที่เข้ามา (λ)

$$E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(n, \lambda)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n . \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} . e^{-\lambda}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y} - e^{-\lambda}}{y!} \text{, เมื่อ } y = n-1$$

$$= \lambda$$

จากตารางที่ ๒ จะเห็นว่าปริมาณเครื่องบินที่เข้ามาจะมีปริมาณมากเป็นห้วง ๆ เช่นเวลา ๑๐๐๐ – ๑๑๐๐ และ ๑๓๐๐ – ๑๕๐๐ เป็นต้น ส่วนในตอนกลางคืนปริมาณเครื่องบินจะลดน้อยลง โดยเฉพาะช่วงเวลาจาก ๐๑๐๐ – ๐๕๐๐ จะมีปริมาณ บ.น้อยมาก ในช่วงนี้จึงอาจละทิ้งได้ โดยความเป็นจริงแล้วในช่วงเวลานี้มักจะมี บ.วิ่งขึ้นแทน จึงทำให้การขอใช้บริการของหอบังคับการบินมีต่อเนื่องกันตลอดเวลา

จากตารางที่ ๒ ถ้านับจำนวนเครื่อง บ.ที่บินเข้าสู่สนามบิน จาก ๐๖๐๐ – ๐๑๐๐ (ช่วง ๐๒๐๐ – ๐๕๐๐ มี บ.เข้ามาน้อยมาก ดูจากช่วงเฉลี่ยในรอบ ๗ วัน) จะเห็นว่าในช่วง ๑ ช.ม. ไม่มีเครื่องบินเข้ามาเลย มี ๓ ครั้ง, มีเข้ามา ๑ เครื่อง ๘ ครั้ง, ๒ เครื่อง ๑๕ ครั้ง ฯลฯ เมื่อนำเอาค่าเหล่านี้มาสร้างตารางจะได้ตารางที่ ๔

จากตารางที่ ๔ นำเอาผลรวมในช่วง $t_i \; x_i$ และความถี่สะสมมาหาค่าประมาณของ parameter (λ) คือ [๑]

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=0}^{15} t_i \; x_i}{N}$$

$$= \frac{631}{133}$$

$$\simeq 4.7 \quad \text{เครื่อง/ช.ม.}$$

---

๑ Emanuel Parzen, Modern Probability Theory and its Applications, (New York : John Wiley & Sons, Inc., 1960) p.256

ตารางที่ ๔ แสดงการหาค่าประมาณของ
จำนวน บ. ใน ๑ ช.ม. (λ)

จำนวน บ.ในแต่ละช่วง ๑ ช.ม. (t_i)	ความถี่ของแต่ละช่วง (x_i)	ความถี่สะสม (N)	$x_i \quad t_i$
๐	๓	๓	๐
๑	๘	๑๑	๘
๒	๑๕	๒๖	๓๐
๓	๒๐	๔๖	๖๐
๔	๒๕	๗๑	๑๐๐
๕	๒๐	๙๑	๑๐๐
๖	๑๔	๑๐๕	๘๔
๗	๑๐	๑๑๕	๗๐
๘	๗	๑๒๒	๕๖
๙	๓	๑๒๕	๒๗
๑๐	๒	๑๒๗	๒๐
๑๑	๒	๑๒๙	๒๒
๑๒	๑	๑๓๐	๑๒
๑๓	๑	๑๓๑	๑๓
๑๔	๑	๑๓๒	๑๔
๑๕	๑	๑๓๓	๑๕
รวม		๑๓๓	๖๓๑

เนื่องจากค่าประมาณ $\hat{\lambda}$ อาจมีหลายค่า แต่ค่าที่ต้องการนั้นจะต้องเป็น sufficient statistic ของ λ และเป็นค่าประมาณที่เที่ยง (unbiased estimator) ซึ่งมี variance น้อยที่สุด (minimum variance unbiased estimator for λ = M V E)

๓.๑.๓ <u>การพิสูจน์ว่าค่าประมาณ $\hat{\lambda}$ เป็น M V E</u>

เนื่องจากการเข้ามาของเครื่องบิน (arrival) ณ ท่าอากาศยานกรุงเทพ ฯ มีลักษณะเป็น ปัวซอง โปรเสส (Poisson Process) ซึ่งมีความน่าจะเป็นคือ

(เมื่อ interval t = 1) $$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$\therefore \quad P_n(t) = e^{-\lambda + \ln \lambda^n - \ln n!}$$

$$= e^{-\lambda + n \ln\lambda - \ln n!}$$

จาก exponential class คือ

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{P(\theta)K(x)+S(x)+q(\theta)}, & a < x < b \\ 0, & \text{else where} \end{cases}$$

ในที่นี้

$$P(\theta) = \ln\lambda$$

$$K(x) = n$$

$$S(x) = -\ln n!$$

$$q(\theta) = -\lambda$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{l} K(x) = \sum_{i=1}^{l} n_i$$

เป็น complete suff. state ของ λ

ให้ $$y = \sum_{i=1}^{l} n_i$$

$$E(y) = E\left[\sum_{i=1}^{l} n_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{l} E(n_i)$$

$$= l\lambda$$

$$\therefore \quad \lambda = E\left(\frac{y}{l}\right) = E\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{l}\right]$$

