การจำลองเชิงตัวเลขระบบพลาสมา 2 มิติในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้แบบจำลองอนุภาค

นางสาวสายฝน จำปาทอง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชานิวเคลียร์เทคโนโลยี ภาควิชานิวเคลียร์เทคโนโลยี
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

NUMERICAL SIMULATION OF TWO-DIMENTIONAL PLASMA SYSTEM IN ELECTROMAGNETIC FIELD USING PARTICLES MODEL

Miss Saifon Jumpathong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program Nuclear Technology
Department of Nuclear Technology
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

ชื่อวิทยานิพนธ์	การจำลองเชิงตัวเลขระบบพลาสมา 2 มิติในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้แบบจำลองอนุภาค
โดย	นางสาวสายฝน จำปาทอง
สาขาวิชา	นิวเคลียร์เทคโนโลยี
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.สัญชัย นิลสุวรรณโฆษิต

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุวิทย์ ปุณณชัยยะ)

....อาจารย์ที่ปรึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร.สัญชัย นิลสุวรรณโฆษิต)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ นเรศร์ จันทน์ขาว)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ สมยศ ศรีสถิตย์)

สายฝน จำปาทอง : การจำลองเชิงตัวเลขระบบพลาสมา 2 มิติในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้แบบจำลองอนุภาค (NUMERICAL SIMULATION OF TWO-DIMENTIONAL PLASMA SYSTEM IN ELECTROMAGNETIC FIELD USING PARTICLES MODEL) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.สัญชัย นิลสุวรรณโฆษิต, 130 หน้า.

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการจำลองระบบพลาสมาโดยอาศัยแบบจำลองอนุภาคและการประมาณเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องสำหรับการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งร่วมกับวิธีการของ Runge-Kutta สำหรับการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขความต่อเนื่องที่ขอบเขต จากการศึกษา พบว่า การจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาคมีความคาดเคลื่อนสูงจึงได้เปลี่ยนแบบจำลองมาเป็นแบบจำลองของไหลซึ่งให้ผลที่มีความคาดเคลื่อนต่ำกว่า อย่างไรก็ตามแบบจำลองทั้ง 2 ให้ผลในลักษณะเดียวกัน สำหรับค่าความถี่การสั่นที่จำลองได้เมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณจากทางทฤษฎีมีความแตกต่างกันอยู่ในระดับหนึ่ง แต่ในส่วนของความหนาแน่นที่จำลองได้นั้นมีความสอดคล้องกับ Boltzmann's relation ความแตกต่างในการจำลองเหล่านี้เกิดจากความไม่แม่นยำในการประมาณรวมถึงความผิดพลาดอันมีอยู่แล้วของเทคนิคการคำนวณ ดังนั้นแม้ว่าแบบจำลองอนุภาคและแบบจำลองของไหลจะมีความสามารถในระดับหนึ่ง แต่ในการจำลองพลาสมาซึ่งมีความละเอียดและซับซ้อนจึงมีความจำเป็นที่ต้องใช้เทคนิคอื่นที่ดีกว่าเพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่แม่นยำเหมาะสมสำหรับการใช้งานในทางปฏิบัติ

ภาควิชา.............นิวเคลียร์เทคโนโลยี...............ลายมือชื่อนิสิต......สายฝน จำปาทอง..................

สาขาวิชา...........นิวเคลียร์เทคโนโลยี...............ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..

ปีการศึกษา.......................2550.........................ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.................................

##4770494621: MAJOR NUCLEAR TECHNOLOGY

KEY WORD: PLASMA / PLASMA SIMULATION

SAIFON JUMPATHONG : NUMERICAL SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL PLASMA SYSTEM IN ELECTROMAGNETIC FIELD USING PARTICLES MODEL. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. SUNCHAI NILSUWANKOSIT, Ph.D. , 130 pp.

For this thesis, we treat the numerical simulation by using the particle model with the finite difference interpolation and the Runge-Kutta method which is considered the different being of position and time respectively with the continuous boundary. From study, we found that the simulation by particles model made a lot of error so we changed the particles to the fluid model which gave the lower error. However, the results of those are resembled. In the part of the frequency of oscillation which is different from the theory in a level but the density is to agree with Boltzmann's relation. The difference will exist because there is not accuracy of the interpolation including the mistakes which exist from the calculating technique. Therefore, the particles and the fluid model although enable to simulate in a level. But the plasma simulation which is detailed and complicated by calculation, we have to use the other technique which it has more accurate calculating for using in the practice.

Department.....Nuclear Technology........ Student's signature...สายฝน จำปาทอง........

Field of study...Nuclear Technology....... Advisor's signature.......................

Academic year...........2007...............Co-advisor's signature..........................

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ก็ด้วยความกรุณาและความช่วยเหลือของ รศ.ดร.สัญชัย นิลสุวรรณโฆษิต ที่คอยให้การสนับสนุนมาโดยตลอดรวมไปถึงเรื่องทุนการศึกษาที่ผ่านมา และขอขอบคุณอาจารย์ ที่ให้เกียรติมาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์และให้ข้อแนะนำ ติชม รวมถึงข้อปรับปรุงที่เป็นประโยชน์ยิ่ง

ขอขอบคุณ คุณชมเดือน ศตวุฒิ เป็นอย่างยิ่งสำหรับทุนการศึกษาชมเดือนที่ได้สนับสนุนการศึกษาในปีการศึกษา 2547 และ รศ.นเรศร์ จันทน์ขาว สำหรับการดูแลเรื่องทุนการศึกษานี้ นอกจากนี้ขอขอบคุณคณาจารย์ท่านอื่นๆ ทุกๆ ท่านในภาควิชาที่ได้ให้ความช่วยเหลือและดูแลด้วยดีมาโดยตลอด

ขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ และ น้องๆ ที่ภาควิชาที่ได้เป็นส่วนหนึ่งร่วมกันในการเรียนและกิจกรรมต่างๆ ที่ผ่านมา

และท้ายที่สุดนี้ขอขอบพระคุณครอบครัวที่คอยดูแล ช่วยเหลือ และอยู่เป็นกำลังใจให้กันมาโดยตลอด

สารบัญ

สารบัญรูป

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

รายการตัวย่อและสัญลักษณ์

$f(u)$ คือ ฟังก์ชันการกระจายความเร็วของแมกซ์เวลล์ใน 1 มิติ

$A = n\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)$ คือ ค่าคงที่ในฟังก์ชันการกระจายความเร็ว $f(u)$ สำหรับอุณหภูมิ T ที่กำหนด

$\frac{1}{2}mu^2$ คือ พลังงานจลน์ของอนุภาค

$K = 1.38\times10^{-23}\ {}^{J}\!/\!_{K}$ คือ Boltmann's Constant

E_{av} คือ ค่าเฉลี่ยของพลังงานจลน์ของอนุภาคการกระจาย

n_e คือ ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในพลาสมา

n_i คือ ความหนาแน่นของไอออนในพลาสมา

n_∞ คือ ความหนาแน่นเฉลี่ยของอนุภาคในพลาสมา

λ_D (Debye Length) คือ ระยะที่อนุภาคสามารถรับรู้ศักย์ไฟฟ้าที่กระทำต่อพลาสมาได้

N_D คือ จำนวนอนุภาคที่ถูกกักไว้ในบริเวณปิดบริเวณหนึ่งอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์ Debye Shielding

ε (electrical permittivity) คือ สภาพให้สนามไฟฟ้าผ่านได้ของตัวกลาง

μ (magnetic permeability) คือ สภาพให้สนามแม่เหล็กผ่านได้ของตัวกลาง

q คือ ประจุไฟฟ้า

σ คือ ความหนาแน่นประจุไฟฟ้า

$\bar{j}$ คือ กระแสไฟฟ้า

ω_c (cyclotron frequency) คือ ความถี่ไซโคลตรอน

$v_\perp$ คือ อัตราเร็วในทิศตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก

i คือ $\sqrt{-1}$

$r_L \equiv \dfrac{v_\perp}{\omega_c}$ คือ รัศมีลาเมอร์ (Lamor Radius) อันเนื่องจากการเคลื่อนที่แบบหมุน

$\vec{u}_E$ คือ ความเร็วเลื่อนตำแหน่ง ($\vec{E} \times \vec{B}$ drift velocity) อันเนื่องจากสนามไฟฟ้าตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก

$\vec{u}_D$ คือ ความเร็วเลื่อนตำแหน่งอันเนื่องจากสนามแม่เหล็ก (diamagnetic drift velocity)

n_0 คือ ความหนาแน่นอนุภาคเมื่อไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

n_1 คือ ความหนาแน่นอนุภาคที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อถูกรบกวนจากสนามภายนอก

$\vec{v}_0$ คือ ความเร็วของอนุภาคเมื่อไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

$\vec{v}_1$ คือ ความความเร็วของอนุภาคที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อถูกรบกวนจากสนามภายนอก

$\vec{E}_0$ คือ สนามไฟฟ้าเมื่อไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

$\vec{E}_1$ คือ สนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อถูกรบกวนจากสนามภายนอก

$\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}}$ คือ ความถี่พลาสมา (plasma frequency)

N_e คือ จำนวนอิเล็กตรอนทั้งหมดในพลาสมา

N_i คือ จำนวนไอออนทั้งหมดในพลาสมา

ln คือ ความยาวด้านที่จำลอง

ngrid คือ จำนวนกริดที่จำลองต่อด้าน

npar คือ จำนวนอนุภาคจำลองทั้งหมด

rat คือ อัตราส่วนจำนวนอนุภาคจริงต่อ 1 อนุภาคจำลอง

di คือ จำนวนข้อมูลต่อ 1 รอบการสั่นพลาสมาเพื่อใช้กำหนดเวลาของรอบการคำนวณสำหรับการ จำลอง

ntime คือ จำนวนครั้งของรอบเวลาการคำนวณสำหรับกำหนดเวลาที่จะทำการจำลอง

err_criteria คือ ความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับสำหรับการคำนวณศักย์ไฟฟ้า

IterMax คือ จำนวนรอบสูงสุดที่ยอมรับให้หยุดวนรอบคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้ากรณีที่ความแตกต่างระหว่างค่าเก่ากับค่าใหม่ไม่อยู่ในเงื่อนไขของ err_criteria

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ปัญหาและความเป็นมา

ด้วยเหตุที่สภาวะพลาสมาเป็นสภาวะที่สามารถทำให้เกิดปฏิกิริยาฟิวชันได้ การพัฒนาเทคโนโลยีทางนิวเคลียร์ฟิวชันจึงขึ้นอยู่กับการพัฒนาเทคโนโลยีทางพลาสมาด้วย ซึ่งการสร้างและควบคุมพลาสมาเป็นกระบวนการสำคัญที่จะต้องทำการศึกษาโดยนับว่าเป็นความท้าทายหนึ่งต่อความสามารถของมนุษย์ในการเรียนรู้และประยุกต์ใช้ธรรมชาติของพลาสมา ทฤษฎีจำนวนมากได้ถูกนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองเพื่อศึกษาปรากฏการณ์ทางพลาสมาที่เกิดขึ้นนับตั้งแต่แบบจำลองอนุภาค แบบจำลองของไหลไปจนถึงแบบจำลองไฮบริด (hybrid model) อย่างไรก็ตามแบบจำลองเหล่านี้มีขอบเขตและเงื่อนไขที่จำกัดซึ่งสามารถให้การอธิบายเพียงบางส่วนของปรากฏการณ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นเท่านั้น

ลักษณะสำคัญของพลาสมาที่ถูกนำมาใช้ในทางนิวเคลียร์ฟิวชัน คือ ความสามารถในการกักเก็บและควบคุมพลาสมาโดยใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้า ทั้งนี้เนื่องมาจากพลาสมาประกอบขึ้นจากไอออนและอิเล็กตรอนนั่นเอง ด้วยการปรับแต่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้านี้จะสามารถสร้างเงื่อนไขวิกฤตทางนิวเคลียร์ฟิวชันให้เกิดขึ้นได้ โดยการควบคุมให้อนุภาคในพลาสมามีอัตราการชนกันสูงมากพอจะเกิดฟิวชัน ซึ่งเป็นเป้าหมายหนึ่งในการพัฒนาพลาสมาในงานนิวเคลียร์ฟิวชัน

ถึงแม้ว่าแบบจำลองพลาสมาโดยการคำนวณเชิงตัวเลขจะอธิบายธรรมชาติของพลาสมาได้เพียงบางส่วน แต่ความเข้าใจในเพียงบางส่วนดังกล่าวก็นับว่าเป็นพื้นฐานที่ดีสำหรับการศึกษาพลาสมาที่มีความซับซ้อนในธรรมชาติ ด้วยเหตุนี้การจำลองพลาสมาโดยการคำนวณเชิงตัวเลขจึงยังมีความสำคัญและมีความจำเป็นอยู่ทั้งต่องานทางทฤษฎีและงานทางการทดลองอันเป็นเสมือนตัวกลางเชื่อมระหว่างทฤษฎีกับการทดลอง สำหรับงานทางการทดลองนั้นจำเป็นต้องอาศัยแบบจำลองเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นรวมถึงการใช้และการควบคุมพลาสมาในทางปฏิบัติ

1.2 การจำลองพลาสมา

การจำลองพลาสมาในเชิงตัวเลขหรือทางคอมพิวเตอร์นั้นนับว่ามีบทบาทสำคัญต่อทฤษฎีพลาสมามาก เนื่องจากเป็นการหาผลการทำนายเหตุการณ์ในพลาสมา ซึ่งในปัจจุบันนี้พบว่ามีหลากหลายแบบจำลองที่ใช้ในการจำลองพลาสมา แต่โดยหลักๆแล้วมีแนวคิดของแบบจำลองอยู่ 2 แบบ คือ แบบจำลองอนุภาคและแบบจำลองของไหล

1.2.1. แบบจำลองอนุภาค

แบบจำลองนี้ใช้แนวคิดเรื่องการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่มีประจุในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยพิจารณาจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคพลาสมาแต่ละตัวหรือกลุ่มอนุภาคจำลองภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากประจุที่เป็นองค์ประกอบภายในพลาสมา การจำลองพลาสมาโดยใช้แบบจำลองนี้มีข้อจำกัดมากในเรื่องของจำนวนของอนุภาคและเวลาที่พิจารณาซึ่งต้องมีขนาดไม่มากนัก

1.2.2 แบบจำลองของไหล

แบบจำลองนี้นำชุดสมการของของไหลมาใช้ในการอธิบายพลาสมาโดยพิจารณาว่าพลาสมาเป็นของไหล ซึ่งแนวคิดนี้มีความสมเหตุสมผลอยู่มากเนื่องจากในความเป็นจริงพลาสมามักจะแสดงพฤติกรรมว่าเป็นของไหลอันเป็นพฤติกรรมรวมของอนุภาคพลาสมาแต่ละตัว และเมื่อประมาณพลาสมาว่าประกอบไปด้วยของไหลมากกว่า 1 ชนิดซึ่งของไหลนั้นจะถูกสนามแม่เหล็กกักเก็บไว้ แนวคิดนี้จึงทำให้แบบจำลองของไหลมีความสามารถคำนวณค่าในระบบขนาดใหญ่ได้

อย่างไรก็ตามสำหรับบางกรณีพลาสมาก็ไม่สามารถใช้แบบจำลองของไหลหรือแบบจำลองอนุภาคในการอธิบายพฤติกรรมของพลาสมาได้เลย ดังนั้นจึงมีการพัฒนาแบบจำลองไฮบริดขึ้นมาซึ่งมีลักษณะเป็นการผสมผสานระหว่าง 2 แนวคิดของแบบจำลองทั้งสองที่ได้กล่าวไปแล้วในข้างต้นเข้าด้วยกัน โดยพิจารณาว่าอิเล็กตรอนเป็นของไหลตามแบบจำลองของไหลและพิจารณาว่าไอออนเป็นอนุภาคขนาดใหญ่ตามแบบจำลองอนุภาค

1.3 การจำลองพลาสมา 2 มิติ

สำหรับงานวิทยานิพนธ์นี้จะดำเนินการจำลองพลาสมา 2 มิติในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยอาศัยแบบจำลองอนุภาคและแบบจำลองของไหลพิจารณาร่วมกับสมการแมกซ์เวลล์ที่จะนำไปใช้ในการพิจาณาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นและใช้สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคและของไหลในการพิจารณาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของอนุภาคและของไหลในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

1.4 วัตถุประสงค์

เพื่อสร้างระบบจำลองเชิงตัวเลขพลาสมา 2 มิติจากแบบจำลองอนุภาคสำหรับศึกษาการสั่นของพลาสมา 2 มิติ ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่างๆ

1.5 ขอบเขตการวิจัย

1. พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองพลาสมา 2 มิติ ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้แบบจำลองอนุภาคและแบบจำลองของไหล

2. คำนวณและจำลองลักษณะการเปลี่ยนแปลงความต่างศักย์ ความหนาแน่น และการสั่นของพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่ต่างๆ

1.6 ขั้นตอนและการดำเนินงานวิจัย

1. ค้นคว้าและศึกษาทฤษฎี และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

2. ออกแบบแบบจำลองพลาสมาและพิจารณาวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่จะนำมาใช้ในการคำนวณ

3. พัฒนาโปรแกรมจำลองพลาสมา 2 มิติ

4. เปรียบเทียบผลการคำนวณของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับค่าทางทฤษฎี

5. รวบรวม วิเคราะห์และสรุปผลการศึกษา

6. จัดทำวิทยานิพนธ์

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองพลาสมา 2 มิติจากแบบจำลองอนุภาคสำหรับศึกษาการสั่นของพลาสมา 2 มิติในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่างๆ

1.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. Charles K. Birdsall และ A. Bruce Langdon ในปี ค.ศ. 1985ได้พัฒนาการจำลองพลาสมาจากแบบจำลองอนุภาคโดยใช้วิธี Fast Fourier Transform (FFT) ในการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยภาษาฟอร์ทราน ซึ่งต่อมาการจำลองนี้ได้ถูกพัฒนาไปใช้ในการจำลองพลาสมา 1 มิติสำหรับการศึกษาพลาสมาในมหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนีย ผลที่ได้จากการทดลองสามารถอธิบายพฤติกรรมพื้นฐานของพลาสมาได้ แต่อย่างไรก็ตามการจำลองนี้มีความเหมาะสมสำหรับพลาสมาที่

ประกอบด้วยจำนวนอนุภาคไม่มากนักซึ่งถ้ามีจำนวนมากแล้ว ผลจากการจำลองจะมีความคลาดเคลื่อนสูงมาก

2. Kevin Bower แห่งมหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนียได้จำลองพลาสมา 2 มิติด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขมอนติ-คาร์โร ในปี ค.ศ. 1996 เพื่อศึกษาคุณสมบัติทางฟิสิกส์ของพลาสมา การจำลองนี้มีข้อจำกัดในเรื่องของจำนวนอนุภาคในพลาสมาและเวลาที่พิจารณาโดยจะต้องมีค่าไม่สูงมากนักเพราะถ้ามีค่าสูงมากการจำลองที่ได้ก็จะมีความคลาดเคลื่อนสูง

3. Dr. Chin S. Lin แห่งสถาบันวิทยาศาสตร์ออโรรา ได้พัฒนา code ที่ใช้เขียนโปรแกรมการคำนวณมาเป็น PIC (Particle In Cell) code สำหรับใช้งานกับ parallel computer ในปี ค.ศ. 1998 เพื่อศึกษาจลนศาตร์ของพลาสมา เช่น การกระเจิง การชน การเขียนโปรแกรมด้วยวิธีนี้ทำให้สามารถจำลองพลาสมาที่ประกอบด้วยอนุภาคที่มีจำนวนมากได้แต่จะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมากกว่าการเขียนโดยการจำลองอนุภาคแต่ละตัวทำให้มีข้อจำกัดเรื่องของเวลาในรอบการคำนวณมากกว่าการเขียนโดยการจำลองอนุภาคแต่ละตัว

4. นายชวิศนัช อิงชาติเจริญได้จำลองการเคลื่อนไหวเชิงตัวเลขของพลาสมา 1 มิติในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยใช้สมการแมกซ์เวลล์และสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดี่ยวที่มีประจุในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าด้วยภาษาจาวาในปี พ.ศ. 2543 ผลการจำลองที่ได้สามารถอธิบายการเคลื่อนไหวของพลาสมาและลักษณะสนามไฟฟ้า ณ เวลาต่างๆได้เมื่อจำนวนอนุภาคมีจำนวนไม่มากนักและเวลาในแต่ละรอบการคำนวณมีค่าไม่มากนัก แต่ถ้าอนุภาคในพลาสมามีจำนวนมากหรือเวลาสำหรับรอบการคำนวณมีค่ามาก ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณจะมีค่าสูงมากจนไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้งาน

บทที่ 2
ทฤษฎีเบื้องต้นของพลาสมา

2.1 บทนำ

พลาสมา คือ สถานะที่สี่ของสสาร โดยมีลักษณะเสมือนเป็นกลางทางไฟฟ้า (quasineutral) โดยประกอบด้วยไอออนและอิเล็กตรอนที่มีความหนาแน่นเฉลี่ยเดียวกัน แม้ว่าพลาสมาในระดับมหภาคจะมีประจุไฟฟ้าสุทธิเป็นศูนย์หรือเข้าใกล้ศูนย์ พลาสมายังคงแสดงพฤติกรรมโดยรวม (collective behavior) ออกมา โดยจะเคลื่อนที่ด้วยอิทธิพลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบริเวณพลาสมาที่เกิดขึ้นทั้งจากการกระจายของอนุภาคพลาสมาเองและจากสนามภายนอก

ภาวะที่เกิดขึ้นในพลาสมาเป็นภาวะที่มีความสลับซับซ้อน สนามแม่เหล็กไฟฟ้าไม่ได้เป็นเหตุต่อพฤติกรรมของอนุภาคในพลาสมาเท่านั้นแต่ยังถูกกำหนดขึ้นโดยตำแหน่งและการเคลื่อนที่ของอนุภาคในพลาสมาเองด้วย ดังนั้นจึงจำเป็นต้องพิจารณาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากองค์ประกอบภายในของพลาสมาเองโดยการหาเซตการเคลื่อนที่ของอนุภาคและรูปแบบของสนามที่เกิดขึ้นเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ผ่าน ซึ่งสนามดังกล่าวจะเป็นเหตุให้อนุภาคเคลื่อนที่ในวงโคจรที่แน่นอนในเวลาต่อมา ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ตามเวลาขึ้น และแน่นอนว่าสนามเองก็มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วยเช่นเดียวกัน

หากพิจารณาว่าความหนาแน่นของพลาสมามีขนาดประมาณ 10^{12} คู่ ion-electron ต่อ cm^3 หรือ 10^{18} คู่ ion-electron ต่อ m^3 ถ้าแต่ละอนุภาคเหล่านี้มีการเคลื่อนที่ที่สลับซับซ้อนและการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาคนั้นมีความจำเป็นสำหรับการอธิบายพฤติกรรมของพลาสมา นั่นก็ทำให้มีความลำบากมากที่จะอธิบายผลที่เกิดขึ้น แต่ในความเป็นจริงพบว่าเกือบ 80% ของปรากฏการณ์พลาสมาที่เกิดขึ้นสามารถอธิบายได้จากแบบจำลองอย่างหยาบ (rather crude model) ซึ่งแบบจำลองนี้ใช้กลศาสตร์ของไหลในการพิจารณาทำให้ไม่ระบุการเคลื่อนที่ของอนุภาคแต่ละตัว ซึ่งจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของ fluid element แทน ในกรณีของพลาสมาซึ่งประกอบไปด้วยอนุภาคที่มีประจุอย่างอิเล็กตรอนและไอออนนั้น การที่สามารถใช้แบบจำลองของไหลมาอธิบายการเคลื่อนที่ได้เนื่องจากความถี่ในการชนกันของอนุภาคในของไหลซึ่งเป็นปัจจัยหนึ่งที่ทำให้ของไหลเคลื่อนที่ ดังนั้นถึงแม้ว่าในกรณีของพลาสมานั้นการชนกันระหว่างอนุภาคอาจจะไม่ได้เกิดขึ้น แต่การกระเจิงของอนุภาคอันเนื่องมาจากแรงคูลอมบ์ก็แสดงลักษณะที่สอดคล้องกันกับการชนกันของอนุภาคที่ไม่มีประจุ

2.2 หลักการเกี่ยวกับอุณหภูมิ

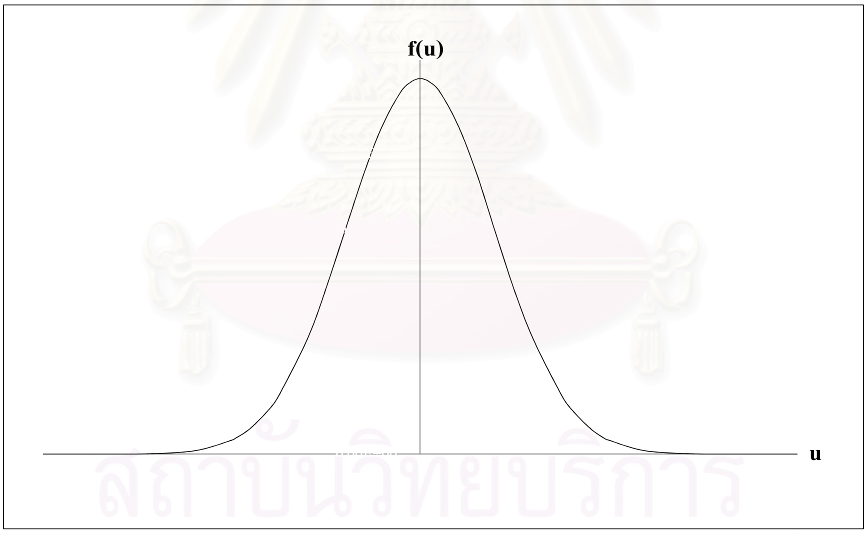
ก๊าซในสมดุลความร้อน (Thermal Equilibrium) จะประกอบด้วยอนุภาคที่มีอัตราเร็วต่างๆกัน ซึ่งอัตราเร็วของอนุภาคจะมีการกระจายเป็นไปตามการกระจายของแมกซ์เวลล์ ถ้าเราพิจารณาก๊าซซึ่งอนุภาคมีการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ ฟังก์ชันการกระจายของแมกซ์เวลล์ 1 มิติ $f(u)$ สามารถอธิบายได้ว่า

$$f(u) = A\exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mu^2}{KT}\right) \tag{2.1}$$

เมื่อ $A = n\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)$ เป็นค่าคงที่สำหรับ T ที่กำหนด

$\frac{1}{2}mu^2$ คือ พลังงานจลน์ของอนุภาค

$K = 1.38\times10^{-23}\ {}^{J}\!/\!_{K}$ คือ Boltmann’s Constant



รูปที่ 2.1 การกระจายความเร็วของแมกซ์เวลล์

ความหนาแน่น n สามารถอธิบายได้ว่า

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du \tag{2.2}$$

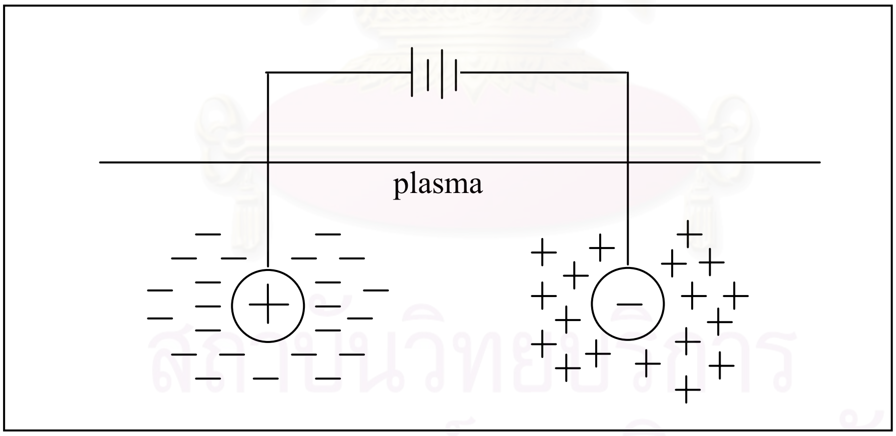
การกระจายของอนุภาคจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับอุณหภูมิในหน่วยเคลวิน (K) สำหรับอุณหภูมิ T ค่าหนึ่งๆซึ่งเราสามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยของพลังงานจลน์ของอนุภาคการกระจายนี้ได้

$$E_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m u^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du}$$

$$= \frac{1}{2} KT \qquad (2.3)$$

ณ เวลา t ใดๆ พลาสมาสามารถมีอุณหภูมิมากกว่า 1 ค่า ตัวอย่างเช่น อุณหภูมิของไอออน T_i และอุณหภูมิของอิเล็กตรอน T_e ซึ่งกระจายอุณหภูมิของทั้งไอออนและอิเล็กตรอนล้วนสามารถอธิบายได้ด้วยการกระจายของแมกซ์เวลล์ ด้วยเหตุที่อัตราการชนระหว่างไอออนหรือระหว่างอิเล็กตรอนด้วยกันเองมีมากกว่าอัตราการชนระหว่างไอออนกับอิเล็กตรอน ทำให้ทั้งไอออนและอิเล็กตรอนอยู่ในสมดุลความร้อนของตัวมันเอง

2.3 เดอบาย ชิลดิง (Debye Shielding)

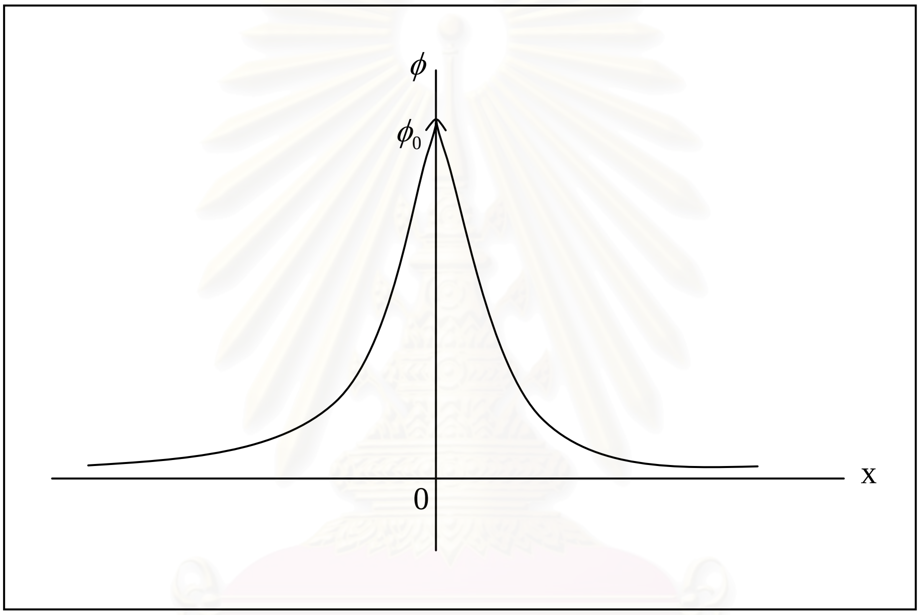


รูปที่ 2.2 Debye Shielding

เนื่องจากพลาสมาประกอบขึ้นจากไอออนและอิเล็กตรอนซึ่งเป็นอนุภาคที่มีประจุ พลาสมาจึงมีความสามารถที่จะหักล้างสนามไฟฟ้าจากประจุภายนอก เกิดการกักเก็บประจุไฟฟ้า ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า Debye Shielding จากรูปที่ 2.2 แสดง Debye Shielding เมื่อใส่สนามไฟฟ้าลงไปในพลาสมาด้วยขั้วลูกบอลที่มีขั้วตรงกันข้ามกันตามรูป ลูกบอลจะเหนี่ยวนำอนุภาคที่มีประจุตรงกันข้ามกับมันเข้าหาตัวมัน ทำให้เกิดกลุ่มประจุลบหรืออิเล็กตรอนและกลุ่ม

ประจุบวกหรือไอออนขึ้น ถ้าพลาสมามีอุณหภูมิต่ำ อนุภาคในพลาสมาจะมีความสามารถในการเคลื่อนที่เนื่องจากการชนกันเองต่ำ การกักเก็บประจุในพลาสมาก็จะมีความสมบูรณ์มาก แต่ถ้าพลาสมามีอุณหภูมิสูงกระทั่งการเคลื่อนที่อันเนื่องมาจากความร้อนมีนัยสำคัญขึ้น อนุภาคของพลาสมาจะขยายขนาดการกระจายออกไปทำให้มีรัศมีกว้างไกลขึ้น

เมื่อพิจารณาขนาดระยะที่กักเก็บอนุภาคในพลาสมา โดยผลจาก Debye Shielding โดยพิจารณาว่า ศักย์ไฟฟ้ามีค่าเป็น ϕ_0 ณ ตำแหน่ง x = 0 โดยที่อัตราส่วนของมวลไอออนต่อมวลอิเล็กตรอน มีค่ามากๆกระทั่งเป็นผลให้ดูเหมือนว่าไอออนไม่เคลื่อนที่เมื่อเทียบกับอิเล็กตรอน



รูปที่ 2.3 การกระจายศักย์ไฟฟ้าใกล้กริดในพลาสมา

จากสมการ Poisson ใน 1 มิติ ซึ่งเขียนไว้ว่า

$$\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \varepsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = e(n_e - n_i) \tag{2.4}$$

ถ้า n_∞ คือ ความหนาแน่นเฉลี่ยของอนุภาคในพลาสมา การพิจารณาว่ามวลของไอออนมากกว่ามวลของอิเล็กตรอนมากๆ จะประมาณความหนาแน่นของไอออนได้ว่า

$$n_i = n_\infty$$

ขณะที่การกระจายอิเล็กตรอนสามารถเขียนได้ด้วยฟังก์ชันการกระจายของแมกซ์เวลล์จากสมการ 2.1

$$f(u) = A\exp\left(\frac{\frac{1}{2}mu^2}{KT_e}\right)$$

สามารถหาความหนาแน่นของอิเล็กตรอนได้ โดยแทนค่าสมการ 2.1 ในสมการ 2.2 แล้วอินทิเกรต ซึ่งจะทำให้ได้ว่า

$$n_e = n\exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) \tag{2.5}$$

แทนสมการ (2.5) ในสมการ (2.4) จะได้

$$\varepsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = en\left[\exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) - 1\right] \tag{2.6}$$

ถ้า $\left|\frac{e\phi}{KT_e}\right| << 1$ แล้วจะสามารถกระจายฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียลด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ ทำให้สามารถประมาณได้ว่า

$$\varepsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{n_\infty e^2}{K_e T}\phi$$

ในที่นี้กำหนดให้

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 KT_e}{ne^2}} \tag{2.7}$$

เรียก λ_D ว่า Debye Length เป็นระยะที่อนุภาคจะสามารถรับรู้ศักย์ไฟฟ้าที่กระทำต่อพลาสมาและอนุภาคที่อยู่นอกระยะนี้จะเสมือนว่าไม่ได้รับผลกระทบจากศักย์ดังกล่าว เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า Debye Shielding อาศัยปรากฏการณ์ Debye Shielding จากตำแหน่งที่ปรากฏศักย์ ϕ ภายนอก จะคำนวณ ศักย์ไฟฟ้า ณ ตำแหน่ง x ใดๆ ได้เป็น

$$\phi(x) = \phi_0 \exp\left(\frac{-|x|}{\lambda_D}\right) \tag{2.8}$$

หนึ่งในเงื่อนไขวิกฤตของพลาสมา คือ มีความหนาแน่นพลาสมามากพอจนกระทั่ง λ_D มีขนาดน้อยกว่าขนาดของระบบ L มากๆ

ในระบบทรงกลม Debye Sphere คือ ปริมาตรทรงกลมรัศมี Debye Length λ_D และ N_D คือ จำนวนอนุภาคที่ถูกกักไว้ในทรงกลมอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์ Debye Shielding ของพลาสมาแล้วจะคำนวณได้ว่า

$$N_D = \frac{4}{3}\pi n {\lambda_D}^3 = 1.38 \times 10^6 \sqrt{\frac{T^3}{n}}$$

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีการกระจายแบบแมกซ์เวลล์ ดังนั้น จำนวนอนุภาค N_D อันเป็นจำนวนอนุภาคที่แสดงพฤติกรรมจาก Debye Shielding จึงต้องมีจำนวนมากกว่า 1 มากๆ เพื่อให้มีความหมายในเชิงสถิติ

ดังนั้น เงื่อนไขของการเป็นพลาสมานอกจากจะต้องมี $\lambda_D << L$ แล้ว ยังต้องมี $N_D >> 1$ ด้วย

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างภาวะพลาสมากับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

<u>สมการของแมกซ์เวลล์</u>

ในตัวกลางใดๆ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \sigma$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{d}{dt}\vec{D}$$

ในสุญญากาศ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\vec{E})$$

(2.9)

โดยที่ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

และ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\vec{j} = \sigma \vec{u}$

โพลาไรเซชันและแมกเนไทเซชันของตัวกลางทำให้เกิดการกักเก็บประจุและทำให้ความหนาแน่นของกระแสในตัวกลางเพิ่มขึ้น สำหรับตัวกลางใดๆผลของโพลาไรเซชั่นและแมกเนไทเซชันจะถูกกำหนดเข้าไปในปริมาณ $\vec{D}$ และ $\vec{H}$ ในเทอมของ ε และ μ ในกรณีของพลาสมาซึ่งประกอบไปด้วยไอออนและอิเล็กตรอนที่มีจำนวนเกือบเท่ากันนั้นทำให้เกิดการกักเก็บอนุภาคและ

เกิดกระแสไฟฟ้าในพลาสมาขึ้น เมื่ออนุภาคที่มีประจุเหล่านี้มีการเคลื่อนที่ที่ซับซ้อน ความพยายามที่จะรวบรวมผลของโพลาไรเซชันและแมกเนไทเซชันที่เกิดขึ้นในตัวกลางเข้าไปในค่าคงที่ ε และ μ นั้นมีความยุ่งยากมาก แต่สำหรับในตัวกลางที่เป็นสุญญากาศแล้วผลของการกักเก็บประจุและกระแส (σ และ $\vec{j}$) ทั้งหมดซึ่งรวมผลทั้งจากภายนอกและภายในนั้นสามารถรวบรวมเข้าไปยัง ε_0 และ μ_0 ได้ซึ่งปริมาณนี้มีความสัมพันธ์กับปริมาณ $\vec{E}$ และ $\vec{B}$ ตามลำดับ

2.5 สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดี่ยว

พลาสมาที่มีความหนาแน่นต่ำจะประพฤติตัวเหมือนอนุภาคเดี่ยวอิสระที่มาอยู่รวมกัน เนื่องจากความหนาแน่นที่ต่ำทำให้มีโอกาสน้อยที่อนุภาคจะกระเจิงหรือชนกับอนุภาคตัวอื่นหรือรับรู้แรงกระทำจากอนุภาคที่มีประจุตัวอื่นๆ โดยตรง แต่สามารถรับรู้อิทธิพลของอนุภาคตัวอื่นๆ โดยรอบได้จากสนามไฟฟ้าภายในสุทธิ

กรณีสนามไฟฟ้า $\vec{E} = 0$ และสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ สม่ำเสมอ

สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในสนามแม่เหล็กซึ่งอยู่ในทิศ z

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

จะได้

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

จะเห็นว่า อนุภาคมีการเคลื่อนที่เป็นวงปิดเสมือนการสั่นแบบฮาร์โมนิคด้วยความถี่ ω_c ที่เรียกว่า ความถี่ไซโคลตรอน (cyclotron frequency)

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

ความเร็วในการเคลื่อนที่ในทิศ $\hat{x}$ และ $\hat{y}$

$$v_x = v_\perp \exp(i\omega_c t)$$

$$v_y = iv_\perp \exp(i\omega_c t)$$

การกระจัดของอนุภาคในทิศ $\hat{x}$ และ $\hat{y}$

$$x - x_0 = -i\frac{v_\perp}{\omega_c}\exp(i\omega_c t) \qquad (2.10)$$

$$y - y_0 = \frac{v_\perp}{\omega_c}\exp(i\omega_c t) \qquad (2.11)$$

ถ้ากำหนดให้

$$r_L \equiv \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{|q|B}$$

เรียก r_L ว่า Lamor Radius

พิจารณาส่วนจริงของสมการ (2.10) และ (2.11) ซึ่งจะได้ว่า

$$x - x_0 = r_L \sin(\omega_c t)$$

$$y - y_0 = r_L \cos(\omega_c t)$$

จะเห็นว่า อนุภาคมีการเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกนสมมติที่เรียกว่า guiding center (x_0,y_0) ทั้งนี้อนุภาคจะสร้างสนามแม่เหล็กที่มีทิศตรงกันข้ามกับทิศของสนามแม่เหล็กภายนอกเสมอ ดังนั้น ความแรงของสนามแม่เหล็กที่รู้สึกได้ของพลาสมาจะมีขนาดลดลงและทำให้พลาสมามีลักษณะเป็น diamagnetic

การเคลื่อนที่ในแนวแกน z ไม่ได้รับอิทธิพลจากสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ หาก v_z มีค่าไม่เป็นศูนย์ อนุภาคจะมีการเคลื่อนที่หมุนวนเป็นเกลียว (helix) ขึ้นหรือลงตามแกน z ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับทิศทางของ v_z

2.6 สมการการเคลื่อนที่ของของไหล

การอธิบายปรากฏการณ์ทางพลาสมานั้นต้องพิจารณาถึงสิ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับองค์ประกอบภายในของพลาสมา จากสมการแมกซ์เวลล์ซึ่งได้อธิบายถึงสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ ว่าทำให้เกิดพลาสมาขึ้นดังนั้นในการประมาณของไหลพลาสมาจึงต้องมีสมการที่แสดงถึงผลของสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ สำหรับกรณีอย่างง่าย เราจะพิจารณาพลาสมาที่ประกอบไป

ด้วยอนุภาค 2 ชนิด คือ อิเล็กตรอน และ ไอออน ทำให้มีสมการการเคลื่อนที่ 2 สมการสำหรับแต่ละชนิด สำหรับกรณีก๊าซที่ถูกไอออนไนซ์จะต้องพิจารณาสมการสำหรับของไหลสำหรับอะตอมที่เป็นกลาง โดยของไหลที่เป็นกลางจะรับรู้การกระทำของไอออนและอิเล็กตรอนผ่านทางการชนเท่านั้น แต่สำหรับของไหลไอออนและอิเล็กตรอนนั้นจะสามารถรับรู้การกระทำของของไหลอีกชนิดหนึ่งจากสนาม $\vec{E}$ และ $\vec{B}$ โดยไม่จำเป็นต้องชนกัน

2.6.1 <u>สมการการไหลแบบพาบังคับ</u>

สมการของไหลสามารถบรรยายได้ว่า

$$mn\frac{d}{dt}\vec{u} = qn\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right) \tag{2.12}$$

จะเห็นว่า สมการดังกล่าวไม่สะดวกที่จะนำมาใช้พิจารณาการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นต่อเวลา (time derivative) เพราะ fluid element มีการเปลี่ยนแปลงใน space ในขณะที่มีเปลี่ยนแปลงต่อเวลาด้วย

ดังนั้นเพื่อจะทำการแปลงตัวแปรในกรอบที่ fixed ไว้ เราจะพิจารณา $G(x,t)$ ว่ามีการเปลี่ยนแปลงของ x กับเวลา t ในกรอบการเคลื่อนที่ของของไหล

$$\frac{d}{dt}G(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}G + \frac{\partial}{\partial t}G\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}G + u_x\frac{\partial}{\partial t}G$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}G + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)G$$

จากการพิจารณา u(x,t) ในทำนองเดียวกันกับ G(x,t) จะทำให้สมการการเคลื่อนที่ของของไหล สามารถเขียนได้ว่า

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = qn\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right) \tag{2.13}$$

2.6.2 <u>สมการความต่อเนื่อง</u>

โดยทั่วไปสสารจะอนุรักษ์จำนวนอนุภาคทั้งหมด (N) ที่เป็นองค์ประกอบอยู่ในปริมาตร V ไว้ ซึ่งจะยอมให้มีการเปลี่ยนแปลงจำนวนอนุภาคได้ก็ต่อเมื่อการเปลี่ยนแปลงนั้นเป็นการเปลี่ยนแปลงสุทธิที่เกิดขึ้นข้ามพื้นผิว S ที่ปิดล้อมปริมาตรนั้น

$$\frac{\partial}{\partial t}N = \int_V \frac{d}{dt} n \, dV = -\oint n\bar{u} \cdot d\bar{s} = -\oint_V \bar{\nabla} \cdot n\bar{u} \, dV$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (n\bar{u}) = 0 \tag{2.14}$$

เรียกสมการดังกล่าวว่าสมการความต่อเนื่อง (equation of continuity) สำหรับแต่ละชนิดของของไหล ถ้ามี sources หรือ sinks ที่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของอนุภาคขึ้น เทอมดังกล่าวจะถูกเพิ่มเข้ามาทางขวามือของสมการ

2.6.3 สมการการไหลของพลาสมา

กรณีอย่างง่าย เราจะพิจารณาว่าพลาสมาประกอบไปด้วยของไหล 2 ชนิด คือ ไอออนและอิเล็กตรอน

ประจุและความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นในพลาสมาเป็นผลรวมของประจุและกระแสของไอออนและอิเล็กตรอน

$$\sigma = n_i q_i + n_e q_e$$

$$j = n_i q_i v_i + n_e q_e v_e$$

สมการต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการพิจารณาของไหลพลาสมาประกอบไปด้วย

สมการแมกซ์เวลล์

$$\varepsilon_0 \bar{\nabla} \cdot \vec{E} = n_i q_i + n_e q_e$$

$$\bar{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}(\bar{\nabla} \times \vec{B}) = n_i q_i \bar{u}_i + n_e q_e \bar{u}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

สมการการเคลื่อนที่ของของไหล

$$m_j n_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_j + (\vec{u}_j \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_j \right) = q_j n_j \left(\vec{E} + \vec{u}_j \times \vec{B} \right)$$

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_j \vec{u}_j) = 0$$

จะเห็นว่า ปริมาณที่เราไม่ทราบค่า คือ $n_i, n_e, \vec{u}_i, \vec{u}_e, \vec{E}$ และ $\vec{B}$

2.7 การเลื่อนตำแหน่งในแนวตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก

ถ้า fluid element ประกอบด้วยอนุภาคเดี่ยวจำนวนมาก สิ่งที่เราคาดหวังก็คือของไหลมีการเคลื่อนที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ โดยมี guiding center ของอนุภาคแต่ละตัวเลื่อนตำแหน่งออกไปจากเดิม สำหรับ fluid element แต่ละชนิดจะมีสมการการเคลื่อนที่ซึ่งเขียนได้ว่า

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) = qn\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) \tag{2.15}$$

ในกรณีที่มีการเลื่อนตำแหน่งช้ามากเมื่อเทียบกับการหมุนวนอันเนื่องมาจากสนามแม่เหล็ก ($\omega << \omega_c$) เราสามารถกำจัดเทอมแรกทางซ้ายของสมการทิ้งได้ และในกรณีที่สนาม $\vec{E}$ และ $\vec{B}$ มีลักษณะ uniform แต่ปริมาณ n มี gradient เทอม $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ จะหายไป

โดยการ take $\times \vec{B}$ ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$mn\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) \times \vec{B} = qn\left(\vec{E} \times \vec{B} + (\vec{u} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right)$$

$$0 = qn\left(\vec{E} \times \vec{B} + (\vec{u}_\perp \times \vec{B}) \times \vec{B} \right)$$

$$= qn\left(\vec{E} \times \vec{B} + (-u_\perp B^2) + \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_\perp) \right)$$

$$= qn\left(\vec{E} \times \vec{B} - u_\perp B^2 \right)$$

fluid element เคลื่อนที่ตั้งฉากกับสนามทั้ง 2

$$\bar{u}_{\perp} = \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{B^2} \tag{2.16}$$

เรียก $\bar{u}_E = \dfrac{\bar{E} \times \bar{B}}{B^2}$ ว่า $\bar{E} \times \bar{B}$ drift velocity

การเลื่อนตำแหน่งด้วยความเร็ว $\bar{u}_E$ เป็นการเลื่อนตำแหน่งเดียวกับการเลื่อนตำแหน่งของ guiding center ถ้าพลาสมามีการเคลื่อนที่ด้วยความร้อนจะมีเทอม $\bar{u}_D$ เพิ่มเข้ามา

$$\bar{u}_D = -\frac{\bar{\nabla} p \times \bar{B}}{qnB^2} \tag{2.17}$$

ซึ่งเรียกว่า diamagnetic drift

2.8 การประมาณพลาสมา

ลักษณะที่สำคัญของพลาสมาที่ประยุกต์ไปใช้อย่างกว้างขวางซึ่งเราได้เคยใช้เพื่อพิจารณาสนามไฟฟ้า $\bar{E}$ จากสมการ Poisson ไปแล้วโดยการกำหนด charge density σ เข้าไปในพลาสมา ในทางกลับกันถ้าพิจารณา $\bar{E}$ จากสมการการเคลื่อนที่และสมการ Poisson แล้วนำไปพิจารณาหา σ ก็สามารถทำได้ ทั้งนี้เพราะพลาสมามีความพยายามที่จะรักษาความเป็นกลางทางไฟฟ้า โดยถ้าไอออนเคลื่อนที่ อิเล็กตรอนก็จะเคลื่อนที่ตามไปด้วย สนามไฟฟ้า $\bar{E}$ ก็ปรับค่า ดังนั้นอิเล็กตรอนและไอออนจึงเคลื่อนที่ในวงโคจรที่จะรักษาสภาพความเป็นกลางทางไฟฟ้าเอาไว้ ซึ่ง σ ก็จะต้องปรับค่าตามไปด้วย ดังนั้นสมการ Poisson จึงสามารถนำมาใช้พิจารณาได้สำหรับการเคลื่อนที่ด้วยความถี่ต่ำซึ่งความเฉื่อยของอิเล็กตรอนไม่ส่งผลต่อการเคลื่อนที่