$\therefore \quad \dfrac{\sum_{i=1}^{l} n_i}{l}$ เป็น minimum variance unbiased estimator ของ λ

แต่ $$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{l} n_i}{l}$$

$\therefore \hat{\lambda}$ จึงเป็น M V E ของ λ

ถ้านำค่าประมาณของ λ ซึ่งประมาณด้วย $\hat{\lambda}$ ไปแทน ใน Poisson distribution ก็จะได้ความน่าจะเป็นตามทฤษฎี เช่น

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$n = 0 , \quad \lambda = 4.7$$

$$P_0(t) = e^{-4.7} = 0.0091$$

$$n = 1 , \quad \lambda = 4.7$$

$$P_1(t) = \frac{e^{-4.7}\,4.7}{1!} = 0.0091 \times 4.7$$

$$= 0.0427$$

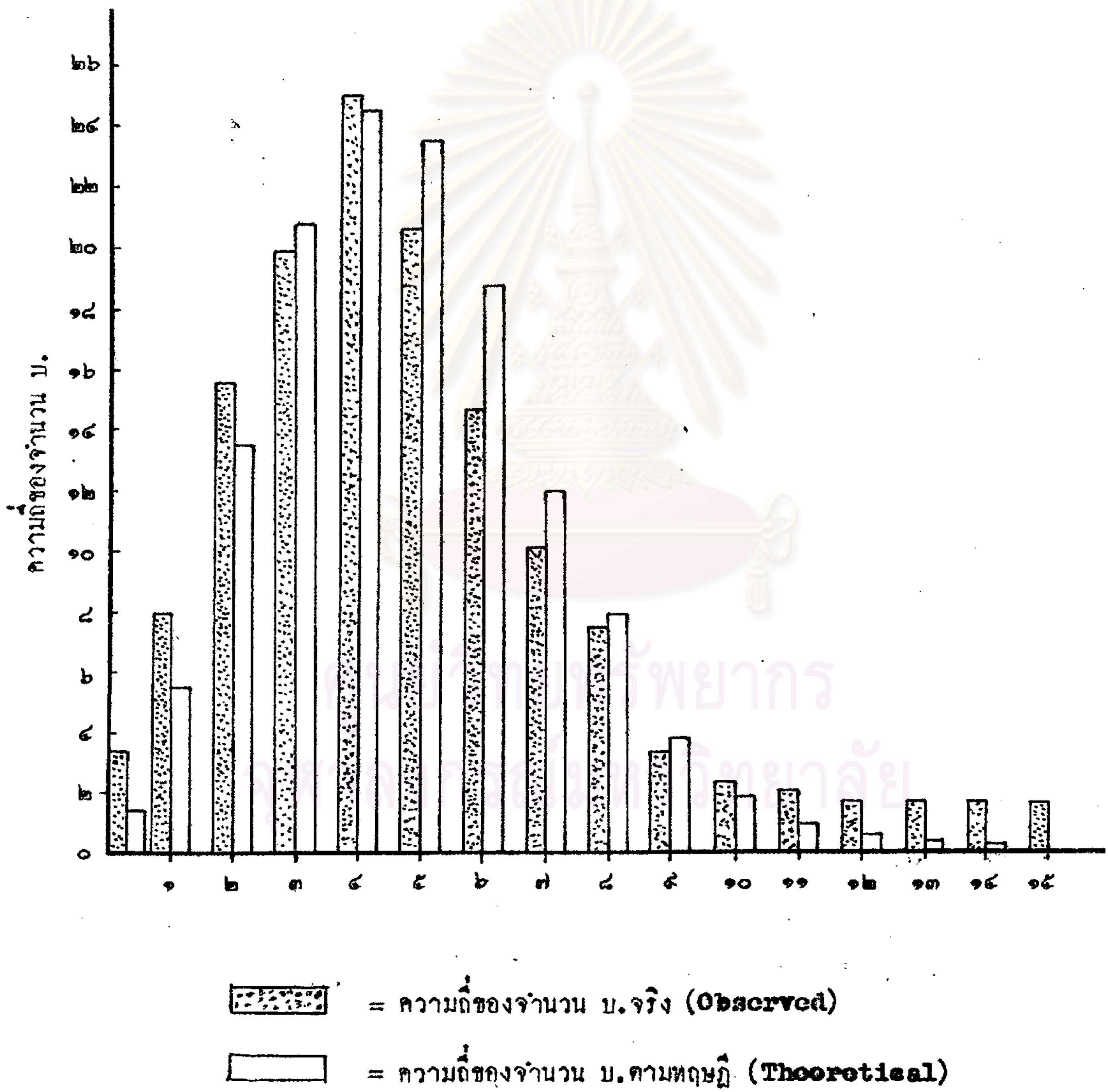
จากค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎี ก็สามารถหาจำนวน ข.ตามทฤษฎีได้คือ จำนวน ข.ตามทฤษฎี = ความถี่สะสม x ความน่าจะเป็น, นำค่าเหล่านี้มาสร้างตารางได้ตามตารางที่ ๕

ตารางที่ ๕ แสดงการเปรียบเทียบจำนวน บ.จริง กับจำนวน บ.ทางทฤษฎี

จำนวน บ. ในแต่ละช่วง ๑ช.ม.	ความถี่ในแต่ละช่วง๑ช.ม.	ความถี่สะสม	ความน่าจะเป็น	ความน่าจะเป็นสะสม	ค่าตาม Poisson (λ=๔.๗)	จำนวน บ. ทางทฤษฎี	ความน่าจะเป็นสะสมตามทฤษฎี
๐	๓	๓	๐.๐๒	๐.๐๒	๐.๐๐๙๑	๑.๒๑	๐.๐๑
๑	๘	๑๑	๐.๐๖	๐.๐๘	๐.๐๔๒๗	๕.๖๘	๐.๐๕
๒	๑๕	๒๖	๐.๑๑	๐.๑๙	๐.๑๐๐๓	๑๓.๓๔	๐.๑๕
๓	๒๐	๔๖	๐.๑๕	๐.๓๔	๐.๑๕๗๑	๒๐.๘๙	๐.๓๐
๔	๒๕	๗๑	๐.๑๘	๐.๕๓	๐.๑๘๔๕	๒๔.๕๔	๐.๔๙
๕	๒๐	๙๑	๐.๑๕	๐.๖๘	๐.๑๗๓๔	๒๓.๐๖	๐.๖๗
๖	๑๔	๑๐๕	๐.๑๐	๐.๗๘	๐.๑๓๕๘	๑๘.๐๖	๐.๘๐
๗	๑๐	๑๑๕	๐.๐๘	๐.๘๖	๐.๐๙๑๑	๑๒.๑๒	๐.๘๙
๘	๗	๑๒๒	๐.๐๕	๐.๙๑	๐.๐๕๓๕	๗.๑๒	๐.๙๕
๙	๓	๑๒๕	๐.๐๒	๐.๙๓	๐.๐๒๗๙	๓.๗๑	๐.๙๗
๑๐	๒	๑๒๗	๐.๐๒	๐.๙๕	๐.๐๑๓๑	๑.๗๔	๐.๙๘
๑๑	๒	๑๒๙	๐.๐๑	๐.๙๖	๐.๐๐๕๕	๐.๗๓	๐.๙๙
๑๒	๑	๑๓๐	๐.๐๑	๐.๙๗	๐.๐๐๒๑	๐.๒๘	๐.๙๙๖
๑๓	๑	๑๓๑	๐.๐๑	๐.๙๘	๐.๐๐๐๗	๐.๐๙	๐.๙๙๘
๑๔	๑	๑๓๒	๐.๐๑	๐.๙๙	๐.๐๐๐๒	๐.๐๒	๑.๐๐
๑๕	๑	๑๓๓	๐.๐๑	๑.๐๐	๐.๐๐๐๐	๐.๐๐	๑.๐๐

กราฟเลขที่ ๘๐

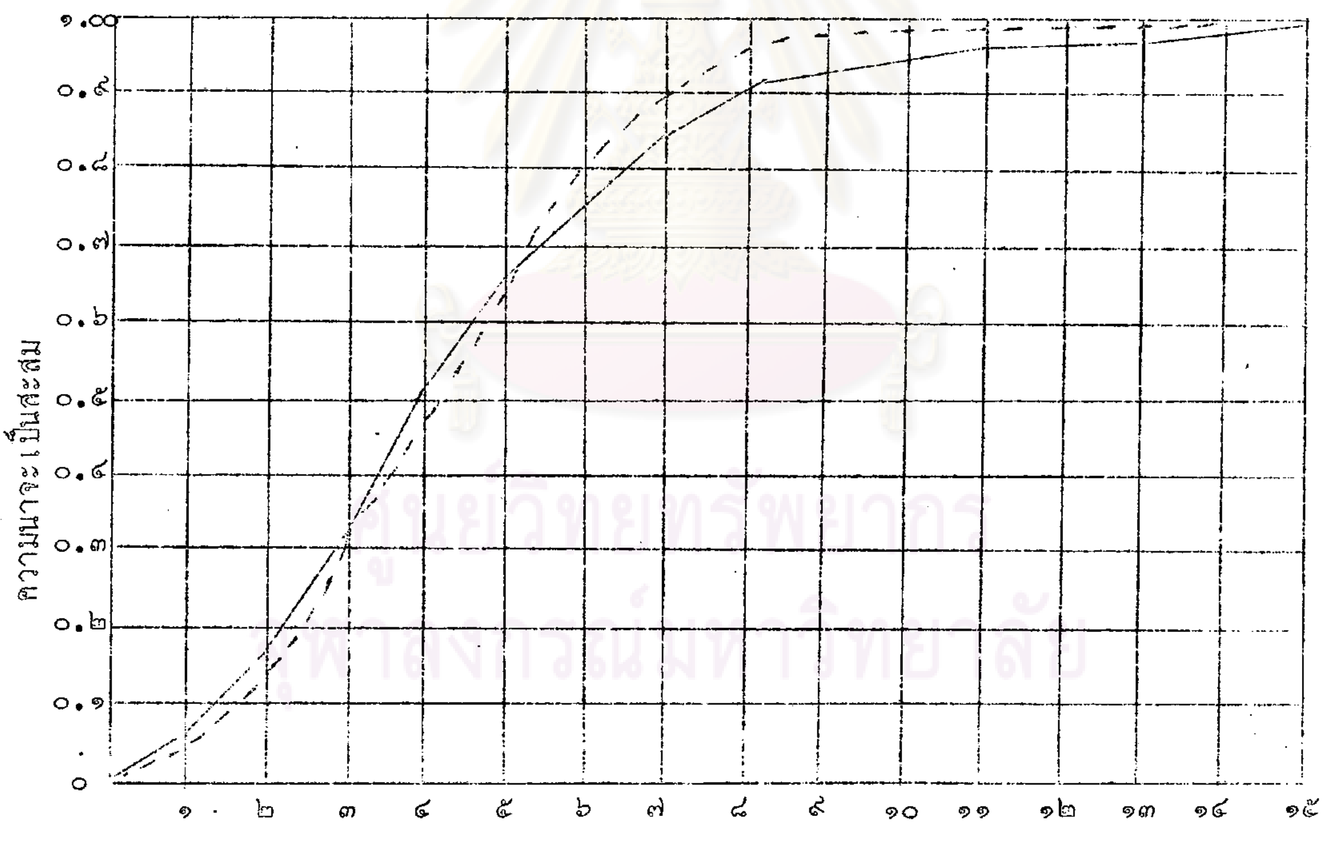
แสดงการเปรียบเทียบจำนวนจริงกับจำนวนทางทฤษฎี