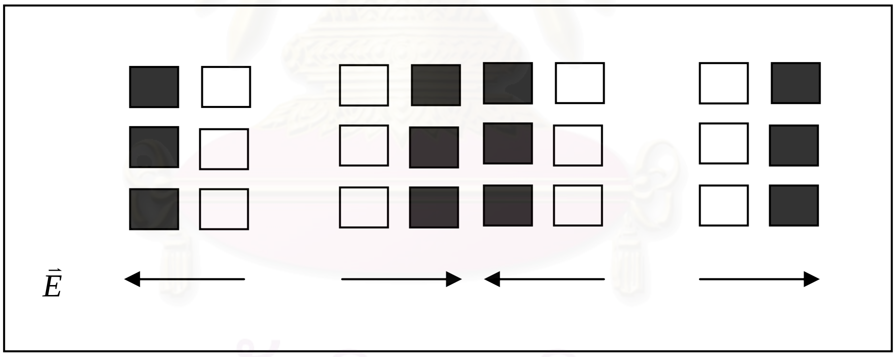
ในกรณีของพลาสมามีความเป็นไปได้ที่จะสมมติว่า $n_i = n_e$ และ $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} \neq 0$ ที่เวลาเดียวกัน เราเรียกว่าการประมาณพลาสมา (plasma approximation) สำหรับ fluid equation เราจะกำหนดให้ $n_i = n_e = n$

การประมาณพลาสมาเกือบจะเหมือนกับเงื่อนไขของ quasineutrality ในกรณีของพลาสมาเองก็มีความพยายามที่จะทำให้ตัวเองเป็นกลางในสถานะผ่อนคลาย (rest state) การประมาณพลาสมาว่า $n_i = n_e$ แทนลงในสมการ Poisson สามารถทำได้ในกรณีที่พลาสมานั้นประกอบไปด้วยองค์ประกอบที่มีมวลแตกต่างกันมาก เมื่อของไหลชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ ของไหลชนิด

อื่นจะไม่สามารถเคลื่อนที่ตามไปได้ อย่างเช่น กรณีของไหลอิเล็กตรอนที่มีความถี่สูง ของไหลไอออนเสมือนไม่เคลื่อนที่ตามไป ทำให้การประมาณพลาสมามีความสมเหตุสมผลและสามารถพิจารณาสนามไฟฟ้า E จากสมการแมกซ์เวลล์ได้

2.9 การสั่นของพลาสมา

ถ้าอิเล็กตรอนในพลาสมามีการเปลี่ยนแปลงไปจากลักษณะที่ uniform กับไอออนแล้ว สนามไฟฟ้าจะถูกสร้างขึ้นเพื่อทำให้พลาสมาเป็นกลางโดยการดึงอิเล็กตรอนให้กลับเข้าไปที่ตำแหน่งศูนย์กลาง แต่เนื่องจากความเฉื่อยของอิเล็กตรอนจึงทำให้เกิด overshoot ขึ้น ทำให้อิเล็กตรอนสั่นรอบตำแหน่งสมดุลด้วยความถี่พลาสมา การสั่นนี้เร็วมากซึ่งไอออนที่มีมวลมากกว่าจะไม่ตอบสนองต่อการสั่นนี้ในเวลาเดียวกันได้ ซึ่งอาจพิจารณาว่าไอออนถูกตรึงอยู่กับที่ จากรูป 2.4 แสดงกลไกการสั่นในพลาสมา โดยรูปสี่เหลี่ยมสีขาวแทน element ของของไหลไอออนและสีดำแทนของไหลอิเล็กตรอน ประจุลัพธ์ที่เกิดขึ้นทำให้เกิดสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ที่เคลื่อนที่เป็นคาบใน space ซึ่งนำไปสู่การทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่กลับไปกลับมารอบตำแหน่งที่ทำให้พลาสมาเป็นกลางทางไฟฟ้า



รูปที่ 2.4 แสดงกลไกการสั่นในพลาสมา

สำหรับกรณีอย่างง่ายซึ่งเราจะพิจารณาพลาสมาว่ามีการสั่นด้วยความถี่พลาสมา ซึ่งมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. ไม่มี B
2. KT= 0 (ไม่มี thermal motion)
3. ไอออนถูก fixedใน space ด้วยการกระจายอย่าง uniform
4. พลาสมาขยายได้อย่างไม่จำกัด
5. อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ใน x-directionโดย $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x}; \vec{E} = E\hat{x}; \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0; \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

ดังนั้น การสั่นที่เกิดขึ้นจะเป็นการสั่นด้วยไฟฟ้าสถิต (Electrostatic oscillation) ไม่มีสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$

สมการการเคลื่อนที่และสมการความต่อเนื่อง เขียนได้ว่า

$$mn_e\left(\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla)\vec{v}_e\right) = -en_e\vec{E}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(n_e\vec{v}_e) = 0$$

เราจะใช้สมการแมกซ์เวลล์ที่จำเป็นซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ ในการพิจาณาปัญหา สำหรับกรณีนี้เป็นกรณียกเว้นในเงื่อนไขที่ว่า Poisson equation ไม่สามารถใช้หา $\vec{E}$ ที่สั่นด้วยความถี่สูงได้ เนื่องจากความเฉื่อยของอิเล็กตรอนมีผลต่อการเคลื่อนที่และความเบี่ยงเบนไปจากการเป็นกลางทางไฟฟ้า โดยเราสามารถเขียนสมการ Poisson ในหนึ่งมิติได้ว่า

$$\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial x} = e(n_i - n_e) \qquad (2.18)$$

จากสมการ 2.18 แทนตัวแปรต่างๆ ในสมการด้วยวิธีการประมาณเชิงเส้น (linearization) ดังนี้

$$n_e = n_0 + n_1 \quad , \quad v_e = v_0 + v_1 \quad \text{และ} \quad E = E_0 + E_1 \qquad (2.19)$$

ในกรณีที่ไม่มีการสั่นปริมาณต่างๆจะอยู่ในลักษณะสมดุลซึ่งแสดงถึงสถานะของพลาสมาที่เป็นกลางและ uniform โดยเราจะสมมติว่าพลาสมามีลักษณะดังกล่าวที่สถานะพักของมันก่อนที่อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ ซึ่งเราจะได้

$$\vec{\nabla}n_0 = v_0 = E_0$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1\right) = -eE_1 \qquad (2.20)$$

ถ้า $\vec{v}_1$ มีค่าน้อย ดังนั้นเทอม $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1$ ซึ่งเป็นเทอม $\vec{v}_1$ ยกกำลัง 2 จะมีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมอื่นๆ จึงสามารถตัดทิ้งได้

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_0 v_1 + n_1 v_1) = 0$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \vec{\nabla} \cdot v_1 + v_1 \vec{\nabla} n_0 = 0 \tag{2.21}$$

จากสมการ Poisson จะสังเกตุเห็นว่า $n_{i0} = n_{e0}$ และ $n_{i1} = 0$ คือเราสามารถตรึงตำแหน่งของไอออนได้ ดังนั้น

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -en_1 \tag{2.22}$$

ปริมาณการสั่นสามารถสมมติว่าเป็น sinusoidal ได้

$$v_1 = \bar{v}_1 e^{i(kx-\omega t)} \hat{x}$$

$$n_1 = \bar{n}_1 e^{i(kx-\omega t)} \hat{x} \tag{2.23}$$

$$E_1 = \bar{E}_1 e^{i(kx-\omega t)} \hat{x}$$

ทำให้ได้

$$im\omega v_1 = -eE_1$$

$$i\omega n_1 = -n_1 ikv_1 \tag{2.24}$$

$$ik\varepsilon_0 E_1 = -en_1$$

แทน n_1 และ E_1 จากสมการ 2.23 ลงในสมการ 2.24 จะได้

$$-im\omega v_1 = -e\left(\frac{-e}{ik\varepsilon_0}\right)\left(\frac{-n_0 ikv_1}{-i\omega}\right) = \frac{-in_0 e^2 v_1}{\varepsilon_0 \omega} \tag{2.25}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0} \tag{2.26}$$

ความถี่พลาสมา (plasma frequency)

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}} \quad rad/\mathrm{sec} \tag{2.27}$$

บทที่ 3
วิธีการเชิงตัวเลข

3.1 บทนำ

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีจุดมุ่งหมายเพื่อเตรียมวิธีการที่มีความเหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และสามารถนำเอาข้อมูลที่เป็นประโยชน์จากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ไปใช้ต่อไป ซึ่งปัญหาอาจจะถูกกำหนดอยู่ในเทอมหรือสมการทางคณิตศาสตร์ที่ยากเกินความเข้าใจ เช่น สมการอนุพันธ์สามัญ, สมการอินทิกรัล หรืออยู่ในรูปของระบบสมการดังกล่าว ในการแก้ปัญหาอาจต้องพิจารณาสมมติฐาน เงื่อนไขที่เกี่ยวข้อง และเป็นปัจจัยเฉพาะของปัญหา แต่บ่อยครั้งพบว่าไม่ได้เป็นเช่นนั้น เมื่อได้แก้ปัญหาด้วยการวิเคราะห์แล้วคำตอบที่ได้จะมีความถูกต้องอยู่ในตัวของมันเองโดยไม่ต้องอาศัยเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นเลย แต่คำตอบที่ได้อาจจะอยู่ในรูปแบบที่ไม่คุ้นเคยเนื่องจากในความเป็นจริงปัญหาที่เกิดขึ้นไม่ได้เป็นไปตามกฎเกณฑ์ที่แสดงออกมาอยู่ในเทอมตัวเลขโดยตรง ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขนั้นจะพยายามหาวิธีที่จะนำไปสู่ผลที่ปรากฏขึ้นด้วยวิธีการที่เป็นที่ยอมรับหรืออยู่ในรูปแบบพื้นฐานของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแทนรูปแบบทั่วๆไป

บ่อยครั้งที่ปัญหาที่เกิดขึ้นนั้นอาจจะไม่สามารถหาวิธีการแก้ปัญหาที่มีรูปแบบที่แน่นอนหรือมีความสะดวกในการแก้ปัญหานั้นได้ สำหรับกรณีดังกล่าวจึงมีความจำเป็นที่จะต้องประมาณปัญหานั้นออกมาโดยการวิเคราะห์ด้วยกฎเกณฑ์ที่แน่นอน ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะหาวิธีการแก้ปัญหาที่ถูกประมาณนั่นโดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขซึ่งสามารถนำไปสู่วิธีการแก้ปัญหาที่ใกล้เคียงกับสิ่งที่เกิดขึ้นจริงได้

ในบางกรณี ด้วยตัวของปัญหาเองก็อาจจะไม่สามารถกำหนดให้อยู่ในรูปแบบที่ชัดเจนได้ จึงทำให้ต้องวิเคราะห์ปัญหานั้นโดยการแยกพิจารณาปัญหาออกเป็นส่วนๆ ซึ่งในบางกรณีก็อาจจะใช้ข้อมูลที่ได้จากการประมาณก่อนหน้าที่เป็นที่ยอมรับซึ่งอาจจะอยู่ในรูปของอินทิกรัลฟังก์ชันที่ไม่สามารถแสดงให้อยู่ในเทอมของตัวเลขที่มีค่าจำกัดได้ ทั้งนี้วัตถุประสงค์ก็เพื่อจะนำเอาข้อมูลที่เป็นประโยชน์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันนั้นไปใช้

โดยทั่วๆ ไปแล้วการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจะพยายามหาวิธีการแก้ปัญหาที่จะทำให้การประมาณมีความแตกต่างจากความจริงน้อยกว่าค่าที่เรียกว่า special tolerance เมื่อข้อมูลที่เราได้รับทำให้เราได้วิธีการแก้ปัญหาที่คลาดเคลื่อนไป สิ่งที่เราสามารถทำได้ ก็คือ เราจะต้องทำการวัดให้ได้ค่าที่เชื่อถือได้แล้วนำค่าที่ได้ไปใช้ในการประมาณซึ่งจะต้องเป็นการประมาณที่เข้าได้กับการวัดนั้น ทั้งนี้ก็เพื่อให้ความคลาดเคลื่อนอยู่ในค่าที่ยอมรับได้

โดยทั่วๆไปแล้วมักนิยมแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่มีความสามารถนำไปสู่คำตอบที่มีความต่อเนื่องอย่างแม่นยำ ในสถานการณ์ต่างๆนั้น ถึงแม้ว่าข้อมูลจะมีความน่าเชื่อถือและสามารถทำการคำนวณได้ก็ตาม แต่ก็ยังคงมีการศึกษาเพื่อหาวิธีการทางเลือกอื่นๆที่อาจจะเป็นประโยชน์ต่อการวิเคราะห์ปัญหา อย่างไรก็ตาม ทางการวิเคราะห์เชิงตัวเลขล้วนแต่มีความมุ่งหมายที่จะดำเนินไปเพื่อเตรียมวิธีการที่เหมาะสมสำหรับใช้แก้ปัญหา การพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาในปัจุบันนั้นได้รับความสนับสนุนจากความสามารถทางการคำนวณของเครื่องคำนวณและเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นอย่างมาก จึงทำให้วิธีการที่แน่นอนที่รู้จักกันมาเป็นเวลานานซึ่งมีข้อดีทางทฤษฎีแต่ไม่มีความสะดวกในทางการคำนวณ อย่างเช่น ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดของแรงซึ่งเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเวลา ซึ่งถ้าต้องคำนวณด้วยมือหรือด้วยการคำนวณ โดยวิธีพื้นฐานจากการใช้ตารางแล้ว ก็คงทำให้เราไม่สามารถพิจารณาปัญหาในขนาดที่ใหญ่ซึ่งเราต้องการทราบได้เลย แต่ด้วยวิธีการที่เหมาะสมร่วมกับความสามารถทางการคำนวณของเครื่องมือในปัจจุบันทำให้เราสามารถคำนวณค่าที่เราต้องการทราบได้

3.1.1 <u>เทคนิคการประมาณ</u>

ในหลายๆปัญหาซึ่งเกิดขึ้นในการวิเคราะห์ทางตัวเลข เราจะให้ข้อมูลที่แน่นอนของฟังก์ชัน f(x) และเราต้องการที่จะทราบข้อมูลเพิ่มขึ้นหรือต้องการที่จะแก้ไขข้อมูลนั้นให้อยู่ในรูปทางตัวเลขที่เข้าใจได้ง่าย ซึ่งโดยปกติแล้ว f(x) เป็นสิ่งที่ทราบหรือต้องการที่จะดำเนินการคำนวณหาค่าต่อไปในช่วง x ที่สนใจ

เทคนิคที่ใช้กันบ่อยในกรณีดังกล่าวสามารถอธิบายในเทอมทั่วๆไป โดยให้มีเซตของฟังก์ชันจำนวน n+1 ค่า คือ $phi_0(x)$, $phi_1(x)$, …, $phi_n(x)$ จากนั้นทำให้ฟังก์ชันดังกล่าวมีคุณสมบัติที่จะนำมาซึ่งข้อมูลที่เราต้องการด้วยวิธีการที่ง่ายและให้ข้อมูลที่มีความแม่นยำ ถ้า f(x) เป็นสมาชิกของเซต S_n ซึ่งเป็นเซตของฟังก์ชันทั้งหมดโดยการรวมเชิงเส้นของคอออดิเนตฟังก์ชันที่มีความถูกต้อง เราจะประมาณปัญหาด้วยกระบวนการที่จะนำไปสู่การเลือกฟังก์ชันที่เรียกว่า $y_n(x)$ ทั้งหมดใน S_n ซึ่ง $y_n(x)$ มีคุณสมบัติเป็นเส้นตรง ถ้า f(x) อยู่ใน S_n แล้วคุณสมบัติที่ต้องการของ f(x) ก็คือ คุณสมบัติที่ประมาณด้วยคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับ $y_n(x)$ ได้ ด้วยวิธีการดังกล่าวจะมีฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติของค่า f(x) ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่ไม่ทำงานในวิธีการที่เลือกดังนั้นจึงทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการประมาณนี้ขึ้น

อันดับแรกสุดของวิธีการแก้ปัญหาใดๆก็ตาม ก็คือ เลือกคอออดิเนตฟังก์ชันที่มีความสะดวกต่อการคำนวณฟังก์ชันนั้นจำนวน n+1 ฟังก์ชันซึ่งอยู่ในรูปของ 1, x, x^2, …, x^n โดยจะ

ก่อให้เกิดสมการทางคณิตศาสตร์ในรูปของโพลีโนเมียลกำลัง n หรือ น้อยกว่า n เมื่อหาค่าต่างๆ ของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันโพลีโนเมียลได้แล้ว ผลการอินทิเกรตและอนุพันธ์ของฟังก์ชันโพลีโนเมียลที่ได้ก็จะมีลักษณะเป็นโพลีโนเมียลด้วยเช่นกัน

กระบวนการเลือก S_n ที่เหมาะสมต้องเลือกให้ S_n เกี่ยวข้องกับข้อมูลซึ่งบรรยายได้ด้วยฟังก์ชัน f(x) ทั้งนี้ f(x) ต้องสามารถคำนวณค่าอย่างน้อยที่สุด n+1 จำนวนของ x นั่นคือ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ในกรณีอย่างง่าย วิธีการซึ่งได้รับความนิยมใช้กันมาก ก็คือ การเลือกสมาชิก S_n ให้เป็นฟังก์ชัน $y_n(x)$ ลงบนค่า f(x) สำหรับแต่ละค่าของ x ในที่นี้การเลือกให้ S_n เป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียล จะมีความสะดวกในการพิจารณาปัญหา อย่างไรก็ตามในบางกรณีอาจจะไม่มีฟังก์ชัน $y_n(x)$ ใน S_n หรืออาจจะมี $y_n(x)$ ได้หลายค่าซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเนื่องจาก S_n นั้นประกอบไปด้วยฟังก์ชัน polynomial ที่มีมากกว่า 1 ตัวที่มีกำลังเดียวกันกระทำอยู่บนจุดของ n+1 จุด

ปัญหาของวิธีการเชิงตัวเลขต่อมา ก็คือ การหาวิธีการที่เหมาะสมในการประมาณความคลาดเคลื่อนให้มีความถูกต้อง การประมาณความคลาดเคลื่อนดังกล่าวนั้นขึ้นอยู่กับปริมาณของข้อมูลที่มีความสัมพันธ์กับ f(x) และรูปแบบของข้อมูลที่สนับสนุน f(x) นั้น ถ้าข้อมูลทั้งหมดมีความจำเป็นต่อการเลือกฟังก์ชันจะทำให้การประมาณความคลาดเคลื่อนมีความยุ่งยากมาก

3.1.2 <u>ความคลาดเคลื่อน</u>

การคำนวณทางคณิตศาสตร์เกือบทั้งหมดมีความคลาดเคลื่อนอยู่ ทั้งนี้อาจเพราะความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่ได้รับซึ่งการคำนวณต้องอาศัยข้อมูลนั้นหรือเป็นเพราะความไม่ถูกต้องจากการวิเคราะห์ข้อมูลเหล่านั้นในภายหลัง ความคลาดเคลื่อนที่เด่นชัด (gross error) มีสาเหตุมาจากความผิดพลาดที่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับการคำนวณหากแต่เกิดขึ้นจากคนและเครื่องมือที่ใช้ในการวัด round off error คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการใช้ตัวเลขที่มีค่านัยสำคัญจำกัด สำหรับในกรณีที่มีความแน่นอนสูง ความคลาดเคลื่อนจะแสดงออกมาอยู่ในข้อมูลที่ได้รับซึ่งเรียกกรณีนี้ว่า inherent error เนื่องจากในความเป็นจริงข้อมูลเหล่านั้นเป็นเอมพิริคอล (empirical) และอุปกรณ์ก็มีความสามารถจำกัดที่จะแสดงผลอย่างครบถ้วน

มีความสะดวกที่จะนิยาม truncation error ขึ้นซึ่งเป็นความคลาดเคลื่อนที่ไม่เป็นทั้ง gross error และ round-off error โดย truncation error เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเมื่อสถานการณ์สมมติในสิ่งที่ซึ่งไม่มีความผิดพลาดโดยข้อมูลที่ได้รับทั้งหมดมีความถูกต้องและไม่จำกัดค่าทศนิยมสำหรับใช้เก็บค่าในทางการคำนวณ ซึ่งส่วนมาก truncation error จะเกี่ยวข้องกับความจริงที่ว่าใน

ขณะที่ผลมีความถูกต้องแต่วิธีการดำเนินการจะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นอันเนื่องจากขั้นตอนการปฏิบัติการที่ทำได้เพียงจำกัด

โดยเราจะนิยามความคลาดเคลื่อนให้สัมพันธ์กับค่าที่ประมาณซึ่งเป็นผลของการลบค่าประมาณออกจากค่าจริง

ค่าจริง = ค่าประมาณ + ค่าความคลาดเคลื่อน

การนิยามก่อนหน้านี้สามารถแสดงได้ดังตัวอย่างเช่น การคำนวณอนุกรมกำลัง ถ้าอนุพันธ์อันดับที่ n ของ f(x) มีความต่อเนื่องที่ทุกตำแหน่งบนช่วง (a,x) เราสามารถประมาณ f(x) ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ที่มีค่าจำกัด ได้ว่า

$$f(x) = f(\varepsilon) + \frac{f'(\varepsilon)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(\varepsilon)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{n}(\varepsilon)}{n!}(x-a)^{n} \quad (3.1)$$

เมื่อ ε เป็นจำนวนที่อยู่ระหว่าง a และ x ซึ่งถ้า f(x) ใช้ได้ภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว f(x) จะสามารถถูกแทนด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ที่ไม่จำกัดค่า ได้ว่า

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n} + \ldots \quad (3.2)$$

เมื่อ $|x-a|$ เป็นค่าที่มีขนาดน้อยๆ ซึ่งทำให้ ε ซึ่งอยู่ระหว่าง a และ x สามารถเขียนได้ด้วย a

ถ้า f(x) ถูกประมาณด้วยผลรวมของอนุพันธ์จำนวน n เทอมแรกของสมการ (3.2) จะเกิดความคลาดเคลื่อนซึ่งประกอบด้วยเทอมสุดท้ายของสมการ (3.1) ดังตัวอย่างเช่น ถ้า $f(x) = e^{-x}$ และ a = 0 เราสามารถระบุได้ว่า

$$e^{-x} = 1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + E_T(x) \quad (3.3)$$

โดยที่ truncation error จะอยู่ในรูป

$$E_T = \tfrac{1}{24}e^{-\varepsilon}x^4 \quad (3.4)$$

และ ε มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ x

ถ้า x เป็นค่าบวก ε จะมีค่าเป็นบวก โดยการประมาณว่า $e^{-\varepsilon}$ มีค่าน้อยกว่า 1 มาก สามารถประมาณได้ว่า

$$e^{-x} \approx 1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 \tag{3.5}$$

ถ้าให้ $x = \frac{1}{3}$ จะเห็นว่า จะได้

$$e^{-x} \approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{18} - \tfrac{1}{162} = \tfrac{116}{162} \tag{3.6}$$

และมีความคลาดเคลื่อนประมาณ $\frac{1}{24}\left(\frac{1}{3}\right)^4 e^{-\varepsilon}$ หรือประมาณ $\frac{1}{1944}e^{-\varepsilon}$ โดยเหตุที่ ε เป็นบวก $e^{-\varepsilon}$ ย่อมมีค่าไม่เกิน 1 ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนสูงสุดจึงมีค่าไม่เกิน $\frac{1}{1944}$ ด้วยความคลาดเคลื่อนระหว่าง 0 ถึง $\frac{1}{1944}$ เมื่อ $\frac{1}{1944} \approx 0.00051$ ดังนั้น truncation error จึงมีขนาดเล็กกว่า 5.2 x 10^{-4} ถ้า $\frac{116}{162}$ ถูกคำนวณค่าด้วยทศนิยม 4 ตำแหน่ง จะได้ $e^{-\frac{1}{3}} \approx 0.7160$ ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนจาก round-off เพิ่มเข้ามาประมาณได้ว่ามีค่าเท่ากับ 0.5 x 10^{-4} และจะรับรู้ได้ว่าความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากการประมาณค่าโดยใช้ 4 อันดับแรกของอนุกรมเทย์เลอร์มีขนาดไม่เกิน 0.00051 แต่ถ้าแต่ละเทอมใน (3.6) ถูก คำนวณตัวเลขด้วยทศนิยมสี่ตำแหน่ง ความคลาดเคลื่อนรวมของ round-off จะมีขนาดใหญ่กว่า 1.5 x 10^{-4} ซึ่งเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นได้ ในที่สุดแล้ว ถ้า exponent 1/3 ถูกแทนด้วยวิธีการประมาณค่าของ x ซึ่งเป็นค่าที่ไม่ทราบค่าอย่างแน่นอนระหว่าง 0.333 และ 0.334 ความคลาดเคลื่อนมากที่สุดจากการประมาณเนื่องจากความไม่แน่นอนของปริมาณอันเป็น exponent นี้หาจะได้จากการสังเกตการเปลี่ยนแปลงของ δe^{-x} ที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงน้อยๆ δx ซึ่งประมาณ $\frac{de^{-x}}{dx}\delta x = -e^{-x}\delta x$ ดังนั้นถ้าจำนวน 1/3 มีความคลาดเคลื่อนระหว่าง -3 x 10^{-4} และ 7 x 10^{-4} ขนาดสูงสุดของความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องในการคำนวณจะอยู่ที่ประมาณ 5 x 10^{-4}

3.2 การประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงเป็นวิธีการพื้นฐานสำหรับประมาณค่าฟังก์ชันโดยอาศัยค่าที่ทราบอยู่ก่อนและจัดเรียงแล้วของฟังก์ชัน โดยเป็นค่าของตำแหน่งที่อยู่ระหว่างตำแหน่งที่เราทราบค่าของฟังก์ชันอย่างแน่นอน 2 จุด การใช้วิธีการนี้มีความจำเป็นที่จะต้องใช้ข้อมูลของฟังก์ชันเพื่อสนับสนุนในปริมาณที่มากพอเนื่องจากค่าฟังก์ชันมีความต่อเนื่อง ข้อมูลที่มีเข้ามาสนับสนุนเพิ่มขึ้นจะทำให้สามารถจำกัดความคลาดเคลื่อนให้น้อยลง

ในกรณีทั่วๆไป วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงจะพิจารณาผลต่างสืบเนื่อง (divided differences) เพื่อกำหนดความแตกต่างของฟังก์ชันบนจุดต่างๆและหาคุณสมบัติที่แน่นอนของความแตกต่างนั้นๆ

3.2.1 <u>การประมาณค่าระหว่างช่วงโดยฟังชันเส้นตรง</u>

ประมาณฟังก์ชัน f(x) ว่าเป็นเส้นตรงในช่วงที่แน่นอนโดยมีอัตราส่วน

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{3.7}$$

อัตราส่วนข้างต้นเป็นการประมาณที่เกิดขึ้นบนช่วง x_0 และ x_1 อัตราส่วนนี้เรียกว่าผลต่างสืบเนื่องอันดับหนึ่ง (first divided difference) ของ f(x) ที่มีความสัมพันธ์กับ x_0 และ x_1 และอาจจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f[x_0,x_1]$

$$f[x_0,x_1] \equiv \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{3.8}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า

$$f[x_1,x_0] = f[x_0,x_1] \tag{3.9}$$

ซึ่งจะนำไปสู่รูปแบบการประมาณค่าระหว่างช่วงที่เขียนได้ว่า

$$f(x) \approx f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] \tag{3.10}$$

หรือ

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\left[f(x_1)-f(x_0)\right]$$

หรือ

$$f(x) \approx \frac{1}{x_1-x_0}\left[(x_1-x)f(x_0)-(x_0-x)f(x_1)\right]$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปดีเทอร์มิแนนท์ได้

$$f(x) \approx \frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0-x \\ f(x_1) & x_1-x \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

จะสังเกตว่า สมการ (3.10) นำไปสู่ออร์ดิเนตอีก 1 ออร์ดิเนตและสมการผลต่างสืบเนื่อง ต่อมาก็นำไปสู่ออร์ดิเนตใหม่อีก รูปแบบสุดท้ายสมการ (3.11) มีความเหมาะกับสำหรับการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อทำการคำนวณค่าอย่างต่อเนื่อง

ถ้าให้ฟังก์ชันเส้นตรงสามารถกำหนดได้ด้วยเทอมทางขวาของสมการ (3.10) ซึ่งเขียนแทนด้วย $y_{0,1}(x)$ โดยตัวอักษรที่ยกลงนั้นแสดงถึงออร์ดิเนตที่เกี่ยวข้อง ถ้าฟังก์ชันที่พิจารณามีคุณสมบัติสมมาตรจะสามารถเขียนได้ว่า

$$y_0(x) \equiv f[x_0] \equiv f(x_0) \tag{3.12}$$

โดยที่ $f[x_0]$ มีนิยามว่าเป็นผลต่างสืบเนื่อง (divided difference) อันดับที่ 0 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ x_0 กล่าวคือมีค่าเท่ากับค่าของ $f(x)$ ที่ $x = x_0$ และ $y_0(x)$ ที่ประมาณด้วยโพลีโนเมียลลำดับที่ศูนย์ ดังนั้นจะเขียนได้ว่า

$$f(x) \approx y_{0,1}(x) \equiv f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] \tag{3.13}$$

และทำให้ได้ว่า

$$y_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0(x) & x_0 - x \\ y_1(x) & x_1 - x \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

สังเกตว่า $f(x) \approx y_{0,1}(x)$ ทุกค่า x ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเส้นตรงจริงซึ่งทำให้สามารถเขียนว่า $f(x) = A_0 + A_1 x$ และการประมาณนี้จะให้ค่าที่แน่นอนที่จุด $x = x_0$ และ x_1 สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ใดๆ

นอกจาก $f(x)$ จะเป็นเส้นตรงแล้ว ค่าความชันของ $f[x_0,x_1]$ จะขึ้นกับค่า x_0 และ x_1 ด้วยอย่างไรก็ตาม ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียลกำลัง 2 แล้วความชันของ $f[x_1,x]$ จะเป็นฟังก์ชันเส้นตรงของ x โดยเป็นอัตราส่วน

$$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \tag{3.15}$$

จากสมการ (3.15) จะให้ค่าที่ขึ้นกับ x_0, x_1 และ x_2 เรียกอัตราส่วนนี้ว่าผลต่างสืบเนื่องอันดับที่สอง (second divided difference) โดยเขียนได้ว่า

$$f[x_0, x_1, x_2] \equiv \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

ดังนั้น การประมาณในสมการ (3.10) จะสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$f(x) = f(x) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x] \qquad (3.16)$$

ความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการแทน f(x) ด้วย $y_{0,1}(x)$ คือ

$$E(x) \equiv f(x) - y_{0,1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x] \qquad (3.17)$$

ขณะนี้เรารู้ค่า $f[x_0,x_1,x]$ และรูปแบบความคลาดเคลื่อนในสมการ (3.17)ที่สามารถนำใช้ในการประมาณความคลาดเคลื่อนในทางการคำนวณจริงได้ โดยถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันเส้นตรงจริงแล้วจะทำให้เทอมของความคลาดเคลื่อนนั้นหายไป

3.2.2 ผลต่างสืบเนื่อง

ผลต่างสืบเนื่องของลำดับที่ 0, 1, 2,... , k เป็นการนิยามให้มีความสัมพันธ์กันอย่างซ้ำๆ กันไป

$$f[x_0] = f(x_0), \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}, \qquad \ldots,$$

$$f[x_0,\ldots,x_k] = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots.,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (3.18)$$

สังเกตว่า อาร์กิวเมนต์ k-1 ในเทอมแรกเป็นตัวเดียวกันกับอาร์กิวเมนต์ k-1 ของเทอมที่ 2 แต่ตัวหารมีความแตกต่างกันระหว่างอาร์กิวเมนต์ต่างๆเหล่านั้น กำหนดให้ $f[x_0,\ldots, x_k]$ เป็นผลรวมเชิงเส้นของออร์ดิเนต k+1 $f(x_0), \ldots, f(x_k)$

ถ้า $f(x)$ มีความสมมาตรจะสามารถเขียนได้ว่า

$$f[x_0,\ldots,x_k] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_k)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)\cdots(x_1 - x_k)} + \cdots + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} \qquad (3.19)$$

จากสมการ (3.19) ทำให้ลำดับของอาร์กิวเมนต์เลื่อนออกไป ดังนั้นจึงสามารถเขียน $f[x_0,\ldots,x_k]$ ว่าเป็นความแตกต่างระหว่างผลต่างสืบเนื่องทั้ง 2 ของลำดับ k-1 ซึ่งมี k-1 และ k ได้ เช่น

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \tag{3.20}$$

ในกรณีที่มีสองอาร์กิวเมนต์หรือมากกว่าสองอาร์กิวเมนต์ในผลต่างสืบเนื่องมีค่าเท่ากัน จึงต้องมีกระบวนการจำกัดค่าให้มีความเหมาะสม โดยกำหนดให้ $x_1 = x + \varepsilon$ ทำให้ได้ว่า

$$f[x_1, x] \equiv f[x+\varepsilon, x] = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \tag{3.21}$$

สำหรับ $\varepsilon \to 0$ จะได้

$$f[x, x] = f'(x) \tag{3.22}$$

ถ้า f(x) สามารถหาอนุพันธ์ได้ จะสามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_k, x] = f[x_0, \ldots, x_k, x, x],$$

ถ้า $x_0, \ldots, x_k$ เป็นค่าคงที่ และ $u_1, u_2, \ldots, u_k$ เป็นฟังก์ชันอนุพันธ์ของ x โดยสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n] = \sum_{v=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n] \frac{du_v}{dx} \tag{3.23}$$

โดยการให้ $u_1 = \cdots = u_n = x$ เราอาจจะพิจารณาได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_k, \overbrace{x, \ldots, x}^{\text{n times}}] = nf[x_0, \ldots, x_k, \overbrace{x, \ldots, x}^{\text{n+1 times}}]$$

ในที่สุด เราจะสามารถประมาณได้ว่า

$$\frac{d^r}{dx^r} f[x_0, \ldots, x_k, x] = r!\, f[x_0, \ldots, x_k, \overbrace{x, \ldots, x}^{\text{r+1 times}}] \tag{3.24}$$

เราอาจจะพิจารณาว่าผลลัพธ์ที่ได้มีผลต่างสืบเนื่องจำนวน r+1 อาร์กิวเมนต์ที่มีขนาดเข้าใกล้กันด้วยค่าจำกัดค่าหนึ่ง โดยถ้าอนุพันธ์อันดับ r ของ f(x) มีค่าจำกัดที่จุดวกกลับ (confluence)

3.3 การประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

การประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Interpolation) เป็นการพิจารณาด้วยรูปแบบที่แสดงในเทอมของฟังก์ชันอนุพันธ์ สำหรับ uniformly spaced abscissas ที่มีระยะห่าง h วิธีการการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องจะดำเนินการไปในความสัมพันธ์ที่อยู่ในเทอมของความแตกต่าง สำหรับการคำนวณที่ใกล้จุดทาบิวลาร์ (tabular point) x_0 ที่จุดกำเนิดของช่วงทาบิวเลทจะนิยามความแตกต่างไปข้างหน้า $\Delta f(x_0)$ ดังนี้

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{3.25}$$

ในทำนองเดียวกัน จะนิยามความแตกต่างอันดับสองที่เกี่ยวเนื่องกับ x_0 ไปข้างหน้า (the second forward difference) ซึ่งนิยามไว้ว่า

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_0 + h) - \Delta f(x_0)$$

$$= f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)$$

ซึ่งโดยทั่วๆไป จะกำหนดไว้ว่า

$$\Delta^{r+1} f(x) = f^r(x + h) - f^r(x) \tag{3.26}$$

โดย Δ แสดงความแตกต่างที่เกิดขึ้นด้วยระยะ h

เมื่อใช้ความแตกต่างอันดับสองที่เกี่ยวเนื่องกับ x_0 ไปข้างหน้าจะใส่ตัวเลข abscissas กำกับ เช่น $x_0, x_1, \ldots$ ทำให้การเพิ่มของลำดับของพีชคณิตสามารถทำได้ว่า

$$x_{k+1} = x_k + h \tag{3.27}$$

จะสามารถเขียนสมการได้ใหม่ว่า

$$\Delta f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$$

$$= (x_{k+1} - x_k) f(x_k, x_{k+1}) = hf(x_k, x_{k+1})$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนสมการอันดับ 2 ได้ว่า

$$\Delta^2 f(x_k) = hf(x_{k+1}, x_{k+2}) - hf(x_k, x_{k+1})$$

$$= h(x_{k+2} - x_k) f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = 2h^2 f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$$

ในกรณีทั่วไปจะแสดงว่า

$$\Delta^r f(x_k) = (r-1)! h^{r-1} f(x_{k+1}, ..., x_{k+r}) - (r-1)! h^{r-1} f(x_k, ..., x_{k+r-1})$$

$$= (r-1)! h^{r-1} (x_{k+r} - x_k) f(x_k, ..., x_{k+r})$$

$$= r! h^r f(x_k, ..., x_{k+r}) \qquad (3.28)$$

3.4 การคำนวณโดยวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta method)

<u>เทคนิครุงเง-คุตตาขั้นสูง (Runge-Kutta Method of Higher Order)</u>

เมื่อ k_0, k_1 และ k_2 เป็นค่าที่เกิดขึ้นจากสมการที่ผ่านมาและมีความเกี่ยวข้องกับ p = 2 โดยการกระจายเทอมของสมาชิกทางขวาให้มีความถูกต้องมากขึ้นผ่านเทอม h^3 ที่กำหนดเข้าไปด้วยเงื่อนไข 6 เงื่อนไขบนพารามิเตอร์ 8 ตัวที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเซตของค่าที่ไม่จำกัดของสมการดังกล่าวกับออร์เดอร์ที่ 3 ของ h จะทำให้การแก้ปัญหามีความแม่นยำมากขึ้น หนึ่งในรูปแบบที่นำมาพิจารณา คือ รูปแบบของ Kutta ซึ่งเขียนได้ว่า

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) + O(h^4) \qquad (3.29)$$

เมื่อ $k_0 = hF(x_n, y_n)$ $\quad$ $k_1 = hF(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_0)$

$k_2 = hF(x_n + h, y_n + 2k_1 - k_0)$ $\quad$ $O =$ ฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับ h^4

และอันดับที่ 2 ด้วยรูปแบบของ Heun ซึ่งเขียนได้ว่า

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_0 + 3k_2) + O(h^4) \qquad (3.30)$$

เมื่อ $k_0 = hF(x_n, y_n)$ $\quad$ $k_1 = hF(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{3}k_0)$ $\quad$ $k_2 = hF(x_n + \tfrac{2}{3}h, y_n + \tfrac{2}{3}k_1)$

ทั้ง 2 รูปแบบมีความแม่นยำที่เท่ากัน ทำให้การคำนวณทางคอมพิวเตอร์ได้ค่าที่มีความแน่นอน โดยจะสังเกตุว่า รูปแบบของ Kutta นั้นเป็นรูปแบบที่คล้ายกับรูปแบบของ Simpson ที่สามารถลดรูป F ให้ไม่ขึ้นกับ y ได้

เราสามารถเขียนในรูปแบบที่คล้ายคลึงกันในอันดับ 4 โดยการเก็บ k เพิ่มเข้าไปในสมการ (3.30) ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) + O(h^5) \tag{3.31}$$

เมื่อ $k_0 = hF(x_n, y_n)$ $\quad k_1 = hF(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_0)$

$k_2 = hF(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1)$ $\quad k_3 = hF(x_n + h, y_n + k_2)$

รูปแบบดังกล่าวสามารถหาค่าได้ด้วยการคำนวณจากสมการต่อเนื่อง (simultaneous equation) ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{3.32}$$

3.5 ปัญหาค่าขอบเขต (Boundary-Value Problem)

การแก้ปัญหาของสมการอนุพันธ์ ของออร์เดอร์ 2 หรือสูงกว่านั้นมีความจำเป็นที่จะต้องระบุเงื่อนไขที่เหมาะสมซึ่งเป็นค่าที่จำเพาะ ณ จุดปลายทั้ง 2 ของช่วงที่กำลังพิจารณาซึ่งปัญหาในลักษณะนี้เป็นที่รู้จักว่าเป็นปัญหาค่าขอบเขต (Boundary-Value Problem) โดยวิธีที่มีประสิทธิภาพที่สามารถแก้ปัญหานี้ได้นั้นเป็นวิธีที่จะต้องสามารถแปลงรูปแบบของสมการได้ อย่างเช่น ปัญหาสมการอินทิกรัลหรือปัญหาในแคลคูลัส สำหรับปัญหาเชิงเส้นอย่างสมการ (3.33) ที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x) \qquad (a < x < b) \tag{3.33}$$

และมีเงื่อนไขว่า

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B \tag{3.34}$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าที่กำหนด (prescribed) ในการวิเคราะห์ปัญหาสามารถวิเคราะห์อยู่บนหลักการ superposition ได้ ดังนั้นถ้า u(x) เป็นคำตอบใดๆ ของปัญหา

$$u'' + Pu' + Qu = F \tag{3.35}$$

เงื่อนไขที่มีความเหมาะสม คือ

$$u(a) = A$$

และ v(x) เป็นคำตอบของปัญหา

$$v'' + Pv + Qv = F \tag{3.36}$$

ซึ่ง เหมาะสมกับเงื่อนไข

$$v(a) = 0$$

และฟังก์ชัน y(x) มีค่า

$$y(x) = u(x) - cv(x) \tag{3.37}$$

ซึ่งเหมาะสมกับสมการ (3.33) และเงื่อนไข $y(a) = A$ สำหรับค่าคงที่ c ใดๆ ถ้า P, Q และ F มีความต่อเนื่องบนช่วง (a,b) ดังนั้นคำตอบของปัญหาในกรณีที่ c สามารถกำหนดค่าได้ จะมีค่า

$$u(b) + cv(b) = B \tag{3.38}$$

บทที่ 4
การดำเนินการจำลอง

การจำลองพลาสมาด้วยแบบจำลองอนุภาคโดยพิจารณาว่าพลาสมานั้นประกอบไปด้วยอนุภาคอิเล็กตรอนและอนุภาคโปรตอนจำนวนเท่ากัน ($N_e = N_i$) อยู่ในระบบซึ่งมีความยาวด้านละ L เมตรภายใต้สมดุลความร้อน ณ อุณหภูมิค่าหนึ่งและถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าค่าหนึ่งตลอดเวลา โดยเมื่อเวลาเริ่มต้น t = 0 อนุภาคอิเล็กตรอนและไอออนซึ่งเป็นองค์ประกอบของพลาสมามีการกระจายตัวแบบปกติ (Normal Distribution) และหยุดนิ่งอยู่ในระบบ การกระจายตัวของอนุภาคทั้ง 2 ชนิดทำให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในขึ้น และจากอิทธิพลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนี้ได้ทำให้อนุภาคพลาสมาเคลื่อนที่ สำหรับการจำลองเชิงตัวเลขนั้นได้ดำเนินการคำนวณในขั้นตอนต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. กำหนดความหนาแน่นของพลาสมาที่เวลาเริ่มต้น t = 0
2. คำนวณศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าเนื่องจากการกระจายอนุภาคพลาสมา
3. คำนวณสนามแม่เหล็ก
4. คำนวณความหนาแน่นและความเร็วของของไหลอันเนื่องมาจากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กภายในที่เกิดขึ้น

เทคนิคทั่วไปที่ใช้คำนวณและจำลองพลาสมานั้นมีอยู่ 2 ลักษณะ ลักษณะแรกคือการจำลองด้วยระบบอนุภาค และลักษณะที่สองคือการจำลองด้วยระบบของไหล ในงานวิจัยนี้จะทดลองจำลองทั้งสองลักษณะแล้วนำผลการจำลองจากทั้ง 2 ลักษณะมาเปรียบเทียบกัน

4.1 ระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

4.1.1 <u>ความหนาแน่นของของไหลที่เวลาเริ่มต้น **t = 0**</u>

โดยการพิจารณาพลาสมาว่าประกอบไปด้วยอนุภาคอิเล็กตรอนและอนุภาคโปรตอนซึ่งเมื่อเวลาเริ่มต้น t = 0 อนุภาคทั้ง 2 ชนิดมีการกระจายตัวแบบปกติโดยสามารถเขียนสมการการกระจายตัวของอนุภาค $f_p(x, y)$ ได้ดังนี้

$$f_p(x, y) = N_p e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \tag{4.1}$$

เมื่อ p คือ ชนิดของอนุภาคซึ่งได้แก่ อิเล็กตรอนและโปรตอน

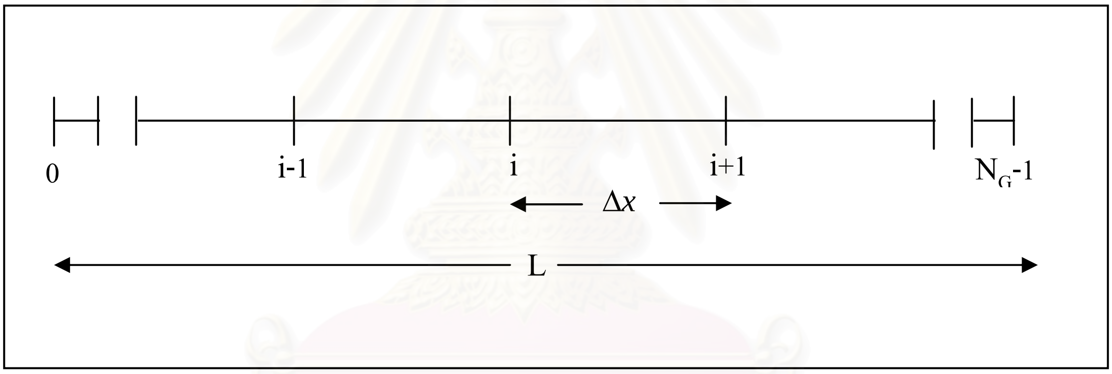
N_p คือ จำนวนอนุภาคทั้งหมดของแต่ละชนิด

สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขนั้นสามารถหาค่าตำแหน่งของอนุภาคแต่ละชนิดเมื่อเวลาเริ่มต้น t = 0 ด้วยวิธี Monte-Carlo ซึ่งได้กล่าวว่า ถ้าสามารถระบุรูปแบบการกระจายตัวโดยเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่เป็นฟังก์ชันการกระจาย $F(x, y, z)$ ได้ เมื่อทำการอินทิเกรตชันฟังก์ชันการกระจายดังกล่าวซึ่งในที่นี้หมายถึงโอกาสที่จะพบอนุภาคในบริเวณที่กำลังพิจารณา ค่าที่ได้จะมีค่าเท่ากับการอินทิเกรตฟังก์ชัน $G(x, y, z)$ ที่ทราบค่าหรือสามารถหาค่านั้นได้

$$F(x, y, z) = \iiint f(x, y, z)\, dxdydz$$

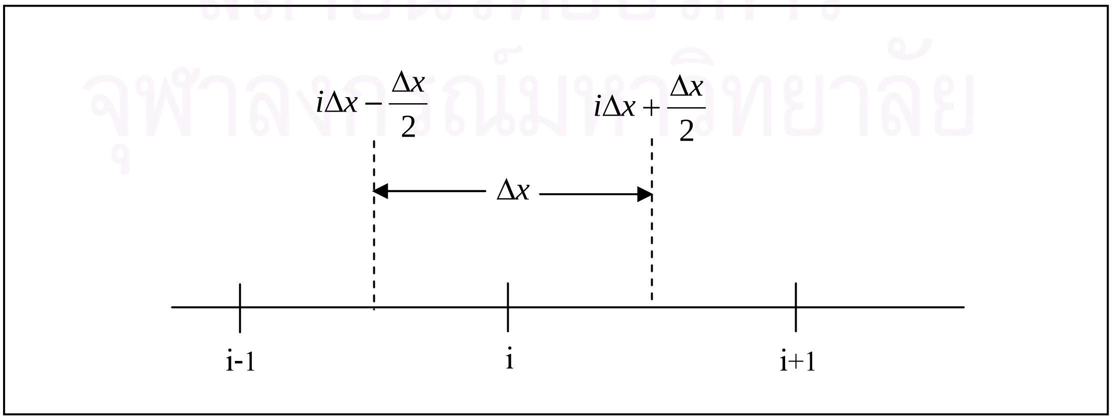
$$= G(x, y, z) \qquad (4.2)$$

ในทางปฏิบัตินั้นเราจะใช้การสุ่มค่าจากฟังก์ชันการสุ่มค่าจากโปรแกรม C++ ซึ่งจะทำให้เราทราบตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคและสามารถหาค่าความหนาแน่นของอนุภาคในพื้นที่ต่างๆของระบบได้



รูปที่ 4.1 แสดงขนาดของระบบใน 1 มิติ

ความหนาแน่นของของไหลในบริเวณ $i\Delta x - \frac{\Delta x}{2}$ ถึง $i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}$ สำหรับกริดตัวที่ i ใดๆ



รูปที่ 4.2 แสดงการแบ่งกริดสำหรับหาความหนาแน่นของอนุภาคพลาสมาในพื้นที่ใดๆ ในระบบ

4.1.2 <u>ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า</u>

ในบริเวณพื้นที่ใดๆของระบบซึ่งมีความแตกต่างของความหนาแน่นประจุเกิดขึ้นจะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าภายในบริเวณดังกล่าวขึ้นมา ซึ่งสามารถบรรยายได้ด้วยสมการ Poison ดังนี้

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad = \quad -\frac{1}{\varepsilon_0}(en_e - q_i n_i) \tag{4.3}$$