กราฟเลขที่ ๘ เป็นการแสดงการเปรียบเทียบความถี่ของจำนวนเครื่อง บ.จริง (observed) กับความถี่ของจำนวนเครื่องบินที่คำนวณได้จากทฤษฎี โดยนำผลจากตารางที่ ๕ มาสร้าง และในทำนองเดียวกันถ้านำความน่าจะเป็นสะสมของจำนวนจริงกับจำนวนทางทฤษฎี จากตารางที่ ๕ มาเขียนโค้งเปรียบเทียบจะได้ดังกราฟเลขที่ ๙

กราฟเลขที่ ๙

แสดงการเปรียบเทียบจำนวนจริงกับจำนวนทางทฤษฎี



- - - - - - - - = โค้งของความน่าจะเป็นสะสมตามทฤษฎี (theoretical)

———————— = โค้งของความน่าจะเป็นสะสมจริง (observed)

๓.๑.๔ การทดสอบความเหมาะสมของโมเดล

การทดสอบของโมเดลมีหลายวิธี ในที่นี้จะใช้ไคสแคว์ (Chi Square) ทดสอบ โดยพิจารณาความถี่ในช่วงเวลา(interval)เสียใหม่ คือในช่วงเวลาใดที่มีความถี่ของเครื่องบินเข้ามาน้อย เช่น ๑ – ๒ ก็ให้รวมเข้าด้วยกัน จากตารางที่ ๕ จะเห็นได้ว่าควรจะรวมความถี่ของจำนวน บ.ที่เข้ามา ๑๐ – ๑๕ เข้าด้วยกัน ก็จะได้ความถี่ของจำนวน บ. ที่เข้ามา ๘ และ เมื่อพิจารณาความน่าจะเป็นในช่วงเดียวกันโดยรวมกันแล้วคูณด้วย N (N=๑๓๓) ก็จะได้ความถี่ของจำนวน บ.ตามทฤษฎี

ค่าความถี่ใดที่มากกว่า ๒ ให้คงที่ไว้ แล้วหาผลต่างระหว่างความถี่จริง(observed $= n_i$) กับความถี่ทางทฤษฎี (x_i) ยกกำลังสองแล้วหารด้วยค่าทางทฤษฎี นำค่าจากตารางที่ ๕ มาสร้างเพื่อทดสอบ χ^2 ก็จะได้ดังตารางที่ ๖

ตารางที่ ๖ แสดงการทดสอบ χ^2

จำนวนความถี่ บ.ที่ observed(n_i)	จำนวนความถี่ของ บ.ทางทฤษฎี(x_i)	$(x_i - n_i)^2$	$\frac{(x_i - n_i)^2}{x_i}$
๓	๑.๒๑	๓.๒๐	๒.๖๔
๘	๕.๖๘	๕.๓๘	๐.๙๔
๑๕	๑๓.๓๔	๒.๗๕	๐.๒๐
๒๐	๒๐.๘๙	๐.๗๙	๐.๐๓
๒๕	๒๔.๕๔	๐.๒๑	๐.๐๑
๒๐	๒๓.๐๖	๙.๓๖	๐.๔๑
๑๔	๑๘.๐๖	๑๖.๔๘	๐.๙๑
๑๐	๑๒.๑๒	๔.๔๙	๐.๓๗
๗	๗.๑๒	๐.๐๑	๐.๐๐
๓	๓.๗๑	๐.๕๐	๐.๑๓
๘	๒.๘๗	๒๖.๓๑	๙.๑๖

จากตารางที่ ๖ จะได้

$$\sum_{i=1} \frac{(x_i - n_i)^2}{x_i} = 14.80$$

เนื่องจากปัวซอง คิสทริบิวชั่น (Poisson distribution)ต้องใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง (sample data) ประมาณพารามิเตอร์ (parameter) ถึง ๒ ตัว เพราะฉะนั้น degree of fredom = ๑๑ - ๒ = ๙ เปิดตาราง χ^2 ที่มี prob. ๐.๐๕ มี degree of fredom ๙ จะมีค่า ๑๖.๙๑๙

$$\therefore \quad \chi^2_{test} = 14.80$$

$$\chi^2_{(0.05)} = 16.919$$

$$\therefore \quad \chi^2_{test} < \chi^2_{(0.05)}$$

จากผลของการทดสอบจึงสนับสนุนสมมุติฐานที่ว่า เครื่องบินที่บินเข้ามาขอใช้บริการของหอมีดิสทริบิวชั่น เป็นปัวซอง และมีค่าเฉลี่ย (mean arrival rate = λ) ๔.๗ เครื่องต่อชั่วโมง

ต่อไปนี้จะพิจารณาเวลาที่ให้บริการแก่เครื่องบินแต่ละเครื่อง (service time)

๓.๒ ลักษณะดิสทริบิวชั่นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการของหอบังคับการบิน

๓.๒.๑ เวลาบริการของหอบังคับการบิน(Service time) จะใช้เวลาต่าง ๆ กันทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ

๓.๒.๑.๑ แบบของเครื่องบิน

๓.๒.๑.๒ ความเร็วในการร่อนลงสนาม

๓.๒.๑.๓ ทัศนะวิสัย

๓.๒.๑.๔ บางครั้งต้องเข้า down wind แล้วร่อนลงทำให้ใช้เวลาเพิ่มขึ้น

๓.๒.๑.๕ บางครั้งถูกสั่งให้เร่งเครื่องไปใหม่(go round) เพราะมี บ.กำลังวิ่งขึ้นฉุกเฉิน

จะเห็นว่าเวลาที่หอให้บริการแก่เครื่องบินไม่เท่ากัน เพราะเครื่องบินใบพัด และเครื่องบินไอพ่นมีความเร็วต่างกัน นอกจากนั้นยังขึ้นอยู่กับขนาดอีกด้วย

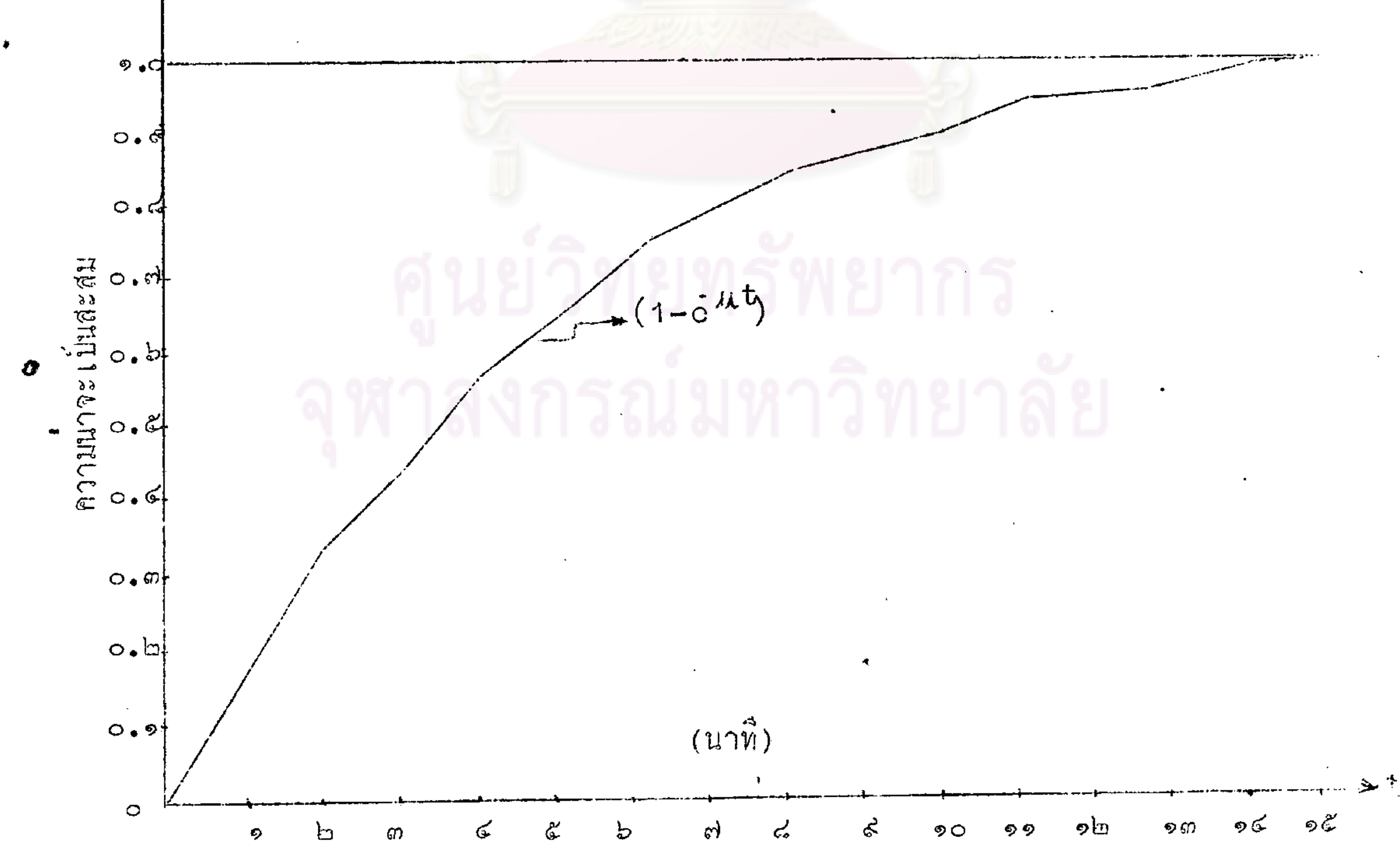
๓.๒.๒ จุดเริ่มต้นในการร่อนลงของ บ.