เมื่อ e = ประจุไฟฟ้าของอิเล็กตรอนซึ่งมีค่า -1.6 x 10^{-19} C

n_e = ความหนาแน่นต่อพื้นที่ของอนุภาคอิเล็กตรอน

n_i = ความหนาแน่นต่อพื้นที่ของอนุภาคไอออน

เนื่องจากสนามไฟฟ้าเป็นผลของการเปลี่ยนแปลงของศักย์ไฟฟ้าตามแนวการเคลื่อนที่ของสนามที่เกิดขึ้น ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$\vec{E} \quad = \quad -\vec{\nabla}\phi \tag{4.4}$$

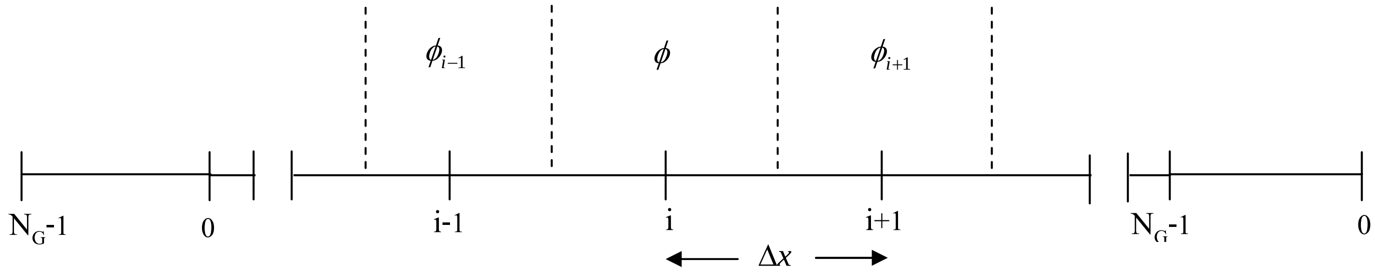
เมื่อนำศักย์ไฟฟ้าไปพิจารณาแทนสนามไฟฟ้าในสมการ Poison จะได้ว่า

$$\nabla^2\phi \quad = \quad \frac{1}{\varepsilon_0}(en_e - q_i n_i) \tag{4.5}$$

สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าศักย์ไฟฟ้าด้วยวิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดยอาศัยสมการ (4.5) จะได้สมการ (4.6) ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าดังนี้

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \cong \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \tag{4.6}$$

เมื่อ $q_1 = en_e - q_i n_i$ คือ ความหนาแน่นประจุสุทธิ



รูปที่ 4.3 ศักย์ไฟฟ้าบริเวณกริดต่างๆ

กำหนดให้อนุภาคพลาสมามีการเคลื่อนที่อย่างต่อเนื่องในระบบ ซึ่งภายใต้การกำหนดดังกล่าวสามารถระบุเงื่อนไขที่ขอบได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&1.\ \phi\big|_{x=0} = \phi\big|_{x=L} \\
&2.\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=L} \\
&3.\ E\big|_{x=0} = E\big|_{x=L}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

สำหรับการคำนวณศักย์ไฟฟ้าในพื้นที่ใดๆ ณ เวลา t โดยใช้วิธี Fixed Point ซึ่งจะเริ่มต้นคำนวณโดยการกำหนดค่าศักย์ไฟฟ้าในแต่ละพื้นที่ ($\phi^o(x,y)=0$) เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้าในพื้นที่ข้างเคียง จากนั้นจะทำการคำนวณซ้ำไปจนกว่าค่าศักย์ไฟฟ้าค่าเก่าที่ได้จากการกำหนดในตอนเริ่มต้นหรือค่าที่ได้จากการคำนวณรอบที่ผ่านมากับค่าใหม่ที่เพิ่งคำนวณได้ในรอบการคำนวณล่าสุดมีค่าเข้าใกล้กัน($\phi^n(x,y)\approx\phi^o(x,y)$)

$$
\begin{aligned}
\phi^n(x,y) = [&\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi^o(x-\Delta x,y)+\phi^o(x+\Delta x,y)\right) + \frac{1}{\Delta y^2}(\phi^o(x,y-\Delta y) \\
&+\phi^o(x,y+\Delta y))]/\left(\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

เมื่อ ϕ^n = ค่าศักย์ไฟฟ้าใหม่

ϕ^o = ค่าศักย์ไฟฟ้าเก่า

เมื่อทราบศักย์ไฟฟ้าในแต่ละพื้นที่แล้ว ต่อมาจะทำการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าในแต่ละพื้นที่ โดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการ (4.4) และการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\left|\vec{E}(x,y)\right| = \frac{1}{2\Delta x}[\phi(x-\Delta x,y)-\phi(x+\Delta x,y)] + \frac{1}{2\Delta y}[\phi(x,y-\Delta y)-\phi(x,y+\Delta y)]$$

(4.9)

4.1.3 การเคลื่อนที่ของอนุภาคพลาสมา

อนุภาคพลาสมาเมื่ออยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะรับรู้ถึงแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามากระทำ ซึ่งแรงแม่เหล็กไฟฟ้าดังกล่าวจะทำให้อนุภาคพลาสมาเคลื่อนที่ โดยการเคลื่อนที่ซึ่งเกิดขึ้นดังกล่าวจะอยู่ภายใต้กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ที่ว่า

$$n_p m_p \frac{d\vec{v}_{pi}}{dt} = \vec{F}_{pi} \tag{4.10}$$

เมื่อ p คือ ชนิดของอนุภาคซึ่งได้แก่ อิเล็กตรอน และ ไอออน

$i = 0, 1, 2, \ldots, N_p\text{-}1$ ใช้ระบุอนุภาคตัวที่ i ใดๆ

v_{pi} คือ ความเร็วของอนุภาคชนิด p ตัวที่ i

n_p คือ ความหนาแน่นของอนุภาคแต่ละชนิด

m_p คือ มวลของอนุภาคแต่ละชนิด

F_{pi} คือ แรงที่อนุภาคชนิดที่ p ตัวที่ i รับรู้

$$\vec{F}_{pi} = n_p(q_p\vec{E} + \vec{v}_{pi} \times \vec{B}) \tag{4.11}$$

โดยการแทน F_{pi} จากสมการ (4.10) ด้วยสมการ (4.11) จะได้ว่า

$$n_p m_p \frac{d\vec{v}_{pi}}{dt} = n_p(q_p\vec{E} + \vec{v}_{pi} \times \vec{B}) \tag{4.12}$$

พิจารณาปัญหาการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาด้วยวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta method) ที่ว่า

$$\vec{k}_1^{pi} = \vec{K}(\vec{v}_{pi}, n_p^1, t)\Delta t \qquad \vec{h}_1^{pi} = \vec{v}_{pi}\Delta t$$

$$\vec{k}_2^{pi} = \vec{K}(\vec{v}_{pi} + \frac{\vec{k}_1^{pi}}{2}, n_p^2, t)\Delta t \qquad \vec{h}_2^{pi} = \vec{v}_{pi} + \frac{\vec{k}_1^{pi}}{2}\Delta t \tag{4.13}$$

$$\vec{k}_3^{pi} = \vec{K}(\vec{v}_{pi} + \frac{\vec{k}_2^{pi}}{2}, n_p^3, t)\Delta t \qquad \vec{h}_3^{pi} = \vec{v}_{pi} + \frac{\vec{k}_2^{pi}}{2}\Delta t$$

$$\vec{k}_4^{pi} = \vec{K}(\vec{v}_{pi} + \vec{k}_3^{pi}, n_p^4, t)\Delta t \qquad \vec{h}_4^{pi} = \vec{v}_{pi} + \vec{k}_3^{pi}\Delta t$$

โดย $\vec{K}(\vec{v}_{pi}, n_p, t) = \frac{1}{m_p}\left(q_p\vec{E}(n_p^l, t) + \vec{v}_{pi}(t) \times \vec{B}(n_p^l, t)\right)$

l = 1, 2, 3, 4 คือ อันดับที่ l ของอนุพันธ์จากวิธีการรุงเง-คุตตา

n_p^l คือ ความหนาแน่นต่อพื้นที่ของอนุภาคชนิด p ที่เกิดจากอนุพันธ์อันดับที่ l

ดังนั้น ความเร็วของอนุภาคชนิด p ตัวที่ i ณ เวลา t + Δt มีค่า

$$\vec{v}_{pi}(t+\Delta t) = \vec{v}_{pi}(t) + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_1^{pi} + 2\vec{k}_2^{pi} + 2\vec{k}_3^{pi} + \vec{k}_4^{pi}\right) \tag{4.14}$$

และตำแหน่งของอนุภาคชนิด p ตัวที่ i ณ เวลา t + Δt มีค่า

$$\vec{r}_{pi}(t+\Delta t) = \vec{r}_{pi}(t) + \frac{1}{6}\left(\vec{h}_1^{pi} + 2\vec{h}_2^{pi} + 2\vec{h}_3^{pi} + \vec{h}_4^{pi}\right) \tag{4.15}$$

ซึ่งเมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ อนุภาคพลาสมาทุกตัวหยุดนิ่งหรือ $\vec{v}(t=0) = 0$

Δt ที่ใช้ในการคำนวณควรมีขนาดที่เหมาะสมกับปัญหา ซึ่งในที่นี้ได้กำหนด Δt จากคาบการสั่นของพลาสมา (Plasma Oscillation) โดย

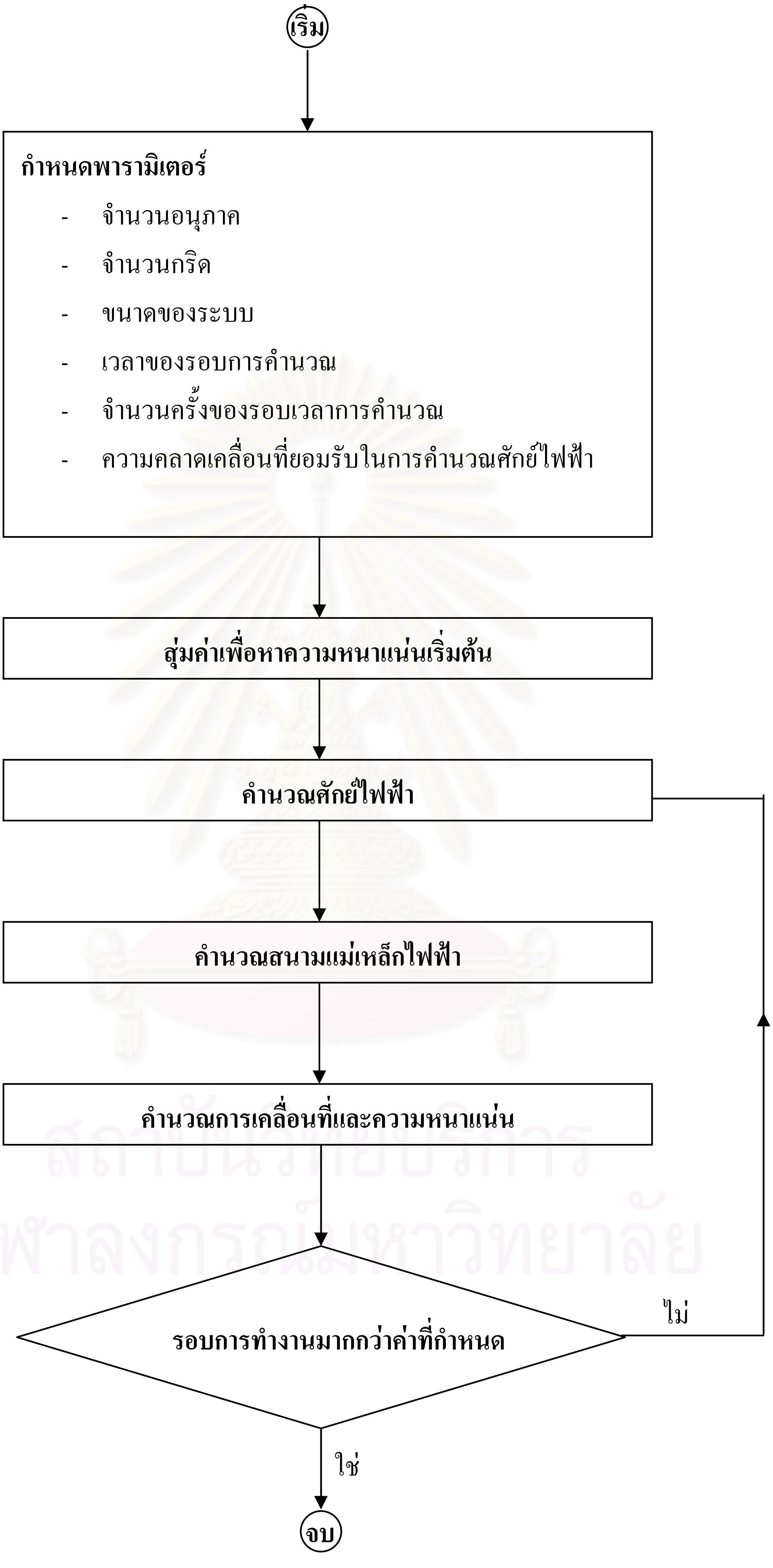
$$\Delta t = \frac{T}{di}$$

เมื่อ di คือ จำนวนข้อมูลที่จะนำมาใช้สำหรับการพิจารณาเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา 1 รอบการสั่นพลาสมา ซึ่งคาบการสั่นของพลาสมา T มีค่า

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

โดย $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 q^2}{m\varepsilon_0}}$ คือ ความถี่ของการสั่นพลาสมา

n_0 คือ ความหนาแน่นเฉลี่ยของอนุภาคพลาสมา



รูปที่ 4.4 แผนภาพการจำลองระบบอนุภาคพลาสมา

4.2 ระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ

การจำลองระบบพลาสมาด้วยแบบจำลองของไหลมีขั้นตอนการคำนวณหลักๆเหมือนกันกับการจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาค แต่ในขั้นตอนของการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่นั้นการจำลองด้วยแบบจำลองนี้จะมีความแตกต่างออกไป เพราะจะพิจารณาพลาสมาว่าเป็นของไหลหรือกลุ่มอนุภาคภายในพื้นที่แทนการพิจารณาอนุภาคแต่ละอนุภาค ดังนี้

ความหนาแน่นและความเร็วของของไหล

การเคลื่อนที่ของของไหลภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีลักษณะเป็นไปตามสมการ (4.16)

$$n_p m_p \frac{d\bar{u}_p}{dt} = n_p(q_p\vec{E} + \bar{u}_p \times \vec{B}) \tag{4.16}$$

เมื่อ p คือ ประเภทของของไหลซึ่งได้แก่ อิเล็กตรอน และ ไอออน

n_p คือ ความหนาแน่นของของไหลแต่ละชนิด

m_p คือ มวลของของไหลแต่ละชนิด

u_p คือ ความเร็วเฉลี่ยของของไหลแต่ละชนิด

พิจารณาปัญหาการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาด้วยวิธีรุงเง-คุตตา

$$\begin{aligned} \vec{k}_1^{\,p} &= \vec{K}(\bar{u}_p, n_p, t)\Delta t & \vec{k}_2^{\,p} &= \vec{K}(\bar{u}_p + \frac{\vec{k}_1^{\,p}}{2}, n_p + \frac{g_1^p}{2}, t)\Delta t \\ \vec{k}_3^{\,p} &= \vec{K}(\bar{u}_p + \frac{\vec{k}_2^{\,p}}{2}, n_p + \frac{g_2^p}{2}, t)\Delta t & \vec{k}_4^{\,p} &= \vec{K}(\bar{u} + \vec{k}_3^{\,p}, n_p + g_3^p, t)\Delta t \end{aligned} \tag{4.17}$$

โดย $\vec{K}(\bar{u}_p, n_p, t) = \frac{1}{m_p}\left(q_p\vec{E}(n_p,t) + \bar{u}_p(t) \times \vec{B}(n_p,t)\right)$

ดังนั้น ความเร็วของของไหลในพื้นที่ต่างๆ ที่เวลา $t + \Delta t$ จะมีค่า

$$\bar{u}_p(t+\Delta t) = \bar{u}_p(t) + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_{x1}^{\,p} + 2\vec{k}_2^{\,p} + 2\vec{k}_3^{\,p} + \vec{k}_4^{\,p}\right) \tag{4.18}$$

เมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ ของไหลหยุดนิ่งหรือ $\bar{u}(t=0) = 0$

เมื่อของไหลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{u}(t)$ จะทำให้ความหนาแน่นเกิดการเปลี่ยนแปลง โดยการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาที่เกิดขึ้นนั้นเป็นผลจากการเคลื่อนที่เข้าและออกของของไหลในพื้นที่ดังกล่าว ซึ่งสามารถอธิบายลักษณะการเปลี่ยนแปลงได้จากสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) ดังนี้

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (n\bar{u}) \quad = \quad 0 \tag{4.19}$$

สมการความต่อเนื่องของไหลแต่ละชนิดเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} n_p + n_p \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \quad = \quad 0 \tag{4.20}$$

จากสมการ (4.20) โดยอาศัยการคำนวณด้วยวิธีรุงเง-คุตตาจะสามารถคำนวณค่าความหนาแน่นของของไหล ณ เวลา t ใดๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} g_1^p &= G(\bar{u}_p, n_p, t)\Delta t & g_2^p &= G\left(\bar{u}_p + \frac{\bar{k}_1^p}{2}, n_p + \frac{g_1^p}{2}, t\right)\Delta t \\ g_3^p &= G\left(\bar{u}_p + \frac{\bar{k}_2^p}{2}, n_p + \frac{g_2^p}{2}, t\right)\Delta t & g_4^p &= G(\bar{u}_p + \bar{k}_3^p, n_p + g_3^p, t)\Delta t \end{aligned} \tag{4.21}$$

โดย $\quad G(\bar{u}, n, t) = -\left(\bar{u}_p \cdot \bar{\nabla} n_p + n_p \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_p\right)$

ดังนั้น ความหนาแน่นของของไหล ณ เวลา t ต่างๆ มีค่า

$$n_p(t + \Delta t) = n_p(t) + \frac{1}{6}\left(g_1^p + 2g_2^p + 2g_3^p + g_4^p\right) \tag{4.22}$$

4.3 ระบบพลาสมา 3 มิติ

สำหรับการพิจารณาระบบพลาสมา 3 มิติจะทำให้สามารถพิจารณาการหมุนวนของสนามชนิดหนึ่งซึ่งจะไปเหนี่ยวนำให้เกิดสนามอีกชนิดหนึ่งได้ โดยขั้นตอนการคำนวณหลักๆ ยังคงเหมือนกันกับการจำลองระบบ 2 มิติแต่จะมีการพิจารณาเพิ่มเติมในส่วนของผลของการหมุนวนของสนามไฟฟ้าที่เหนี่ยวนำให้เกิดสนามแม่เหล็กภายในระบบขึ้นมา

ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า

สมการ (4.23) ใช้สำหรับการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าของระบบพลาสมา 3 มิติ

$$\phi^n(x,y,z)=[\frac{e}{\varepsilon_0}n_1(x,y,z)+\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi^o(x-\Delta x,y,z)+\phi^o(x+\Delta x,y,z)\right)+\frac{1}{\Delta y^2}(\phi^o(x,y-\Delta y,z)$$
$$+\phi^o(x,y+\Delta y,z))+\frac{1}{\Delta z^2}\left(\phi^o(x,y,z-\Delta z)+\phi^o(x,y,z+\Delta z)\right)]/\left(\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}+\frac{2}{\Delta z^2}\right)$$

(4.23)

เมื่อ ϕ^n = ค่าศักย์ไฟฟ้าใหม่

ϕ^o = ค่าศักย์ไฟฟ้าเก่า

ภายใต้ข้อสมมติที่ว่าของไหลมีการเคลื่อนที่อย่างต่อเนื่องในระบบ ดังนั้น จึงสามารถระบุเงื่อนไขที่ขอบได้ดังนี้

1. $\phi\big|_{x=0} = \phi\big|_{x=L}$ 2. $n\big|_{x=0} = n\big|_{x=L}$

3. $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=L}$ 4. $E\big|_{x=0} = E\big|_{x=L}$ (4.24)

5. $B\big|_{x=0} = B\big|_{x=L}$

และสามารถคำนวณค่าสนามไฟฟ้าในแต่ละปริมาตรได้จากสมการ (4.25) ว่า

$$\left|\vec{E}(x,y,z)\right| = \frac{1}{2\Delta x}[\phi(x-\Delta x,y,z)-\phi(x+\Delta x,y,z)]+\frac{1}{2\Delta y}[\phi(x,y-\Delta y,z)-\phi(x,y+\Delta y,z)]$$
$$+\frac{1}{2\Delta z}[\phi(x,y,z-\Delta z)-\phi(x,y,z+\Delta z)] \qquad (4.25)$$

สนามแม่เหล็ก

การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าจะเหนี่ยวนำทำให้เกิดสนามแม่เหล็กขึ้นในเวลาต่อมาซึ่งเป็นไปตามสมการของแมกซ์เวลล์ที่ว่า

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (4.26)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

ถ้าสามารถทำการแยกแต่ละองค์ประกอบตามแนวแกน x, y และ z ได้

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x\hat{x} \quad = \quad -\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\right)E_y\hat{y} \quad = \quad -\frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y} \qquad (4.27)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)E_z\hat{z} \quad = \quad -\frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{z}$$

การหาค่าของสนามแม่เหล็กในแต่ละองค์ประกอบตามแนวแกน x, y และ z ที่เวลา $t + \Delta t$ จากสมการ (4.27) โดยใช้วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องร่วมกับการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาด้วยวิธีรุงเง-คุตตา ทำให้ได้ว่า

$$\vec{h}_1 = \vec{H}(n,t)\Delta t \qquad \vec{h}_2 = \vec{H}(n+\frac{g_1}{2},t)\Delta t$$
$$\vec{h}_3 = \vec{H}(n+\frac{g_2}{2},t)\Delta t \qquad \vec{h}_4 = \vec{H}(n+g_3,t)\Delta t \qquad (4.28)$$

โดย $\vec{H}(n,t) = \vec{\nabla}\times\vec{E}(n,t)$

และ g_i = 1, 2, 3, 4 คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของของไหลออร์เดอร์ที่ i ของรุงเง-คุตตา

สนามแม่เหล็กในปริมาตรหนึ่งๆ ณ เวลา t ต่างๆมีค่า

$$B_x(t+\Delta t) = B_x(t)+\frac{1}{6}\left(h_{x1}+2h_{x2}+2h_{x3}+h_{x4}\right)$$

$$B_y(t+\Delta t) = B_y(t)+\frac{1}{6}\left(h_{y1}+2h_{y2}+2h_{y3}+h_{y4}\right) \qquad (4.29)$$

$$B_z(t+\Delta t) = B_z(t)+\frac{1}{6}\left(h_{z1}+2h_{z2}+2h_{z3}+h_{z4}\right)$$

บทที่ 5
การวิเคราะห์และผล
การจำลองระบบอนุภาคพลาสมา

ในการจำลองอนุภาคพลาสมานั้นได้จำลองว่าพลาสมาประกอบไปด้วยอนุภาค 2 ชนิด คือ อนุภาคอิเล็กตรอนและอนุภาคโปรตอน โดยอาศัยการประมาณพลาสมา (Plasma Approximation) ว่า $N_e = N_i$ นั่นคือ จำนวนอิเล็กตรอนทั้งหมดในระบบเท่ากับจำนวนโปรตอนทั้งหมดในระบบ โดยระบบที่ทำการจำลองมีความยาวด้านแต่ละด้านเท่ากันและตั้งอยู่ในที่ว่าง (space) ภายใต้สมดุลความร้อน (Thermal Equilibrium) คงที่ค่าหนึ่งซึ่งเป็นความร้อนที่ถูกใส่เข้าไปในระบบและมีการกระจายความร้อนเป็นแบบ Isothermal ประมาณว่าความร้อนดังกล่าวมีความสำคัญต่อการเปลี่ยนแปลงในระบบมากกว่าความร้อนที่เกิดจากการสั่นของอนุภาคพลาสมามากจนทำให้ความร้อนจากการสั่นของอนุภาคไม่มีความสำคัญต่อการเปลี่ยนแปลงในระบบ นอกจากนี้ยังได้พิจารณาว่าการเคลื่อนที่ของอนุภาคพลาสมาไม่ก่อให้เกิดการแลกเปลี่ยนโมเมนตัมระหว่างอนุภาคด้วยกัน สำหรับบริเวณขอบของระบบได้พิจารณาว่าระบบมีความต่อเนื่องที่บริเวณขอบ นั่นคือ จุดปลายของระบบจะต่อกับจุดเริ่มต้นของระบบ ทำให้เมื่อพิจารณาอนุภาคพลาสมาที่เคลื่อนที่ไปอยู่ ณ ตำแหน่งขอบที่เป็นจุดปลายของระบบนั่นแสดงว่าอนุภาคเคลื่อนที่มาอยู่ ณ ตำแหน่งเริ่มต้นของระบบและกำลังจะเคลื่อนที่จากตำแหน่งเริ่มต้นนี้ต่อไปภายใต้สภาวะแวดล้อมของระบบที่เรากำลังพิจารณาอยู่ ในการพิจารณาเช่นนี้จะทำให้ระบบมีการอนุรักษ์จำนวนอนุภาคเพราะระบบจะไม่สูญเสียอนุภาคออกไปภายนอก

อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่การพิจารณาระบบ 2 มิติไม่สามารถพิจารณาการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้าที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กได้ ดังนั้นจึงได้ทำการจำลองระบบ 3 มิติเพิ่มขึ้น เพื่อศึกษาถึงเหตุการณ์ดังกล่าวที่เกิดขึ้น ในการวิเคราะห์ต่อไปนี้เพื่อให้สะดวกต่อการอธิบายให้พิจารณาว่าอนุภาคหมายถึงอิเล็กตรอนเป็นหลักทั้งนี้ยกเว้นแต่จะระบุไว้โดยชัดเจนเป็นอย่างอื่น ซึ่งการจำลองระบบอนุภาคพลาสมาได้ผลการจำลองดังต่อไปนี้

5.1 ระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

การจำลองระบบพลาสมา 2 มิติได้กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 5.1 และได้ทำการจำลองภายใต้สภาวะแวดล้อมต่างๆ ซึ่งได้แก่ กรณีไม่ถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก กรณีถูกรบกวนจากสนามไฟฟ้าภายนอกอย่างเดียว กรณีถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กอย่างเดียว กรณีถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก และกรณีอยู่ภายใต้ความ

ร้อน 10,000 K เพื่อศึกษาปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นโดยอาศัยแบบจำลองอนุภาคและสมการแมกซ์เวลล์ ซึ่งได้ผลการจำลองอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 5.1 พารามิเตอร์ในการจำลองระบบพลาสมา 2 มิติ

พารามิเตอร์ (ตัวแปร)	**ขนาด**
ความยาวด้าน (ln)	1 เมตร
จำนวนกริด (ngrid) ต่อด้าน	40 กริด
จำนวนอนุภาคจำลอง (npar)	160,000 อนุภาค
จำนวนอนุภาคจริงต่อ 1 อนุภาคจำลอง (rat)	1.0×10^{6} อนุภาคจริง/อนุภาคจำลอง
จำนวนข้อมูลต่อ 1 รอบการสั่นพลาสมา (di) (ใช้กำหนดเวลาของรอบการคำนวณ $dt = \frac{T_p}{di}$ ซึ่ง T_p คือ คาบการสั่นพลาสมา)	100 ข้อมูล/การสั่น 1 รอบ
จำนวนครั้งของรอบเวลาการคำนวณ (ntime)	1,000 ครั้ง
ความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับในการคำนวณศักย์ไฟฟ้า (err_criteria)	1.0×10^{-5} V
จำนวนรอบที่มากที่สุดของการคำนวณศักย์ไฟฟ้า (IterMax)	1,000 รอบ

5.1.1 พลาสมาไม่ถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก

กรณีระบบไม่เกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก สนามไฟฟ้าภายในที่เกิดขึ้นจากองค์ประกอบของระบบซึ่งก็คืออนุภาคพลาสมาที่มีประจุจะมีอิทธิพลสำคัญต่อพฤติกรรมของพลาสมาทั้งรูปแบบของสนามและการเคลื่อนที่ของพลาสมา ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้ระบบพลาสมาเสมือนไม่มีความร้อนหรือเสมือนอยู่ภายใต้สมดุลความร้อน T = 0 K

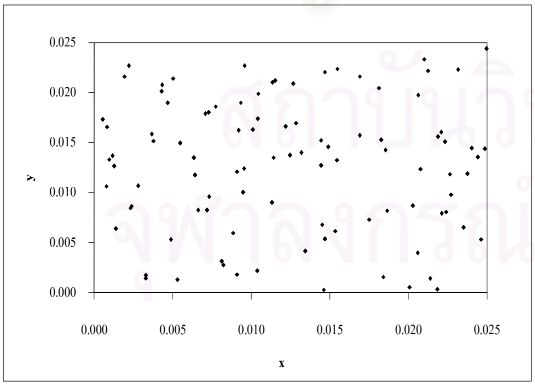
กรณีที่ระบบไม่มีความร้อน T = 0 K และถ้าสมมติว่าองค์ประกอบในพลาสมามีการกระจายตัวแบบปกติเมื่อเริ่มต้นซึ่งได้ทำให้พลาสมามีความสามารถที่จะสร้างสนามภายในขึ้นมาจากความหนาแน่นประจุสุทธิที่เกิดจากความไม่เท่ากันของความหน่าแน่นประจุลบของอนุภาคอิเล็กตรอนกับประจุบวกของอนุภาคโปรตอน ณ บริเวณหนึ่งๆ ทำให้เกิดศักย์ไฟฟ้า ณ จุดดังกล่าว ถ้าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนี้มีความแตกต่างจากบริเวณข้างเคียงจะเป็นเหตุให้เกิดสนามไฟฟ้า ณ บริเวณดังกล่าว ซึ่งสนามที่เกิดขึ้นนี้จะมีอิทธิพลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคพลาสมาซึ่งเป็นองค์ประกอบ

ของระบบทำให้ระบบพลาสมาเกิดการเปลี่ยนแปลง สำหรับการจำลองเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจากองค์ประกอบภายในของระบบแต่เพียงอย่างเดียวนั้นได้ทำการจำลองอนุภาคอิเล็กตรอนชนิดเดียว โดยพิจารณาว่าอนุภาคโปรตอนในระบบเคลื่อนที่ช้ามากจนเสมือนว่าหยุดนิ่งอยู่ในระบบตลอดการจำลอง และจำลองอนุภาคทั้ง 2 ชนิดพร้อมกัน

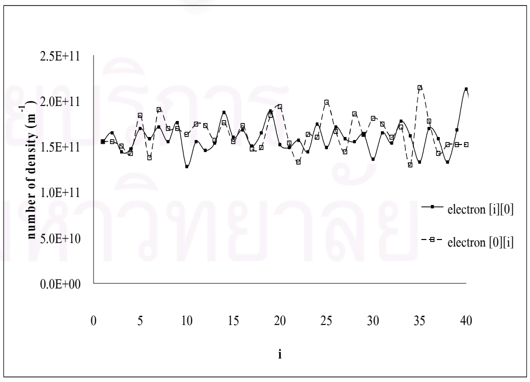
อนึ่ง ในการพิจารณาผลการจำลองนั้นเพื่อให้สื่อสารได้ชัดเจนการบรรยายและรูปประกอบจะยกเฉพาะการเปลี่ยนแปลงในแนวแกนใดแกนหนึ่ง ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง หรือการเคลื่อนที่ของอนุภาคจำลองอนุภาคใดอนุภาคหนึ่งมาวิเคราะห์เป็นหลัก อย่างไรก็ตามความเปลี่ยนแปลงในแนวแกนอื่น ตำแหน่งอื่นและอนุภาคอื่นก็สามารถวิเคราะห์ได้ในลักษณะเดียวกัน จากการจำลองได้ผลการจำลอง ดังนี้

5.1.1 (ก) กรณีจำลองเพียงอนุภาคอิเล็กตรอน

การจำลองระบบพลาสมาจากการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจากอนุภาคอิเล็กตรอนเพียงชนิดเดียว เมื่อเวลาเริ่มต้น ($t = 0$ วินาที) มีการกระจายอนุภาคภายในพื้นที่ซึ่งแทนได้ด้วยกริด [i][j] = [0][0] ดังแสดงในรูปที่ 5.1 (1) ลักษณะการกระจายของอนุภาคอิเล็กตรอนเป็นการกระจายแบบสุ่ม โดยมีการกระจายแบบสม่ำเสมอของอนุภาคโปรตอนอยู่เป็นพื้นหลัง พึงสังเกตว่าหนึ่งจุดที่เห็นนั้นในรูปที่ 5.1(1) นั้นเป็นอนุภาคจำลองซึ่งแทนอิเล็กตรอนจำนวน 10^6 อนุภาค การกระจายของอนุภาคที่เกิดขึ้นสามารถพิจารณาเป็นความหนาแน่นของอนุภาคภายในพื้นที่ต่างๆทั้งตามแนวแกน x และ y ได้ดังแสดงในรูปที่ 5.1 (2) อิทธิพลของประจุภายในพื้นที่จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าภายในพื้นที่นั้นขึ้นมา



(1)



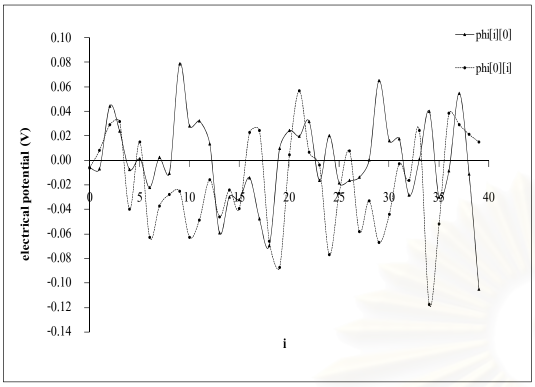
(2)

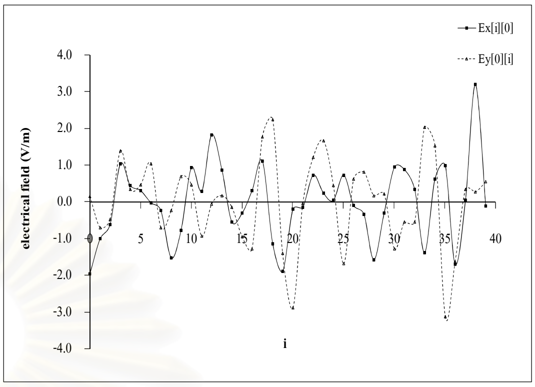
รูปที่ 5.1 อนุภาคอิเล็กตรอน ณ เวลาเริ่มต้น ($t = 0$ วินาที) กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) การกระจายตำแหน่งในพื้นที่ [0][0]

(2) ความหนาแน่นในพื้นที่ตามแนวแกน x เมื่อ $y = 0$ และตามแนวแกน y เมื่อ $x = 0$

ผลของประจุภายในพื้นที่ทำให้เกิดศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในพื้นที่ดังกล่าวขึ้น ซึ่ง ณ เวลาหนึ่งๆ อนุภาค ณ บริเวณนั้นจะรับรู้เพียงค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในบริเวณของตนเอง และจะเคลื่อนที่ตามสนามไฟฟ้าที่อนุภาครับรู้ได้



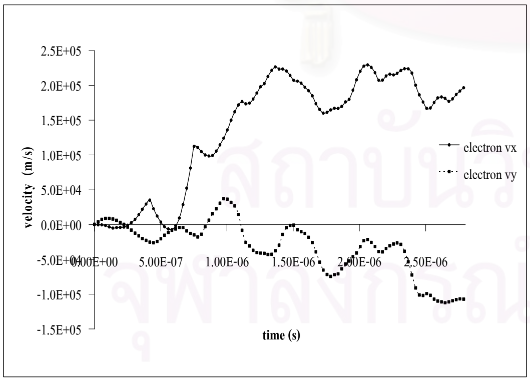


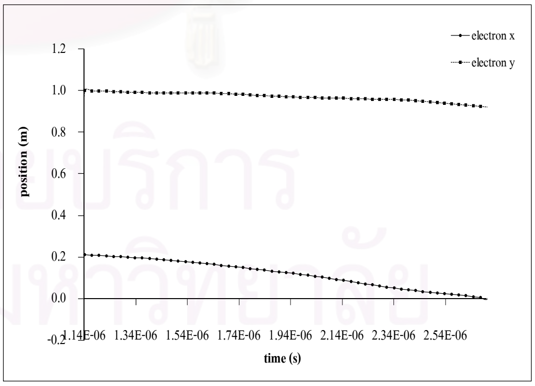
(1) **(2)**

รูปที่ 5.2 การเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน ณ เวลาเริ่มต้น (t = 0 วินาที) กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

จากรูปที่ 5.2 ได้แสดงศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการกระจายของอนุภาคอิเล็กตรอนเมื่อเวลาเริ่มต้น เนื่องจากการกระจายของอนุภาคที่มีลักษณะสุ่มจึงทำให้เกิดสนามไฟฟ้าที่มีลักษณะการเคลื่อนที่ออกไปตามแนวแกนในลักษณะสั่นขึ้น-ลง สนามไฟฟ้าในลักษณะดังกล่าวมีศักย์ไฟฟ้าที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนเช่นเดียวกันแต่มีเฟสต่างกันอยู่ $\frac{\pi}{2}$



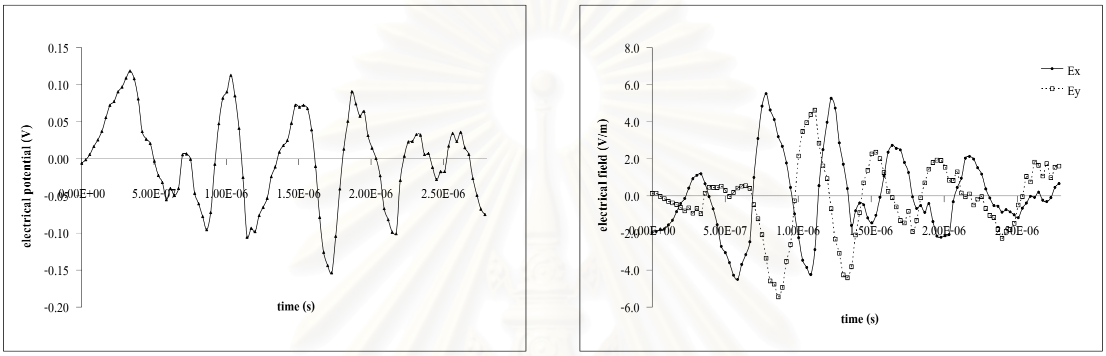


(1) **(2)**

รูปที่ 5.3 ตัวอย่างการเคลื่อนที่ของอนุภาคอิเล็กตรอนเฉพาะที่สุ่มเลือก กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) ความเร็ว **(2)** ตำแหน่ง

แต่ละอนุภาคซึ่งมีประจุจะได้รับผลจากสนามเกิดเป็นแรงซึ่งจะไปเร่งให้อนุภาคมีความเปลี่ยนแปลงในการเคลื่อนที่ ทั้งนี้ความเฉื่อยเนื่องจากมวลของอนุภาคจะพยายามรักษาการเคลื่อนที่ปัจจุบันเอาไว้กรณีของอนุภาคโปรตอนแสดงให้เห็นถึงผลในเรื่องนี้อย่างชัดเจนเมื่อเทียบกับอิเล็กตรอนกระทั่งสามารถประมาณได้ว่าอนุภาคโปรตอนนั้นหยุดนิ่งตลอดการจำลอง ในขณะที่อิเล็กตรอนซึ่งมีมวลน้อยกว่ามากผลดังกล่าวจึงเคลื่อนที่ไปตามแรงไฟฟ้าที่มากระทำดังแสดงในรูปที่ 5.3 (1) จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป ความเร็วเพิ่มสูงขึ้นโดยเฉพาะในแนวแกน x แต่ยังคงการเคลื่อนที่แบบสั่นอยู่



(1) **(2)**

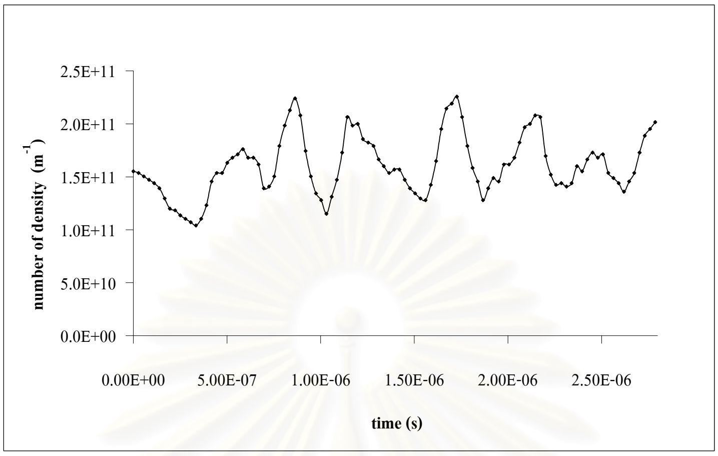
รูปที่ 5.4 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของ ในพื้นที่ [0][0] กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

ถ้าพิจารณาจากรูปที่ 5.4 จะเห็นว่า เมื่อศักย์และสนามไฟฟ้าเคลื่อนที่ไปได้หนึ่งรอบการเคลื่อนที่มีการเปลี่ยนแปลงของศักย์และสนามไฟฟ้าไปจากเมื่อเวลาก่อนหน้าซึ่งมีความเป็นไปได้ว่าข้อมูลการจำลองก่อนหน้าที่จะเข้ามาคำนวณศักย์นำไปสู่ค่าซึ่งไกลจากคำตอบจึงทำให้ผลการจำลองในช่วงเวลาดังกล่าวมีความผิดพลาดไป อย่างไรก็ตามจากการประมาณความร้อนที่เกิดขึ้นจากการสั่นว่ามีอิทธิพลต่อระบบน้อยมากนั้นก็ยังอาจจะส่งผลต่อการจำลองซึ่งจะไปปรากฏผลว่าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วโดยเฉพาะเมื่อจำลองระบบในช่วงเวลาที่ยาวนานขึ้น ผลจากการที่อนุภาคอิเล็กตรอนต่างๆเคลื่อนที่ซึ่งจะทำให้ตำแหน่งของอิเล็กตรอนเหล่านั้นดังที่แสดงในรูปที่ 5.3 (2) มีการเปลี่ยนแปลงไปด้วยและทำให้ความหนาแน่นประจุ (รูปที่ 5.4) มีการเปลี่ยนแปลง จากผลการเปลี่ยนแปลงประจุที่เกิดขึ้นนี้เองจะทำให้ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าเกิดการเปลี่ยนแปลงไปในขณะเดียวกัน

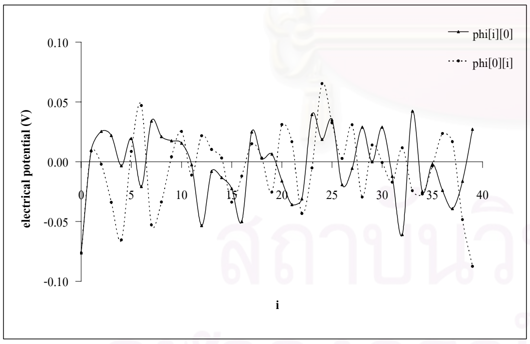
สำหรับช่วงเปลี่ยนแปลงของเวลา $\Delta t = 2.79 \times 10^{-9}$ หรือ $\frac{T_p}{100}$ วินาทีจะได้ผลการจำลองศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในพื้นที่ [0][0] ออกมาดังแสดงในรูปที่ 5.4 พบว่า ศักย์ไฟฟ้าและ

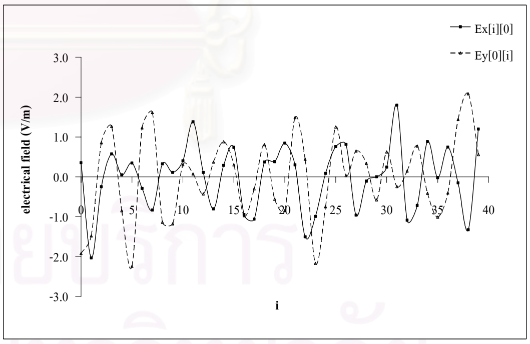
สนามไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงแบบคาบ โดยอิทธิพลของสนามไฟฟ้าที่เกิดการเปลี่ยนแปลงไปนั้นจะทำให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคเกิดการเปลี่ยนแปลงในเวลาต่อไปเป็นผลให้อนุภาคมีการเคลื่อนที่แบบสั่นภายใต้การเปลี่ยนแปลงดังกล่าว



รูปที่ 5.5 ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในพื้นที่ [0][0] ที่เวลาต่างๆ กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

จากรูปที่ 5.6 (2) จะเห็นว่า สนามไฟฟ้ามีการสั่นใน 2 มิติซึ่งอาจทำให้เกิดการเคลื่อนที่รอบแกนอ้างอิงที่ตั้งฉากกับระนาบที่พิจารณาได้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากสมมติฐานของพลาสมา 2 มิติจึงไม่อาจระบุการเกิดขึ้นของสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำอันเนื่องจากการเคลื่อนที่ดังกล่าวได้



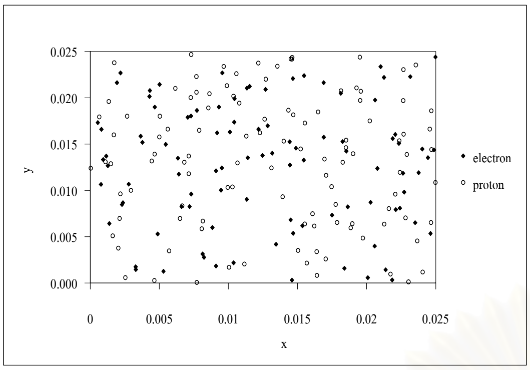


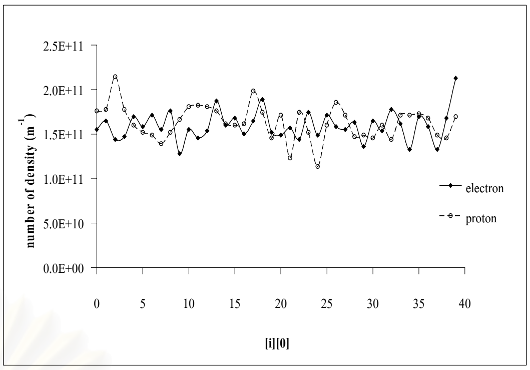
(1) **(2)**

รูปที่ 5.6 การเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนของ ที่เวลา 1.76 x 10^{-6} วินาที กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

5.1.1 (ข) กรณีจำลองอิเล็กตรอนและโปรตรอน





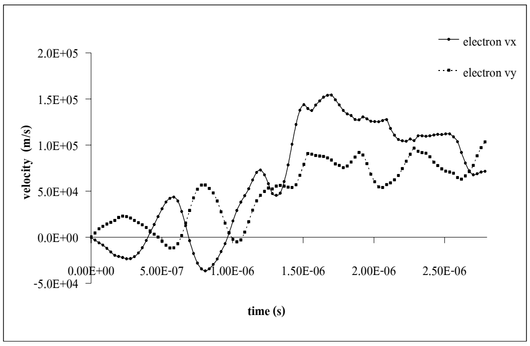
(1) **(2)**

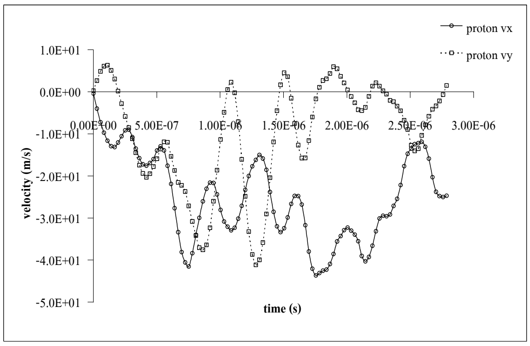
รูปที่ 5.7 อนุภาคอิเล็กตรอนและโปรตอน ณ เวลาเริ่มต้น (t = 0 วินาที) กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อนในระบบพลาสมา 2 มิติ

(1) การกระจายตำแหน่งในพื้นที่ [0][0]

(2) ความหนาแน่นในพื้นที่ตามแนวแกน

ในการจำลองนี้กำหนดการกระจายของอนุภาคของพลาสมาดังแสดงโดยรูปที่ 5.7(1) ด้วยเหตุที่ว่าเมื่อเริ่มต้นอนุภาคพลาสมาซึ่งประกอบไปด้วย อนุภาคอิเล็กตรอน และ อนุภาคโปรตอนกระจายตัวอยู่ในระบบอย่างสุ่มนั้น จะทำให้ภายในพื้นที่ต่างๆของระบบเกิดศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าขึ้นซึ่งจะไปมีผลทำให้อนุภาคภายในพื้นที่ดังกล่าวเคลื่อนที่ แต่เนื่องด้วยคุณสมบัติของมวลที่แตกต่างกันของอนุภาคทั้ง 2 ชนิดจึงทำให้อนุภาคทั้ง 2 ชนิดตอบสนองต่ออิทธิพลของสนามไฟฟ้าแตกต่างกันอย่างมาก ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 5.8 ซึ่งอนุภาคอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เร็วกว่าอนุภาคโปรตอน 1,000 เท่า ซึ่งเมื่อได้พิจารณาถึงความคลาดเคลื่อนของพลังงานรวมที่เกิดขึ้น พบว่าการจำลอง 2 อนุภาคสามารถทำให้การจำลองมีความแม่นยำมากขึ้นโดยลดความคลาดเคลื่อนจากการจำลองอนุภาคอิเล็กตรอนอย่างเดียวซึ่งคลาดเคลื่อนถึง 50.26% เหลือ 43.79% และความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนไม่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วเหมือนกรณีจำลองอิเล็กตรอนอย่างเดียว แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเวลาผ่านไปนานขึ้นการจำลองยังคงให้ผลว่าอนุภาคอิเล็กตรอนสั่นด้วยความเร็วมากขึ้น อย่างไรก็ตาม การพิจารณาการเคลื่อนที่ของโปรตอนมีผลต่อระบบคือทำให้พลังงานรวมของระบบมีเสถียรภาพสูงขึ้นทั้งนี้อธิบายได้ว่า เมื่อจำลองอนุภาคทั้ง 2 ชนิดการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจะถูกหน่วงด้วยการเคลื่อนที่ของโปรตอนจึงทำให้การจำลองระบบมีความแม่นยำมากขึ้น