ถือเอาบริเวณรังสิตเป็นจุดเริ่มร่อนลงของ บ.ขณะที่หอบังคับการบินอนุญาตให้ร่อนลงได้ เวลาที่ให้บริการให้ถือเอาเวลาที่หอบังคับการบินอนุญาตให้เครื่องร่อนลงสนามจากบริเวณรังสิต จนเครื่องออกจากทางวิ่ง (run way) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า เวลาที่ให้บริการของหอบังคับการบิน ให้นับจากเวลาที่หออนุญาตให้ บ.ร่อนลงจนถึงเวลาที่อนุญาตให้เครื่องต่อไปร่อนลงได้ โดยปกติเครื่องบินที่มีความเร็วสูงมักใช้เวลาร่อนลงประมาณ ๒ - ๓ นาที ส่วนเครื่องบินขนาดใหญ่ที่มีความเร็วต่ำก็มักใช้เวลามากกว่านี้

๓.๒.๓ โค้งของเวลาที่ให้บริการ (service time) นำค่าจากตารางที่ ๗ มาเขียนโค้ง

กราฟเลขที่ ๑๐

แสดงโค้งของเวลาที่ให้บริการ



ตารางที่ ๗ แสดงการหาความน่าจะเป็นสะสม
ของเวลาที่ใช้บริการ

เวลาบริการ (Service time) นาที	จำนวนครั้ง	จำนวนครั้งสะสม	ความน่าจะเป็นสะสม
๒	๑๙๙	๑๙๙	๐.๓๑
๓	๘๘	๒๘๗	๐.๔๕
๔	๗๖	๓๖๓	๐.๕๗
๕	๕๐	๔๑๓	๐.๖๕
๖	๔๙	๔๖๒	๐.๗๓
๗	๓๗	๔๙๙	๐.๗๙
๘	๓๒	๕๓๑	๐.๘๔
๙	๒๒	๕๕๓	๐.๘๗
๑๐	๑๕	๕๖๘	๐.๙๐
๑๑	๑๗	๕๘๕	๐.๙๒
๑๒	๑๓	๕๙๘	๐.๙๔
๑๓	๑๔	๖๑๒	๐.๙๖
๑๔	๑๑	๖๒๓	๐.๙๘
๑๕	๘	๖๓๑	๑.๐๐

ค่าของความน่าจะเป็นสะสมกับเวลาที่หอบังคับการบินให้บริการ จะเขียนได้เป็นโค้งของเอ็กโพเนนเชี่ยล ดังรูปที่ คือ

$$P_n(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

= ความน่าจะเป็นของการบริการ n เครื่อง

ถ้า $P_o(t)$ = ความน่าจะเป็นของการบริการ 0 เครื่อง

$$P_o(t) = 1 - P_n(t) = e^{-\mu t}$$

ถ้าความน่าจะเป็นที่มีการบริการ ๑ ครั้ง ในช่วงเวลา Δt

$$= P_o(t) \cdot \mu \Delta t$$

$$= \mu e^{-\mu t} \cdot \Delta t$$

$$= P(t) \cdot \Delta t$$

$$\therefore \quad P(t) = \mu e^{-\mu t}$$

ให้ $\theta = \frac{1}{\mu}$

$$\therefore \quad P(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}t}$$

๓.๒.๔ หาค่าประมาณของ θ โดยใช้ Maximum likelihood

จาก $P(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}t}$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{(\theta)^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\theta}}$$

$$\log L = -n \log \theta - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\theta^2} = 0$$

$$= \frac{-n\theta + \sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta^2} = 0$$

$$\therefore \quad n\theta = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} t_i/n$$

หาค่า θ โดยแบ่งเวลาออกเป็นช่วง ๆ ละ ๑ นาที ตามตารางที่ ๘ แล้วใช้ $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$ โดยที่ n_i เป็นจำนวนครั้งที่ observe ได้จริง ๆ และ x_i เป็น central value ของ interval (t_i) การคำนวณหาค่า จึงอาศัยการสร้างตารางที่ ๘ จะได้

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\mu} = \sum_{i=0}^{15} \frac{x_i n_i}{\sum_{i=0}^{15} n_i}$$

$$= \frac{2757}{631} \quad 4.4 \quad \text{นาที/เครื่อง}$$

$$\therefore \quad \hat{\mu} = \frac{1}{4.4} \quad \text{เครื่อง/นาที}$$

ค่าประมาณของ μ ที่ได้นี้จะนำไปใช้เพื่อทดสอบ ดิสทริบิวชั่น อีกครั้งหนึ่ง ว่าจะใช้ได้หรือไม่ โดยจะใช้วิธีทดสอบแบบ Chi - square

๓.๒.๕ หลักในการใช้ Chi - Square ทดสอบ

๓.๒.๕.๑ พยายามจัด interval โดยให้มีจำนวนครั้งของการบริการให้มากพอสมควร

๓.๒.๕.๒ คำนวณหาค่า distribution function (F_i) ตามทฤษฎีคือ $F_i = 1 - e^{-t/\theta}$.

ตารางที่ ๘ แสดงการหาค่า μ

Interval (min.)	Central value (x_i)	No.of observed (n_i)	$n_i\ x_i$
๐	๑	๑๙๙	๑๙๙.๐
๒	๒.๕	๘๘	๒๒๐.๐
๓	๓.๕	๗๖	๒๖๖.๐
๔	๔.๕	๕๐	๒๒๕.๐
๕	๕.๕	๔๙	๒๖๙.๕
๖	๖.๕	๓๗	๒๔๐.๕
๗	๗.๕	๓๒	๒๔๐.๐
๘	๘.๕	๒๒	๑๘๗.๐
๙	๙.๕	๑๕	๑๔๒.๐
๑๐	๑๐.๕	๑๗	๑๗๘.๕
๑๑	๑๑.๕	๑๓	๑๔๙.๕
๑๒	๑๒.๕	๑๔	๑๗๕.๐
๑๓	๑๓.๕	๑๑	๑๔๘.๕
๑๔	๑๔.๕	๘	๑๑๖.๐
๑๕		Σn_i = ๖๓๑	$\Sigma n_i x_i$ = ๒๗๕๗

๓.๒.๕.๓ หาผลต่างระหว่าง F_i และ F_{i-1} ซึ่งเป็น prob.ของแต่ละ interval

๓.๒.๕.๔ คำนวณหาค่า x_i ซึ่งเป็นจำนวนครั้งของการบริการในแต่ละ interval ในทางทฤษฎี คือ $x_i = N(F_i - F_{i-1})$ ในเมื่อ $N = 631$