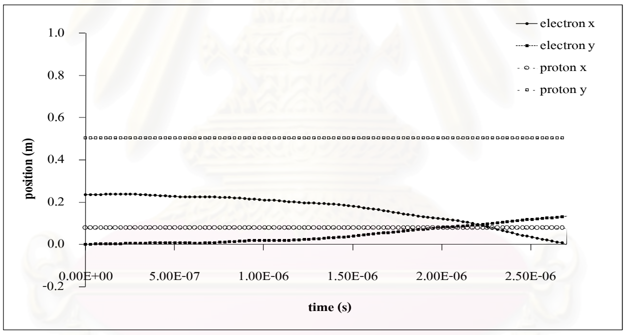


(1) **(2)**

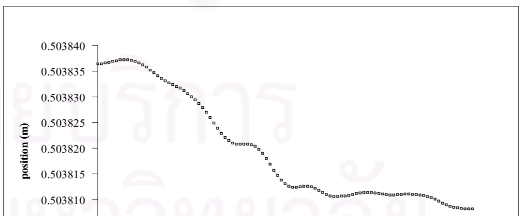
รูปที่ 5.8 ความเร็วอนุภาคพลาสมาในพื้นที่ [0][0] ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) อนุภาคอิเล็กตรอน **(2)** อนุภาคโปรตอน

เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง จากรูปที่ 5.9 จะเห็นว่า เนื่องจากอนุภาคโปรตอนซึ่งยกเป็นตัวอย่างนี้เคลื่อนที่ช้ามากในช่วงเวลาที่พิจารณา ทั้งนี้อนุภาคโปรตรอนที่จำลองทุกอนุภาคล้วนมีลักษณะการเคลื่อนที่แบบเดียวกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าความหนาแน่นอนุภาคโปรตรอนภายในพื้นที่ใดๆ มีค่าคงที่ตลอดเวลาที่ได้ทำการจำลอง



(1)



(2) **(3)**

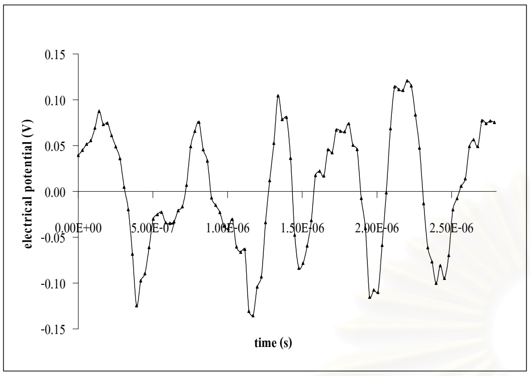
รูปที่ 5.9 ตำแหน่งอนุภาคพลาสมาที่เวลาต่างๆในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) ตำแหน่งอนุภาคพลาสมา

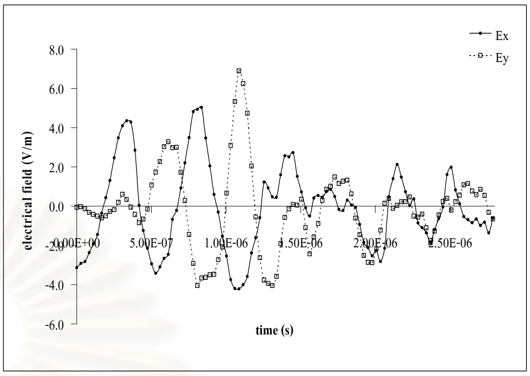
(2) ตำแหน่งอนุภาคโปรตอนตามแกน x

(3) ตำแหน่งอนุภาคโปรตอนตามแกน y

ผลจากการการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นประจุในพื้นที่ใดๆที่เวลาต่างๆทำให้ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าเกิดการเปลี่ยนแปลงในเวลาต่างๆ ตามอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงของประจุที่เกิดขึ้นดังแสดงในรูปที่ 5.10



(1)



(2)

รูปที่ 5.10 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของศักย์และสนามไฟฟ้าในพื้นที่ [0][0] กรณีจำลอง 2 อนุภาคในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

5.1.2 สนามไฟฟ้าความถี่ต่างๆ

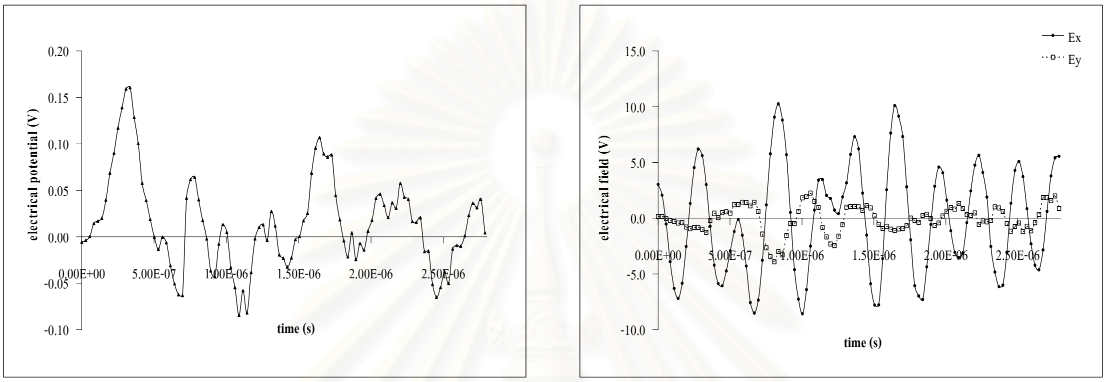
กรณีระบบถูกรบกวนด้วยสนามไฟฟ้าจากภายนอกจะสมมติสนามไฟฟ้าภายนอกซึ่งบรรยายได้ คือ $\bar{E} = 5\cos\omega t\ \hat{x}$ V/m ทั้งนี้จะพิจารณาว่าสนามดังกล่าวมีปรากฏที่ตำแหน่ง (0,0) อย่างไรก็ตามจะกำหนดว่าด้วยอิทธิพลของกำแพงศักย์ภายในระบบอนุภาคที่อยู่นอกเหนือพื้นที่ (0,0) ไม่สามารถรับรู้ถึงสนามไฟฟ้าภายนอกที่ปรากฏนอกพื้นที่ของตนเองได้

สำหรับการจำลองพลาสมาในกรณีนี้ได้ดำเนินการจำลองระบบซึ่งถูกรบกวนด้วยสนามไฟฟ้าจากภายนอกที่มีความถี่ต่างๆ ดังต่อไปนี้

5.1.2 (ก) เมื่อ $\omega = \omega_p$

สนามไฟฟ้าที่เข้ามารบกวนระบบจะทำให้สนามไฟฟ้าภายในพื้นที่ซึ่งสามารถรับรู้ถึงสนามภายนอกได้นั้นสั่นด้วยความถี่เดียวกับความถี่ของสนาม จากรูปที่ 5.11 (2) จะเห็นว่า สนามไฟฟ้าในพื้นที่ [0][0] ที่เคลื่อนที่ในแนวแกน x นั้นสั่นด้วยความถี่เดียวกับสนามไฟฟ้าภายนอก (ω_p = 2.79 x 10^6 วินาที$^{-1}$) และมีขนาดสนามสูงขึ้นกว่ากรณี 5.1.1(ก) ซึ่งเป็นผลมาจากการรวมกันของสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนกับสนามภายในที่เกิดจากประจุ สำหรับผลของสนามภายนอกต่อสนามภายในทิศตั้งฉากนั้นแม้ว่าสนามภายนอกจะไม่ได้สร้างผลกระทบต่อสนามภายในในทิศตั้งฉาก

โดยตรง แต่เนื่องจากอิทธิพลของสนามมีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งทำให้ความหนาแน่นของประจุมีการเปลี่ยนแปลงลักษณะนี้ส่งผลกระทบถึงสนามไฟฟ้าภายในในทิศซึ่งตั้งฉากกับสนามภายนอกทำให้สนามสั่นด้วยความไม่เป็นระเบียบมากขึ้น ถ้าพิจารณาจากรูปที่ 5.11 (2) จะเห็นว่าสนามไฟฟ้าในทิศ y มีการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาซึ่งเกิดจากการได้รับอิทธิพลของสนามไฟฟ้าภายนอก แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากอิทธิพลดังกล่าวไม่ได้ส่งผลโดยตรงจึงทำให้สนามในทิศตั้งฉากกับสนามภายนอกยังคงสั่นภายใต้อิทธิพลจากภายในเป็นสำคัญคล้ายกับกรณี 5.1.1 (ก)



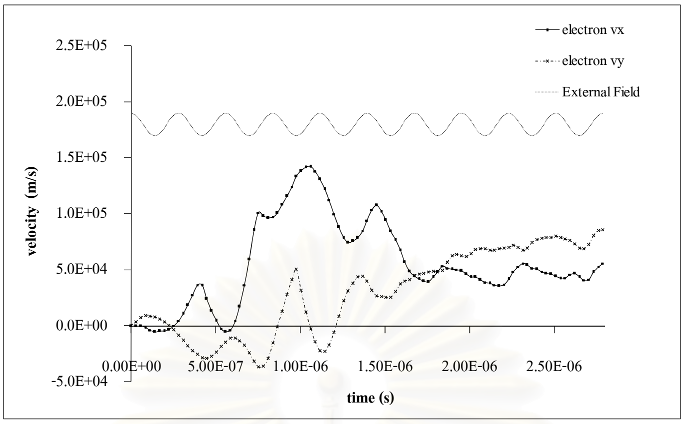
(1) **(2)**

รูปที่ 5.11 การเปลี่ยนแปลงต่อเวลาในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ $\vec{E} = 5\cos\omega_p t\ \hat{x}$ V/m

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

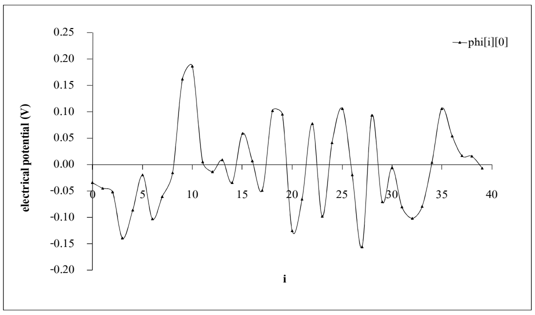
สนามไฟฟ้าภายนอกที่เข้ามารบกวนระบบจะพยายามบังคับให้อนุภาคสั่นด้วยความถี่เดียวกันกับสนาม แต่เนื่องจากระบบเองก็สร้างสนามภายในขึ้นมาด้วยดังนั้นอิทธิพลของสนามภายนอกที่กระทำต่ออนุภาคจึงไม่ได้ส่งผลต่อพฤติกรรมทั้งหมดของอนุภาค ทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับผลสุทธิที่เกิดขึ้นจากสนามทั้งสอง จากรูปที่ 5.12 ซึ่งแสดงความเร็วของอนุภาคตัวที่ 26,500 ที่สุ่มเลือกขึ้นเป็นตัวแทนของระบบและเป็นอนุภาคตัวหนึ่งที่อยู่ในพื้นที่ [0][0] ซึ่งสามารถรับรู้ถึงอิทธิพลของสนามภายนอกที่เข้ามากระทำได้ จะเห็นว่า ในช่วงเวลา 0 – 1.0 x 10^{-6} วินาที ลักษณะความเร็วที่เกิดขึ้นไม่แตกต่างไปจากในกรณี 5.1.1 (ก) ซึ่งแสดงว่าในช่วงเวลาต้นๆ อิทธิพลของสนามภายนอกไม่ส่งผลต่ออนุภาคตัวนี้มากนัก ทั้งนี้ถ้าพิจารณาจากสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในพื้นที่ดังกล่าวก็จะเห็นว่าเป็นเพราะลักษณะของสนามไฟฟ้าสุทธิที่เกิดขึ้นไม่ได้มีความแตกต่างไปจากกรณีที่ระบบไม่ได้ถูกรบกวนจากสนามภายนอกมาก ดังนั้นการเคลื่อนที่ในช่วงต้นๆ จึงแสดงออกมาไม่แตกต่างไปจากกรณีไม่ถูกรบกวนด้วยสนามภายนอก แต่เมื่อเวลาผ่านไปจนมาถึงในขณะเวลาหนึ่งที่สนามทั้ง 2 เกิดการเสริมกันในช่วงที่มีค่าสูง ผลของสนาม ณ เวลานี้จะทำให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคเกิดการเปลี่ยนแปลงไปจากกรณีไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอกมากและสนามภายในจะถูกเหนี่ยวนำให้เคลื่อนที่ไปเกือบพร้อมๆกับสนามภายนอกซึ่งเห็นจากรูปที่ 5.12 ในช่วงเวลา 1.0 x 10^{-6}- 2.0 x 10^{-6}

วินาที อนุภาคสั่นด้วยความถี่ที่ใกล้เคียงกับสนามภายนอกมากซึ่งมีความเป็นไปได้ว่าในช่วงเวลาดังกล่าวการสั่นของพลาสมาได้ถูกควบคุมด้วยสนามภายนอกแล้ว

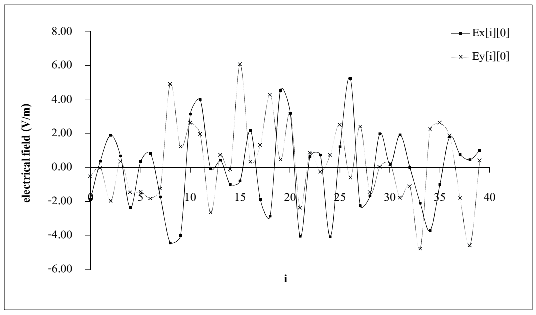


รูปที่ 5.12 ความเร็วอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ $\bar{E} = 5\cos\omega_p t\,\hat{x}\,\mathrm{V/m}$

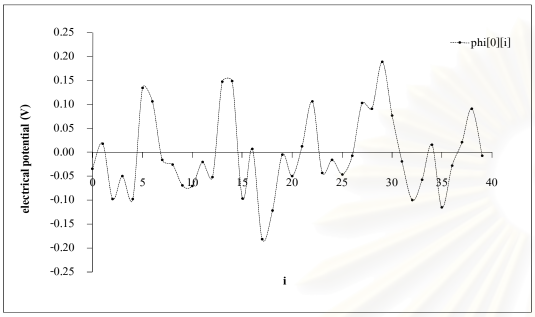
สำหรับลักษณะของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง จากรูปที่ 5.13 จะเห็นว่าสนามไฟฟ้าภายในพื้นที่ตามแนวแกนมีการสั่นทั้งในทิศ x และ y ซึ่งน่าจะเป็นผลจากความเปลี่ยนแปลงของศักย์ไฟฟ้าโดยเฉพาะอย่างยิ่งจากสนามภายนอกในพื้นที่ (0,0) ถึงแม้ว่าภายในระบบจะมีกำแพงศักย์หรือปรากฏการณ์ Debye Shielding คอยปิดกั้นการรับรู้สนามไฟฟ้าที่อยู่ห่างไกลออกไปจากขอบเขตที่เรียกว่า Debye Length ก็ตาม แต่สนามไฟฟ้าภายนอกยังสามารถส่งผลกระทบผ่านการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายในพื้นที่ [0][0] ซึ่งรับรู้และตอบสนองต่อแรงจากสนามดังกล่าวออกไปยังอนุภาคอื่นๆที่อยู่นอกเหนือพื้นที่นี้ โดยธรรมชาติแล้วสนามไฟฟ้าภายในที่เกิดขึ้นนี้จะมีบทบาทลดทอนการรบกวนจากสนามไฟฟ้าภายนอก แต่ในบางขณะสนามไฟฟ้าภายในก็อาจส่งเสริมการรบกวนจากสนามภายนอกด้วย ซึ่งในกรณีดังกล่าวนี้อาจทำให้อนุภาคมีความเร็วสูงมากจนสามารถหนีหายไปจากระบบหรือเป็นผลให้ผลิตความร้อนขึ้นมาในระบบอย่างมาก แต่อย่างไรก็ตามสำหรับการจำลองนี้จะปรากฏเป็นผลว่าทำให้การคำนวณลู่ออก



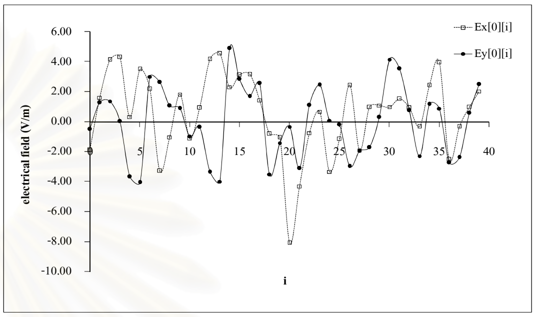
(1)



(2)



(3)



(4)

รูปที่ 5.13 ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในพื้นที่ตามแนวแกนที่เวลา 1.76 x 10^{-6} วินาที ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$

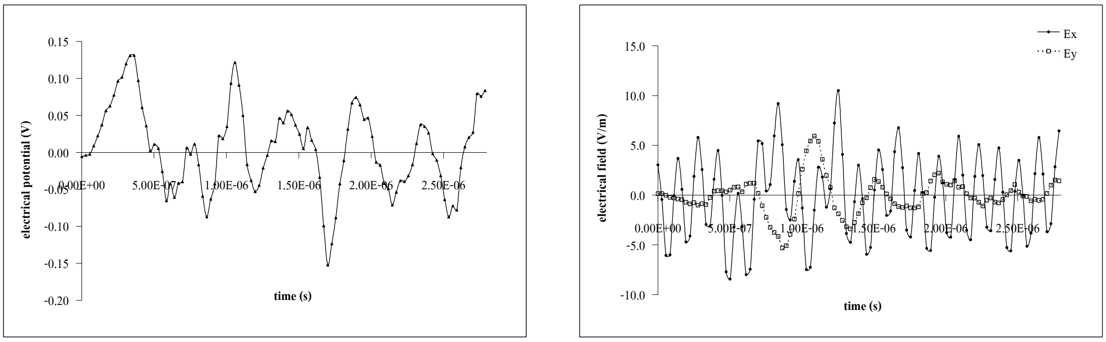
(1) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน x **(2)** สนามไฟฟ้าตามแกน x

(3) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน y **(4)** สนามไฟฟ้าตามแกน y

5.1.2 (ข) เมื่อ $\omega > \omega_p$

กรณี $\omega = 2\omega_p$

สนามในพื้นที่ [0][0] ซึ่งรับรู้ถึงสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนจะถูกบังคับให้สั่นด้วยความถี่เดียวกับสนามภายนอกนั้น สำหรับสนามในทิศซึ่งตั้งฉากกับสนามภายนอกซึ่งไม่ได้รับอิทธิพลจากสนามโดยตรง สนามในทิศทางนี้จะสั่นด้วยปัจจัยจากภายในเป็นหลักเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงในแนวสนามภายนอกไม่ส่งผลต่อสนามในทิศทางนี้มากนัก

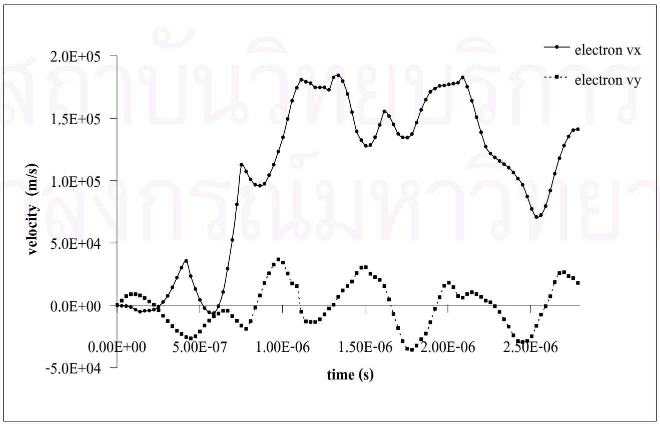


(1) **(2)**

รูปที่ 5.14 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาในพื้นที่ [0][0] ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = 2\omega_p$

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

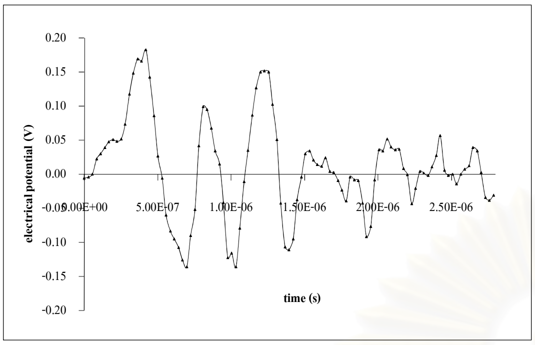
เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกที่เข้ามารบกวนจะบังคับให้อนุภาคที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามดังกล่าวสั่นตามการเคลื่อนที่ของสนามนั้น แต่อย่างไรก็ตามอิทธิพลดังกล่าวก็ไม่อาจจะบังคับให้อนุภาคสั่นตามได้โดยตลอดทั้งนี้เป็นเพราะมีสนามอันเนื่องจากประจุเข้ามากระทำกับอนุภาคพร้อมๆกันกับสนามภายนอกนั้นตลอดเวลาซึ่งในบางขณะเวลาก็เกิดการเสริมกันและในบางขณะเวลาก็หักล้างกัน จากการจำลอง พบว่า เมื่อสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนมีความถี่สูงๆ อนุภาคจะสั่นโดยมีความเร็วสูงขึ้น แต่ยังคงสั่นด้วยความถี่ซึ่งสังเกตได้จากกรณี 5.1.1 (ก) และ 5.1.2 (ก) ทั้งนี้มีความเป็นไปได้ว่าอนุภาคไม่สามารถจะเคลื่อนที่ตามการสั่นของสนามไฟฟ้าได้จึงสะสมผลการเปลี่ยนแปลงภายใต้การกระทำของสนามมาเป็นการสั่นด้วยอัตราที่เพิ่มขึ้นซึ่งจะเห็นได้จากรูปที่ 5.15 ว่าความเร็วในแกน x ในช่วงเวลาหลัง 1.0×10^{-6} วินาที เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลในกรณี 5.1.2 (ก) จะมีขนาดความเร็วเพิ่มสูงกว่ากรณีแรกมาก

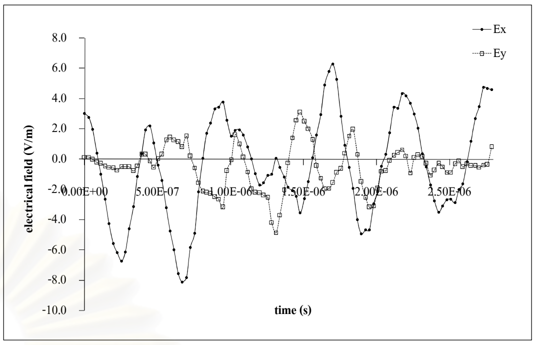


รูปที่ 5.15 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = 2\omega_p$

5.1.2 (ค) เมื่อ $\omega < \omega_p$

กรณี $\omega = 0.5\omega_p$



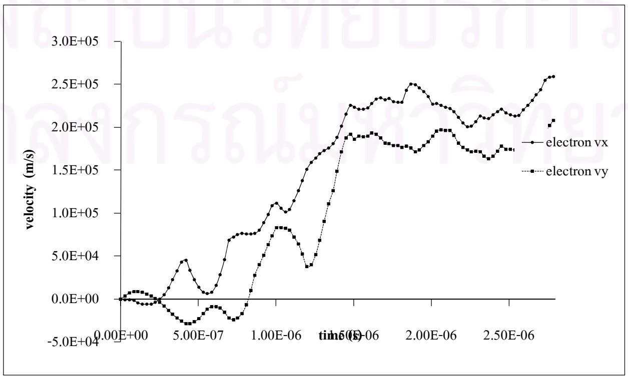


(1) **(2)**

รูปที่ 5.16 การเปลี่ยนแปลงศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าตามเวลาในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = 0.5\omega_p$

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

เนื่องจากสนามภายนอกซึ่งมีความถี่ต่ำกว่าความถี่การสั่นพลาสมาที่เกิดจากประจุภายในระบบจะพยายามบังคับให้อนุภาคสั่นตามการเคลื่อนที่ของสนามนั้น แต่เนื่องด้วยอิทธิพลของประจุภายในที่ทำให้อนุภาคสั่นด้วยความถี่ที่สูงกว่าอยู่ ดังนั้นความเร็วของอนุภาคตามแนวการเคลื่อนที่ของสนามจึงอยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามภายในที่เกิดขึ้น ในขณะที่ในทิศซึ่งตั้งฉากกับสนามภายนอกในกรณีความถี่ต่ำนี้ สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นได้รับผลกระทบจากสนามภายนอกมากกว่ากรณีความถี่สูง จากรูปที่ 5.16 (2) จะเห็นว่า สนามในทิศ y มีขนาดสูงซึ่งเป็นเหตุให้ความเร็วในทิศ y เพิ่มสูงในช่วงเวลาดังกล่าวดังแสดงในรูปที่ 5.17 ซึ่งการเคลื่อนที่ดังกล่าวอาจจะนำไปสู่การลู่ออกได้เมื่อทำการจำลองด้วยเวลาที่ยาวนานกว่านี้



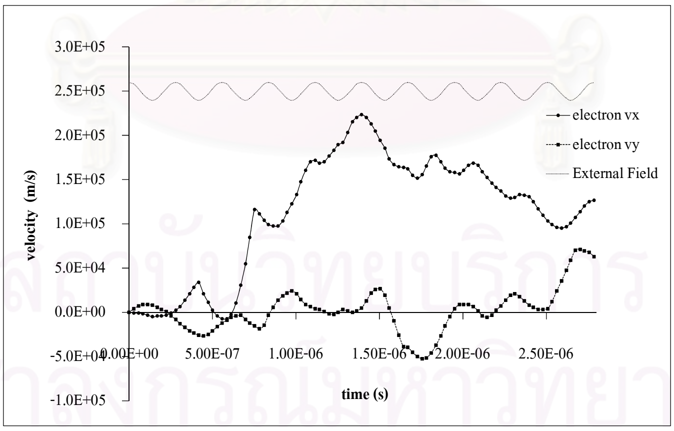
รูปที่ 5.17 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = 0.5\omega_p$

5.1.3 สนามแม่เหล็กความถี่ต่างๆ

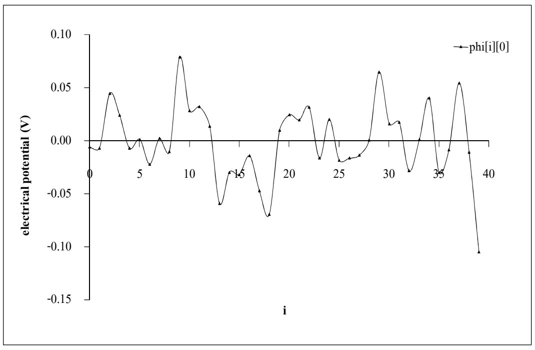
สนามแม่เหล็ก $\vec{B} = 1.0 \times 10^{-6} \cos \omega t \ \hat{z}$ T ปรากฏในระบบที่พื้นที่ (0,0) ในแนวตั้งฉากกับระนาบการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบ เพื่อศึกษาผลที่เกิดขึ้นในพลาสมาภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกที่เข้ามารบกวนจึงได้จำลองระบบพลาสมาที่ได้รับสนามแม่เหล็กภายนอกที่มีลักษณะดังกล่าวข้างต้น เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบถึงพฤติกรรมของพลาสมาที่ได้รับอิทธิพลจากสนามแม่เหล็กที่มีความถี่ต่างๆ ดังนี้

5.1.1 (ก) เมื่อ $\omega = \omega_p$

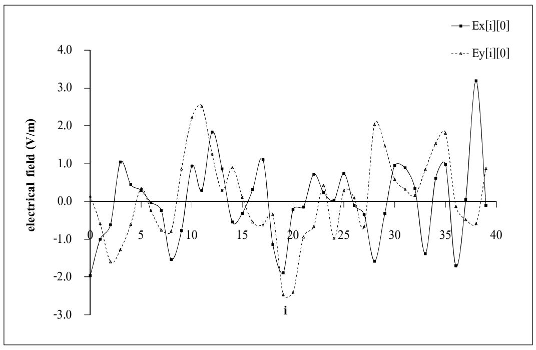
อิทธิพลของสนามแม่เหล็กภายนอกความถี่เดียวกับความถี่การสั่นพลาสมาส่งผลให้อนุภาคมีการเคลื่อนที่แบบหมุนมากขึ้นและถูกบังคับให้เคลื่อนที่ตามสนามภายนอกนี้ ซึ่งจากรูปที่ 5.18 จะเห็นว่า ความเร็วของอนุภาคในแกน y และการเคลื่อนที่ในแกน x ก็ได้รับอิทธิพลจากสนามภายนอกด้วยการที่สนามแม่เหล็กพยายามจะบังคับให้อนุภาคเคลื่อนที่ตามจึงทำให้ในบางขณะเวลาที่อนุภาคซึ่งสะสมความเร่งจากการหมุนของตนเองภายใต้อิทธิพลของสนามภายในที่เกิดขึ้นในเวลาที่ผ่านมาถูกหน่วงให้เคลื่อนที่ช้าลง ดังจะเห็นจากรูปว่า ในเวลาประมาณ 1.5 x 10^{-6} วินาที อนุภาคลดความเร็วลงและภายหลังจากนั้นก็เคลื่อนที่ด้วยความถี่ที่เพิ่มสูงขึ้นซึ่งเป็นความถี่เดียวกับการเคลื่อนที่ในทิศ y ที่ใกล้เคียงกับความถี่ของสนามแม่เหล็กที่เข้ามารบกวน



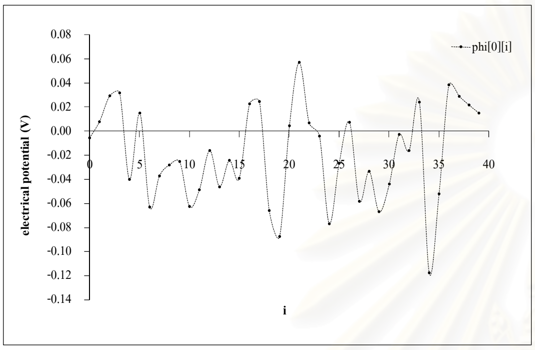
รูปที่ 5.18 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$



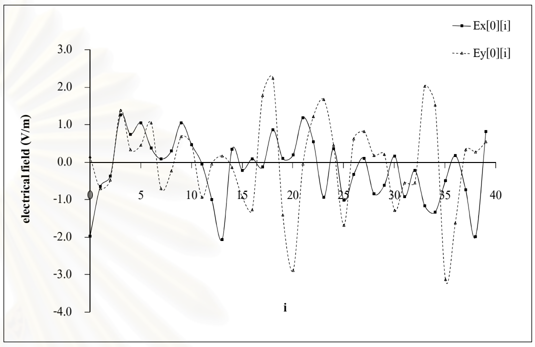
(1)



(2)



(3)



(4)

รูปที่ 5.19 ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในพื้นที่ตามแนวแกนที่เวลา 1.76 x 10^{-6} วินาที ในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$

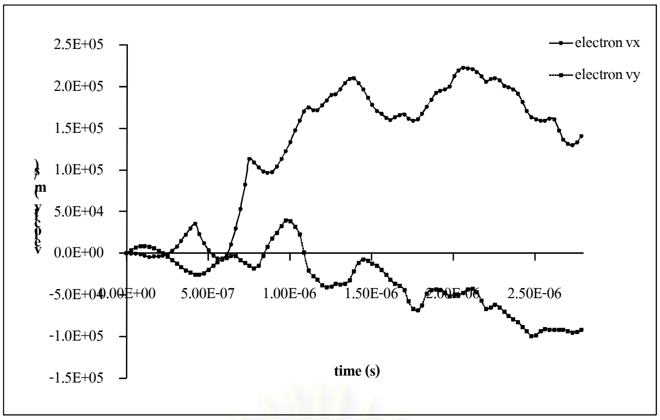
(1) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน x **(2)** สนามไฟฟ้าตามแกน x

(3) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน y **(4)** สนามไฟฟ้าตามแกน y

5.1.3 (ข) เมื่อ $\omega > \omega_p$

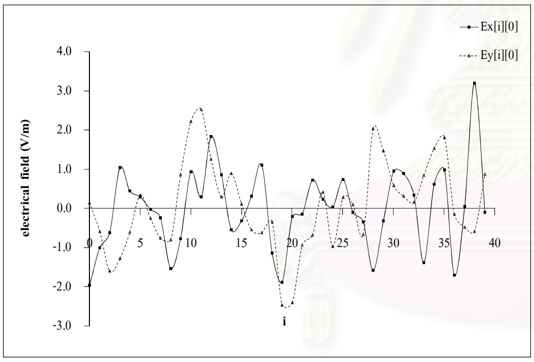
กรณี $\omega = 2\omega_p$

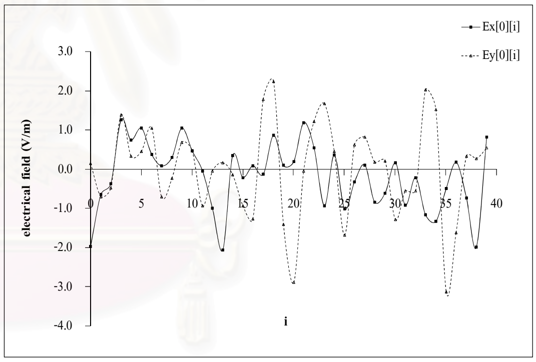
เนื่องจากสนามแม่เหล็กมีความถี่สูง อนุภาคซึ่งอยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามดังกล่าวจะถูกบังคับให้ต้องเคลื่อนที่ตามการหมุนวนนั้น แต่ด้วยเหตุที่อนุภาคมีมวลซึ่งจะคอยต้านทานการเปลี่ยนแปลงนั้นอยู่โดยจะพยายามรักษาการเคลื่อนที่เดิมไว้และด้วยอิทธิพลของสนามไฟฟ้าที่อนุภาคนั้นรับรู้จึงทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความถี่ซึ่งต่ำกว่าความถี่ของสนามแม่เหล็กภายนอกที่มากระทำ



รูปที่ 5.20 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความถี่ $\omega = 2\omega_p$

เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 5.20 จะเห็นว่า อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความถี่เดียวกับสนามแม่เหล็กภายนอก โดยแรงลอเรนซ์จากสนามแม่เหล็กจะทำให้อนุภาคเคลื่อนที่แบบหมุน ลักษณะการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กภายนอกนั้นจะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าที่มีลักษณะหมุนวนด้วยดังแสดงในรูปที่ 5.21





(1) **(2)**

รูปที่ 5.21 การเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าตามเวลาในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความถี่ $\omega = 2\omega_p$

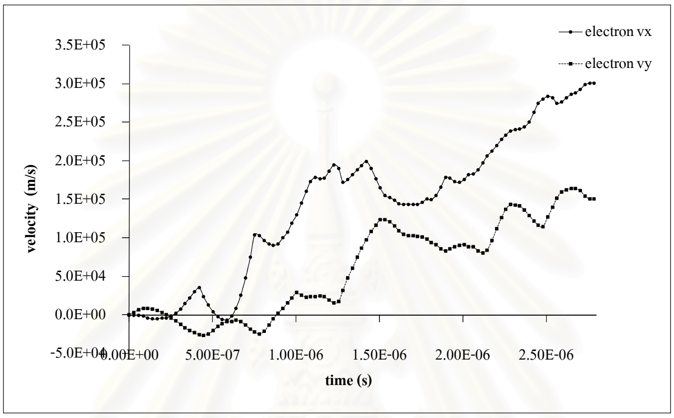
(1) ตามแกน x **(2)** ตามแกน y

5.1.3 (ค) เมื่อ $\omega < \omega_p$

กรณี $\omega = 0.5\omega_p$

ถ้าสนามแม่เหล็กที่เข้ามารบกวนระบบมีความถี่ต่ำซึ่งทำให้ความถี่ของการสั่นของอนุภาคอันเนื่องมาจากสนามไฟฟ้าภายในระบบสูงกว่าความถี่ของสนามแม่เหล็กที่เข้ามากระทำด้วยแล้ว

ความสามารถในการหน่วงอนุภาคให้มีความเร็วช้าลงโดยการบังคับให้อนุภาคหมุนนั้นจะต่ำกว่ากรณีที่สนามแม่เหล็กมีความถี่สูง จากรูปที่ 5.22 จะเห็นว่า อนุภาคถูกเร่งให้มีความเร็วสูงขึ้นทั้งในแนวแกน x และ y ความเร็วที่มีแนวโน้มว่าจะเพิ่มสูงขึ้นอย่างต่อเนื่องนี้ในที่สุดจะนำไปสู่การลู่ออกในทางการคำนวณ โดยในความเป็นจริงที่เกิดขึ้นนั้นเป็นเพราะระบบไม่สามารถกักเก็บอนุภาคไว้ได้จึงสูญเสียอนุภาคเหล่านั้นออกไปจากระบบ ซึ่งถ้าไม่ต้องการให้ระบบสูญเสียอนุภาคออกไปจนนำไปสู่การสูญเสียสภาวะพลาสมา ระบบจะต้องปลดปล่อยพลังงานที่เกิดขึ้นจากการสั่นอย่างรวดเร็วนี้ออกไปซึ่งพลังงานดังกล่าวโดยส่วนใหญ่แล้วจะปรากฏอยู่ในรูปของความร้อน



รูปที่ 5.22 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความถี่ $\omega = 0.5\omega_p$

5.1.4 สนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่างๆ

ถ้าระบบพลาสมาถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งสามารถเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กแยกออกจากกันได้ว่า

$$\vec{E} = 5.0\cos\omega t\ \hat{x}$$

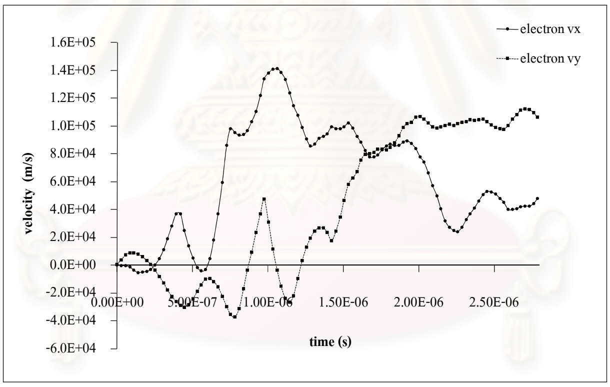
และ

$$\vec{B} = 1.0\times 10^{-6}\cos\omega t\ \hat{z}$$

ซึ่งจะพิจารณาระบบซึ่งถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกที่มีความถี่ต่างๆ โดยเคลื่อนที่เข้ามาในระบบทางตำแหน่ง (0,0) ดังต่อไปนี้

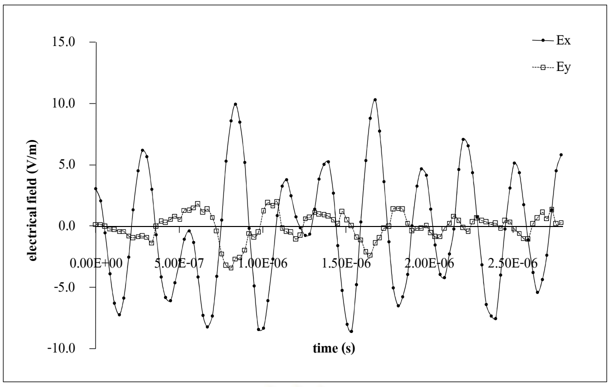
5.1.4 (ก) เมื่อ $\omega = \omega_p$

เพื่อความสะดวกต่อการพิจารณาจะแยกผลของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เข้ามากระทำต่อระบบออกจากกัน ซึ่งสนามไฟฟ้านั้นจะเร่งให้อนุภาคเคลื่อนที่ตามแนวแกน x ในขณะที่สนามแม่เหล็กจะบังคับให้อนุภาคหมุนวนบนระนาบซึ่งตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของสนามแม่เหล็กนั้น จากการจำลอง ดังแสดงในรูปที่ 5.23 อิทธิพลของสนามไฟฟ้ามีบทบาทต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคมากในช่วงเวลาต้นๆ ของการจำลอง แต่เมื่อเวลาประมาณ 1.5 x 10^{-6} วินาทีเป็นต้นไป จะเห็นว่า อิทธิพลของความเร่งอันเนื่องจากสนามไฟฟ้านั้นอ่อนแรงลง โดยจะมีอิทธิพลของสนามแม่เหล็กแรงขึ้นมาแทนจนส่งผลให้เกิดการหน่วงการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวแกน x จากการถูกเร่งด้วยสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นลงไปและผลักดันให้อนุภาคหมุนวนตามสนามแม่เหล็กนั้น สำหรับการเคลื่อนที่ในแนวแกน y จะเห็นว่า เมื่ออนุภาคถูกเร่งให้มีความเร็วเพิ่มขึ้นจนถึงขนาดหนึ่ง อนุภาคจะสามารถรับรู้ถึงการกระทำของสนามแม่เหล็กภายนอกมากขึ้น ด้วยอิทธิพลของสนามแม่เหล็กดังกล่าวที่เข้ามากระทำกับอนุภาคนั้นจะทำให้อนุภาคหมุนวนตามการสั่นของสนามแม่เหล็กด้วย



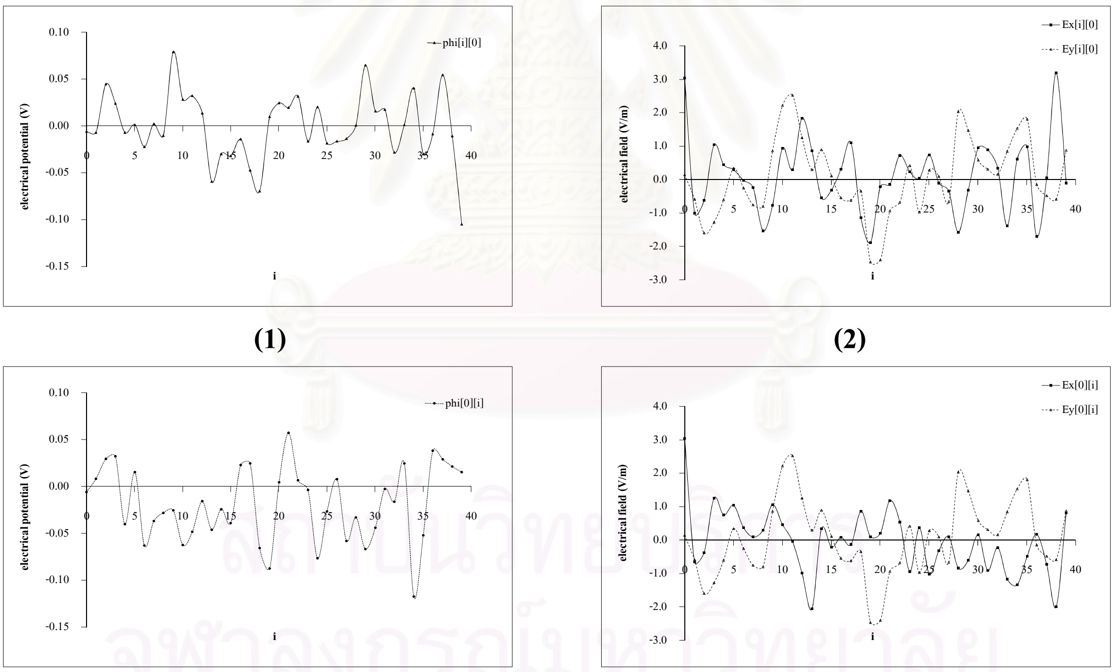
รูปที่ 5.23 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$

สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นมีลักษณะการเคลื่อนที่ซึ่งประกอบไปด้วยการหมุนและการเลื่อนที่ออกไปจากตำแหน่งสมดุลเดิม อันเนื่องมาจากอนุภาคได้รับอิทธิพลจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกทำให้อนุภาคหมุนวนแต่เนื่องด้วยสนามไฟฟ้าภายในซึ่งเกี่ยวเนื่องจากประจุไฟฟ้าและการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลดังกล่าวโดยมีการเลื่อนที่ออกไปด้วย ดังแสดงในรูปที่ 5.24



รูปที่ 5.24 สนามไฟฟ้าในพื้นที่ [0][0] ที่เวลาต่างๆ ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$

สำหรับอิทธิพลของสนามแม่เหล็กต่อการหมุนวนของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้น ณ เวลาใดๆ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.25 ซึ่งเป็นผลจากการพิจารณาสืบเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ได้รับผลกระทบจากสนามแม่เหล็กที่เข้ามารบกวน



(1) **(2)** **(3)** **(4)**

รูปที่ 5.25 ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในพื้นที่ตามแนวแกนที่เวลา 1.76 x 10^{-6} วินาที ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$

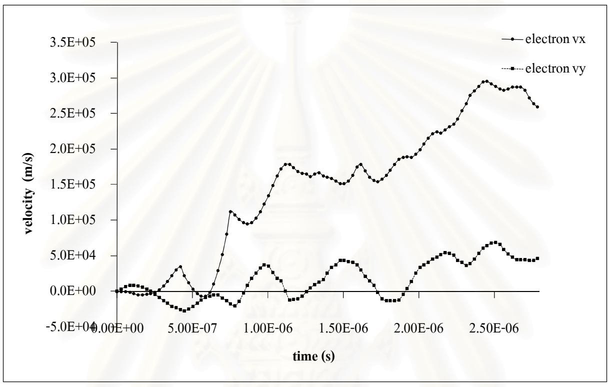
(1) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน x **(2)** สนามไฟฟ้าตามแกน x

(3) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน y **(4)** สนามไฟฟ้าตามแกน y

5.1.4 (ข) เมื่อ $\omega > \omega_p$

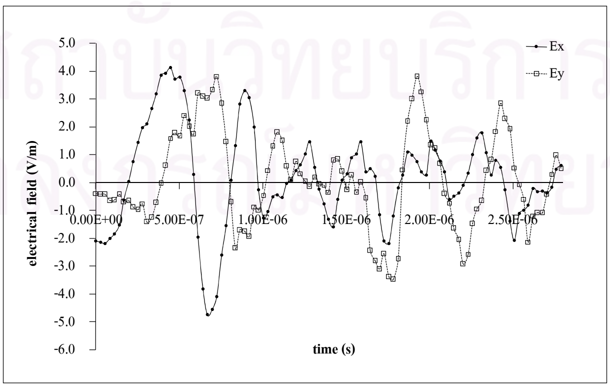
กรณี $\omega = 2\omega_p$

ผลจากการถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่สูงทำให้อนุภาคถูกบังคับให้หมุนด้วยความถี่สูงอยู่บนระนาบซึ่งตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กและยังได้รับอิทธิพลของสนามไฟฟ้าภายในด้วยจึงทำให้อนุภาคมีการเลื่อนที่ออกไปจากตำแหน่งสมดุลเดิม จากรูปที่ 5.26 จะเห็นว่าความเร็วในแนวแกน x มีการสั่นด้วยความเร็วสูงจากการกระตุ้นจากส่วนของสนามไฟฟ้าภายนอกที่เข้ามารบกวนในทิศ x



รูปที่ 5.26 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = 2\omega_p$

สนามไฟฟ้าซึ่งได้รับผลจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกที่เข้ามารบกวนทำให้เคลื่อนที่ด้วยความถี่เดียวกับสนามภายนอก ดังแสดงในรูปที่ 5.27

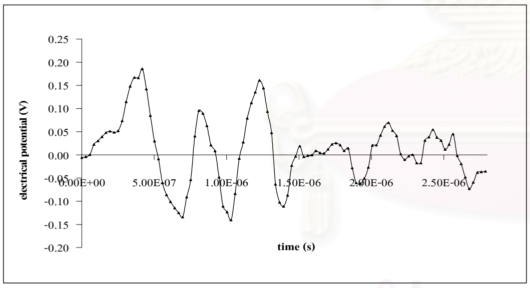


รูปที่ 5.27 สนามไฟฟ้าในพื้นที่ [0][0] ที่เวลาต่างๆ ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = 2\omega_p$

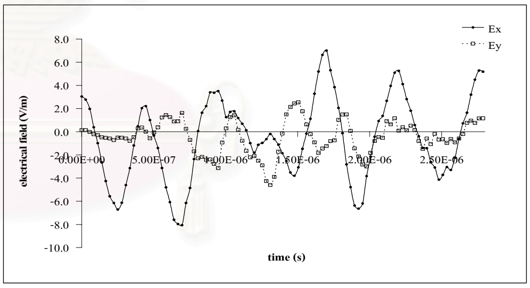
5.1.4 (ค) เมื่อ $\omega < \omega_p$

กรณีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่ำเข้ามารบกวนระบบทำให้อนุภาคบางตัวที่สามารถรับรู้ถึงอิทธิพลของสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนแสดงพฤติกรรมภายใต้การกระตุ้นนั้น การแสดงออกของอนุภาคจะมีอิทธิพลต่ออนุภาคใกล้เคียงทำให้มีพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงไปซึ่งผลการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวก็จะไปมีผลให้อนุภาคข้างเคียงตัวอื่นแสดงพฤติกรรมตอบสนองการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวที่เกิดขึ้น โดยกระบวนการที่เกิดขึ้นนี้จะดำเนินต่อเนื่องไปในขอบเขตการรับรู้ของ Debye ซึ่งสร้างกำแพงศักย์กั้นไม่ให้รับรู้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าภายนอก อย่างไรก็ตามการถ่ายทอดอิทธิพลของสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนระบบจะดำเนินไปอย่างต่อเนื่องโดยผ่านกลไกการรับรู้และถ่ายทอดอิทธิพลการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นของอนุภาค

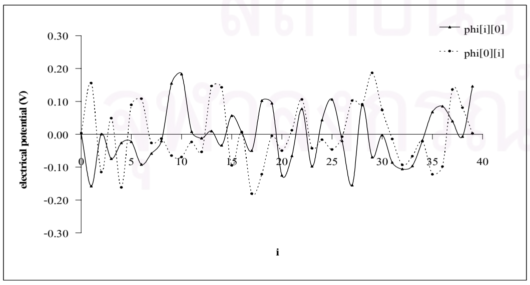
จากรูปที่ 5.28 (1) และ (2) ซึ่งแสดงการรับรู้สนามไฟฟ้าของอนุภาคในพื้นที่ [0][0] จะเห็นว่า อนุภาครู้สึกถึงสนามไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในทิศทาง x ว่าสั่นด้วยความถี่เดียวกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มากระทำ และรู้สึกถึงสนามไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในทิศทาง y ซึ่งเกิดขึ้นจากอิทธิพลของประจุภายในบริเวณข้างเคียง สำหรับสนามไฟฟ้าที่อนุภาครับรู้ได้แสดงในรูปที่ 5.28 (3) และ (4) นั้น ผลที่เกิดขึ้นประกอบไปด้วยผลจากอิทธิพลของประจุภายในและอิทธิพลจากสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงร่วมกันอย่างใกล้ชิด



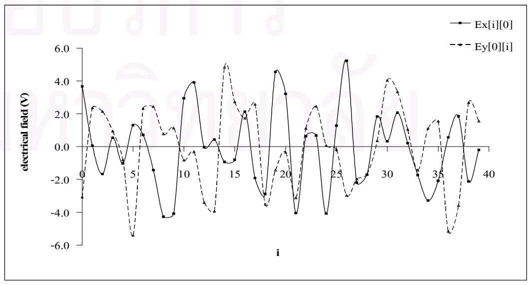
(1)



(2)



(3)



(4)

รูปที่ 5.28 การเปลี่ยนแปลงในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = 0.5\omega_p$

ตามเวลา : **(1)** ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

ตามแนวแกน : **(3)** ศักย์ไฟฟ้า **(4)** สนามไฟฟ้า

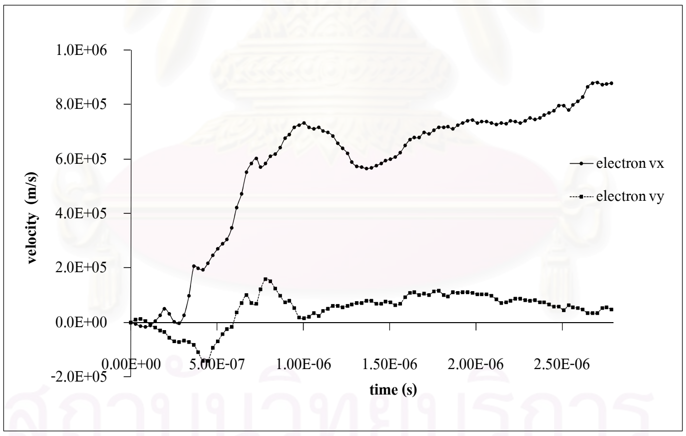
5.1.5 ความร้อน T = 10,000 K

ภายใต้ความร้อนที่เข้ามารบกวนระบบ อนุภาคที่อยู่ในระบบจะรับเอาพลังงานความร้อนไปใช้ในการเคลื่อนที่ของอนุภาค ความร้อนทำให้อนุภาคมีความสามารถในการเคลื่อนที่มากขึ้น กล่าวคือ ถ้าระบบมีความร้อนมาก อนุภาคก็จะมีความเร็วมากซึ่งอัตราเร็วที่สูงขึ้นนั้นจะแปรตามปริมาณความร้อนที่สูงขึ้น

สำหรับการจำลองระบบอนุภาคภายใต้สมดุลความร้อนค่าหนึ่ง (T = 10,000 K) ได้พิจารณาความร้อนนี้ว่ามีการกระจายตัวอย่างคงตัวและทั่วถึง (Isothermal) อยู่ตลอดเวลา อนุภาคพลาสมาสามารถรับถ่ายโอนความร้อนนี้ได้อย่างสมบูรณ์และไม่ผลิตความร้อนขึ้นจากการเคลื่อนที่

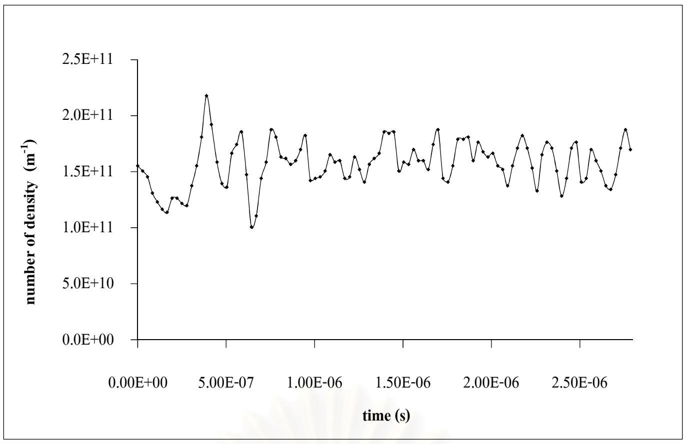
5.1.5 (ก) ไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

เมื่อระบบมีอุณหภูมิไม่เท่ากับศูนย์ อนุภาคพลาสมาจะมีอัตราเร็วค่าหนึ่งตามระดับอุณหภูมินั้นๆ จากรูปที่ 5.29 จะเห็นว่า อนุภาคจะสั่นแบบแคบๆไปพร้อมกับการหมุนด้วยความเร็วที่สูงกว่ากรณีที่ระบบไม่มีความร้อน

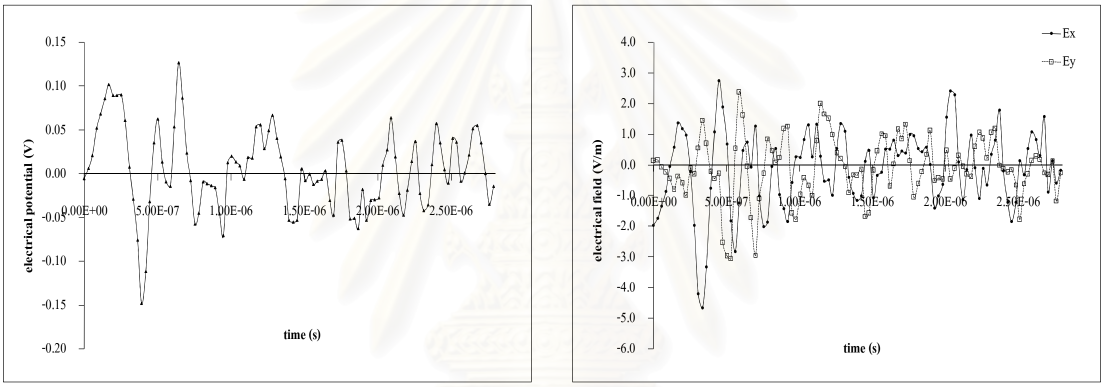


รูปที่ 5.29 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนตามแนวแกน ณ เวลา 0 วินาที ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T =10,000 K และไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของอนุภาคต่อเวลาในพื้นที่ใดๆ จากรูปที่ 5.30 จะเห็นว่า มีการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาต่างๆเกิดขึ้นอย่างรวดเร็วซึ่งเป็นผลที่แสดงให้เห็นว่าอนุภาคเกิดการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอย่างรวดเร็วในเวลาต่างๆ อันเนื่องมาจากการสั่นอย่างรวดเร็วของอนุภาคซึ่งได้รับความร้อน



รูปที่ 5.30 การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของไหลอิเล็กตรอนที่เวลาต่างๆ ในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T =10,000 K และไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก



(1) **(2)**

รูปที่ 5.31 สนามไฟฟ้าภายในพื้นที่ [0][0] ที่เวลาต่างๆในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T =10,000 K และไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

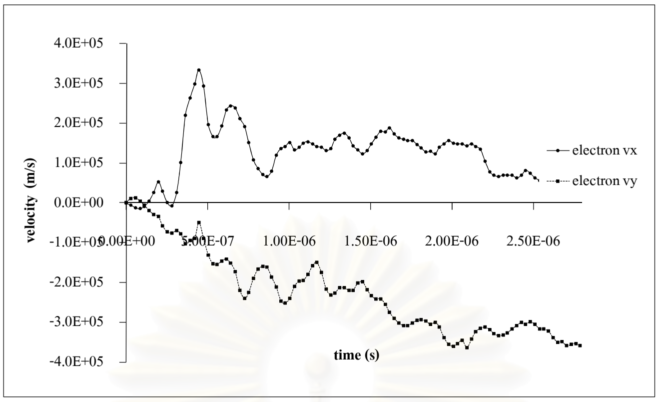
(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

จากการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่อย่างรวดเร็วของอนุภาคในระบบได้ทำให้สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเมื่อระบบอยู่ภายใต้ความร้อนนั้นสั่นด้วยความถี่สูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 5.31

5.1.5 (ข) ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก

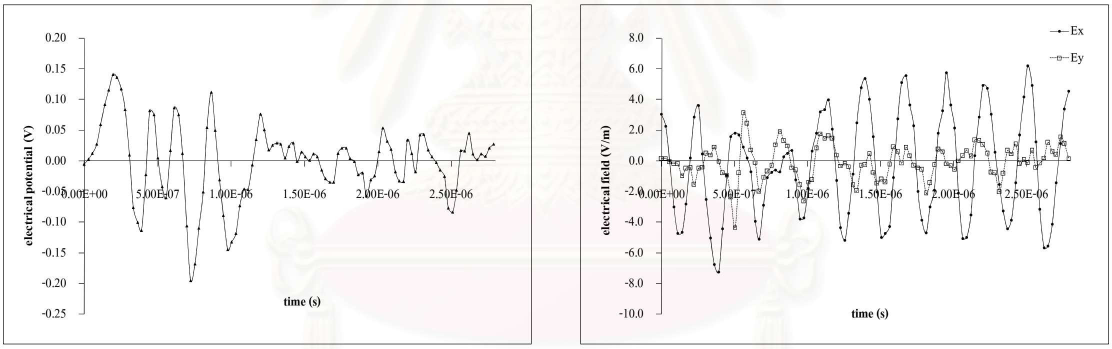
เมื่อระบบซึ่งอยู่ในสมดุลความร้อน T = 10,000 K ถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่สั่นด้วยความถี่เดียวกับความถี่การสั่นพลาสมา อิทธิพลของความร้อนทำให้อนุภาคสั่นด้วยความถี่สูงในขณะที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะบังคับการเคลื่อนที่ของอนุภาค จากรูปที่ 5.32 จะเห็นว่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกส่งผลให้อนุภาคเคลื่อนที่ในแนวแกน x เร็วขึ้น เนื่องจากสนามไฟฟ้า

ภายนอกเคลื่อนที่ในแนวแกน x ขณะที่ความเร็วในแนวแกน y มีค่าค่อนข้างจำกัด เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบหมุนวนรอบแกนอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็กในแนวแกน z



รูปที่ 5.32 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

ลักษณะของสนามไฟฟ้าในกรณีนี้ในพื้นที่ (0,0) เป็นดังแสดงในรูป 5.33

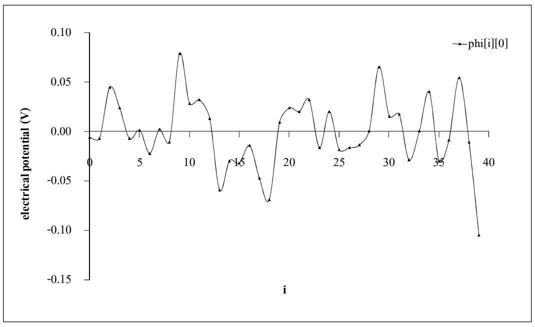


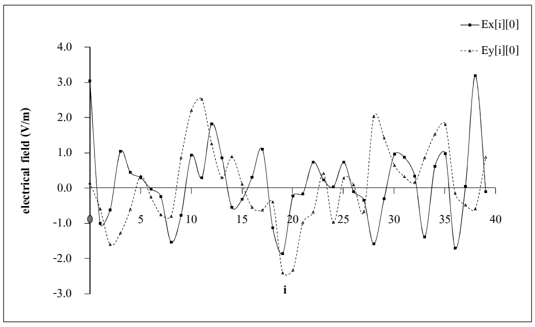
(1) **(2)**

รูปที่ 5.33 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของสนามภายในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

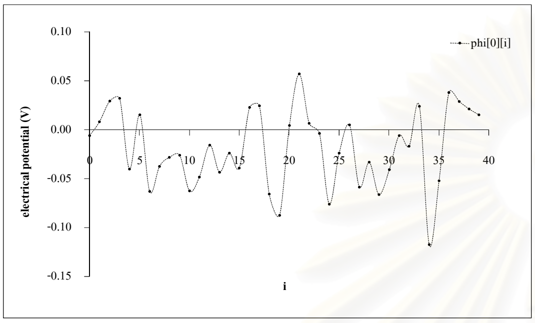
(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

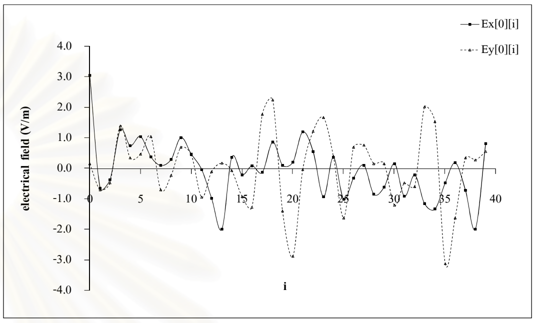
สำหรับลักษณะของสนามไฟฟ้าในระบบยังคงเป็นผลอันเนื่องมาจากอิทธิพลภายในและการเหนี่ยวนำของส่วนของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวนเป็นสำคัญ ดังแสดงในรูปที่ 5.34 ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวนระบบที่อยู่ในความร้อน T = 10,000 K นั้น อนุภาคพลาสมาซึ่งเป็นอนุภาคที่มีประจุจะตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามากระทำเป็นอย่างมากสำหรับอนุภาคที่สามารถรับรู้สนามภายนอกได้และจะถ่ายทอดผลกระทบที่เกิดขึ้นนี้ไปยังอนุภาคอื่นๆในระบบ





(1) **(2)**





(3) **(4)**

รูปที่ 5.34 การเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนของสนามภายในระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

(1) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน x **(2)** สนามไฟฟ้าตามแกน x

(3) ศักย์ไฟฟ้าตามแกน y **(4)** สนามไฟฟ้าตามแกน y

5.2 การจำลองพลาสมา 3 มิติ

เนื่องจากระบบ 2 มิติไม่ปรากฏสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้าภายในระบบเพื่อศึกษาถึงความสัมพันธ์ของสนามทั้ง 2 ดังนั้นจึงได้ขยายขอบเขตของระบบไปเป็น 3 มิติ โดยกำหนดพารามิเตอร์ที่ใช้ในการจำลองดังแสดงในตารางที่ 5.2 ภายใต้สภาวะแวดล้อมระบบต่างๆ ซึ่งได้แก่ ไม่มีการรบกวนจากสนามภายนอก, ถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ $\omega = \omega_p$, อยู่ในสมดุลความร้อน T = 10,000 K และถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ $\omega = \omega_p$ ในขณะที่ระบบอยู่ในความร้อน T = 10,000 K

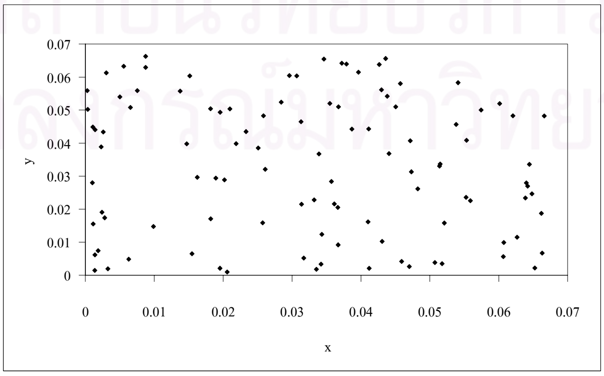
ในการวิเคราะห์นี้ จะระบุปริมาตรที่บรรจุพลาสมาที่ต้องพิจารณาการเคลื่อนที่โดยพิจารณาจากดัชนี [i][j][k] โดยที่ i j และ k เป็นดัชนีชี้ลำดับของปริมาตรในแนวแกน x y และ z ตามลำดับ

ตารางที่ 5.2 พารามิเตอร์ในการจำลองอนุภาคพลาสมา 3 มิติ

พารามิเตอร์	**ขนาด**
ความยาวด้าน (ln)	1 เมตร
จำนวนกริด (ngrid) ต่อด้าน	15 กริด
จำนวนอนุภาคจำลอง (npar)	421,845 อนุภาค
จำนวนอนุภาคจริงต่อ 1 อนุภาคจำลอง (rat)	1.0 x 10^6 อนุภาคจริง/อนุภาคจำลอง
จำนวนข้อมูลต่อ 1 รอบการสั่นพลาสมา (di) (ใช้กำหนดเวลาของรอบการคำนวณ $dt = \frac{t_p}{di}$ ซึ่ง t_p คือ คาบการสั่นพลาสมา)	100 ข้อมูล/การสั่น 1 รอบ
จำนวนครั้งของรอบเวลาการคำนวณ (ntime)	1,000 ครั้ง
ความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับในการคำนวณศักย์ไฟฟ้า (err_criteria)	1.0 x 10^{-5} V
จำนวนรอบที่มากที่สุดของการคำนวณศักย์ไฟฟ้า (IterMax)	1,000 รอบ

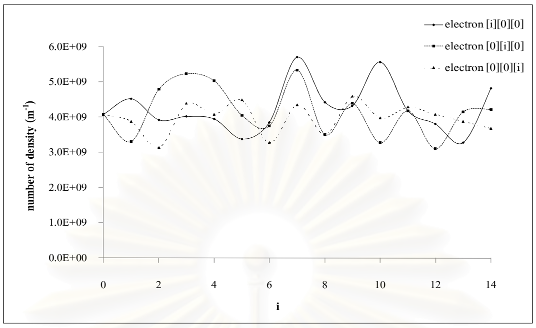
5.2.1 ไม่ถูกรบกวนด้วยสนามภายนอก

อนุภาคซึ่งกระจายตัวอยู่อย่างสุ่มในระบบ ณ เวลาเริ่มต้น t = 0 วินาที ดังแสดงในรูปที่ 5.35 โดยมีอนุภาคโปรตอนกระจายตัวอย่างคงตัวและหยุดนิ่งอยู่ตลอดเวลา ด้วยเหตุที่ว่าโปรตอนมีการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่น้อยมากเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากความเฉื่อยจึงได้ประมาณว่าโปรตอนหยุดนิ่งอยู่ในระบบ

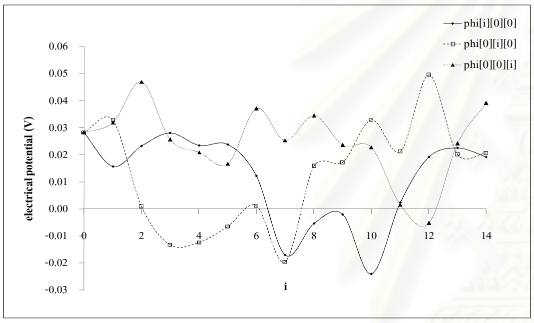


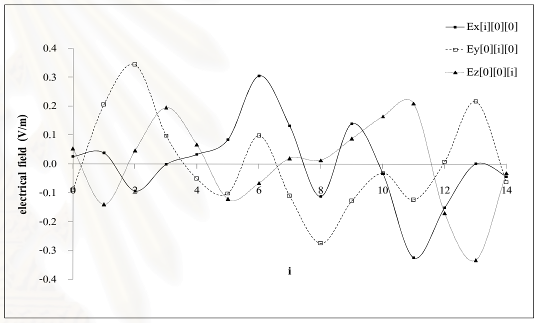
รูปที่ 5.35 การกระจายของอนุภาคอิเล็กตรอนในพื้นที่ [0][0][0] ณ เวลาเริ่มต้น (t = 0 วินาที) ในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ

ผลอันเนื่องมาจากประจุของอนุภาคทำให้อนุภาครับรู้ถึงศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าภายใต้ขอบเขตภายในกำแพงศักย์อันเนื่องมาจากปรากฏการณ์ Debye จากรูปที่ 5.36 โดยอิทธิพลของสนามไฟฟ้าซึ่งอนุภาครับรู้ได้จากศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้น ขณะที่แรงลอเรนซ์มีขนาดเล็กกว่ามากๆ อนุภาคจึงเคลื่อนที่โดยผลของสนามไฟฟ้าเป็นหลักดังแสดงในรูปที่ 5.37



(1)



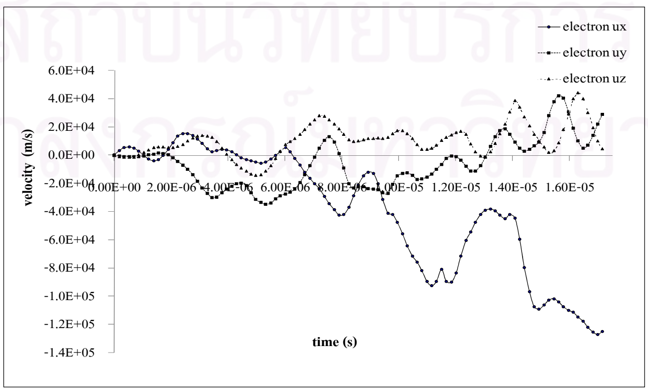


(2) **(3)**

รูปที่ 5.36 การเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติที่เวลา 0 วินาที กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

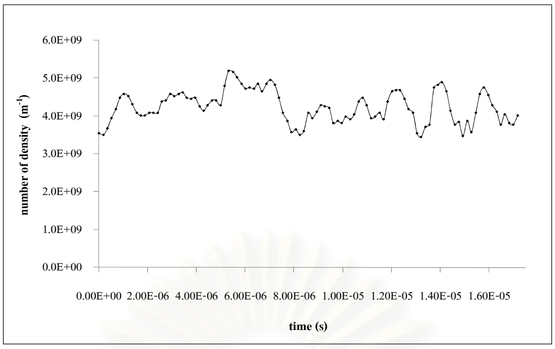
(1) ความหนาแน่นอนุภาคอิเล็กตรอน

(2) ศักย์ไฟฟ้า **(3)** สนามไฟฟ้า

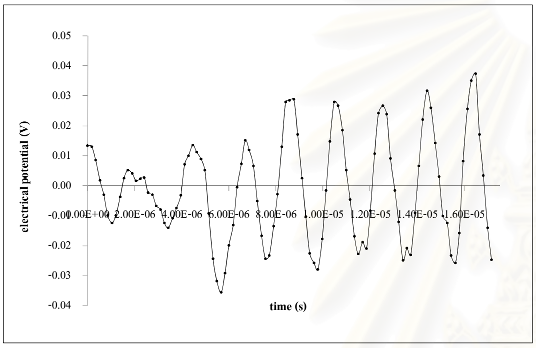


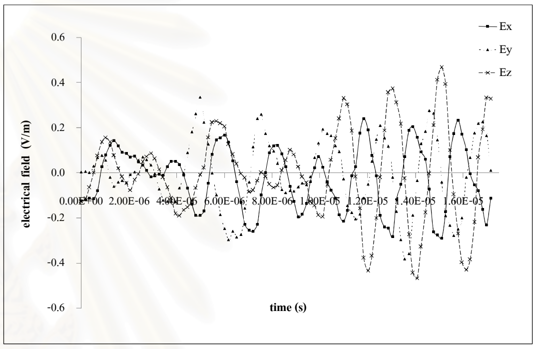
รูปที่ 5.37 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนที่เวลาต่างๆ ในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

การเคลื่อนที่ของอนุภาคส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าในเวลาต่างๆของระบบ ดังแสดงในรูปที่ 5.38



(1)





(2) **(3)**

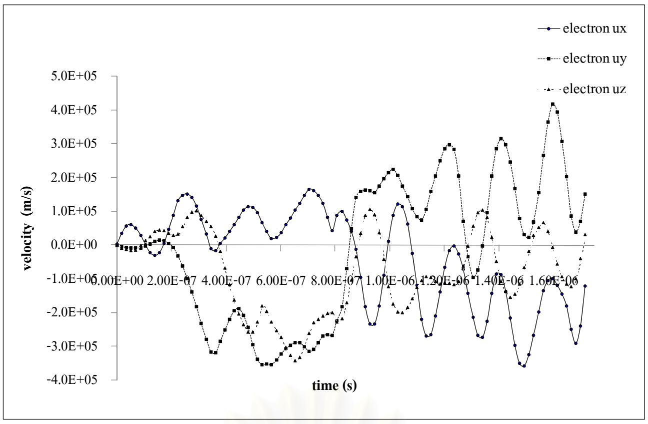
รูปที่ 5.38 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาในพื้นที่ [0][0][0] ในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

(1) ความหนาแน่นอนุภาคอิเล็กตรอน

(2) ศักย์ไฟฟ้า **(3)** สนามไฟฟ้า

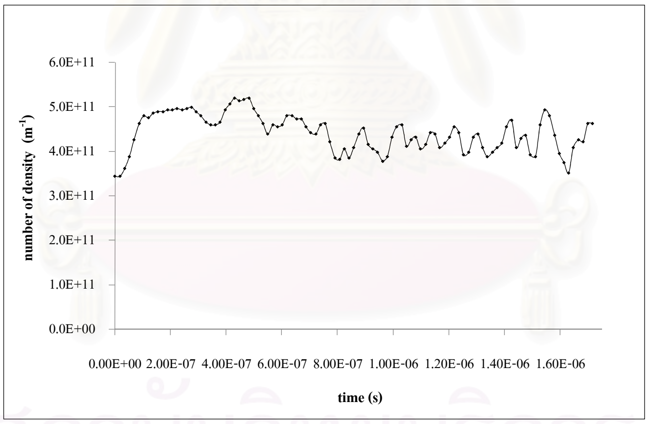
5.2.2 สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$

เมื่อระบบถูกกระตุ้นจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกที่มีความถี่เดียวกับความถี่การสั่นพลาสมาทำให้อนุภาคซึ่งสามารถรับรู้ถึงสนามนี้ได้นั้นถูกเร่งให้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงขึ้นและเคลื่อนที่ด้วยความถี่เดียวกับสนามภายนอกที่เข้ามากระตุ้นดังแสดงในรูปที่ 5.39



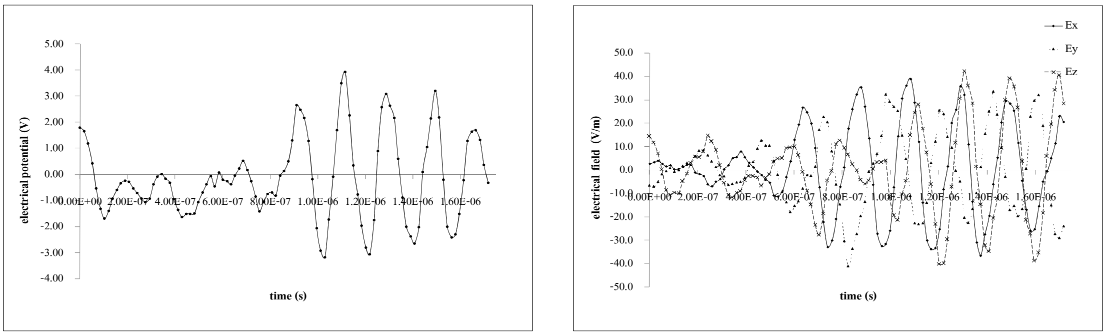
รูปที่ 5.39 ความเร็วของของไหลอิเล็กตรอนที่เวลาต่างๆ ในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

การเคลื่อนที่ของอนุภาคส่งผลต่อความหนาแน่นของอนุภาคในบริเวณนั้นๆให้มีการเปลี่ยนแปลงไปตามการเคลื่อนที่ของอนุภาคด้วย ดังจะเห็นได้จากในรูปที่ 5.40 ซึ่งความหนาแน่นของอนุภาคในปริมาตร [0][0][0] มีการเคลื่อนไหวอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่เข้าและออกของอนุภาคในปริมาตรนั้น



รูปที่ 5.40 ความหนาแน่นของของไหลอิเล็กตรอนที่เวลาต่างๆ ในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

ดังนั้นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในปริมาตรนี้จึงแสดงผลตอบสนองต่อการกระตุ้นจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกด้วยการเคลื่อนที่ด้วยความถี่เดียวกับสนามที่เข้ามากระตุ้น การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสร้างผลกระทบต่อสนามบริเวณอื่นในระบบ จากรูปที่ 5.41 สนามไฟฟ้าในปริมาตร [11][2][4] ซึ่งไม่ได้รับรู้ถึงสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยตรงนั้นจะได้รับผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในบริเวณ [0][0][0]



(1) **(2)**

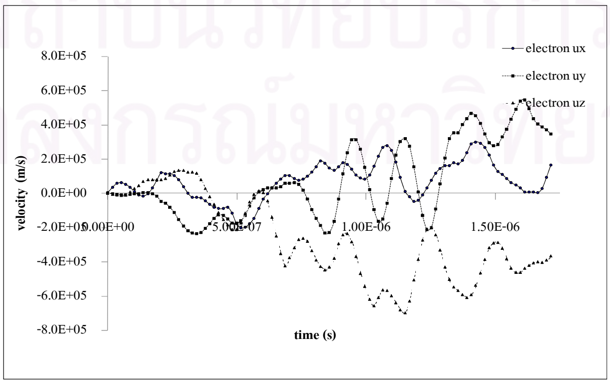
รูปที่ 5.41 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในพื้นที่ [11][2][4] ในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

จะเห็นว่า การรบกวนระบบด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกซึ่งส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคพลาสมาที่อยู่ในบริเวณหนึ่งซึ่งก็จะส่งอิทธิพลออกไปยังบริเวณอื่นๆ ถ้าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามากระตุ้นมีความแรงมากๆ อิทธิพลจากสนามดังกล่าวจะส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วในระบบ

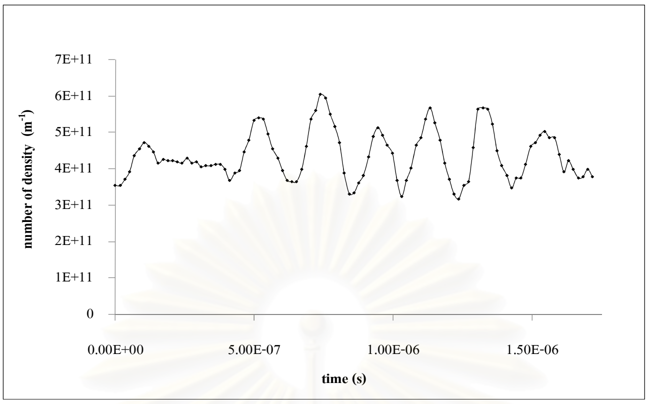
5.2.3 ภายใต้ความร้อน T = 10,000 K

กรณีระบบพลาสมาอยู่ภายใต้สมดุลความร้อน T =10,000 K และระบบไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก อนุภาคจะรับเอาความร้อนไปทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วค่าหนึ่งซึ่งสูงกว่ากรณีไม่มีความร้อน จากรูปที่ 5.42 จะเห็นว่า อนุภาคจะเคลื่อนที่แบบหมุนเนื่องจากแรงสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่อนุภาคนั้นรับรู้ การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นนี้มีลักษณะเดียวกับกรณีที่ระบบไม่มีความร้อนแต่มีอัตราเร็วที่สูงกว่า

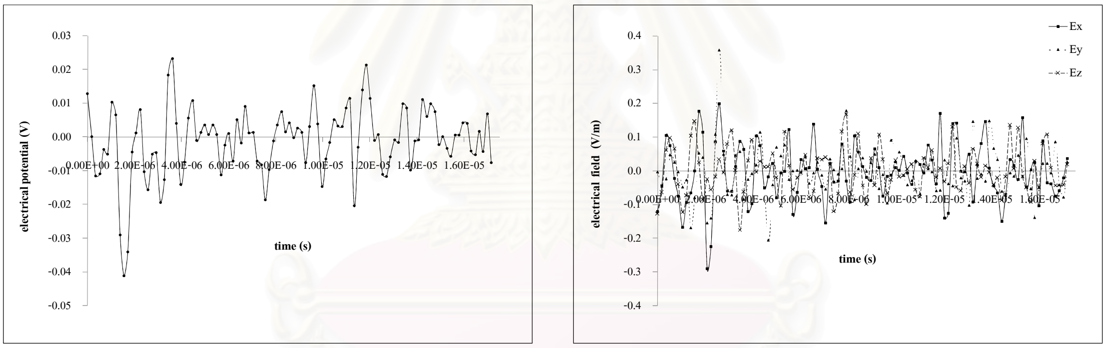


รูปที่ 5.42 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนตามเวลาในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K

จากการเคลื่อนที่ของอนุภาคจึงทำให้ความหนาแน่นที่เวลาต่างๆในปริมาตรใดๆแสดงในรูปที่ 5.43 ซึ่งการกระจายของอนุภาคที่เกิดขึ้นจะมีอิทธิพลทำให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบ ณ เวลาใดเวลาหนึ่งดังแสดงในรูปที่ 5.44



รูปที่ 5.43 ความหนาแน่นของอนุภาคอิเล็กตรอนในพื้นที่ [0][0][0] ตามเวลาในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K



(1) **(2)**

รูปที่ 5.44 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของศักย์และสนามไฟฟ้าในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K

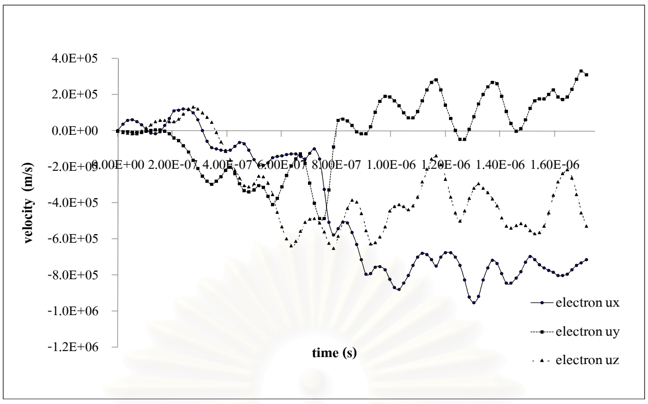
(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการสั่นของสนามใน 3 มิติมีผลเหนี่ยวนำให้เกิดสนามเหล็กขึ้นโดยมีขนาดเล็กมาก

5.2.4 สนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ $\omega = \omega_p$ และอุณหภูมิ 10,000 K

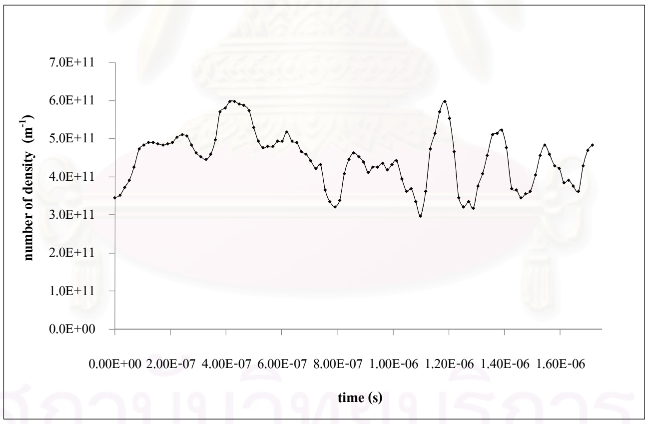
สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกจะออกแรงเร่งให้ของไหลเคลื่อนที่ด้วยอิทธิพลของสนามจากรูปที่ 5.45 อนุภาคจะเคลื่อนที่ด้วยความถี่เดียวกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก สำหรับอิทธิพล

ของความร้อนที่ต่อการเคลื่อนที่ของของไหลปรากฏออกมาน้อยทั้งนี้เพราะผลอันเนื่องมาจากความร้อนถูกหักล้างอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบภายใน



รูปที่ 5.45 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนตามเวลาในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

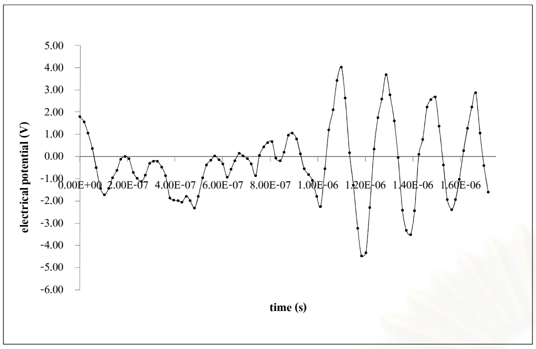
การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นทำให้ความหนาแน่นของอนุภาคในปริมาตรใดๆเปลี่ยนแปลงตามเวลาดังแสดงในรูปที่ 5.46 ซึ่งจะส่งผลให้ต่อสนามไฟฟ้าในระบบในเวลาต่อมา



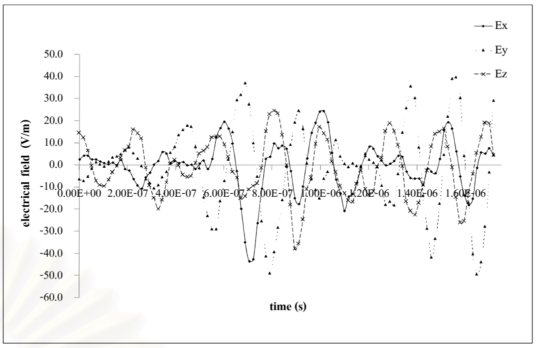
รูปที่ 5.46 ความหนาแน่นของอนุภาคอิเล็กตรอนในพื้นที่ [11][2][4] ตามเวลาในระบบอนุภาคพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในปริมาตร [0][0][0] ซึ่งรับรู้ถึงอิทธิพลของสนามภายนอกในเวลาต่างๆ ที่เข้ามารบกวนระบบ อนุภาคในปริมาตรนี้จะรับรู้ถึงสนามแม่เหล็กที่เข้ามากระตุ้นซึ่งจะบังคับให้อนุภาคเคลื่อนที่แบบหมุนวน การคลื่อนที่ของอนุภาคในปริมาตรนี้จะส่งผลกระทบต่อสนามในบริเวณต่างๆในระบบ จากรูป 5.47 สนามไฟฟ้าในปริมาตร [11][2][4] จะรับรู้อิทธิพลของ

สนามภายนอกผ่านจากผลที่เกิดขึ้นใน [0][0][0] ซึ่งถ้าหากอนุภาคอยู่ห่างไกลจากบริเวณที่สามารถรับรู้สนามมากๆ อิทธิพลของสนามที่มีต่ออนุภาคก็จะมีน้อยหรือจะไม่มีเลย



(1)



(2)

รูปที่ 5.47 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในปริมาตร [11][2][4] ในระบบพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p$
(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

ระบบพลาสมาที่ถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ตลอดเวลา ณ เวลาใดเวลาหนึ่งจะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบคาบอันเนื่องมาจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบ 3 มิติ

ด้วยเหตุที่ความคลาดเคลื่อนของการจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาคมีค่าสูง ($\cong$ 50%) ซึ่งเกิดจากความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากการปัดเศษที่เกิดจากการคำนวณค่าที่มีความแตกต่างกันมากทำให้การจำลองจากแบบจำลองนี้ขาดความแม่นยำและมีความจำเป็นที่จะต้องจำกัดขอบเขตการจำลองอย่างมาก ทั้งจำนวนของอนุภาคจำลองและเวลาซึ่งต้องมีขนาดไม่สูงเกินไปเพราะจะทำให้การติดตามการเคลื่อนที่ของอนุภาคจำลองแต่ละตัวสร้างความคลาดเคลื่อนรวมของระบบให้มีค่าสูงจนการจำลองไม่มีความเชื่อถือในระดับที่ยอมรับได้และอาจจะนำไปสู่การลู่ออกของการคำนวณซึ่งทำให้ไม่สามารถจำลองเหตุการณ์ทางพลาสมาได้ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวจะดำเนินการจำลองโดยระบบของไหลซึ่งน่าจะมีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าและมีประสิทธิภาพในการคำนวณสูงกว่า แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นการจำลองจะยังคงกระทำภายใต้สภาวะแวดล้อมของระบบที่ได้จำลองด้วยแบบจำลองอนุภาคเพื่อจะสามารถนำผลการจำลองมาเปรียบเทียบกันได้ โดยจะได้กล่าวต่อไปในบทถัดไป

บทที่ 6
วิเคราะห์และผล
การจำลองระบบของไหลพลาสมา

การจำลองระบบด้วยแบบจำลองของไหลจะใช้พารามิเตอร์เดียวกับการจำลองระบบอนุภาคพลาสมาในบทที่ 5 การจำลองแบบของไหลใช้การพิจารณาระบบจากพฤติกรรมโดยรวมที่แสดงออกเป็นหลักแทนการพิจารณาพฤติกรรมของอนุภาคแต่ละตัว เนื่องจากในทางการคำนวณนั้นการพิจารณาอนุภาคแต่ละตัวนั้นจะก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนสูงด้วยสาเหตุหลักเนื่องมาจากความแตกต่างในเชิงตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณซึ่งมีขนาดที่แตกต่างกันมากทำให้มีความผิดพลาดได้มาก ซึ่งด้วยเหตุผลในเชิงสถิติแล้วกรณีที่พิจารณาระบบซึ่งประกอบไปด้วยอนุภาคจำนวนมากๆ การแสดงออกของระบบจะเป็นไปโดยรวมมากกว่าโดยอนุภาคเดี่ยวๆ ในการจำลองระบบของไหลพลาสมานี้จะได้กำหนดให้อิทธิพลของอนุภาคเดี่ยวเกิดขึ้นในเวลาเริ่มต้นของการจำลองเท่านั้นจากการจำลองตำแหน่งของอนุภาค จากนั้นจะพิจารณาอิทธิพลของอนุภาคในลักษณะของไหลที่เคลื่อนที่อยู่ในระบบแทน

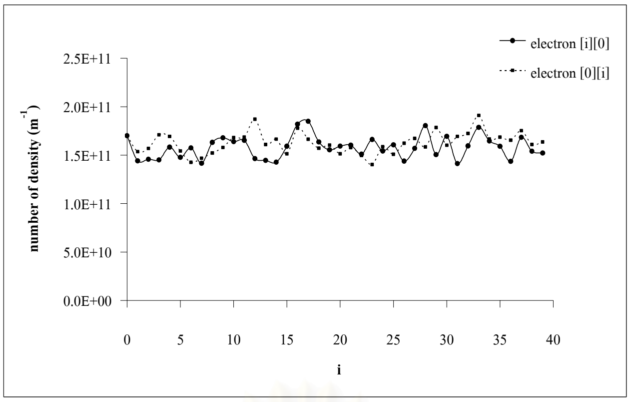
การจำลองของไหลพลาสมาจะจำลองภายใต้อิทธิพลของสภาวะแวดล้อมต่างๆ ดังนี้คือ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอก, กรณีถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า, กรณีอยู่ในสมดุลความร้อน T = 10,000 K และกรณีระบบถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกขณะที่อยู่ในสมดุลความร้อน T = 10,000 K ซึ่งได้ผลการจำลองดังต่อไปนี้

6.1 การจำลองระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ

สำหรับการจำลองระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ โดยกำหนดพารามิเตอร์สำหรับการจำลองให้มีค่าเดียวกันกับการจำลองระบบอนุภาคพลาสมาในบทที่ 5 ที่ผ่านมาเพื่อความสะดวกในการพิจารณาเปรียบเทียบผลการจำลอง

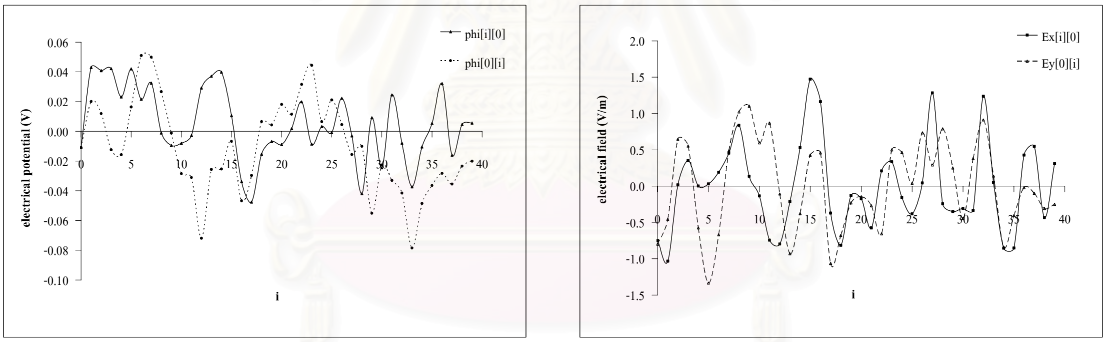
6.1.1 ไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

ความไม่สมดุลของประจุภายในของของไหลในบริเวณต่างๆในขณะเวลาเริ่มต้นจะสร้างสนามไฟฟ้าภายในระบบอันเป็นการเริ่มต้นของปรากฏการณ์ของไหลพลาสมาที่ได้จำลองขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 ความหนาแน่นของไหลอิเล็กตรอนตามแนวแกนที่เวลาเริ่มต้น (t = 0 วินาที) ในระบบพลาสมา 2 มิติ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอก

เนื่องด้วยความหนาแน่นประจุของของไหลในบริเวณต่างๆ ณ เวลาเริ่มต้นมีความแตกต่างนี้เองจึงสร้างสนามไฟฟ้าภายในขึ้นมาดังแสดงในรูปที่ 6.2 ซึ่งสนามที่เกิดขึ้นมีการเปลี่ยนแปลงอยู่บนระนาบ xy ด้วยอิทธิพลของกำแพงศักย์จะทำให้ของไหลในบริเวณใดๆสามารถรับรู้สนามไฟฟ้าซึ่งเป็นผลจากความแตกต่างของความหนาแน่นประจุ ณ บริเวณรอบๆบริเวณนั้น



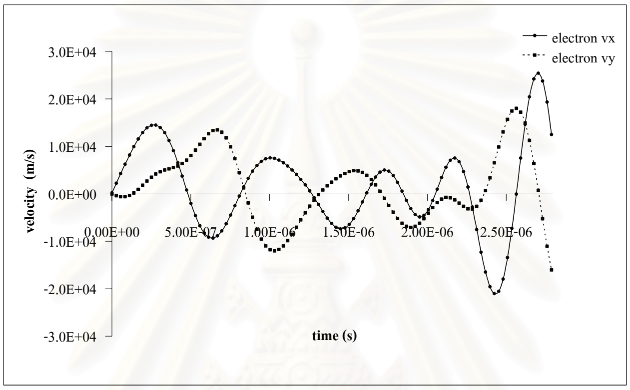
(1) **(2)**

รูปที่ 6.2 ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าตามแนวแกนที่เวลาเริ่มต้น (t = 0 วินาที) ในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้อิทธิพลจากองค์ประกอบภายในพลาสมา

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

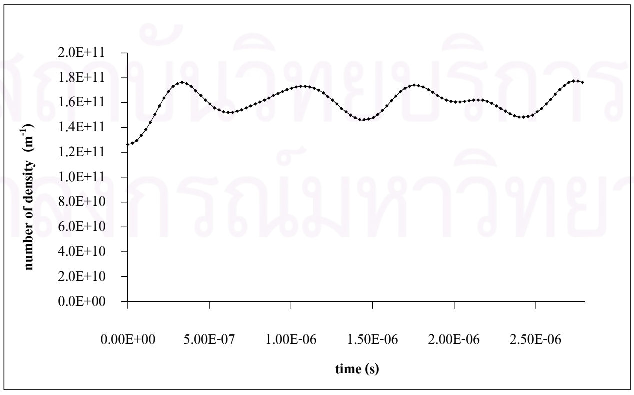
สำหรับกรณีที่ไม่มีสนามจากภายนอกเข้ามารบกวน สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กภายในซึ่งเกิดจากองค์ประกอบที่มีประจุของของไหลพลาสมาจะมีอิทธิพลสำคัญต่อพฤติกรรมของพลาสมาทั้งรูปแบบของสนามและการเคลื่อนที่ของของไหลพลาสมา โดยในที่นี้ไม่มีความร้อนในระบบหรือระบบอยู่ภายใต้สมดุลความร้อน T = 0 K

ด้วยแรงเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายในที่เกิดขึ้นที่กระทำกับประจุภายในของไหลจะเร่งให้ของไหลเคลื่อนที่ไปตามทิศทางเดียวกับสนามไฟฟ้า จากรูปที่ 6.3 จะเห็นว่า ของไหลเคลื่อนที่แบบสั่นภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นซึ่งลักษณะการสั่นนี้เมื่อเปรียบเทียบกับการจำลองจากแบบจำลองอนุภาคแล้วพบว่าของไหลเคลื่อนที่แบบสั่นด้วยความสม่ำเสมอกว่าเทียบกับเมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งปรากฏว่าอนุภาคถูกเร่งให้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงขึ้นเมื่อเวลาผ่านไป ทั้งนี้ถ้าผลของพลาสมาเป็นการแสดงออกในเชิงมหภาคของอนุภาคเดี่ยวเล็กๆจำนวนมากซึ่งเป็นองค์ประกอบในระบบ ดังนั้นผลเฉลี่ยของความเร็วของอนุภาคทั้งหมดในบริเวณใดๆจากการจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาคควรจะสอดคล้องกันกับผลของไหลที่ปรากฏในการจำลองนี้