๓.๒.๕.๕ ให้ n_i เป็นจำนวนครั้งที่ observed ได้จริง ๆ

๓.๒.๕.๖ คำนวณหาค่า $\frac{(x_i - n_i)^2}{x_i}$

๓.๒.๕.๗ คำนวณหา $\chi^2 = \sum_{i=0}^{15} \frac{(x_i - n_i)^2}{x_i}$

การทดสอบจะทำได้ตามตารางที่ ๙ ซึ่งผลปรากฏว่า

$$\chi^2_{test} = \sum_{i=0}^{15} \frac{(x_i - n_i)^2}{x_i}$$

$$= 19.04$$

$$\chi^2_{(.05)} = 22.36$$

เมื่อ degree of freedom $= 15 - 2 = 13$

$$\therefore \chi^2_{test} < \chi^2_{(0.05)}$$

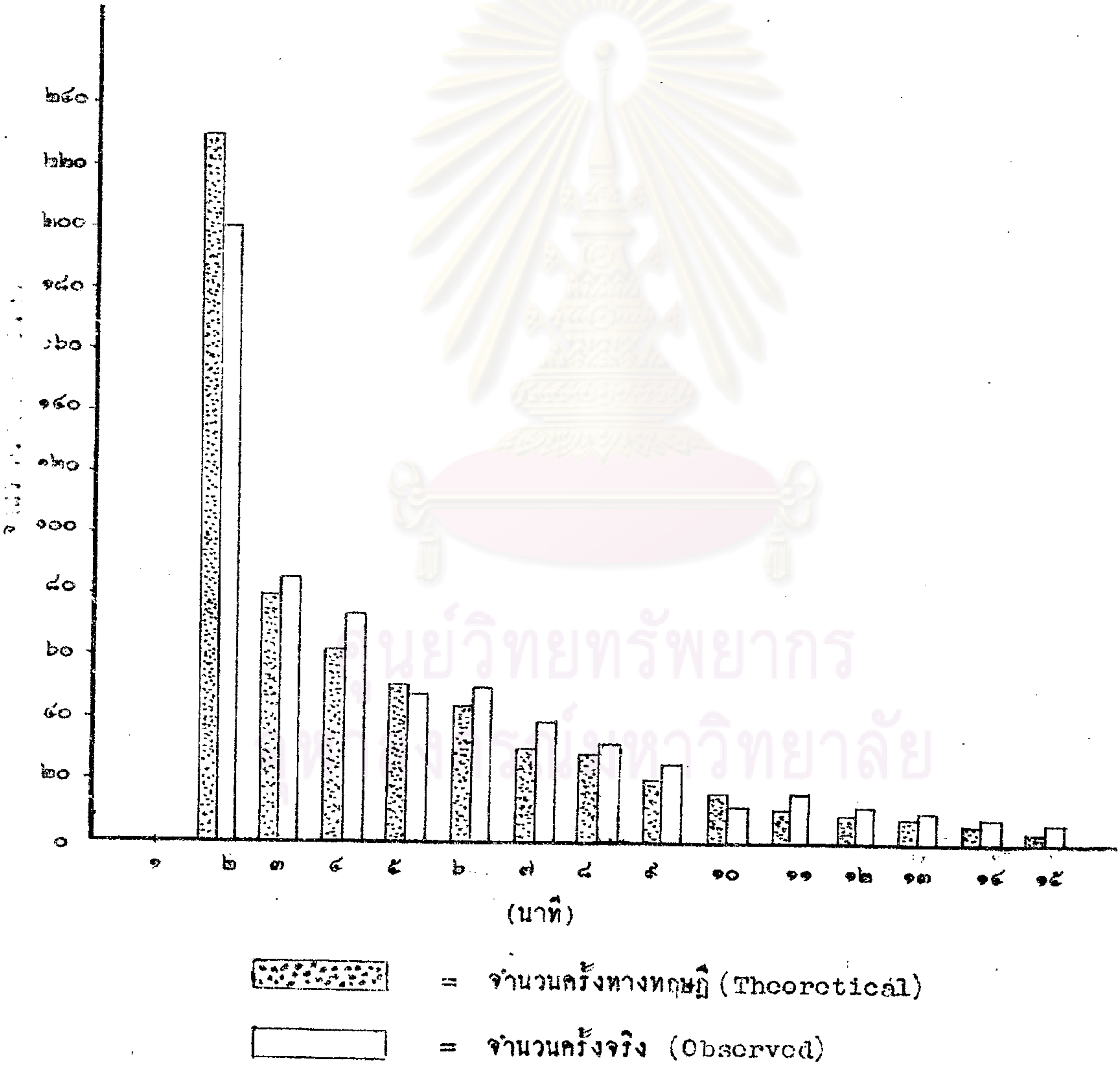
การทดสอบโค้งเอ็กโพเนนเชี่ยล ของบริการของหอบังคับการบินจึงยอมรับ (accept) สนับสนุนตามสมมุติฐาน

ตารางที่ ๙ แสดงการทดสอบ χ^2 ของ μ

interval t (min.)	F_i	$F_i - F_{i-1}$	จำนวนทางทฤษฎี (x_i)	จำนวนจริง (n_i)	$(x_i-n_i)^2$	$\frac{(x_i-n_i)^2}{x_i}$	Cu. Prob. of x_i
๐	๐.๐๐๐๐	๐.๓๖๒๔	๒๒๘.๖๗	๑๙๙	๙๐๐	๓.๙๓	๐.๓๘
๒	๐.๓๖๒๔	๐.๑๓๑๐	๘๒.๖๖	๘๘	๒๕	๐.๓๐	๐.๕๒
๓	๐.๔๙๓๔	๐.๑๐๔๑	๖๕.๖๙	๗๖	๑๐๐	๑.๕๑	๐.๖๓
๔	๐.๕๙๗๕	๐.๐๗๙๕	๕๐.๑๖	๕๐	๐.๐๐	๐.๐๐	๐.๗๑
๕	๐.๖๗๗๐	๐.๐๖๖๓	๔๑.๘๔	๔๙	๔๙	๑.๑๖	๐.๗๘
๖	๐.๗๔๓๓	๐.๐๕๒๘	๓๓.๓๒	๓๗	๑๖	๐.๔๘	๐.๘๓
๗	๐.๗๙๖๑	๐.๐๔๑๙	๒๖.๔๔	๓๒	๓๖	๑.๓๘	๐.๘๗
๘	๐.๘๓๘๐	๐.๐๓๒๐	๒๐.๑๙	๒๒	๔	๐.๒๐	๐.๙๐
๙	๐.๘๗๐๐	๐.๐๒๖๗	๑๖.๘๕	๑๕	๔	๐.๒๓	๐.๙๓
๑๐	๐.๘๙๖๗	๐.๐๒๑๒	๑๓.๓๘	๑๗	๑๖	๑.๒๓	๐.๙๕
๑๑	๐.๙๑๗๙	๐.๐๑๔๙	๙.๔๐	๑๓	๑๖	๑.๗๗	๐.๙๖
๑๒	๐.๙๓๒๘	๐.๐๑๔๔	๙.๐๘	๑๔	๒๕	๒.๗๗	๐.๙๗
๑๓	๐.๙๔๗๒	๐.๐๑๑๒	๗.๐๗	๑๑	๑๖	๒.๒๘	๐.๙๘
๑๔	๐.๙๕๘๔	๐.๐๐๘๒	๕.๑๗	๘	๙	๑.๘๐	๑.๐๐
๑๕	๐.๙๖๖๖						

กราฟเลขที่ ๑๑

แสดงการเปรียบเทียบจำนวนจริงกับจำนวนทางทฤษฎี



กราฟเลขที่ ๑๒

โค้งเปรียบเทียบแสดงจำนวนจริงกับจำนวนทางทฤษฎี