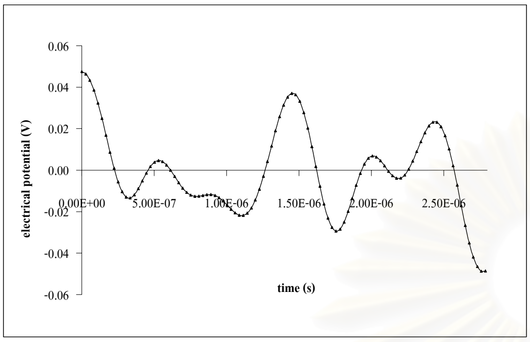
รูปที่ 6.3 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในบริเวณ [0][0] ที่เวลาต่างๆ ในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ กรณีพลาสมาไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

การเคลื่อนที่ของของไหลทำให้เกิดการกระจายของของไหลตามเวลาต่างๆ มีการเปลี่ยนแปลงไปดังแสดงในรูปที่ 6.4

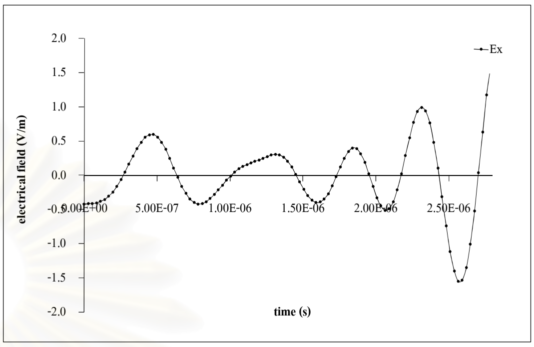


รูปที่ 6.4 ความหนาแน่นของไหลอิเล็กตรอนในบริเวณ [0][0] ตามเวลา ในระบบพลาสมา 2 มิติ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอก

ซึ่งของไหลสามารถรับรู้ถึงสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ของของไหลเองนั้นว่าสั่นอยู่บนระนาบการเคลื่อนที่ของของไหล ทั้งนี้ของไหลจะรับรู้ถึงความแรงของสนามไฟฟ้าในพื้นที่ใดๆด้วยขนาดเฉลี่ยของอนุภาคเดี่ยวแต่ละตัวทั้งหมดในพื้นที่นั้นๆรับรู้ ดังแสดงในรูปที่ 6.5



(1)



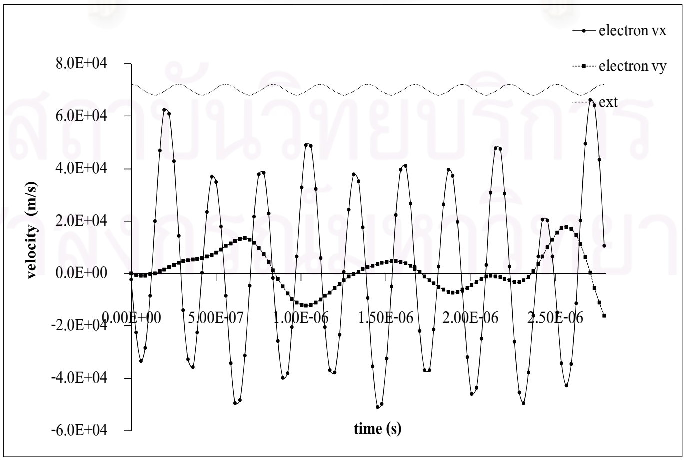
(2)

รูปที่ 6.5 ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในบริเวณ [0][0] ในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้อิทธิพลจากองค์ประกอบภายในพลาสมา

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

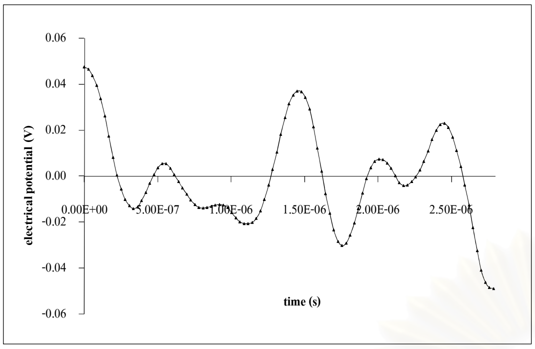
6.1.2 ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7$ rad/sec

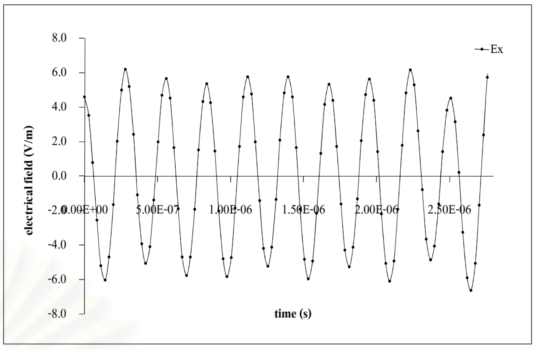
อิทธิพลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวนระบบจะสร้างอิทธิพลต่อของไหลเหนือสนามไฟฟ้าภายในระบบที่เกิดขึ้นซึ่งในการเคลื่อนที่ตามแกน x จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบสั่นด้วยความถี่เดียวกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวนดังแสดงในรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในบริเวณ [0][0] ในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$

จากการเคลื่อนที่ของของไหลทำให้ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงต่อเวลาดังแสดงในรูปที่ 6.7



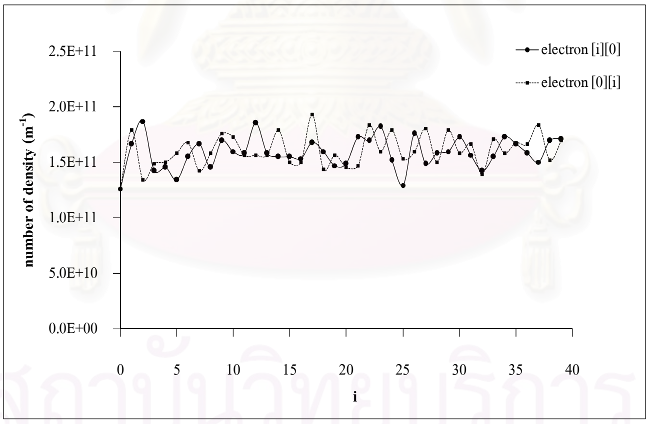


(1) **(2)**

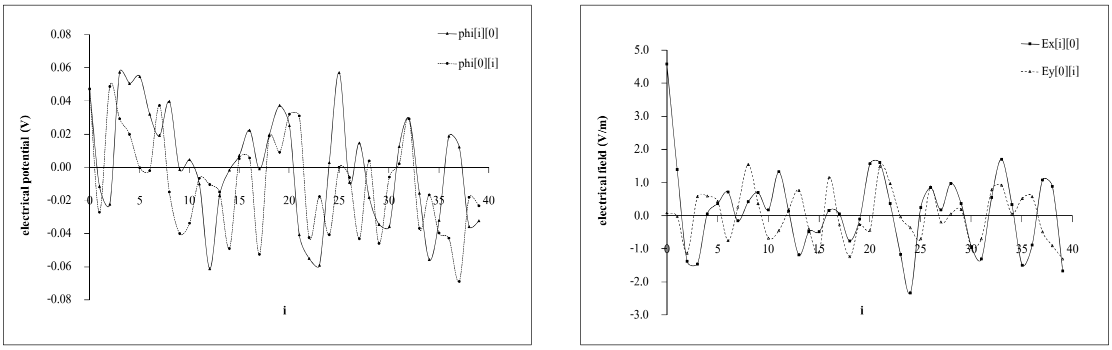
รูปที่ 6.7 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาในบริเวณ [0][0] ของระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$

(1) ศักยไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

ณ เวลาใดเวลาหนึ่งของไหลจะสั่นในบริเวณต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.8 ซึ่งด้วยการเคลื่อนที่นี้เองมีอิทธิพลทำให้เกิดสนามไฟฟ้าในพื้นที่นั้นๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.9



รูปที่ 6.8 ความหนาแน่นของไหลอิเล็กตรอนในพื้นที่ตามแนวแกนที่เวลา 1.79 x 10^{-6} วินาทีในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$



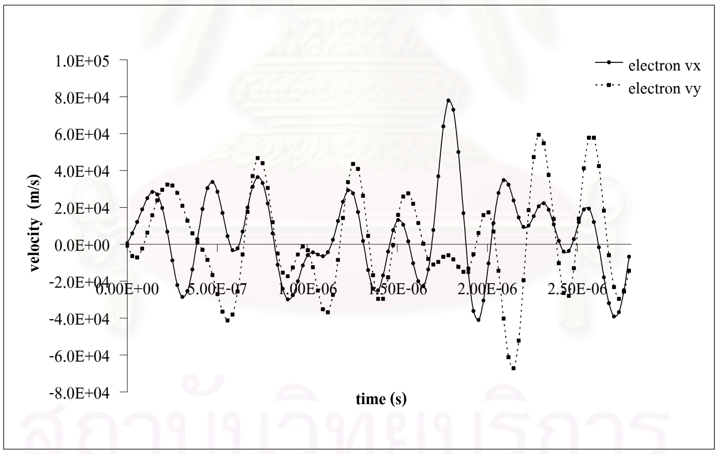
(1) **(2)**

รูปที่ 6.9 การเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนที่เวลา 1.79 x 10^{-6} วินาทีในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25\times10^7\ rad/\sec$

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

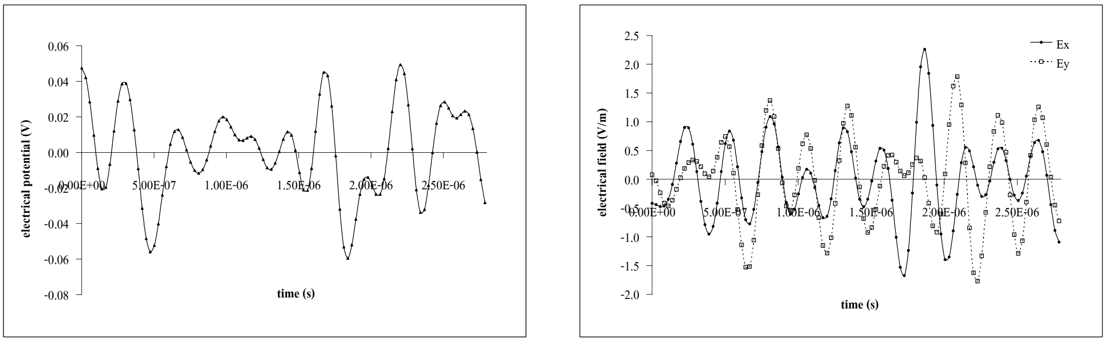
6.1.3 ภายใต้ความร้อน T = 10,000 K

ความร้อนทำให้ของไหลสั่นด้วยความถี่สูงขึ้นทั้งในแนวแกน x และแกน y ของไหลจะสั่นอยู่บนระนาบ xy ด้วยความถี่สูง ดังแสดงในรูปที่ 6.10



รูปที่ 6.10 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นซึ่งส่งอิทธิพลต่อของไหลสั่นด้วยความถี่สูงขึ้นด้วยอิทธิพลจากการสั่นของของไหลซึ่งได้รับอิทธิพลจากความร้อนดังแสดงในรูปที่ 6.11

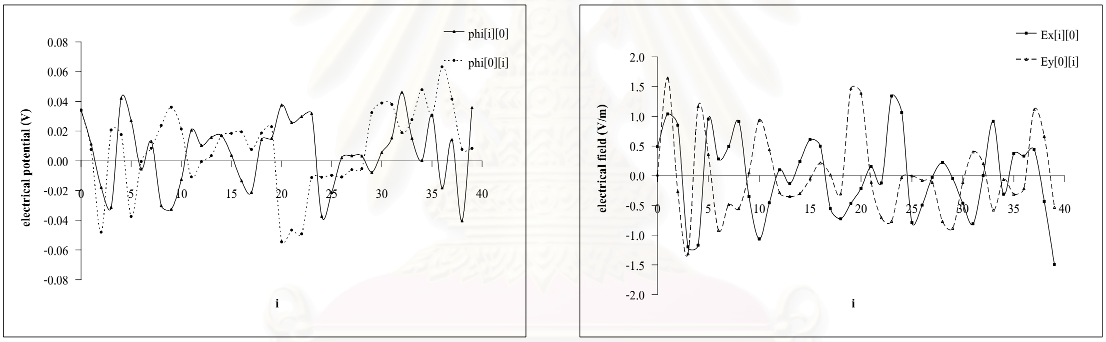


(1) **(2)**

รูปที่ 6.11 สนามไฟฟ้าภายในบริเวณ [0][0] ที่เวลาต่างๆ ในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

สำหรับสนามไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน ณ เวลาใดเวลาหนึ่งซึ่งได้รับอิทธิพลจากการเคลื่อนที่ของของไหลไม่ปรากฏผลกระทบที่เกิดขึ้นจากความร้อนอย่างมีนัยสำคัญ



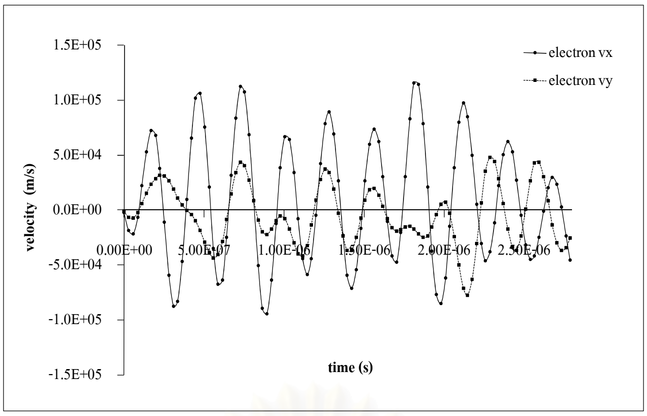
(1) **(2)**

รูปที่ 6.12 สนามไฟฟ้าภายในพื้นที่ตามแนวแกนในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

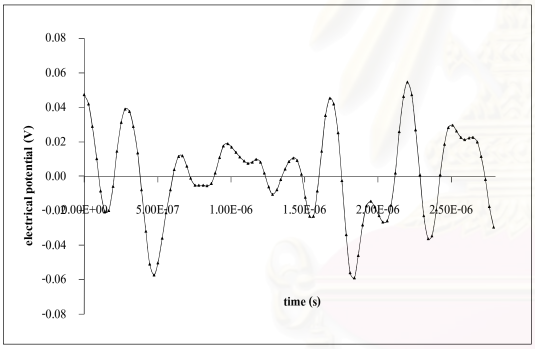
6.1.4 ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7$ rad/sec และความร้อน T = 10,000 K

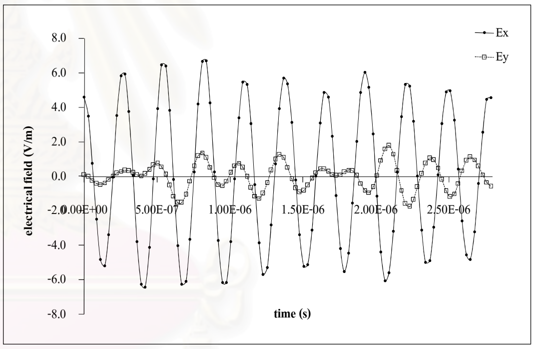
ผลจากการกระทำด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและความร้อนทำให้ของไหลสั่นในทิศทาง x ด้วยความเร็วสูงขึ้นโดยสั่นด้วยความถี่เดียวกันกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามากระทำ ดังแสดงในรูปที่ 6.13 สำหรับในทิศทาง y จะเห็นว่า ของไหลสั่นในทิศทางนี้ด้วยความเร็วสูงและได้รับอิทธิพลของในส่วนของสนามแม่เหล็กที่บังคับให้การเคลื่อนที่ในทิศทางนี้สั่นด้วยความถี่เดียวกับสนาม



รูปที่ 6.13 ความเร็วของอนุภาคอิเล็กตรอนในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$

สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นสั่นด้วยความถี่ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวน สำหรับสนามไฟฟ้า ณ เวลาเวลาหนึ่ง จากรูปที่ 6.14 จะเห็นว่า ของไหลภายในบริเวณ [0][0] จะส่งผลกระทบที่เกิดจากการรับรู้สนามไฟฟ้าภายนอกเข้าไปยังพื้นที่ข้างเคียงผ่านทางการไหล



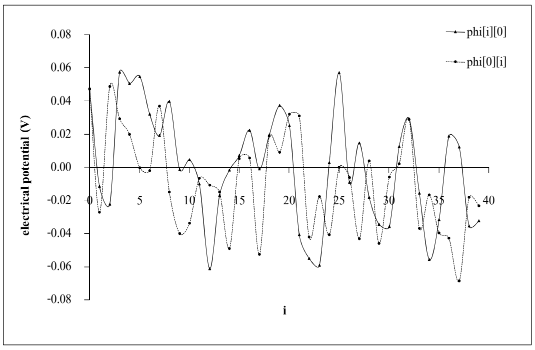


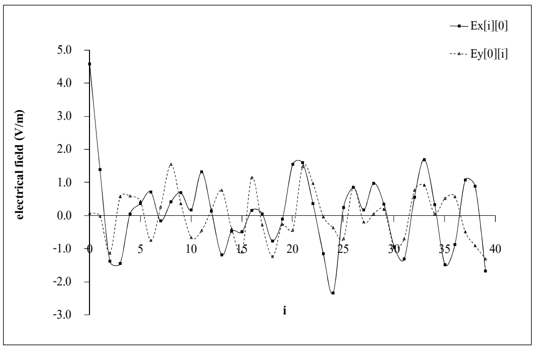
(1) **(2)**

รูปที่ 6.14 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของสนามภายในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

ความร้อนทำให้ของไหลสั่นด้วยความถี่สูงแต่ภายใต้การรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของไหลซึ่งมีประจุที่รับรู้ถึงสนามภายนอกนั้นจะได้รับอิทธิพลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่บังคับให้ของไหลเคลื่อนที่ตามสนามนั้น ในขณะที่ในบริเวณพื้นที่อื่นที่ไม่สามารถรับรู้ถึงสนามภายนอกได้จะแสดงออกตามอิทธิพลของความร้อนแต่อย่างไรก็ตามผลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกที่เข้ามารบกวนจะส่งผ่านการเคลื่อนที่ของของไหลไปยังของไหลบริเวณข้างเคียง





(1) **(2)**

รูปที่ 6.15 การเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนของสนามภายในระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

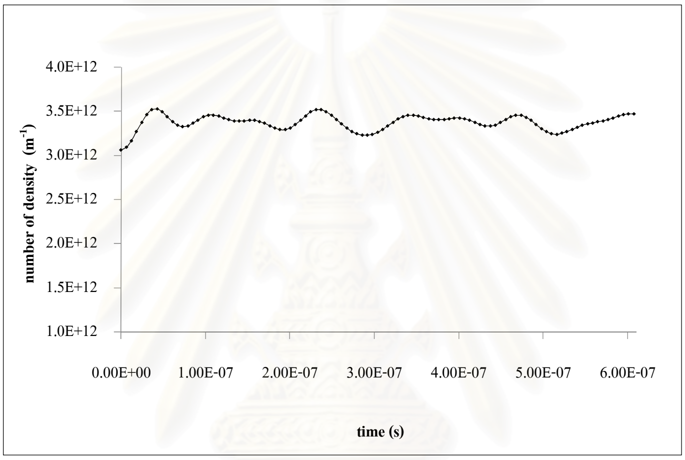
6.2 การจำลองระบบ 3 มิติ

ตารางที่ 6.1 พารามิเตอร์ในการจำลองของไหลพลาสมา 3 มิติ

พารามิเตอร์	**ขนาด**
ความยาวด้าน (ln)	1 เมตร
จำนวนกริด (ngrid) ต่อด้าน	15 กริด
จำนวนอนุภาคจำลอง (npar)	3,375,000 อนุภาค
จำนวนอนุภาคจริงต่อ 1 อนุภาคจำลอง (rat)	1.0 x 10^6 อนุภาคจริง/อนุภาคจำลอง
จำนวนข้อมูลต่อ 1 รอบการสั่นพลาสมา (di) (ใช้กำหนดเวลาของรอบการคำนวณ $dt = \frac{t_p}{di}$ ซึ่ง t_p คือ คาบการสั่นพลาสมา)	100 ข้อมูล/การสั่น 1 รอบ
จำนวนครั้งของรอบเวลาการคำนวณ (ntime)	1,000 ครั้ง
ความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับในการคำนวณศักย์ไฟฟ้า (err_criteria)	1.0 x 10^{-5} V
จำนวนรอบที่มากที่สุดของการคำนวณศักย์ไฟฟ้า (IterMax)	1,000 รอบ

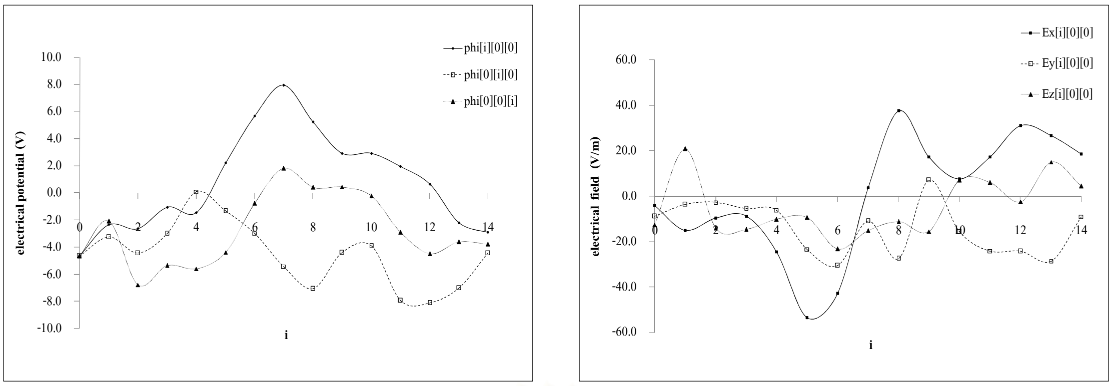
6.2.1 ไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก

กรณีที่ไม่มีสนามจากภายนอกเข้ามารบกวนในระบบที่ไม่มีความร้อนหรือระบบอยู่ภายใต้สมดุลความร้อน T = 0 K การกระจายตัวแบบปกติขององค์ประกอบภายในพลาสมาเมื่อเริ่มต้นทำให้พลาสมามีความสามารถที่จะสร้างสนามภายในขึ้นมาจากความหนาแน่นประจุสุทธิที่เกิดจากความไม่เท่ากันของความหนาแน่นของไหลอิเล็กตรอนกับของไหลโปรตอนในปริมาตรหนึ่งๆ ทำให้เกิดศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าขึ้นมา สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะมีอิทธิพลต่อการเคลื่อนที่ของของไหลทำให้ของไหลเคลื่อนที่ซึ่งจะส่งผลให้การกระจายของของไหลที่เวลาต่างๆ มีการเปลี่ยนแปลงไป ดังแสดงในรูปที่ 6.16



รูปที่ 6.16 ความหนาแน่นของไหลอิเล็กตรอนในปริมาตร [0][0][0] ที่เวลาต่างๆ ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

เพราะการกระจายของของไหลที่มีประจุแตกต่างกันทำให้เกิดศักย์ไฟฟ้าภายในปริมาตรขึ้นซึ่งมีความสัมพันธ์เป็นไปตามสมการ Poisson นั่นทำให้เราสามารถประมาณศักย์ไฟฟ้าในปริมาตรต่างๆในระบบพลาสมาได้ จากรูปที่ 6.17 แสดงการจำลองศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการเหนี่ยวนำของศักย์ไฟฟ้า ซึ่งจะเห็นว่า ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากพฤติกรรมโดยรวม (collective behavior) ของของไหลที่มีประจุในพลาสมาจะเหนี่ยวนำให้เกิดการสั่นของสนามไฟฟ้าทั้ง 3 ทิศทางในระบบ 3 มิติ

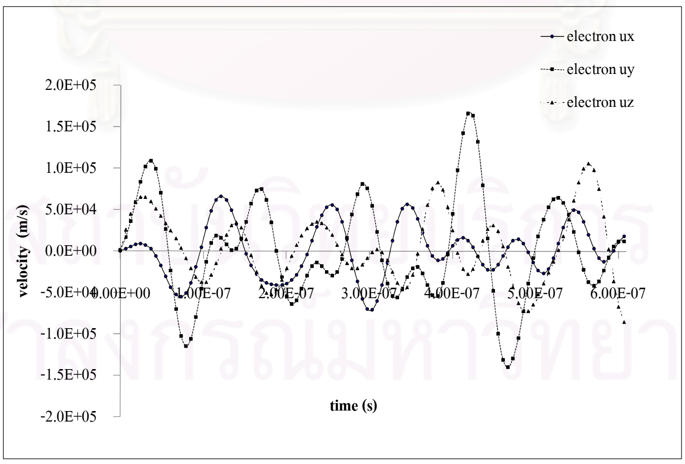


(1) **(2)**

รูปที่ 6.17 การเปลี่ยนแปลงของภายในปริมาตรตามแนวแกน x ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

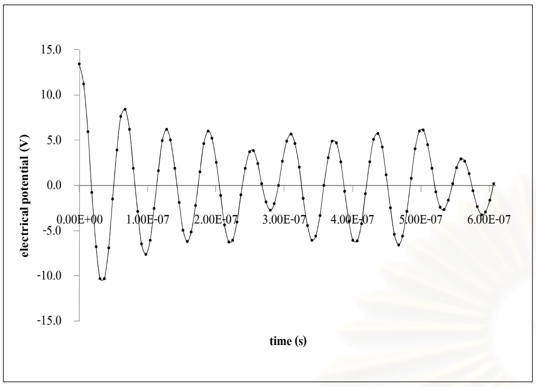
(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

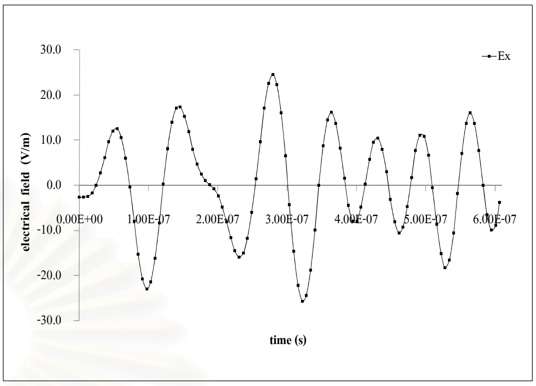
สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากของไหลพลาสมาจะมีอิทธิพลต่อการเคลื่อนที่ของของไหลพลาสมาทั้ง 2 ชนิด แต่เนื่องจากของไหลทั้ง 2 ชนิดตอบสนองต่อสนามแตกต่างกันมากอันเป็นผลเนื่องมาจากมวลของของไหล ด้วยเหตุนี้ของไหลโปรตอนจึงเคลื่อนที่ช้ามาก เมื่อเปรียบเทียบกับการเคลื่อนที่ของของไหลอิเล็กตรอนจึงประมาณได้เสมือนกับว่าของไหลโปรตอนไม่เคลื่อนที่หรือหยุดนิ่งตลอดเวลาการจำลอง ซึ่งจากการจำลองดังแสดงในรูปที่ 6.18 ของไหลอิเล็กตรอนเคลื่อนที่แบบสั่นตามแนวแกนแต่ละแกนในระบบ 3 มิติและมีการเลื่อนที่ออกไปจากตำแหน่งเดิม



รูปที่ 6.18 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในบริเวณ [0][0][0] ที่เวลาต่างๆ ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

การเคลื่อนที่ของของไหลทำให้สนามไฟฟ้าในขณะเวลานั้นมีการเปลี่ยนแปลงซึ่งเป็นผลมาจากความหนาแน่นของของไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงไปและส่งผลต่อกระทบนี้ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาขึ้น





(1) **(2)**

รูปที่ 6.19 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของสนามไฟฟ้าในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติในบริเวณ [0][0][0] กรณีไม่ถูกรบกวนจากภายนอกและไม่มีความร้อน

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

6.2.2 ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7$ rad/sec

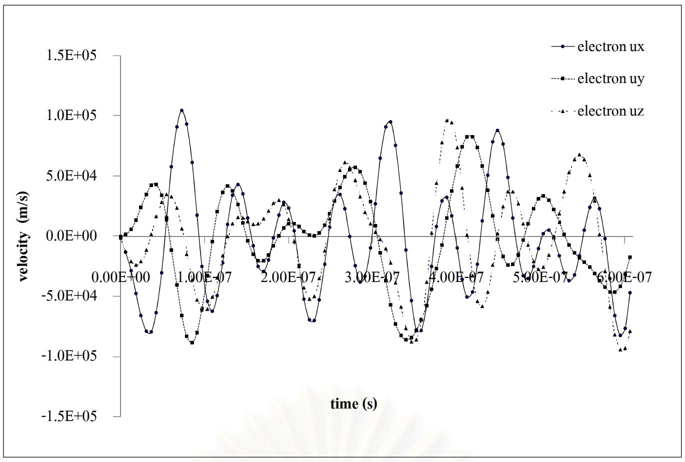
สนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งสามารถบรรยายได้ว่า

$$\vec{E} = 100\cos(\omega t)\hat{x} \qquad \text{V/m}$$

และ

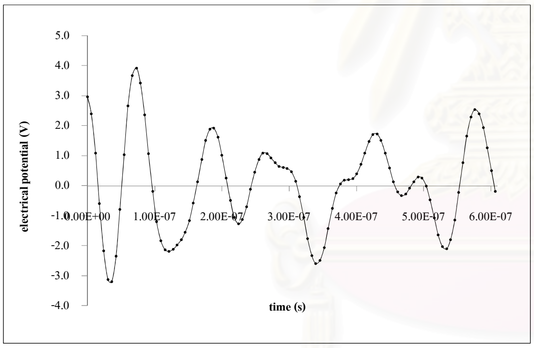
$$\vec{B} = 1.0\times10^{-6}\cos(\omega t)\hat{z} \ \text{ T}$$

โดยที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้านั้นสั่นด้วยความถี่เดียวกับความถี่การสั่นพลาสมาในระบบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกจะทำให้ของไหลเคลื่อนที่ไปตามแนวของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและสั่นด้วยความถี่เดียวกันกับสนาม การเคลื่อนที่ของของไหลบนระนาบ xy ซึ่งเป็นระนาบที่ตั้งฉากกับการสั่นสนามแม่เหล็กภายนอกที่เข้ามารบกวนระบบเป็นผลให้หน่วงความเร่งที่เกิดขึ้นจากแรงอันเนื่องมาจากสนามไฟฟ้าให้เบี่ยงเบนไปจากแนวการเร่งเดิมทำให้ของไหลเบนการเคลื่อนที่ออกไปยังอีกแกนหนึ่งซึ่งอยู่บนระนาบที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนของสนามแม่เหล็กภายนอกซึ่งเป็นผลให้ของไหลเคลื่อนที่แบบหมุนวนดังแสดงในรูปที่ 6.20

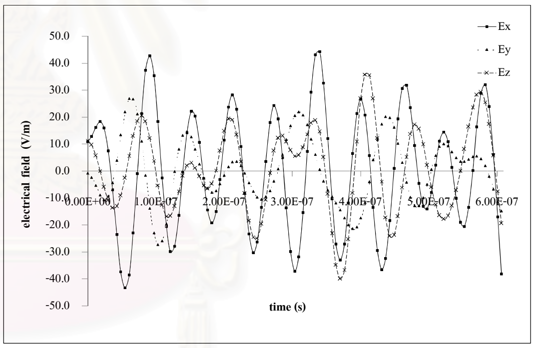


รูปที่ 6.20 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในบริเวณ [0][0][0] ที่เวลาต่างๆ ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$

การเคลื่อนที่ของไหลภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกดังแสดงในรูปที่ 6.20 จะทำให้ความหนาแน่นของไหลเปลี่ยนแปลงต่อเวลา ซึ่งจะไปมีผลทำให้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในพลาสมาเปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 6.21



(1)



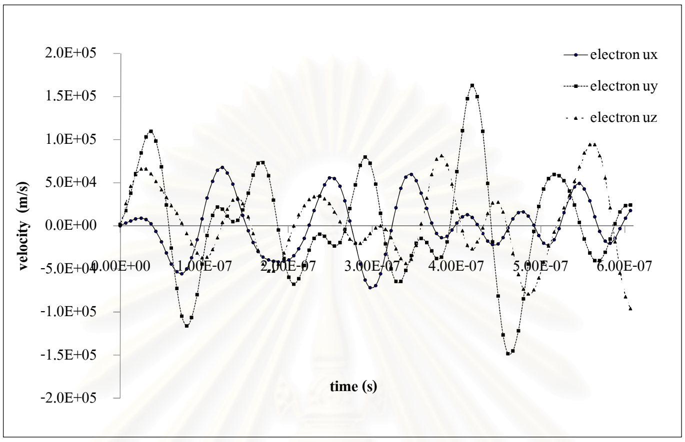
(2)

รูปที่ 6.21 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาภายในบริเวณ [0][0][0] ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7 \ rad/\sec$
(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

6.2.3 ภายใต้ความร้อน T = 10,000 K

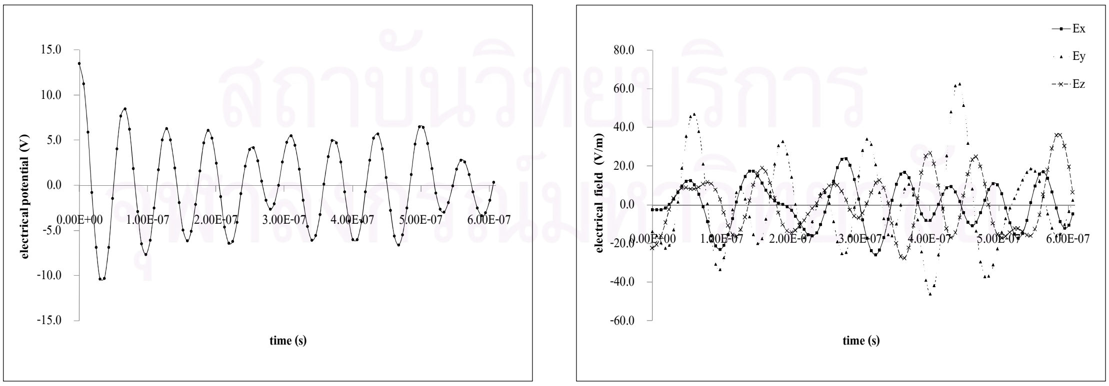
กรณีระบบพลาสมาอยู่ภายใต้สมดุลความร้อน T =10,000 K ซึ่งกระจายความร้อนอยู่ในระบบเป็นแบบ Isothermal และระบบไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอก พฤติกรรมของพลาสมาที่เกิดขึ้นจะได้รับอิทธิพลจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและความร้อนในระบบ

ภายใต้ระบบซึ่งอยู่ในความร้อน ของไหลจะรับเอาพลังงานความร้อนไปใช้ในการเคลื่อนที่ ซึ่งของไหลจะเคลื่อนที่แบบสั่น แต่เนื่องจากของไหลในระบบมีความหนาแน่นสูงการสั่นไหวของระบบจะเกิดอย่างต่อเนื่อง ของไหลส่งทอดข้อมูลการสั่นออกไปโดยพร้อมกันซึ่งจะทำให้ผลโดยรวมที่เกิดขึ้นจะไม่เห็นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจากความร้อน จากรูปที่ 6.22 จะเห็นว่า ของไหลมีการเคลื่อนที่แบบหมุนด้วยแรงสนามแม่เหล็กไฟฟ้า



รูปที่ 6.22 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในบริเวณ [0][0][0] ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K

เนื่องจากอิทธิพลของความร้อนต่อระบบไม่สูงมากเมื่อเปรียบเทียบกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า จากรูปที่ 6.23 จะเห็นว่า การเปลี่ยนแปลงต่อเวลาที่เกิดขึ้นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าไม่แตกต่างจากกรณีระบบไม่มีความร้อนซึ่งเป็นผลมาจากพลังงานความร้อนที่ของไหลได้รับหักล้างผลกันไปจึงปรากฏผลจากความร้อนออกมาน้อยมาก

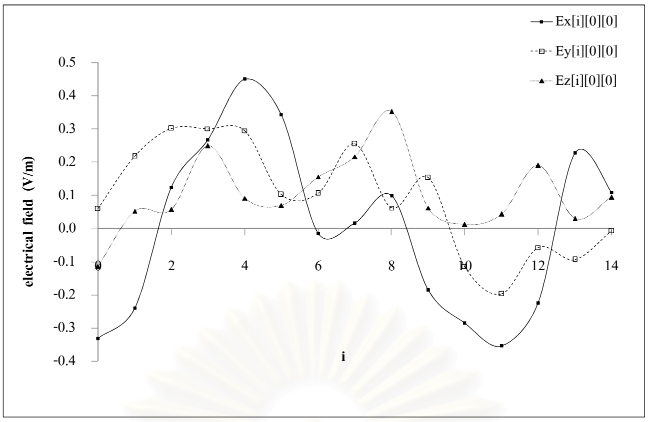


(1) **(2)**

รูปที่ 6.23 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าภายในตามเวลาในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติใน บริเวณ [0][0][0] ภายใต้ T = 10,000 K

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

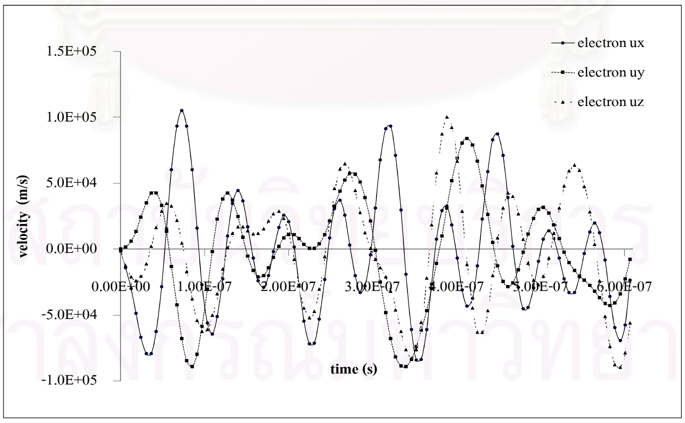
ณ ขณะเวลาใดเวลาหนึ่ง การสั่นของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน x แสดงในรูปที่ 6.24



รูปที่ 6.24 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าภายในปริมาตรตามแนวแกน x ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K

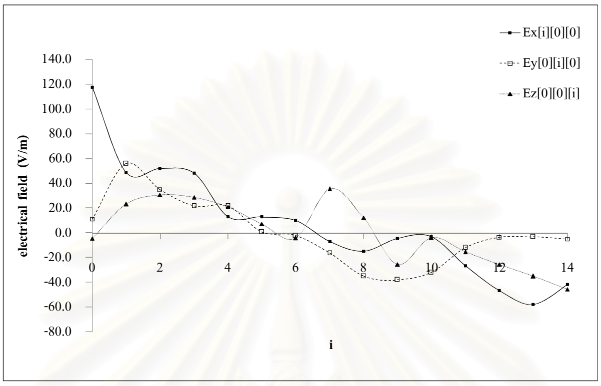
6.2.4 ภายใต้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ $\omega = \omega_p = 2.25 \times 10^7$ rad/sec และความร้อน T = 10,000 K

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกจะเร่งให้ของไหลเคลื่อนที่ด้วยอิทธิพลของสนาม จากรูปที่ 6.25 ของไหลสั่นด้วยความถี่เดียวกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก สำหรับอิทธิพลของความร้อนที่ต่อการเคลื่อนที่ของของไหลปรากฏออกมาน้อยทั้งนี้เพราะผลอันเนื่องมาจากความร้อนถูกหักล้างอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบภายใน



รูปที่ 6.25 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในบริเวณ [0][0][0] ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก
$\omega = \omega_p = 2.25\times10^7\ rad/\sec$

ในระบบพลาสมาจะมีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่ง ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง จะแสดงได้ดังรูปที่ 6.26 จะเห็นว่า การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าตามแนวแกนมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบคาบ โดยตรงบริเวณขอบของระบบจะรับรู้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวน ในส่วนของสนามแม่เหล็กจะส่งอิทธิพลต่อระบบในบริเวณระนาบซึ่ง z = 0 ซึ่งจะทำให้ของไหลหมุนวนในระบบ 3 มิติ

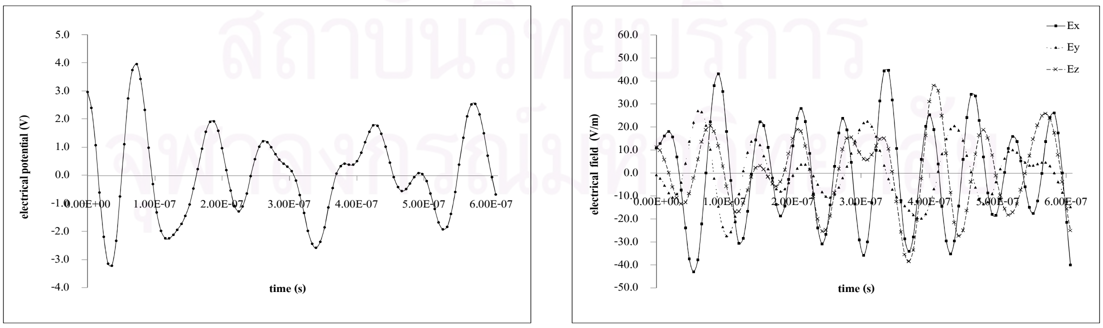


รูปที่ 6.26 การเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในปริมาตรตามแนวแกนหนึ่งๆ ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติ ภายใต้ T = 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก

$\omega = \omega_p = 2.25\times10^7 \ rad/\sec$

(1) สนามไฟฟ้า **(2)** สนามแม่เหล็ก

ในบริเวณ [0][0][0] จะรับรู้ถึงอิทธิพลของสนามภายนอกในเวลาต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.27 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนระบบ โดยจะเห็นว่า ของไหลในปริมาตรนี้จะรับรู้ถึงสนามแม่เหล็กที่เข้ามากระตุ้นซึ่งจะบังคับให้ของไหลเคลื่อนที่แบบสั่น



(1) **(2)**

รูปที่ 6.27 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในปริมาตร [0][0][0] ในระบบของไหลพลาสมา 3 มิติภายใต้ T 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก

$\omega = \omega_p = 2.25\times10^7 \ rad/\sec$

(1) ศักย์ไฟฟ้า **(2)** สนามไฟฟ้า

การจำลองด้วยแบบจำลองของไหลให้ผลการจำลองสอดคล้องกับการจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาค โดยการจำลองด้วยแบบจำลองของไหลมีความคลาดเคลื่อนที่ต่ำกว่าและใช้เวลาในการคำนวณต่ำกว่าการจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาค ซึ่งจากผลการจำลอง จะเห็นว่า การจำลองด้วยแบบจำลองของไหลมีความต่อเนื่องมากกว่าการจำลองจากแบบจำลองอนุภาคซึ่งมีการแกว่งค่าของข้อมูลสูงกว่าและนี่เป็นเหตุให้การจำลองจากแบบจำลองดังกล่าวมีความคลาดเคลื่อนสูงกว่า ซึ่งความคลาดเคลื่อนที่สูงกว่านี้ทำให้การจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาคต้องจำกัดพารามิเตอร์ต่างๆมากซึ่งนั่นหมายถึงการจำลองสามารถทำได้ในสภาวะแวดล้อมของระบบที่ไม่ซับซ้อนมากเพราะถ้าระบบมีความซับซ้อนมาก การคำนวณจะนำไปสู่การลู่ออกซึ่งหมายถึงไม่สามารถจำลองระบบในสภาวะแวดล้อมดังกล่าวได้

บทที่ 7
ความคลาดเคลื่อนการจำลอง

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะนำเสนอถึงความคลาดเคลื่อนการจำลองที่เกิดขึ้นโดยจะพิจารณาจากการกระจายของข้อมูลพลังงานในระบบรวมทั้งนำผลจากการจำลองไปเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณทางทฤษฎี หลังจากนั้นจะนำเสนอถึงข้อจำกัดของการจำลองและท้ายสุดจะพิจารณาถึงสาเหตุของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น ซึ่งประกอบไปด้วยสาเหตุหลักๆ 3 สาเหตุ ได้แก่ แบบจำลอง วิธีการประมาณเชิงตัวเลข และกระบวนการทางโปรแกรม

โดยธรรมชาติแล้ว ระบบจะพยายามรักษาพลังงานในระบบให้คงที่ สำหรับกรณีระบบปิด ซึ่งไม่ติดต่อกับสิ่งแวดล้อมภายนอก ระบบจะไม่สูญเสียพลังงานออกสู่ภายนอก แต่ถ้าระบบเป็นระบบเปิดซึ่งมีความสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมภายนอก ระบบอาจจะสูญเสียพลังงานให้แก่สิ่งแวดล้อมภายนอกได้ จากกฎการอนุรักษ์พลังงานดังกล่าวจึงได้นำมาใช้ในการพิจารณาความคลาดเคลื่อนในในการจำลอง ทั้งนี้จะทำการพิจารณาความคลาดเคลื่อนจากการจำลองระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ โดยจะพิจารณาพลังงานรวมในระบบ ณ เวลาใดๆ ว่าได้ดำเนินอยู่ภายใต้การอนุรักษ์พลังงานของระบบซึ่งเป็นระบบปิด

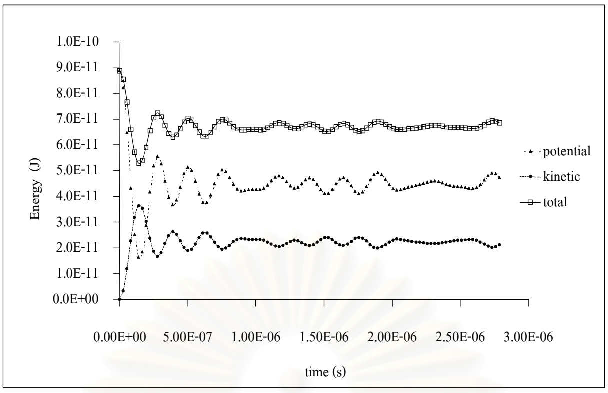
7.1 การกระจายของข้อมูล

สำหรับการพิจารณาการกระจายของข้อมูลเพื่อวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนนั้นจะใช้ข้อมูลพลังงานของระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ ซึ่งพบว่า อิทธิพลของอุณหภูมิมีส่วนสำคัญต่อการกระจายข้อมูลพลังงาน ซึ่งเมื่อจำลองระบบภายใต้อุณหภูมิ 10,000 K ข้อมูลพลังงานมีการกระจัดกระจายของลดลง ภายใต้การจำลองนี้ของไหลในระบบจะเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของความร้อนซึ่งทำให้อิทธิพลเนื่องจากการสั่นของของไหลพลาสมาลดความสำคัญต่อพลังงานรวมของระบบไป จึงทำให้ความคลาดเคลื่อนของพลังงานลดลงเมื่อเทียบกับขณะที่ไม่มีความร้อน

7.1.1 T = 0 K

กรณีการจำลองระบบซึ่งไม่ถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกและไม่มีความร้อน พลังงานของระบบมีค่า $6.71 \times 10^{-11} \pm 4.10 \times 10^{-12}$ J ซึ่งคิดเป็นความคลาดเคลื่อน 6.11% ทั้งนี้ในการจำลองประกอบไปด้วยขั้นตอนการคำนวณหลักๆอยู่ 2 ขั้นตอน คือ การคำนวณสนามและการคำนวณการเคลื่อนที่ โดยมีลักษณะการคำนวณที่มีความเกี่ยวเนื่องกันของขั้นตอนทั้ง 2 ขั้นตอนนี้

อย่างใกล้ชิด ทำให้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมีความเกี่ยวเนื่องตามกันมาโดยปรากฏผลของความคลาดเคลื่อนออกมาร่วมกัน



รูปที่ 7.1 พลังงานของระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ กรณีไม่มีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกและไม่มีความร้อน

ในทางปฏิบัตินั้นได้ทำการคำนวณในขั้นตอนของสนามไฟฟ้าเป็นขั้นตอนเริ่มต้นแล้วจึงทำการคำนวณในส่วนของการเคลื่อนที่เป็นอันจบการคำนวณสำหรับ 1 รอบของเวลาที่จะทำการจำลอง แล้วจึงเริ่มคำนวณในลักษณะเดิมใหม่สำหรับรอบเวลาถัดไปจนสิ้นสุดการจำลอง จะเห็นได้ว่าขั้นตอนของการคำนวณเพื่อใช้ในการจำลองนั้นปรากฏการสะสมของความคลาดเคลื่อนต่อเนื่องจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่งอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ ดังนั้นเพื่อให้การจำลองมีความถูกต้องในแต่ละขั้นตอนของการคำนวณจึงต้องรับผิดชอบต่อความแม่นยำในการคำนวณที่เกิดขึ้นอย่างสูงเพื่อลดผลความคลาดเคลื่อนที่จะสั่งสมจนทำให้การคำนวณในขั้นตอนที่ต่อเนื่องไปนั้นมีความคลาดเคลื่อนสูงขึ้นไปอีก

ขั้นตอนการคำนวณสนามนั้นจะประกอบไปด้วย การคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าซึ่งได้ใช้วิธีการ Finite Interpolation ในการคำนวณและมีการใช้วิธีการ Fixed Point เข้ามาช่วยในการหาค่าศักย์ไฟฟ้า ในขั้นตอนซึ่งอาศัยวิธีการคำนวณด้วยเทคนิค Finite Interpolation นี้การกำหนดขนาดของ Δx จะมีบทบาทสำคัญต่อความแม่นยำของการคำนวณ โดยถ้า Δx มีขนาดน้อยๆ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นก็มีน้อย แต่ถ้า Δx มีขนาดใหญ่ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นก็มีมาก ซึ่งในการจำลองนี้ได้กำหนด Δx ให้มีค่า 0.025 เมตร ซึ่งจะทำให้ความคลาดเคลื่อนในแต่ละรอบการคำนวณ (e_i) ที่เกิดขึ้นจากส่วนนี้จะมีค่าประมาณ

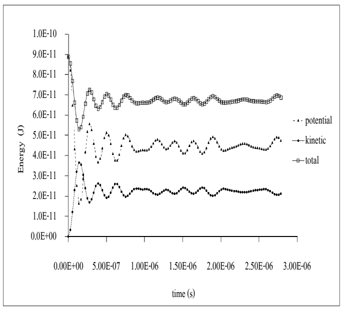
$$e_i \cong \Theta \Delta x^2$$

$$= 0.000625\,\Theta$$

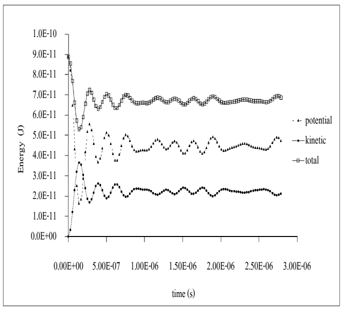
เมื่อ Θ คือ ความคลาดเคลื่อนที่ไม่สามารถควบคุมได้

และสำหรับการคำนวณด้วยวิธี Fixed Point ซึ่งต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้น ดังนั้นความผิดพลาดในการกำหนดค่าดังกล่าวจึงมีบทบาทสำคัญต่อการคำนวณเพื่อเข้าสู่คำตอบของปัญหา ภายใต้เทคนิควิธีการนี้จะกำหนดเงื่อนไขความแตกต่างของคำตอบที่ได้จากการคำนวณให้อยู่ในช่วงความแตกต่างที่ยอมรับได้ ถ้าการกำหนดค่าเริ่มต้นและการคำนวณหาค่าคำตอบนั้นนำไปสู่คำตอบของปัญหา ความคลาดเคลื่อนจะขึ้นอยู่กับความแตกต่างที่ยอมรับที่ได้กำหนดขึ้น ในทางตรงกันข้ามถ้าการกำหนดค่าเริ่มต้นหรือการคำนวณหาค่าคำตอบอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่างไม่สามารถนำไปสู่คำตอบของปัญหาได้ ความแตกต่างที่ยอมรับจะไม่มีนัยของความคลาดเคลื่อนจากคำตอบแต่จะมีความหมายในเชิงประสิทธิภาพของการคำนวณในการจำลอง สำหรับการจำลองนี้ความแตกต่างรวมของศักย์ทุกพื้นที่ที่ยอมรับ $< 1.0 \times 10^{-5}$ ของค่าเก่า (หรือค่าใหม่กรณีค่าเก่ามีค่าเป็นศูนย์) จะเป็นเงื่อนไขหลักสำหรับการคำนวณเพื่อหาค่าความต่างศักย์เพื่อใช้ในการจำลองและได้กำหนดจำนวนรอบการวนรอบการคำนวณไว้ที่ 1000 รอบเพื่อความสะดวกในทางปฏิบัติ และเนื่องจากการคำนวณหาค่าความต่างศักย์ได้ใช้วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยผลต่างสืบเนื่อง ดังนั้น Δx จึงมีบทบาทสำคัญด้วยเหมือนกันต่อการนำไปสู่คำตอบของปัญหา

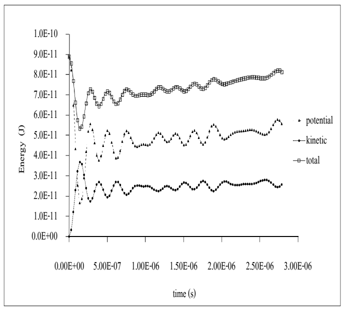
ในส่วนของขั้นตอนการคำนวณการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาและการเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งสำหรับการจำลองการไหล ทำให้ทั้งการกำหนด Δx และ Δt มีความสำคัญต่อการคำนวณ โดยวิธีการคำนวณการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาที่ได้ใช้วิธีการรุงเง-คุตตาให้ความคลาดเคลื่อนแต่ละรอบการคำนวณประมาณ $\Theta\Delta t^4$ แต่เนื่องจากมีผลความคลาดเคลื่อนจากวิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยผลต่างสืบเนื่องกระทำอยู่ด้วย ดังนั้น ในส่วนของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในแต่ละรอบจึงอาจมีค่าสูงกว่า $\Theta\Delta t^4$ ได้



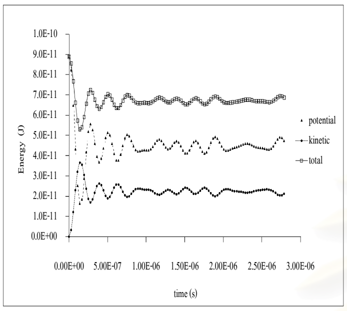
(1)



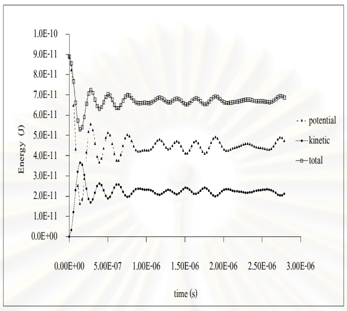
(2)



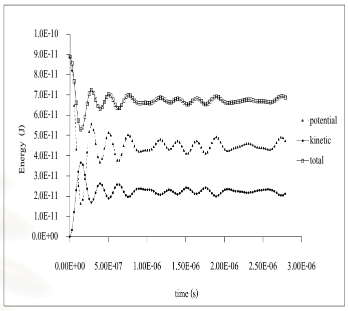
(3)



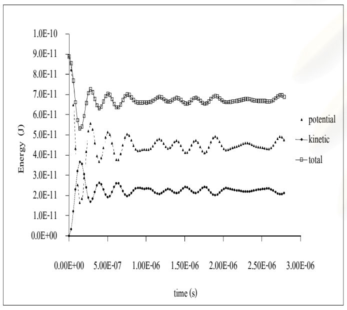
(4)



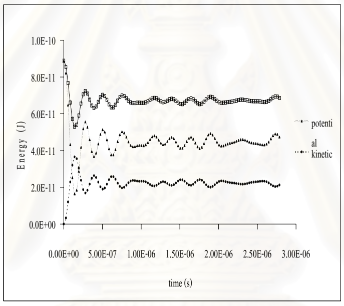
(5)



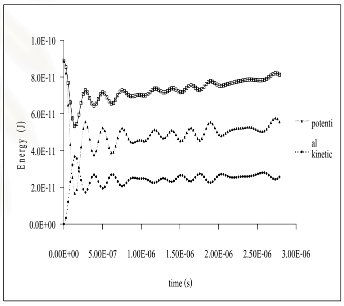
(6)



(7)



(8)



(9)

รูปที่ 7.2 พลังงานของระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ กรณีระบบถูกรบกวนจากภายนอก

สนามไฟฟ้าภายนอก

(1) $\omega = \omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 6.08%

(2) $\omega = 2\omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 6.10%

(3) $\omega = 0.5\omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 7.78%

สนามแม่เหล็กภายนอก

(4) $\omega = \omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 6.11%

(5) $\omega = 2\omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 6.11%

(6) $\omega = 0.5\omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 6.11%

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก

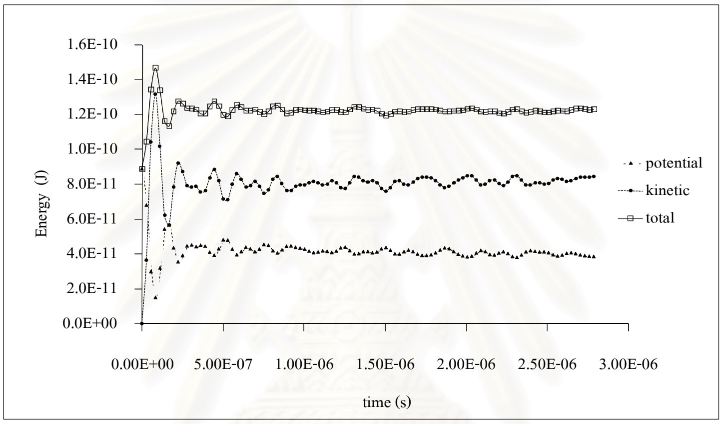
(7) $\omega = \omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 6.08%

(8) $\omega = 2\omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 6.10%

(9) $\omega = 0.5\omega_p$ ความคลาดเคลื่อน 7.78%

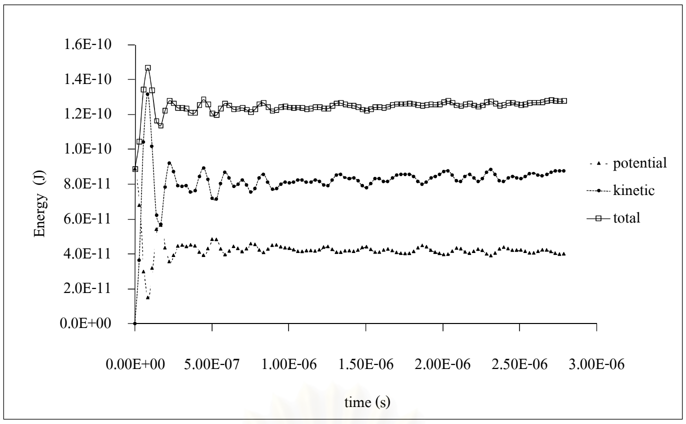
7.1.2 T = 10,000 K

จากรูปที่ 7.3 แสดงพลังงานของระบบที่ได้จากการจำลองกรณีระบบอยู่ในสมดุลความร้อน T= 10,000 K พลังงานรวมของระบบมีค่า $1.22 \times 10^{-10} \pm 5.13 \times 10^{-12}$ คิดเป็นความคลาดเคลื่อน 4.20% ลดลงจากกรณีที่ระบบไม่มีความร้อน ทั้งนี้การจำลองระบบเมื่อไม่ได้พิจารณาว่าระบบมีความร้อน ขนาดของพลังงานรวมมีค่าน้อยกว่าเมื่อจำลองระบบที่มีอุณหภูมิ 10,000 K โดยเหตุที่อิทธิพลของความร้อนเนื่องจากอุณหภูมิของระบบนี้มีความสำคัญมากกว่าความร้อนที่เกิดจากการสั่นของของไหล ดังนั้นจึงทำให้การจำลองเมื่อระบบมีอุณหภูมิมีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าเมื่อไม่พิจารณาอุณหภูมิ



รูปที่ 7.3 พลังงานของระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ กรณีระบบอยู่ในสมดุลความร้อน T = 10,000 K ที่ไม่มีสนามภายนอก

สำหรับกรณีระบบถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกในขณะอยู่ในสมดุลความร้อน T = 10,000 K อิทธิพลของความร้อนส่งผลต่อระบบสูงกว่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวน จากการจำลอง พบว่า ความคลาดเคลื่อนของพลังงานมีค่า 4.30% อย่างไรก็ตาม ลักษณะความคลาดเคลื่อนของพลังงานรวมของระบบที่จำลองได้นั้นมีความคล้ายคลึงกับกรณีไม่ถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก



รูปที่ 7.4 พลังงานของระบบของไหลพลาสมา 2 มิติ กรณีระบบอยู่ในสมดุลความร้อน T= 10,000 K และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกความถี่ $\omega = \omega_p$

7.2 เปรียบเทียบผลการจำลองกับทางทฤษฎี

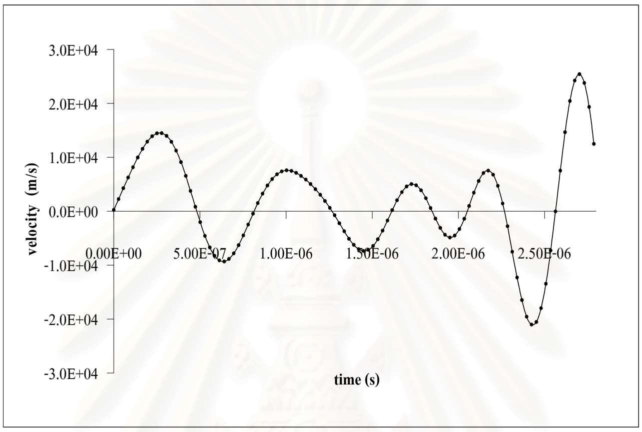
ความคลาดเคลื่อนของการจำลองที่เกิดขึ้นสามารถพิจารณาเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ทางทฤษฎี ซึ่งในที่นี้จะได้นำเสนอการเปรียบเทียบผลการจำลองระบบในกรณีระบบไม่ถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกกับผลการวิเคราะห์ในทางทฤษฎี ซึ่งได้ผลการเปรียบเทียบดังนี้

7.2.1 กรณีไม่มีความร้อน T = 0 K

ในทางทฤษฎีได้วิเคราะห์พลาสมาใน 1 มิติซึ่งสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นจากการเหนี่ยวนำของประจุซึ่งเป็นองค์ประกอบภายในพลาสมา อิทธิพลของสนามดังกล่าวทำให้พลาสมาสั่นด้วยความถี่ที่เรียกว่า “ความถี่การสั่นพลาสมา (Plasma Oscillation Frequency)” นอกจากนี้สนามที่เกิดขึ้นดังกล่าวยังทำหน้าที่กักเก็บประจุในพลาสมาให้อยู่ภายใต้อิทธิพลของ Debye Shielding ซึ่งทำหน้าที่เสมือนเป็นกำแพงศักย์กั้นไม่ให้ประจุเคลื่อนที่ออกไปนอกกำแพงศักย์นี้ได้ โดยประจุแต่ละตัวจะรับรู้ถึงสนามไฟฟ้าในบริเวณที่จำกัด สำหรับบริเวณที่ห่างไกลออกไปจาก Debye Length นั้นประจุจะไม่สามารถรับรู้ถึงอิทธิพลของสนามได้เพราะมีกำแพงศักย์ขวางกั้นอยู่ การสั่นของประจุในพลาสมาจะสั่นภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าที่ประจุนั้นรับรู้ได้ สำหรับกรณีตัวกลางที่เป็นสุญญากาศ ความถี่การสั่นพลาสมาที่เกิดขึ้นมีค่า

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}} \tag{7.1}$$

จากการคำนวณโดยอาศัยสมการ (7.1) เพื่อใช้สำหรับเปรียบเทียบกับผลการจำลอง ได้ผลคำนวณว่า ความถี่พลาสมามีค่า 2.25 x 10^7 วินาที$^{-1}$ หรือมีคาบการสั่นเท่ากับ 2.79 x 10^{-7} วินาที ซึ่งเมื่อพิจารณาผลที่ได้จากการจำลอง พบว่า ของไหลอิเล็กตรอนสั่นในแนวแกน x ซึ่งเทียบได้กับกรณีพลาสมา 1 มิติด้วยความถี่ 4.49 x 10^6 วินาที$^{-1}$ (คิดเป็นความคลาดเคลื่อน 80.09%) ดังในรูปที่ 7.5 เหตุผลของความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่นี้น่าจะเป็นผลมาจากการใช้ความหนาแน่นประจุในหนึ่งมิติในการจำลองซึ่งไม่สอดคล้องกับทฤษฎีที่เป็นความหนาแน่นในสามมิติหากแต่อนุภาคพลาสมาสั่นในหนึ่งมิติ

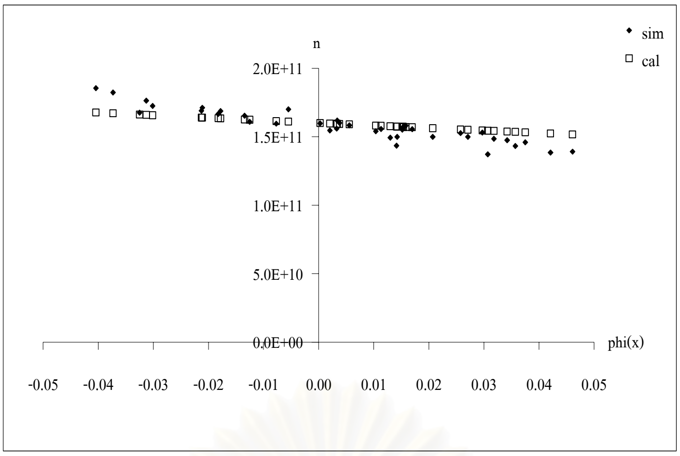


รูปที่ 7.5 ความเร็วของไหลอิเล็กตรอนในแกน x ภายใต้การเหนี่ยวนำของประจุภายใน

7.2.2 กรณีความร้อน T = 10,000 K

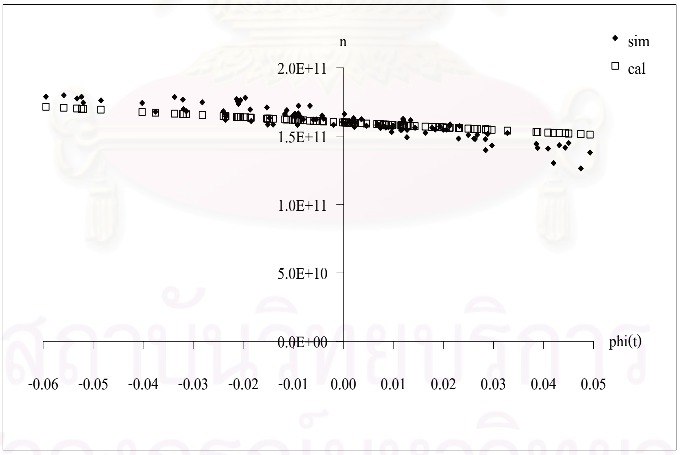
ถ้าระบบอยู่ภายใต้สมดุลความร้อนค่าหนึ่งโดยมีการกระจายความร้อนในระบบแบบสม่ำเสมอ (Isothermal) ความหนาแน่นของไหลจะเปลี่ยนแปลงไปด้วยอิทธิพลของศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นภายในระบบ โดยในทางทฤษฎีสามารถอธิบายความหนาแน่นของไหลด้วย Boltzmann's relation ซึ่งกล่าวว่า

$$n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{KT}\right) \tag{7.2}$$



รูปที่ 7.6 เปรียบเทียบผลการจำลองความหนาแน่นอิเล็กตรอนที่เวลา 1.76 x 10^{-6} วินาที กับการคำนวณทางทฤษฎี

ถ้าพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นของไหลอิเล็กตรอนในปริมาตรตามแกน x จากรูปที่ 7.6 ผลจากการจำลอง พบว่า มีความคลาดเคลื่อน 3.26% (0 – 1 เมตร) ไปจากการคำนวณด้วยสมการ (7.2) โดยการแทนค่าศักย์ไฟฟ้าลงไปในสมการดังกล่าว ในทำนองเดียวกันถ้าพิจารณาศักย์ที่ปริมาตรหนึ่ง แล้วศึกษาผลความหนาแน่นเพื่อเปรียบเทียบกับการคำนวณทางทฤษฎี ดังแสดงในรูปที่ 7.7 พบว่า มีความคลาดเคลื่อนไปจากการคำนวณ 3.63% (เวลา 0 – 2.79 x 10^{-6} วินาที)



รูปที่ 7.7 เปรียบเทียบผลการจำลองความหนาแน่นอิเล็กตรอนที่พื้นที่ [0][0] กับการคำนวณทางทฤษฎี

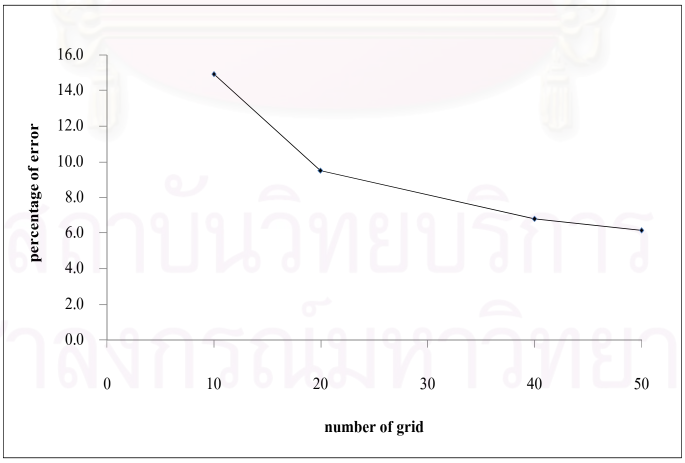
7.3 ข้อจำกัดสำหรับการจำลอง

การกำหนดค่าของพารามิเตอร์ที่ไม่เหมาะสมจะส่งผลให้เกิดความคลาดเคลื่อนของการจำลองขึ้น เนื่องจากค่าเหล่านี้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการจำลองระบบ ดังนั้น

หากว่าค่าที่กำหนดนั้นไม่มีความเหมาะสมซึ่งอาจจะมีขนาดที่เล็กเกินไปหรือมากเกินไปก็เป็นเหตุให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นมาได้ จากการจำลองซึ่งประกอบไปด้วยการคำนวณค่าหลายค่าด้วยวิธีการประมาณหลายวิธีประกอบกันอยู่นั้น ในแต่ละวิธีก็อาศัยพารามิเตอร์ที่แตกต่างกันออกไปในการคำนวณ ทำให้ในที่สุดแล้วพารามิเตอร์แต่ละตัวมีบทบาทสำคัญต่อการจำลอง เช่น การกำหนดขนาดระบบ (ln) และจำนวนกริดต่อด้าน (ngrid) มีผลต่อการประมาณของวิธี Finite Different Interpolation ส่วนค่าของเวลาของรอบการคำนวณ (dt) มีผลต่อการประมาณของวิธี Runge-Kutta เป็นต้น นอกจากนี้แล้วยังพบว่าขนาดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เข้ามารบกวนระบบก็มีบทบาทต่อความคลาดเคลื่อนด้วยเช่นเดียวกัน จึงทำให้ในการจำลองนี้สามารถจำลองได้แต่เพียงระบบซึ่งถูกรบกวนจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีค่าที่จำกัดในขนาดหนึ่งเท่านั้น ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

7.3.1 จำนวนกริด (ngrid) ต่อด้าน

จำนวนกริดต่อด้าน (ngrid) ถูกกำหนดขึ้นเพื่อจะนำไปใช้ในการกำหนดค่า Δx สำหรับประมาณด้วยวิธี Finite Different Interpolation ซึ่งใช้ในการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงต่อตำแหน่ง สำหรับการกำหนดขนาด ln ที่เกี่ยวข้องกับการกำหนด Δx ด้วยนั้น พบว่า การเปลี่ยนแปลงค่า ln ในช่วง $0.1 \leq L \leq 10$ เมตร ให้ผลความคลาดเคลื่อนของการจำลองไม่แตกต่างกัน

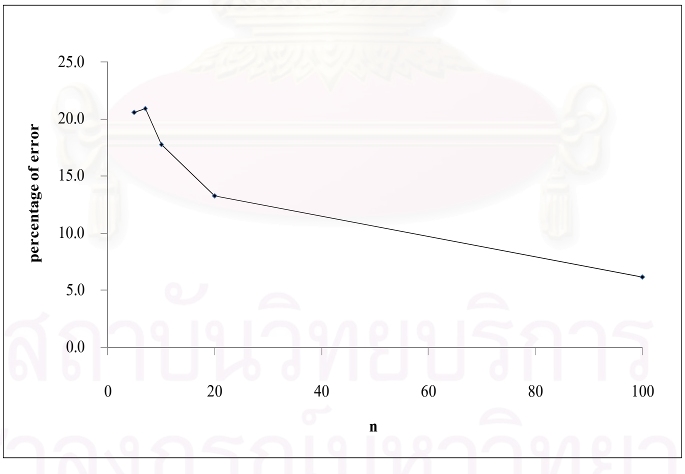


รูปที่ 7.8 ความคลาดเคลื่อนพลังงานของระบบของไหล 2 มิติในช่วงเวลา 0 - 2.23 x 10^{-6} วินาที จากการกำหนดค่าจำนวนกริด

เมื่อพิจารณาความคลาดเคลื่อนของการจำลองจากพลังงานของระบบ ดังแสดงในรูปที่ 7.8 จะเห็นว่า เมื่อ ngrid มีค่าเพิ่มมากขึ้น นั่นคือ Δx มีขนาดเล็กลงซึ่งทำให้การคำนวณด้วยวิธี Finite Interpolation มีความแม่นยำมากขึ้นจึงทำให้ความคลาดเคลื่อนของข้อมูลพลังงานที่เกิดขึ้นมีค่าลดน้อยลง (ในงานวิทยานิพนธ์นี้ ขอบเขตจำนวนกริด ngrid < 50 เนื่องถูกจำกัดด้วยความสามารถของคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการจำลอง)

7.3.2 จำนวนอนุภาคจำลอง (N)

สำหรับการจำลองระบบพลาสมาจากแบบจำลองของไหล การกำหนดค่าจำนวนอนุภาคจำลองเพื่อใช้คำนวณความหนาแน่นในพื้นที่ต่างๆที่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ โดยวิธีการสุ่มค่า i, j ให้อนุภาคจำลองแต่ละตัวแล้วคำนวณความหนาแน่นของไหลในพื้นที่ i, j นั้น ความคลาดเคลื่อนของวิธีการสุ่มค่าขึ้นกับจำนวนข้อมูลจากการสุ่มโดยในที่นี้คือ จำนวนอนุภาคจำลอง ในลักษณะผกผันกับรากที่สองของจำนวนอนุภาคจำลอง เหตุที่ความหนาแน่นของของไหลทำให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในพลาสมาขึ้น ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนในส่วนนี้จึงส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนของระบบด้วย สำหรับผลของจำนวนอนุภาคต่อการคำนวณนั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.9 ซึ่ง n เป็นจำนวนอนุภาคจำลองต่อ Δx



รูปที่ 7.9 ความคลาดเคลื่อนพลังงานของระบบของไหล 2 มิติในช่วงเวลา 0 - 2.79×10^{-7} วินาที จากการกำหนดค่าจำนวนอนุภาคจำลอง

นอกจากจำนวนอนุภาคจำลองจะถูกนำไปใช้สำหรับการสุ่มค่าพื้นที่เพื่อคำนวณความหนาแน่นของของไหลแล้ว จำนวนอนุภาคยังเป็นค่าที่นำมาใช้ในการกำหนด Δt เพื่อใช้ในการคำนวณการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาด้วย

$$\Delta t = \frac{A}{\sqrt{N}}$$

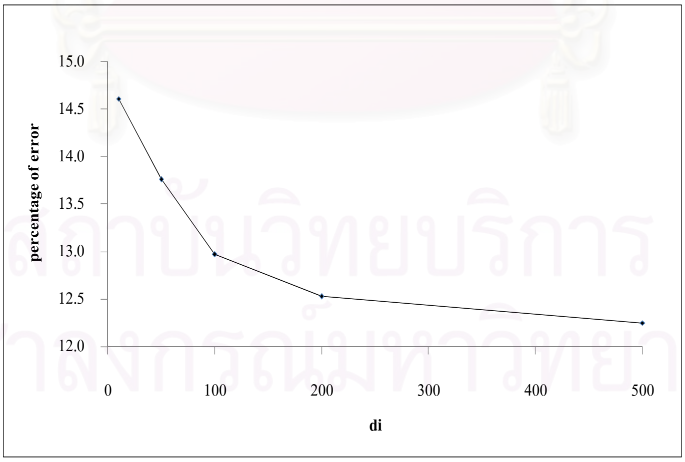
เมื่อ $A = \dfrac{2\pi}{di\sqrt{\dfrac{e^2}{Lm_e\varepsilon_0}}}$ โดย di เป็นค่าที่กำหนดให้

ซึ่ง $$N \propto n$$

จากรูปที่ 7. 9 จะเห็นว่า เมื่ออนุภาคจำลองมีจำนวนมากขึ้นจะทำให้ค่า Δt มีค่าน้อยลงซึ่งจะทำให้การคำนวณการเปลี่ยนแปลงต่อเวลามีความแม่นยำมากขึ้นเกิดความคลาดเคลื่อนของการจำลองน้อยลง (ในงานวิทยานิพนธ์นี้ การจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาคมีขอบเขตการจำลอง N < 1,000,000)

7.3.3 จำนวนข้อมูลต่อ 1 รอบการสั่นพลาสมา (di) เพื่อใช้กำหนดเวลาของรอบการคำนวณ (dt)

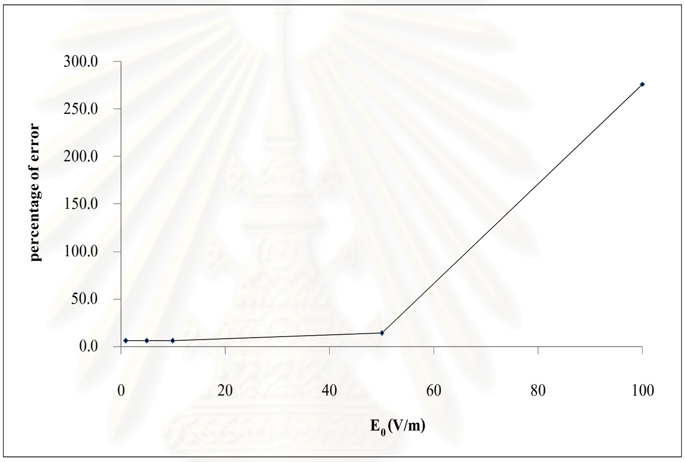
พารามิเตอร์ค่านี้เป็นค่าที่มีความสำคัญต่อความคลาดเคลื่อนของการจำลองมากค่าหนึ่ง เพราะเป็นค่าที่ใช้ในการกำหนด Δt เพื่อใช้ในการคำนวณผลที่เปลี่ยนแปลงต่อเวลา จากรูปที่ 7.10 จะเห็นว่า เมื่อ di มีค่ามากขึ้น ความคลาดเคลื่อนของการจำลองมีค่าต่ำลงเพราะ Δt มีค่าน้อยลงทำให้การคำนวณด้วยวิธี Runge-Kutta มีความแม่นยำมากขึ้น



รูปที่ 7.10 ความคลาดเคลื่อนพลังงานของระบบของไหล 2 มิติในช่วงเวลา 0 - 5.57 x 10^{-7} วินาที จากการกำหนดค่าจำนวนข้อมูลใน 1 รอบการสั่นพลาสมา

7.3.4 ขนาดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอก

สำหรับกรณีระบบถูกรบกวนด้วยสนามไฟฟ้าภายนอกตลอดเวลา จากการจำลอง พบว่า (รูปที่ 7.11) ขอบเขตของการจำลองระบบ 2 มิติโดยการรบกวนด้วยสนามไฟฟ้าภายนอกนั้น ขนาดของสนามไฟฟ้าต้องมีค่าไม่เกิน 100 V/m เพื่อให้การคำนวณไม่นำไปสู่การลู่ออกซึ่งจะทำให้ไม่สามารถจำลองระบบได้ เนื่องจากการจำลองระบบไม่มีการพิจารณาการถ่ายเทความร้อนของระบบ ดังนั้น ภายใต้การจำลองนี้ขนาดของสนามไฟฟ้าจึงต้องมีขนาดที่ทำให้การเปลี่ยนแปลงของของไหลพลาสมาเกิดขึ้นโดยไม่สร้างความร้อนในขนาดซึ่งส่งอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบอย่างมาก



รูปที่ 7.11 ความคลาดเคลื่อนพลังงานของระบบของไหล 2 มิติในช่วงเวลา 0 – 2.79 x 10^{-6} วินาที จากการใส่สนามไฟฟ้าภายนอก

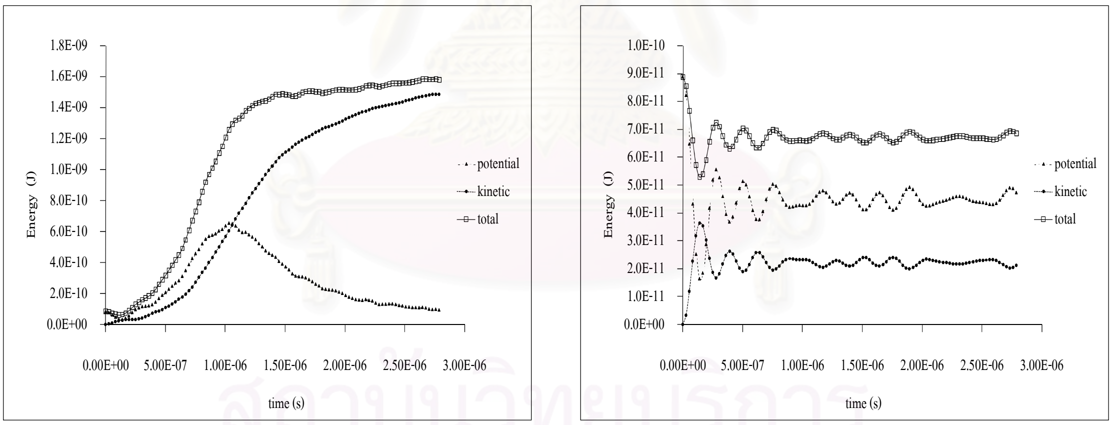
กรณีระบบ 2 มิติถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็ก พบว่า สนามแม่เหล็กที่มีความเข้มของสนามอยู่ในช่วง $0.0 \le B < 0.01$ ไม่ส่งอิทธิพลต่อความคลาดเคลื่อนของการจำลอง แต่ถ้า $B \ge 0.01$ จะทำให้การคำนวณในส่วนของการเคลื่อนที่หรือการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาที่เกิดขึ้นนำไปสู่การลู่ออกของคำตอบอย่างรวดเร็ว

7.4 สาเหตุของความคลาดเคลื่อนการจำลอง

7.4.1 แบบจำลองของไหลพลาสมา

การสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ทางพลาสมาซึ่งในการจำลองนี้ได้อาศัยแบบจำลองอนุภาคแต่ได้พบว่าแบบจำลองดังกล่าวมีข้อจำกัดทางการจำลองสูงและมีความคลาดเคลื่อนของการจำลองมากดังนั้นจึงได้ปรับเปลี่ยนการจำลองโดยอาศัยแบบจำลองของไหล

โดยแบบจำลองนี้จะอธิบายพลาสมาว่าเป็นของไหลซึ่งถึงแม้ว่าจะประกอบไปด้วยอนุภาคแต่พลาสมาก็แสดงพฤติกรรมว่าเป็นของไหลมากกว่าเป็นอนุภาค อนุภาคที่มีประจุจะเป็นองค์ประกอบในการพิจารณาพลาสมาว่าเป็นของไหลซึ่งจะมีอิทธิพลให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบขึ้นเช่นเดียวกับที่แบบจำลองอนุภาคที่ได้อธิบายไว้ ข้อดีของการจำลองด้วยแบบจำลองของไหลก็คือไม่ต้องจำลองอนุภาคแต่ละตัวในพลาสมาซึ่งมีจำนวนมากและนี่เป็นปัจจัยหลักของความคลาดเคลื่อนของการจำลองทั้งนี้เพราะไม่สามารถจำลองอนุภาคได้มากพอให้เกิดความคลาดเคลื่อนในระดับที่ยอมรับได้และถึงแม้จำนวนอนุภาคการจำลองจะมีขนาดมากพอแต่การติดตามพฤติกรรมของอนุภาคจำลองแต่ละตัวก็ก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนโดยรวมที่มีขนาดใหญ่ จากรูปที่ 7.12 จะเห็นว่าความคลาดเคลื่อนการจำลองด้วยแบบจำลองอนุภาคมีค่าสูงถึง 50.26% ในขณะที่การจำลองด้วยแบบจำลองของไหลมีความคลาดเคลื่อนเพียง 6.11% ทั้งนี้แบบจำลองของไหลจะพิจารณาข้อมูลความหนาแน่นของไหลแทนข้อมูลอนุภาคที่มีปริมาณมากและข้อมูลในแต่ละตัวจะนำไปสู่ความยุ่งยากซับซ้อนที่สูงซึ่งส่งผลให้มีโอกาสผิดพลาดได้มาก สำหรับข้อเสียของการจำลองจากแบบจำลองนี้ก็คือถ้าหากอิทธิพลของการเคลื่อนที่ของอนุภาคแต่ละตัวมีผลสำคัญต่อพลาสมามากกว่าผลจากพฤติกรรมโดยรวมในรูปของของไหลแล้วก็อาจทำให้แบบจำลองนี้มีความคลาดเคลื่อนสูงไม่น่าเชื่อถือได้



(1) (2)

รูปที่ 7.12 พลังงานของระบบพลาสมา 2 มิติ กรณีไม่มีสนามภายนอกและไม่มีความร้อน

(1) แบบจำลองอนุภาค ความคลาดเคลื่อน 50.26%

(2) แบบจำลองของไหล ความคลาดเคลื่อน 6.11%

สำหรับการจำลองนี้พิจารณาความถี่การสั่นของสนามภายนอกที่เข้ามารบกวนที่มีค่าไม่สูงมากเมื่อเทียบกับการสั่นพลาสมาเพื่อให้การประมาณพลาสมาสามารถใช้ได้ และพิจารณาว่าไม่มีการชนเกิดขึ้นและการแพร่ (Diffusion) ที่เกิดขึ้นในระบบก็มีขนาดน้อยมาก ด้วยการพิจารณาเช่นนี้ก็ทำให้ผลการจำลองมีความแตกต่างจากในทางปฏิบัติซึ่งมีการฟุ้งอันเนื่องมาจากความร้อน

และการชนเมื่อระบบมีความหนาแน่นมากในระดับหนึ่งหรือสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีอิทธิพลต่อการหมุนวนซึ่งก็อาจทำให้เกิดการชนกันของอนุภาคจำนวนมากจนส่งผลต่อพฤติกรรมของพลาสมาได้ แต่อย่างไรก็ตาม ภายใต้การจำลองที่ได้ศึกษานั้นแบบจำลองของไหลพลาสมามีความสามารถในการจำลองที่ดีพอในการจำลองพลาสมา ในการประมาณภายใต้แบบจำลองของไหลซึ่งละผลที่เกิดขึ้นดังกล่าวนี้ไปด้วยเหตุผลที่ว่าปรากฏการณ์ดังกล่าวนั้นมีอิทธิพลต่อระบบน้อยมากจนไม่มีนัยสำคัญ หากว่าผลดังกล่าวมีนัยสำคัญระบบที่จำลองได้นั้นจะมีความคลาดเคลื่อนสูงและห่างไกลจากปรากฏการณ์จริง

7.4.2 วิธีการประมาณเชิงตัวเลข

การประมาณเชิงตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณค่าสำหรับจำลองระบบก็เป็นปัจจัยหนึ่งที่สำคัญซึ่งทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของการจำลองขึ้น ซึ่งในการจำลองได้ใช้วิธีการประมาณค่า Finite Different Interpolation สำหรับในการคำนวณการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นต่อตำแหน่ง และวิธีการประมาณรุงเง-คุตตา สำหรับคำนวณการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นต่อเวลา นอกจากนี้ยังใช้วิธี Fixed Point สำหรับการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้าในแต่ละเวลา และการสุ่มค่าสำหรับคำนวณหาความหนาแน่นของไหลเมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ ทั้งนี้ในแต่ละวิธีการประมาณที่ใช้นั้นก็ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในที่มีลักษณะต่างๆ ดังต่อนี้

1. วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องได้นำมาใช้ในการคำนวณการเปลี่ยนแปลงต่อตำแหน่งหรืออนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับตำแหน่ง เนื่องจากลักษณะปัญหาเป็นปัญหาที่เราทราบค่าที่ตำแหน่งขอบหรือปัญหาค่าขอบเขต วิธีการนี้จึงมีความสะดวกที่จะนำมาใช้คำนวณ โดยสำหรับกรณีอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะใช้เทคนิคการคำนวณค่าโดยใช้การประมาณค่าที่ตำแหน่งกึ่งกลาง ซึ่งสามารถประมาณ ได้ว่า

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2\Delta x}$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}[y(x_i) + y'(x_i)\Delta x + y''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2} + y''(x_i)\frac{\Delta x^3}{6} + \ldots$$

$$- y(x_i) + y'(x_i)\Delta x - y''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2} + y'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{6} + \ldots]$$

$$= y'(x_i) + \frac{1}{6} y'''(x_i) \Delta x^2$$

ซึ่งความคลาดเคลื่อนจากการประมาณ มีค่า

$$e_i = \frac{1}{6} y'''(x_i) \Delta x^2 \qquad (7.3)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งได้ประมาณว่า

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}[y(x_i) + y'(x_i)\Delta x + y''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2} + y''(x_i)\frac{\Delta x^3}{6} + \ldots$$

$$-2y(x_i) + y(x_i) - y'(x_i)\Delta x + y''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2} - y'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{6} + \ldots]$$

$$= y''(x_i) + \frac{1}{12} y^4(x_i) \Delta x^2$$

ดังนั้นความคลาดเคลื่อนจึงมีค่า

$$e_i^2 = \frac{1}{12} y^4(x_i) \Delta x^2 \qquad (7.4)$$

จะเห็นว่า วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องทั้งการคำนวณอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองนั้นต่างให้ความคลาดเคลื่อนที่ขึ้นอยู่กับค่ากำลังสองของขนาด Δx ที่เรากำหนดให้ ถ้าเรากำหนดให้ Δx มีขนาดน้อย ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณด้วยวิธีนี้ก็จะมีค่าน้อยลง

2. วิธีรุงเง-คุตตา

สำหรับการคำนวณการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาที่มีลักษณะเป็นปัญหาที่เราทราบค่าเริ่มต้นหรือปัญหาค่าเริ่มต้นมีความสะดวกที่จะคำนวณด้วยวิธีการรุงเง-คุตตา ซึ่งพิจารณาการเปลี่ยนแปลงไปถึงอันดับ 4 ของการประมาณฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยค่าการเปลียนแปลงแต่ละอันดับ มีลักษณะดังนี้

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

โดยที่

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$$

ซึ่งความคลาดเคลื่อนต่อรอบการคำนวณจะมีค่า

$$e_i \propto h^5 \qquad (7.5)$$

และความคลาดเคลื่อนทั้งหมดตลอดการพิจารณาจะมีค่า

$$e \propto h^4 \qquad (7.6)$$

ในที่นี้ h = dt ที่ใช้ในการคำนวณการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาของการจำลอง ดังนั้น ถ้า dt มีขนาดน้อยลง ความคลาดเคลื่อนของการจำลองก็จะมีขนาดน้อยลงด้วย

3. วิธี Fixed Point Method

สำหรับการคำนวณศักย์ไฟฟ้านั้นเราได้ใช้วิธีการ Fixed Point โดยพิจารณาว่า $\phi_n = g(\phi_{n-1})$ เพื่อใช้หา $\phi = g(\phi)$

$$e_n = \phi_n - \phi_T$$

$$= g(\phi_{n-1}) - g(\phi_T) \qquad (7.7)$$

เมื่อ ϕ_T คือ ค่าศักย์ที่แท้จริงซึ่งมีคุณสมบัติ $\phi_T = g(\phi_T)$

ϕ_n คือ ค่าศักย์จากการประมาณ

ซึ่งในการจำลองเราได้สร้างเงื่อนไขในการคำนวณไว้ว่า

$$err\_criteria = \phi_n - \phi_{n-1}$$

$$\approx 1.0 \times 10^{-5}$$

ซึ่งมีความหมายว่า ถ้าการประมาณนำไปสู่ค่าที่แท้จริง คือ $\phi_n = \phi_T$ ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณด้วยวิธีนี้จะมีค่าเท่ากับความคลาดเคลื่อนที่เรากำหนด 1.0×10^{-5}

ในการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขนั้นสามารถทำได้โดยการพิจารณาคำตอบด้วยอนุกรมเทย์เลอร์

$$g(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} g^m(\phi_T)\frac{(\phi - \phi_T)^m}{m!}$$

ซึ่งจะทำให้ได้ความคลาดเคลื่อน

$$e_n = \sum_{m=0}^{\infty} g^m(\phi_T)\frac{(\phi_{n-1} - \phi_T)^m}{m!} - g(\phi_T)$$

$$= g(\phi_T) + g'(\phi_T)(\phi_{n-1} - \phi_T) + g'(\phi_T)\frac{(\phi_{n-1} - \phi_T)^2}{2} + \ldots - g(\phi_T)$$

$$\approx g'(\phi_T)(\phi_{n-1} - \phi_T) \tag{7.8}$$

ถ้า ϕ_{n-1} มีค่าเข้าใกล้ค่าที่แท้จริง ϕ_T ความคลาดเคลื่อนจะเข้าใกล้ 0

4. การสุ่ม

การคำนวณหาความหนาแน่นของไหลเมื่อเวลาเริ่มต้น เราได้สุ่มค่า i, j, k ให้อนุภาคจำลองแต่ละตัวสำหรับแต่ละชนิดของของไหล แล้วนำไปคำนวณหาความหนาแน่นของไหล ซึ่งโดยทั่วไปแล้วความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มค่าจะมีค่า

$$e \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{7.9}$$

ในที่นี้ ความคลาดเคลื่อนจากการจำลองนี้จากการสุ่มค่า เมื่อ N = 160,000 คือ

$$e \propto \frac{1}{400}$$

7.4.3 กระบวนการทางโปรแกรมข้อจำกัด

การจำลองเชิงตัวเลขได้ใช้โปรแกรมภาษาซี ++ ในการดำเนินการคำนวณค่า ซึ่งมีต่อพารามิเตอร์สำหรับการ compile และ run ของโปรแกรมอยู่ ได้แก่ ขนาดของ matrix < [100][100][100] , จำนวนอนุภาคจำลอง < 100,000 เป็นต้น ผลจากการที่ระบบพลาสมามีค่าที่เกี่ยวข้องในการคำนวณซึ่งมีขนาดแตกต่างกันอยู่มาก เช่น มวลอิเล็กตรอน(10^{-31}), ประจุไฟฟ้าของอิเล็กตรอน (10^{-19}), สนามไฟฟ้า (10^{-0}), สนามแม่เหล็ก (10^{-6}), อุณหภูมิ (10,000) และ ความหนาแน่นของไหล (10^{11}) เป็นต้น ขนาดของค่าต่างๆ ที่มีแตกต่างกันมากนั้นก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนของการคำนวณอันเนื่องมาจากการปัดทศนิยมของการคำนวณของโปรแกรม และจากการที่เราอาศัยการสุ่มค่า i j k จากฟังก์ชันการสุ่มของโปรแกรมภาษาซี++ จึงทำให้ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากวิธีการประมาณของฟังก์ชันดังกล่าวนั้นเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้การจำลองต้องจำกัดค่าของอนุภาคจำลอง N ในระบบ นอกจากนี้แล้วลักษณะการทำงานของโปรแกรมที่มีทั้งการวนการทำงานและมีการส่งค่ากันระหว่าง subroutine ต่างๆ ก็เป็นเหตุให้เกิดความคลาดเคลื่อนในทางโปรแกรมขึ้น นอกจากนี้แล้วความสามารถของคอมพิวเตอร์ที่ใช้ซึ่งเป็นคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลก็มีความสามารถในการประมวลผลได้ในระดับหนึ่งซึ่งทำให้การจำลองต้องจำกัดค่าพารามิเตอร์อยู่ภายในขอบเขตหนึ่งด้วย

บทที่ 8
สรุปผล

8.1 สรุปผล

การจำลองระบบอนุภาคพลาสมา 2 มิติในกรณีต่างๆ เพื่อศึกษาปรากฏการณ์ทางพลาสมาที่เกิดขึ้น พบว่า กรณีที่ระบบไม่ถูกรบกวนจากสนามภายนอกและไม่มีความร้อน พฤติกรรมของอนุภาคพลาสมาเกิดจากองค์ประกอบภายในระบบพลาสมาเป็นสำคัญ สนามไฟฟ้าในระบบจะสั่นตามแนวแกนใน 2 มิติทำให้เกิดการหมุนของสนามไฟฟ้าขึ้น เมื่อระบบต้องถูกรบกวนจากสนามไฟฟ้าภายนอกความถี่เดียวกับการสั่นพลาสมา อนุภาคซึ่งรับรู้สนามไฟฟ้าจะเคลื่อนที่ตามสนามไฟฟ้าที่เข้ามารบกวนส่งผลให้อนุภาคอื่นๆได้รับผลกระทบจากการเข้ามารบกวนของสนามไฟฟ้านี้ได้ อิทธิพลของสนามแม่เหล็กซึ่งตั้งฉากกับระนาบการเคลื่อนที่ของอนุภาคพลาสมาจะทำให้อนุภาคเคลื่อนที่แบบหมุนภายใต้ความถี่เดียวกับสนามแม่เหล็กนั้น สำหรับกรณีที่ระบบมีความร้อน อนุภาคจะสั่นในทิศทางต่างๆด้วยความถี่สูงขึ้นซึ่งจะทำให้อนุภาคหมุนด้วยความถี่สูงขึ้นและมีความเร็วมากขึ้น สำหรับระบบ 3 มิติ อนุภาคในระบบแสดงออกในทำนองเดียวกันกับกรณี 2 มิติ อย่างไรก็ตาม สนามไฟฟ้าสั่นตามแนวแกนใน 3 มิติไม่มีลักษณะเป็นวงปิด ดังนั้นจึงไม่เหนี่ยวนำให้เกิดสนามแม่เหล็กภายในขึ้น

เนื่องจากการจำลองโดยอาศัยแบบจำลองอนุภาคสร้างความคลาดเคลื่อนสูงจึงได้เปลี่ยนแบบจำลองมาเป็นของไหล ซึ่งก็พบว่า ผลที่ได้จากการจำลองมีความสอดคล้องกันภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน แต่ในทางปฏิบัติแล้วการจำลองด้วยแบบจำลองของไหลมีประสิทธิภาพและความสามารถในการจำลองมากกว่า ทั้งในส่วนของเวลาที่ใช้ในการคำนวณผลที่น้อยกว่าและผลของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการจำลองก็มีค่าต่ำกว่าการจำลองจากแบบจำลองแรกอยู่มากทำให้การจำลองมีความน่าเชื่อถือกว่าและทำให้สามารถจำลองในกรณีที่ซับซ้อนขึ้นได้

8.2 ความคลาดเคลื่อน

การจำลองระบบพลาสมาด้วยแบบจำลองอนุภาคมีความคลาดเคลื่อนสูงถึง 50.26% ซึ่งเป็นความคลาดเคลื่อนจากการติดตามการเคลื่อนที่ของอนุภาคแต่ละตัวทำให้ความคลาดเคลื่อนรวมของระบบที่เกิดขึ้นมีค่าสูงจึงเป็นสาเหตุหลักของการจำลองพลาสมาซึ่งต้องเกี่ยวข้องกับค่าที่มีขนาดแตกต่างกันมาก จึงทำให้เกิดความผิดพลาดจากการปัดเศษทศนิยมได้มากด้วย แต่เมื่อนำแบบจำลองของไหลมาใช้แทนแบบจำลองอนุภาคนั้น พบว่า ความคลาดเคลื่อนลดลงเหลือ 6.11% โดยสาเหตุของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนั้นส่วนหนึ่งเป็นผลมาจากการไม่พิจารณาความร้อนที่เกิดขึ้นจาก

การสั่นของของไหลทั้งนี้เนื่องจากได้ประมาณไว้ว่าความร้อนที่เกิดขึ้นนั้นมีปริมาณไม่สูงมากซึ่งทำให้มีอิทธิพลต่อระบบน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับอิทธิพลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจึงได้ยอมรับความคลาดเคลื่อนที่จะเกิดขึ้นสำหรับสาเหตุนี้ไว้แล้วในระดับหนึ่ง ทั้งนี้เมื่อระบบอยู่ในความร้อน T = 10,000 K ความคลาดเคลื่อนของการจำลองที่เกิดขึ้นมีค่า 4.20% ซึ่งลดลงจากกรณีแรกทั้งนี้เป็นเพราะภายใต้ความร้อนค่านี้ทำให้อิทธิพลของความร้อนที่เกิดจากการสั่นของของไหลที่มีต่อระบบไม่มีนัยสำคัญ โดยทั้งนี้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกที่เข้ามารบกวนระบบจะต้องไม่สูงมาก (กรณี 2 มิติ $|\vec{E}| < 100$ V/m และ $|\vec{B}| < 0.01$ T) เพราะจะทำให้การคำนวณนำไปสู่การลู่ออกอย่างรวดเร็ว นอกจากนี้แล้วยังพบว่าการเพิ่มความแม่นยำของการจำลองสามารถทำได้โดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับการกำหนด Δx และ Δt ซึ่งได้แก่ จำนวนกริดต่อด้านและจำนวนข้อมูลต่อ 1 รอบการสั่นพลาสมา ตามลำดับ ให้มีค่าน้อยๆ ร่วมกับการกำหนดจำนวนอนุภาคจำลองให้มีค่ามากๆ

สำหรับความคลาดเคลื่อนของการจำลองกับทางทฤษฎีในกรณี 1มิติซึ่งระบบอยู่ในสมดุลความร้อนนั้น โดยทางทฤษฎีได้วิเคราะห์ไว้ว่าความหนาแน่นของไหลสามารถอธิบายด้วย Boltzmann's relation ได้ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับผลจากการจำลอง พบว่า มีความคลาดเคลื่อนไปจากทางทฤษฎี 3.26% สำหรับกรณีการเปลี่ยนแปลงต่อตำแหน่ง และ 3.63% สำหรับกรณีการเปลี่ยนแปลงต่อเวลา สำหรับความถี่การสั่นพลาสมาที่เกิดขึ้นจากการจำลองมีความแตกต่างเป็นจากทฤษฎีอยู่สูงทั้งนี้เป็นผลมาจากความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการจำลอง

ความคลาดเคลื่อนของการจำลองที่เกิดขึ้นนี้มีสาเหตุหลักๆ 3 ประการ ได้แก่ แบบจำลองที่ใช้ในการจำลองพลาสมา โดยในช่วงแรกของงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้แบบจำลองอนุภาคในการจำลองซึ่งพบว่ามีความคลาดเคลื่อนสูงและมีข้อจำกัดอยู่มากจึงได้เปลี่ยนแปลงแบบจำลองมาเป็นแบบจำลองของไหลซึ่งก็ทำให้ผลการจำลองที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น แต่อย่างไรก็ตามแบบจำลองของไหลก็ยังคงมีข้อจำกัดและขอบเขตสำหรับการจำลองอยู่ในระดับหนึ่งซึ่งมีผลต่อความคลาดเคลื่อนของการจำลองโดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีที่ระบบพลาสมามีความซับซ้อนมากขึ้น สาเหตุต่อมา คือ วิธีการประมาณเชิงตัวเลขซึ่งประกอบไปด้วยวิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยผลต่างสืบเนื่อง วิธีรุงเง-คุตตา วิธีฟิคซ์พอยท์ และการสุ่ม และสาเหตุสุดท้าย คือ ข้อจำกัดของโปรแกรมภาษาซี++ ที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมและความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการจำลอง

8.3 ข้อเสนอแนะ

วิธีการที่ใช้ในการประมาณเชิงตัวเลขมีบทบาทสำคัญต่อการจำลองพลาสมาเป็นอย่างมาก เพื่อให้การจำลองมีความใกล้เคียงความเป็นจริงมากขึ้น ดังนั้นในการพัฒนาการจำลองจึงอาจจะเลือกใช้วิธีการประมาณอื่นเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องของการจำลองนี้ที่ได้เสนอไว้ในบทที่ 6 ซึ่งวิธีการประมาณเชิงตัวเลขวิธีการหนึ่งที่น่าจะถูกนำมาใช้ในการจำลองเพื่อการพัฒนาการจำลองพลาสมาได้ คือ วิธีการประมาณค่าระหว่างช่วงโดยฟูเรียร์ (Fourier Interpolation) ซึ่งพิจารณาลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่เป็นฟังก์ชั่นคาบซึ่งสอดคล้องกันกับการเปลี่ยนแปลงในระบบพลาสมาที่เกิดขึ้นก็น่าจะนำไปสู่การขยายขอบเขตของการจำลองให้สามารถจำลองภายใต้ค่าพารามิเตอร์ที่มีค่าหลากกลายได้มากขึ้นซึ่งจะนำไปสู่การจำลองปัญหาที่มีความใกล้เคียงกับความจริงมากขึ้น และภายใต้วิธีการประมาณดังกล่าวอาจจะช่วยทำให้การคำนวณศักย์จากวิธีฟิคซ์พอยท์ (Fixed Point) มีประสิทธิภาพมากขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบต่อเนื่องนี้ สำหรับปัญหาในการคำนวณศักย์ไฟฟ้าที่เป็นสาเหตุซึ่งทำให้เกิดการจำกัดขอบเขตของการจำลองมากนั้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งผลต่อการกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ค่อนข้างจำกัดเพื่อให้การคำนวณศักย์ภายใต้ข้อกำหนด err_criteria = 1.0×10^{-5} และ IterMax = 1,000 สามารถทำได้ ดังนั้นถ้าสามารถพัฒนาวิธีการคำนวณศักย์ไฟฟ้าให้มีความแม่นยำมากขึ้นก็มีโอกาสที่จะสามารถศึกษาปรากฏการณ์พลาสมาที่หลากหลายมากขึ้นและใกล้เคียงกับในทางปฏิบัติมากขึ้นได้ และอาจจะพิจารณากรณีเงื่อนไขขอบที่ศักย์ไฟฟ้าคงที่ ($\bar{\nabla}\phi = 0$) ซึ่งเป็นเงื่อนไขหนึ่งที่มีการนำไปพิจารณาในทางทฤษฎี นอกจากนี้ การนำผลกระทบของอุณหภูมิมาพิจารณาด้วยจะช่วยให้การลู่ออกของผลการจำลองดีขึ้น และขณะเดียวกันจะช่วยให้สามารถจำลองการเพิ่มอุณหภูมิของพลาสมาซึ่งเป็นผลจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ด้วย

เนื่องจากการจำลองนี้มีข้อจำกัดของการกำหนดค่าพารามิเตอร์อยู่หลายตัว จึงทำให้สามารถศึกษากรณีที่ค่อนข้างจำกัดซึ่งไม่สามารถศึกษาถึงผลที่เกิดขึ้นในกรณี เช่น ความถี่ของสนามภายนอกมีค่าสูงๆ หรือต่ำๆ ที่เข้าใกล้ค่า 0 ซึ่งเป็นกรณีที่สนามภายนอกนั้นคงที่ได้ โดยกรณีที่ได้ทำการจำลองไปนั้นส่วนใหญ่เป็นกรณีที่มีการวิเคราะห์ไว้ในทางทฤษฎีซึ่งยังไม่มีความสลับซับซ้อนของระบบมากนัก แต่ในทางปฏิบัตินั้นธรรมชาติของพลาสมาที่เกิดขึ้นจริงมีความซับซ้อนกว่าการจำลองมาก ในการจำลองนี้จึงอาจจะไม่สามารถอธิบายผลที่เกิดขึ้นในทางปฏิบัติได้อย่างดีพอ ซึ่งในที่นี้การพัฒนาการจำลองให้สามารถอธิบายผลที่เกิดขึ้นจากการทดลองได้นั้นคงต้องมีการพัฒนาการจำลองกันต่อไป โดยคงต้องใช้แบบจำลองที่มีความสามารถมากขึ้นซึ่งคงจะต้องมีการพิจารณาในเรื่องของการแพร่ (diffusion) ของของไหลเมื่อศึกษาของไหลพลาสมาภายใต้สมดุลความร้อนค่าหนึ่ง และรวมไปถึงการพิจารณาจลนศาสตร์ของของไหล (Kinetic Theory) ในระบบเพื่อทำให้การประมาณมีความใกล้เคียงกับความเป็นจริงที่เกิดขึ้น

รายการอ้างอิง

1. Chen, F.F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2nd ed. New York: Plenum Press, 1974.
2. Ichimaru, S. *Basic Principle of Plasma A Static Approach*. Tokyo: Addition-Wesley Publish company, 1984.
3. Birdsall, C.K., and Langdon A.B. *Plasma Physics via Computer Simulation*. 1st ed. Singapore: McGraw-Hill, 1985.
4. Press, W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., and Vetterling W.T. *Numerical Recipe*. New York: Cambridge University Press, 1989.
5. Dendy, R. *Plasma Dynamics*. 1st ed. New York: Oxford University Press, 1999.
6. *Introduction to Numerical Analysis*. United State of America: McGraw-Hill book company, 1956.
7. ชวิศนัช อิงชาติเจริญ. *การจำลองแบบเชิงตัวเลขสำหรับการเคลื่อนไหวของพลาสมามิติเดียวในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชานิวเคลียร์เทคโนโลยีคณะวิศวกรรมศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2543

ภาคผนวก

รหัสสำหรับการจำลองเชิงตัวเลขระบบพลาสมา

```
/***************************************************************************/
/************************    Plasma Simulation     ************************/
/*********************** With Continuous Boundary ************************/
/***************************************************************************/
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
                                          //Constant Values
#define e               -1.6e-19          //e- Charge
#define me               9.16e-31         //e- Mass
#define mi               1.66e-27         //protron Mass
#define e0               8.854e-12        //e- Permeability
#define K                1.38e-23         //Plank Constant
#define c                3.0e08           //Ligth Velocity
                                          //Parameter Values
#define N                900000           //Max. No. of Sim. Particles
#define Ng               50               //Max. No. of Grids
#define Mvar             7                //Max. No. of Print
#define err_criteria     1.0e-5           //Acceptable Error
#define IterMax          1000             //Max. of Iterated Time
#define inp              0                //Source of Parameters (0=input
                                            from code, 1=input from user)
void   srand(unsigned int seed);
int    t0,par,ext,ntime,nnu,np,ntyp,nele,mo,nr[3],nvar,npa,dime,ngrid;
double npar,Nf,Te;
float  ln,rat,AE,AB,mul,di,ran;

int    tt,p,a,tplot;
double wp,Tp,db,n0,PI,NI;
int    ii[Mvar],jj[Mvar],kk[Mvar],ti[Mvar],pl[Mvar];
double dx,dt,t,q[2],m[2],k_energy[2],p_energy[2];
double no[2][Ng][Ng][Ng],n[2][Ng][Ng][Ng];
double phi[Ng][Ng][Ng],Ex[Ng][Ng][Ng],Ey[Ng][Ng][Ng],Ez[Ng][Ng][Ng];
double E0,B0,Bz[Ng][Ng][Ng],Bx[Ng][Ng][Ng],By[Ng][Ng][Ng],Bz0[Ng][Ng][Ng];
double dBx[Ng][Ng][Ng][5],dBy[Ng][Ng][Ng][5],dBz[Ng][Ng][Ng][5];
double Bxo[Ng][Ng][Ng],Byo[Ng][Ng][Ng],Bzo[Ng][Ng][Ng];

double ux[2][Ng][Ng][Ng],uy[2][Ng][Ng][Ng],uz[2][Ng][Ng][Ng];
double uxo[2][Ng][Ng][Ng],uyo[2][Ng][Ng][Ng],uzo[2][Ng][Ng][Ng];
double
hx[2][Ng][Ng][Ng][5],hy[2][Ng][Ng][Ng][5],hz[2][Ng][Ng][Ng][5],g[2][Ng][Ng][Ng][5];

double vx[2][N],vy[2][N],vz[2][N],vxo[2][N],vyo[2][N],vzo[2][N];
double dvx[2][N][5],dvy[2][N][5],dvz[2][N][5];
double x[2][N],y[2][N],z[2][N],xo[2][N],yo[2][N],zo[2][N];
double delx[2][N][5],dely[2][N][5],delz[2][N][5];
/***************************************************************************/
/**********************   Random Function ******************************/
double frand(){
double xrand;
 do {
  xrand=1.0*rand()/RAND_MAX;
 }while((xrand>=1.0)||(xrand<0.0));
return xrand;
}
/***************************************************************************/
/***************************************************************************/
int  rd(int MaxRan){
int  r;
 r=rand()%MaxRan;
return r;
}
/***************************************************************************/
/********************* Transmission Function ****************************/
double adpar(double xx){
int ml;
 if(xx>=ln||xx<0.0){
```

```
  if(xx>=ln) {
   ml=xx/ln;
   xx=(xx-ml*ln);
  }
  else{
   ml=xx/ln;
   xx=ln+(xx-ml*ln);
  }
 }
return xx;
}
/***************************************************************************/
/***************** Input Parameters from the User*************************/
void INPUT(){
 printf("Model of Plasma Simulation\n");
 printf("1.Particle Model\n");
 printf("2.Fluid Model\n");
 printf("Enter The Selection:");
 scanf("%d",&mo);
 if(mo==1){
  printf("Enter No. of Dimensions of Particle Plasma Simulation is 1 2 or
         3:\n");
  scanf("%d",&dime);
 }else{
  printf("Enter No. of Dimensions of Fluid Plasma Simulation is 2 or 3:\n");
  scanf("%d",&dime);
 }
 printf("Type of Simulated Plasma\n");
 printf("1.Electron\n");
 printf("2.Ion\n");
 printf("3.Eletron-Ion\n");
 printf("Enter The Selection:");
 scanf("%d",&par);
 if(par!=1){
  printf("\nNumper of Protrons:");
  scanf("%d",&np);
  printf("\nNumper of Neutrons:");
  scanf("%d",&nnu);
  printf("\nNumper of Electrons:");
  scanf("%d",&nele);
 }
 printf("\nEnter The Parameters");
 printf("\nLength of Side:");
 scanf("%f",&ln);
 printf("\nNumber of Grids:");
 scanf("%f",&ngrid);
 printf("\nNumber of Simulated Particles in 1D Cell:");
 scanf("%f",&npa);
 printf("\nRatio of Real:1 Simulated Particle:");
 scanf("%f",&rat);
 printf("\nFraction of Added Random Particles:");
 scanf("%f",&ran);
 printf("\nNumber of Time for Simulation:");
 scanf("%d",&ntime);
 printf("\nDivision of Plasma Pariod:");
 scanf("%f",&di);
 printf("\nTime for Plot:");
 scanf("%d",&tplot);
 printf("\nAmount for Plot:");
 scanf("%d",&nvar);
 printf("\nEquilibrium Temperature of Electron:");
 scanf("%d",&Te);
 printf("\nThe Situation of Simulation");
 printf("\n1.Without The External Field");
 printf("\n2.Within The External Field");
 printf("\nEnter The Selection:");
 scanf("%d",&ext);
 if(ext==2){
  printf("\nEnter The External Field");
  printf("\nAmplitude of E:");
  scanf("%f",&AE);
  printf("\nAmplitude of B:");
  scanf("%f",&AB);
  printf("\nMultiple of Plasma Frequency:");
  scanf("%f",&mul);
 }
}
```

```
/*************************************************************************/
/***************************  Cal. Electric Field ************************/
void E_FIELD(){
int te,i,j,k,in,jn,kn,im,jm,km,nn;
double err,phi0[Ng][Ng][Ng];
 if(tt>t0){
  if(ext!=1){
   E0=AE*cos(mul*wp*t);
   B0=AB*cos(mul*wp*t);
   for(i=0;i<nr[0];i++)
    for(j=0;j<nr[1];j++){
     Bz[i][j][0]=Bz0[i][j][0]+B0;
     Bzo[i][j][0]=Bz[i][j][0];
    }
  }
  t0=tt;
 }
                                                  //Cal. The Potential
 for(k=0;k<ngrid;k++)
  for(j=0;j<ngrid;j++)
   for(i=0;i<ngrid;i++) phi0[i][j][k]=0.0;
 te=0;
 do{
  te=te+1;
  for(k=0;k<nr[2];k++){
   kn=k-1;
   km=k+1;
   if(kn==-1||km==ngrid)
    if(kn==-1)kn=ngrid-1;
     else km=0;
   for(j=0;j<nr[1];j++){
    jn=j-1;
    jm=j+1;
    if(jn==-1||jm==ngrid)
     if(jn==-1)jn=ngrid-1;
      else jm=0;
    for(i=0;i<nr[0];i++){
     in=i-1;
     im=i+1;
     if(in==-1||im==ngrid)
      if(in==-1)in=ngrid-1;
       else im=0;
     phi[i][j][k]=((n[0][i][j][k]-n[1][i][j][k])*e/e0
                    +(phi0[in][j][k]+phi0[im][j][k])/(dx*dx)
                    +(phi0[i][jn][k]+phi0[i][jm][k])/(dx*dx)
                    +(phi0[i][j][kn]+phi0[i][j][km])/(dx*dx))
                     /(2.0/(dx*dx)+2.0/(dx*dx)+2.0/(dx*dx));
    }
   }
  }
  err=0.0;
  for(k=0;k<nr[2];k++)
   for(j=0;j<nr[1];j++)
    for(i=0;i<nr[0];i++){
     if(phi[i][j][k]!=0.0||phi0[i][j][k]!=0.0){
      if(phi[i][j][k]!=0.0)err=err+fabs((phi[i][j][k]-
                                phi0[i][j][k])/phi[i][j][k]);
       else err=err+fabs((phi[i][j][k]-phi0[i][j][k])/phi0[i][j][k]);
     }
     phi0[i][j][k]=phi[i][j][k];
    }
 }while(err>=err_criteria&&te<IterMax);
 printf("tt=%d te=%d err=%e\n",tt,te,err);
                                                  //Cal. Electric Field
 for(k=0;k<nr[2];k++){
  kn=k-1;
  km=k+1;
  if(kn==-1||km==ngrid)
   if(kn==-1)kn=ngrid-1;
    else km=0;
  for(j=0;j<nr[1];j++){
   jn=j-1;
   jm=j+1;
   if(jn==-1||jm==ngrid)
    if(jn==-1)jn=ngrid-1;
     else jm=0;
   for(i=0;i<nr[0];i++){
```

```
    in=i-1;
    im=i+1;
    if(in==-1||im==ngrid)
     if(in==-1)in=ngrid-1;
      else im=0;
    if(i==0&&j==0&&k==0) Ex[i][j][k]=E0+(phi[in][j][k]-
                                  phi[im][j][k])/(2.0*dx);
     else Ex[i][j][k]=(phi[in][j][k]-phi[im][j][k])/(2.0*dx);
    Ey[i][j][k]=(phi[i][jn][k]-phi[i][jm][k])/(2.0*dx);
    Ez[i][j][k]=(phi[i][j][kn]-phi[i][j][km])/(2.0*dx);
   }
  }
 }
}
/****************************************************************************/
/***************************  Cal. Density ********************************/
void ASSCHARGE(){
int i,j,k,nn;
 for(p=0;p<ntyp;p++)
  for(i=0;i<nr[0];i++)
   for(j=0;j<nr[1];j++)
    for(k=0;k<nr[2];k++) n[p][i][j][k]=0.0;
 for(p=0;p<ntyp;p++)
  for(nn=0;nn<int(npar);nn++){
   i=int(x[p][nn]/dx);
   j=int(y[p][nn]/dx);
   k=int(z[p][nn]/dx);
   n[p][i][j][k]=n[p][i][j][k]+1.0;
  }
 for(i=0;i<nr[0];i++)
  for(j=0;j<nr[1];j++)
   for(k=0;k<nr[2];k++){
    n[0][i][j][k]=n[0][i][j][k]*rat/pow(dx,float(dime));
    if(ntyp>1) n[1][i][j][k]=n[1][i][j][k]*rat/pow(dx,float(dime));
     else n[1][i][j][k]=n0;
    if((a==4)||((a==0)&&(tt==0))){
      for(p=0;p<2;p++) no[p][i][j][k]=n[p][i][j][k];
    }
   }
 E_FIELD();
}
/****************************************************************************/
/************************** Random Density ********************************/
void RANDOM_DEN(){
int i,j,k;
int nd1,nd2,nd3;
int nx,ny,nz,nc,x1,x2,;
double dxx,nmm,na,nn,nb,x3,f;
 Nf=ran*npar;
 switch (mo){
  case 1:
   f=ran*npa;
   nd1=npa-int(f)+1;
   if (dime>1) nd2=nd1;
    else nd2=1;
   if (dime>2) nd3=nd1;
    else nd3=1;
                                                    //Arrange Position
   if(ran!=1.0){
    dxx=dx/nd1;
    for(p=0;p<ntyp;p++)
     for(k=0;k<nr[2];k++)
      for(j=0;j<nr[1];j++)
       for(i=0;i<nr[0];i++){
        na=k*nr[2]*nr[2]+j*nr[1]+i;
        na=na*pow(float(npa),float(dime));
        for(nz=0;nz<nd3;nz++)
         for(ny=0;ny<nd2;ny++)
          for(nx=0;nx<nd1;nx++){
           nb=(nz*nd3*nd3)+(ny*nd2)+nx;
           nn=na+nb;
           if(p==0){
            x[p][int(nn)]=i*dx+nx*dxx;
            y[p][int(nn)]=j*dx+ny*dxx;
            z[p][int(nn)]=k*dx+nz*dxx;
           }else{
            x[p][int(nn)]=i*dx+(nx+0.5)*dxx;
```

```
            y[p][int(nn)]=0.0;
            z[p][int(nn)]=0.0;
            if (dime>1) y[p][int(nn)]=j*dx+(ny+0.5)*dxx;
            if (dime>2) z[p][int(nn)]=k*dx+(nz+0.5)*dxx;
           }
           xo[p][int(nn)]=x[p][int(nn)];
           yo[p][int(nn)]=y[p][int(nn)];
           zo[p][int(nn)]=z[p][int(nn)];
          }
      }
  }
                                                        //Random Position
  if(ran!=0.0){
   if(ran==1.0) dxx=dx/npa;
   for(p=0;p<ntyp;p++)
    for(nn=int(npar-Nf);nn<int(npar);nn++){
     x1=rd(nr[0]);
     if(ran==1.0) x2=rd(npa);
      else x2=rd(nd1);
     x3=1.0*dxx*frand();
     x[p][int(nn)]=x1*dx+x2*dxx+x3;
     x[p][int(nn)]=adpar(x[p][int(nn)]);
     xo[p][int(nn)]=x[p][int(nn)];
     if (dime>1){
      x1=rd(nr[1]);
      if(ran==1.0) x2=rd(npa);
       else x2=rd(nd2);
      x3=1.0*dxx*frand();
      y[p][int(nn)]=x1*dx+x2*dxx+x3;
      y[p][int(nn)]=adpar(y[p][int(nn)]);
      yo[p][int(nn)]=y[p][int(nn)];
      if (dime>2){
       x1=rd(nr[2]);
       if(ran==1.0) x2=rd(npa);
        else x2=rd(nd3);
       x3=1.0*dxx*frand();
       z[p][int(nn)]=x1*dx+x2*dxx+x3;
       z[p][int(nn)]=adpar(z[p][int(nn)]);
       zo[p][int(nn)]=z[p][int(nn)];
      }
     }
    }
  }
  ASSCHARGE();
 break;

 case 2:
  nmm=(npar-Nf)/pow(float(ngrid),float(dime));
  for(p=0;p<ntyp;p++){
   for(nn=0;nn<int(Nf);nn++){
    i=rd(nr[0]);
    j=rd(nr[1]);
    k=rd(nr[2]);
    n[p][i][j][k]=n[p][i][j][k]+1.0;
   }
   for(k=0;k<nr[2];k++)
    for(j=0;j<nr[1];j++)
     for(i=0;i<nr[0];i++){
      n[p][i][j][k]=(n[p][i][j][k]+nmm)*rat/pow(dx,float(dime));
      no[p][i][j][k]=n[p][i][j][k];
     }
  }
  if(ntyp<2)
   for(k=0;k<nr[2];k++)
    for(j=0;j<nr[1];j++)
     for(i=0;i<nr[0];i++){
      n[1][i][j][k]=n0;
      no[1][i][j][k]=n[1][i][j][k];
     }
  E_FIELD();
 break;
 }
}
/****************************************************************************/


/************************* Set the Values ********************************/
```

```
void SETVALUE(){
int i,j,k,nn,nm;
double db,nd;
 PI=4.0*atan(1.0);
                                          //Set parameters
 if(inp==0){
  mo   =1;                            //Model(1=Par. Mod., 2=Fluid Mod.)
  dime =3;                            //Dimension
  par  =1;                            //Type of Fluid (1=ele, 2=ion, 3=e-i)
  np   =1;                            //No. Protrons of ion
  nnu  =0;                            //No. Neutrons of ion
  nele =0;                            //No. Electrons of ion
  ln   =1.0;                          //Length of side
  ngrid=15;                           //No. of Grids
  npa  =5;                            //No. of Particles in 1D Cell
  rat  =1e4;                          //Ratio of 1 Real:1 Sim
  ran  =1.0;                          //Fraction to Random of Particles
  ntime=1000;                         //No. of Time Step
  di   =100;                          //Divisor of Period for dt
  tplot=10;                           //Time Step for Print
  nvar =1;                            //Amount variants for plot
  ext  =2;                            //External Field(1=without, 2=within)
  switch (ext){
   case 1:
    E0  =0.0;
    B0  =0.0;
    mul =0.0;
   break;
  case 2:
   AE  =5.0;                           //Amplitude of E wave
   AB  =1.0e-6;                        //Amplitude of B wave
   mul =1.0;
  break;                               //Multipier of Plasma Fre.
 }
 Te   =10000.0;
}else INPUT();

dx=1.0*ln/ngrid;
npar=pow(npa*ngrid,float(dime));
if(npar>N){
 printf("npar = %.0f Over Number of Sim. Particles\n",npar);
 system("pause");
}
                                          //Set the Dimension
for(i=0;i<3;i++) nr[i]=ngrid;
if(dime<3){
 nr[2]=1;
 if(dime<2) nr[1]=1;
}
                                      //Set the Model of the Plasma
ntyp=1;
if(par!=2){
 m[0]=me;            m[1]=mi*(np+nnu)+me*nele;
 q[0]=e;             q[1]=e*(nele-np);
 if(par==1){
  np=1;   nnu=0;  nele=0;
 }else ntyp=2;
}else{
 m[1]=me;            m[0]=mi*(np+nnu)+me*nele;
 q[1]=e;             q[0]=e*(nele-np);
}
                                      //Set the Initial Values
t=0.0;  tt=0;  t0=-1;
for(i=0;i<ngrid;i++)
 for(j=0;j<ngrid;j++)
  for(k=0;k<ngrid;k++){
   Ex[i][j][k]=0.0;
   Ey[i][j][k]=0.0;
   Ez[i][j][k]=0.0;
   Bxo[i][j][k]=0.0;
   Byo[i][j][k]=0.0;
   Bzo[i][j][k]=0.0;
   Bz0[i][j][k]=0.0;
   dBx[i][j][k][0]=0.0;
   dBy[i][j][k][0]=0.0;
   dBz[i][j][k][0]=0.0;
   for(p=0;p<2;p++) n[p][i][j][k]=0.0;
```

```
  }
  switch (mo){
   case 1:
    for(p=0;p<ntyp;p++)
     for(nn=0;nn<int(npar);nn++){
      vxo[p][nn]=0.0;
      vyo[p][nn]=0.0;
      vzo[p][nn]=0.0;
      dvx[p][nn][0]=0.0;
      dvy[p][nn][0]=0.0;
      dvz[p][nn][0]=0.0;
     }
   break;
   case 2:
    for(p=0;p<2;p++)
     for(i=0;i<ngrid;i++)
      for(j=0;j<ngrid;j++)
       for(k=0;k<ngrid;k++){
        uxo[p][i][j][k]=0.0;
        uyo[p][i][j][k]=0.0;
        uzo[p][i][j][k]=0.0;
        for(a=0;a<5;a++){
         hx[p][i][j][k][a]=0.0;
         hy[p][i][j][k][a]=0.0;
         hz[p][i][j][k][a]=0.0;
         g[p][i][j][k][a]=0.0;
        }
       }
   break;
  }
                                             //Cal. Debye's
 NI=1.0*npar/pow(ngrid,dime);                //Average No. of Particles
 n0=1.0*NI*rat/pow(dx,dime);                  //Average Density
 db=sqrt(Te*e0*K/n0/e/e);                    //Debye Length
 nd=4.0/3.0*PI*n0*pow(db,3.0);                //Debye Sphere
 wp=sqrt(n0*e*e/(me*e0));                     //Plasma Frequency
 Tp=2.0*PI/wp;
 dt=1.0*Tp/di;                                 //Time of Time Step
                                               //Random for Print
 for(nn=0;nn<nvar;nn++){
  do{
   ii[nn]=rd(nr[0]);
   if(nr[1]>1) jj[nn]=rd(nr[1]);
    else jj[nn]=0;
   if(nr[2]>1) kk[nn]=rd(nr[2]);
    else kk[nn]=0;
   i=0;
   for(nm=0;nm<nn-1;nm++)
    if(ii[nn]==ii[nm]&&jj[nn]==jj[nm]&&kk[nn]==kk[nm]) i=1;
  }while(i==1);
  do{
   ti[nn]=rd(ntime);
   i=0;
   for(nm=0;nm<nn-1;nm++)
    if(ti[nn]==ti[nm]) i=1;
  }while(i==1);
  if(mo==1){
   do{
    pl[nn]=rd(int(npar));
    i=0;
    for(nm=0;nm<nn-1;nm++)
     if(pl[nn]==pl[nm]) i=1;
   }while(i==1);
  }
 }
 ii[0]=0;    jj[0]=0;    kk[0]=0;  //ti[0]=0;
 RANDOM_DEN();
}
/****************************************************************************/
/************************* Cal. The Magnetic Field *************************/
void B_FIELD(){
int i,j,k,in,im,jn,jm,kn,km;
 if(dime>2){
  for(k=0;k<nr[2];k++){
   kn=k-1;
   km=k+1;
   if(kn==-1||km==ngrid)
```

```
    if(kn==-1)kn=ngrid-1;
     else km=0;
   for(j=0;j<nr[1];j++){
    jn=j-1;
    jm=j+1;
    if(jn==-1||jm==ngrid)
     if(jn==-1)jn=ngrid-1;
      else jm=0;
    for(i=0;i<nr[0];i++){
     in=i-1;
     im=i+1;
     if(in==-1||im==ngrid)
      if(in==-1)in=ngrid-1;
       else im=0;
     dBx[i][j][k][a]=0.5*((Ez[i][jn][k]-Ez[i][jm][k])/dx-(Ey[i][j][kn]-
                           Ey[i][j][km])/dx)*dt;
     dBy[i][j][k][a]=0.5*((Ex[i][j][kn]-Ex[i][j][km])/dx-(Ez[in][j][k]-
                           Ez[im][j][k])/dx)*dt;
     dBz[i][j][k][a]=0.5*((Ey[in][j][k]-Ey[im][j][k])/dx-(Ex[i][jn][k]-
                           Ex[i][jm][k])/dx)*dt;
     if(a==4){
      Bx[i][j][k]=Bxo[i][j][k]+1.0/6.0*(dBx[i][j][k][1]+2.0*dBx[i][j][k][2]
                 +2.0*dBx[i][j][k][3]+dBx[i][j][k][4]);
      By[i][j][k]=Byo[i][j][k]+1.0/6.0*(dBy[i][j][k][1]+2.0*dBy[i][j][k][2]
                 +2.0*dBy[i][j][k][3]+dBy[i][j][k][4]);
      Bxo[i][j][k]=Bx[i][j][k];
      Byo[i][j][k]=By[i][j][k];
      if(k!=0||AB==0){
       Bz[i][j][k]=Bzo[i][j][k]+1.0/6.0*(dBz[i][j][k][1]+2.0*dBz[i][j][k][2]
                  +2.0*dBz[i][j][k][3]+dBz[i][j][k][4]);
       Bzo[i][j][k]=Bz[i][j][k];
      }else
       Bz0[i][j][k]=1.0/6.0*(dBz[i][j][k][1]+2.0*dBz[i][j][k][2]
                   +2.0*dBz[i][j][k][3]+dBz[i][j][k][4]);
     }
    }
   }
  }
 }
}
/****************************************************************************/
/*********************** Cal. The Velocity ******************************/
void VELOCITY(){
int i,j,k,in,im,jn,jm,kn,km,nn;
 switch (mo){
  case 1:
   for(a=1;a<5;a++){
    for(p=0;p<ntyp;p++)
     for(nn=0;nn<int(npar);nn++){
      if(a<4){
       i=int(x[p][nn]/dx);
       j=int(y[p][nn]/dx);
       k=int(z[p][nn]/dx);
       kn=k-1;
       km=k+1;
       if(kn==-1||km==ngrid)
       if(kn==-1)kn=ngrid-1;
        else km=0;
       jn=j-1;
       jm=j+1;
       if(jn==-1||jm==ngrid)
       if(jn==-1)jn=ngrid-1;
        else jm=0;
       in=i-1;
       im=i+1;
       if(in==-1||im==ngrid)
       if(in==-1)in=ngrid-1;
        else im=0;

        dvx[p][nn][a]=(q[p]/m[p]*(Ex[i][j][k]
                +(vyo[p][nn]+dvy[p][nn][a-1] /2.0)*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1]/2.0)
                -(vzo[p][nn] +dvz[p][nn][a-1]/2.0)*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1]/2.0))
                - K*Te*(n[p][im][j][k]-n[p][in][j][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;

      delx[p][nn][a]=(vxo[p][nn]+dvx[p][nn][a-1]/2.0)*dt;
      if(dime>1){
        dvy[p][nn][a]=(q[p]/m[p]*(Ey[i][j][k]
                +(vzo[p][nn]+dvz[p][nn][a-1]/2.0)*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1]/2.0)
                -(vxo[p][nn]+dvx[p][nn][a-1]/2.0)*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1]/2.0))
                - K*Te*(n[p][i][jm][k]-n[p][i][jn][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
```

```
      dely[p][nn][a]=(vyo[p][nn]+dvy[p][nn][a-1]/2.0)*dt;
      if(dime>2){
        dvz[p][nn][a]=(q[p]/m[p]*(Ez[i][j][k]
                      +(vxo[p][nn]+dvx[p][nn][a-1]/2.0)*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1]/2.0)
                      -(vyo[p][nn]+dvy[p][nn][a-1]/2.0)*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1]/2.0))
                      - K*Te*(n[p][i][j][km]-n[p][i][j][kn])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
       delz[p][nn][a]=(vzo[p][nn]+dvz[p][nn][a-1]/2.0)*dt;
      }
     }
     if(a<3){
      x[p][nn]=xo[p][nn]+delx[p][nn][a]/2.0;
      y[p][nn]=yo[p][nn]+dely[p][nn][a]/2.0;
      z[p][nn]=zo[p][nn]+delz[p][nn][a]/2.0;
     }else{
      x[p][nn]=xo[p][nn]+delx[p][nn][a];
      y[p][nn]=yo[p][nn]+dely[p][nn][a];
      z[p][nn]=zo[p][nn]+delz[p][nn][a];
     }
     x[p][nn]=adpar(x[p][nn]);
     y[p][nn]=adpar(y[p][nn]);
     z[p][nn]=adpar(z[p][nn]);
    }else{
      dvx[p][nn][a]=(q[p]/m[p]*(Ex[i][j][k]
                    +(vyo[p][nn]+dvy[p][nn][a-1])*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1])
                    -(vzo[p][nn]+dvz[p][nn][a-1])*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1]))
                    -K*Te*(n[p][im][j][k]-n[p][in][j][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
     delx[p][nn][a]=(vxo[p][nn]+dvx[p][nn][a-1])*dt;
     if(dime>1){
      dvy[p][nn][a]=(q[p]/m[p]*(Ey[i][j][k]
                    +(vzo[p][nn]+dvz[p][nn][a-1])*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1])
                    -(vxo[p][nn]+dvx[p][nn][a-1])*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1]))
                    -K*Te*(n[p][i][jm][k]-n[p][i][jn][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
      dely[p][nn][a]=(vyo[p][nn]+dvy[p][nn][a-1])*dt;
      if(dime>2){
        dvz[p][nn][a]=(q[p]/m[p]*(Ez[i][j][k]
                      +(vxo[p][nn]+dvx[p][nn][a-1])*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1])
                      -(vyo[p][nn]+dvy[p][nn][a-1])*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1]))
                      -K*Te*(n[p][i][j][km]-n[p][i][j][kn])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
        delz[p][nn][a]=(vzo[p][nn]+dvz[p][nn][a-1])*dt;
      }
     }
      vx[p][nn]=vxo[p][nn]+(dvx[p][nn][1]+2.0*dvx[p][nn][2]+2.0*dvx[p][nn][3]
                        + dvx[p][nn][4])/6.0;
      vy[p][nn]=vyo[p][nn]+(dvy[p][nn][1]+2.0*dvy[p][nn][2]+2.0*dvy[p][nn][3]
                        +dvy[p][nn][4])/6.0;
      vz[p][nn]=vzo[p][nn]+(dvz[p][nn][1]+2.0*dvz[p][nn][2]+2.0*dvz[p][nn][3]
                        +dvz[p][nn][4])/6.0;
     vxo[p][nn]=vx[p][nn];
     vyo[p][nn]=vy[p][nn];
     vzo[p][nn]=vz[p][nn];

     x[p][nn]=xo[p][nn]+(delx[p][nn][1]+2.0*delx[p][nn][2]+2.0*delx[p][nn][3]
                        +delx[p][nn][4])/6.0;
     y[p][nn]=yo[p][nn]+(dely[p][nn][1]+2.0*dely[p][nn][2]+2.0*dely[p][nn][3]
                        +dely[p][nn][4])/6.0;
     z[p][nn]=zo[p][nn]+(delz[p][nn][1]+2.0*delz[p][nn][2]+2.0*delz[p][nn][3]
                        +delz[p][nn][4])/6.0;
     x[p][nn]=adpar(x[p][nn]);
     y[p][nn]=adpar(y[p][nn]);
     z[p][nn]=adpar(z[p][nn]);
     xo[p][nn]=x[p][nn];
     yo[p][nn]=y[p][nn];
     zo[p][nn]=z[p][nn];
    }
   }
  B_FIELD();
  ASSCHARGE();
 }
break;

case 2:
 for(a=1;a<5;a++){
```

```
 for(p=0;p<ntyp;p++)
  for(k=0;k<nr[2];k++){
   kn=k-1;
   km=k+1;
   if(kn==-1||km==ngrid)
    if(kn==-1)kn=ngrid-1;
     else km=0;
   for(j=0;j<nr[1];j++){
    jn=j-1;
    jm=j+1;
    if(jn==-1||jm==ngrid)
     if(jn==-1)jn=ngrid-1;
      else jm=0;
    for(i=0;i<nr[0];i++){
     in=i-1;
     im=i+1;
     if(in==-1||im==ngrid)
      if(in==-1)in=ngrid-1;
       else im=0;
     if(a<4){

      if(dime>1){
         hx[p][i][j][k][a]=(q[p]/m[p]*(Ex[i][j][k]
            +(uyo[p][i][j][k]+hy[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1]/2.0)
            -uzo[p][i][j][k]+hz[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1]/2.0))
            -K*Te*(n[p][im][j][k]-n[p][in][j][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
        hy[p][i][j][k][a]=(q[p]/m[p]*(Ey[i][j][k]
           +(uzo[p][i][j][k]+hz[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1]/2.0)
           -(uxo[p][i][j][k]+hx[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1]/2.0))
           -K*Te*(n[p][i][jm][k]-n[p][i][jn][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
if(dime>2){
    hz[p][i][j][k][a]=(q[p]/m[p]*(Ez[i][j][k]
       +(uxo[p][i][j][k]+hx[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1]/2.0)
       -(uyo[p][i][j][k]+hy[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1]/2.0))
  }    -K*Te*(n[p][i][j][km]-n[p][i][j][kn])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
 }
 g[p][i][j][k][a]=-0.5*((uxo[p][i][j][k]+hx[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(n[p][im][j][k]
   -n[p][in][j][k])/dx+(uyo[p][i][j][k]+hy[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(n[p][i][jm][k]
   -n[p][i][jn][k])/dx+(uzo[p][i][j][k]+hz[p][i][j][k][a-1]/2.0)*(n[p][i][j][km]
   -n[p][i][j][kn])/dx+n[p][i][j][k]*(((uxo[p][im][j][k]+hx[p][im][j][k][a-1]/2.0)
   -(uxo[p][in][j][k]+hx[p][in][j][k][a-1]/2.0))/dx
   +((uyo[p][i][jm][k]+hy[p][i][jm][k][a-1]/2.0)
   -(uyo[p][i][jn][k]+hy[p][i][jn][k][a-1]/2.0))/dx
   +((uzo[p][i][j][km]+hz[p][i][j][km][a-1]/2.0)
  }else{

    hx[p][i][j][k][a]=(q[p]/m[p]*(Ex[i][j][k]
       +(uyo[p][i][j][k]+hy[p][i][j][k][a-1])*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1])
       -(uzo[p][i][j][k]+hz[p][i][j][k][a-1])*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1]))
       -K*Te*(n[p][im][j][k]-n[p][in][j][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
     if(dime>1){
       hy[p][i][j][k][a]=(q[p]/m[p]*(Ey[i][j][k]
          +(uzo[p][i][j][k]+hz[p][i][j][k][a-1])*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1])
          -(uxo[p][i][j][k]+hx[p][i][j][k][a-1])*(Bzo[i][j][k]+dBz[i][j][k][a-1]))
          -K*Te*(n[p][i][jm][k]-n[p][i][jn][k])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
       if(dime>2){
        hz[p][i][j][k][a]=(q[p]/m[p]*(Ez[i][j][k]
           +(uxo[p][i][j][k]+hx[p][i][j][k][a-1])*(Byo[i][j][k]+dBy[i][j][k][a-1])
           -(uyo[p][i][j][k]+hy[p][i][j][k][a-1])*(Bxo[i][j][k]+dBx[i][j][k][a-1]))
       }   -K*Te*(n[p][i][j][km]-n[p][i][j][kn])/(n[p][i][j][k]*m[p]*2.0*dx))*dt;
     }
      g[p][i][j][k][a]=-0.5*((uxo[p][i][j][k]+hx[p][i][j][k][a-1])*(n[p][im][j][k]
        -n[p][in][j][k])/dx+(uyo[p][i][j][k]+hy[p][i][j][k][a-1])*(n[p][i][jm][k]
        -n[p][i][jn][k])/dx+(uzo[p][i][j][k]+hz[p][i][j][k][a-1])*(n[p][i][j][km]
        -n[p][i][j][kn])/dx+n[p][i][j][k]*(((uxo[p][im][j][k]+hx[p][im][j][k][a-1])
        -(uxo[p][in][j][k]+hx[p][in][j][k][a-1]))/dx
       +((uyo[p][i][jm][k]+hy[p][i][jm][k][a-1])
       -(uyo[p][i][jn][k]+hy[p][i][jn][k][a-1]))/dx
       +((uzo[p][i][j][km]+hz[p][i][j][km][a-1])
    }  -(uzo[p][i][j][kn]+hz[p][i][j][kn][a-1]))/dx))*dt;
```

```
      }
     }
    }
   if(a<4){
    for(p=0;p<ntyp;p++)
     for(k=0;k<nr[2];k++)
      for(j=0;j<nr[1];j++)
       for(i=0;i<nr[0];i++)
        if(a<3) n[p][i][j][k]=no[p][i][j][k]+g[p][i][j][k][a]/2.0;
         else n[p][i][j][k]=no[p][i][j][k]+g[p][i][j][k][a];
   }
   if(a==4){
    for(p=0;p<ntyp;p++)
     for(k=0;k<nr[2];k++)
      for(j=0;j<nr[1];j++)
       for(i=0;i<nr[0];i++){
         ux[p][i][j][k]=uxo[p][i][j][k]+1.0/6.0*(hx[p][i][j][k][1]+2.0*hx[p][i][j][k][2]
                        +2.0*hx[p][i][j][k][3]+hx[p][i][j][k][4]);
         uy[p][i][j][k]=uyo[p][i][j][k]+1.0/6.0*(hy[p][i][j][k][1]+2.0*hy[p][i][j][k][2]
                        +2.0*hy[p][i][j][k][3]+hy[p][i][j][k][4]);
         uz[p][i][j][k]=uzo[p][i][j][k]+1.0/6.0*(hz[p][i][j][k][1]+2.0*hz[p][i][j][k][2]
                        +2.0*hz[p][i][j][k][3]+hz[p][i][j][k][4]);
        uxo[p][i][j][k]=ux[p][i][j][k];
        uyo[p][i][j][k]=uy[p][i][j][k];
        uzo[p][i][j][k]=uz[p][i][j][k];
         n[p][i][j][k]=no[p][i][j][k]+1.0/6.0*(g[p][i][j][k][1]+2.0*g[p][i][j][k][2]
                      +2.0*g[p][i][j][k][3]+g[p][i][j][k][4]);
        no[p][i][j][k]=n[p][i][j][k];
      }
     }
    B_FIELD();
    E_FIELD();
   }
  break;
 }
}
/**************************************************************************/
/************************** Cal. The Energy ******************************/
void ENERGY(){
int i,j,k,nn;
double u;
 for(p=0;p<2;p++){
  p_energy[p]=0.0;
  k_energy[p]=0.0;
  for(k=0;k<nr[2];k++)
   for(j=0;j<nr[1];j++)
    for(i=0;i<nr[0];i++){
                                    //Cal. the potential energy
     p_energy[p]=p_energy[p]+pow(dx,float(dime))*no[p][i][j][k]
                 *q[p]*phi[i][j][k];
                                    //Cal. the kinetic energy
     if(mo==2){
      u=pow(uxo[p][i][j][k],2.0)+pow(uyo[p][i][j][k],2.0)
        +pow(uzo[p][i][j][k],2.0);
      k_energy[p]=k_energy[p]+0.5*m[p]*pow(dx,float(dime))
                 *no[p][i][j][k]*u;
     }
    }
  if(mo==1)
   for(nn=0;nn<int(npar);nn++){
    u=pow(vxo[p][nn],2.0)+pow(vyo[p][nn],2.0)+pow(vzo[p][nn],2.0);
    k_energy[p]=k_energy[p]+0.5*m[p]*rat*u;
   }
 }
 VELOCITY();
}
/**************************************************************************/
/**************************************************************************/
int main(){
int i,j,k,nn,nm;
FILE *f0,*f1[7],*f2[7],*f3,*f4[2];
if(f0=fopen("parameter","w")){      //file keeps parameters
                                    //file keeps data which vary by time
if(f1[0]=fopen("data(t)","w")){
if(f1[1]=fopen("data(t)(2)","w")){
if(f1[2]=fopen("data(t)(3)","w")){
```

```
if(f1[3]=fopen("data(t)(4)","w")){                 if(f1[4]=fopen("data(t)(5)","w")){
if(f1[5]=fopen("data(t)(6)","w")){                 if(f1[6]=fopen("data(t)(7)","w")){
                                    //file keeps data which vary by position
if(f2[0]=fopen("data(x)","w")){                    if(f2[1]=fopen("data(x)(2)","w")){
if(f2[2]=fopen("data(x)(3)","w")){                 if(f2[3]=fopen("data(x)(4)","w")){
if(f2[4]=fopen("data(x)(5)","w")){                 if(f2[5]=fopen("data(x)(6)","w")){
if(f2[6]=fopen("data(x)(7)","w")){                 if(f3=fopen("data(n0)","w")){
//file keeps the data of densities at t0
if(f4[0]=fopen("data(rd1)","w")){   //file keeps position of e- or ion at t0
if(f4[1]=fopen("data(rd2)","w")){   //file keeps position of ion at t0 from
                                      e-ion
 SETVALUE();
 do{
  ENERGY();
                                    //Print
  if(tt==0){
   fprintf(f0,"%d %d %d\n\n%.0f %e %.2f\n\n%d %d %d\n\n%.1f %d\n\n%d
            %.0f\n\n%d %d %.0f\n\n%e %e %.1f\n",dime,mo,par,
            npar,rat,ran,np,nnu,nele,ln,ngrid,ntime,di,tplot,nvar,Te,
            AE,AB,mul);
    switch (mo){
     case 1:
      for(i=0;i<nvar;i++)
       fprintf(f0,"%d %d %d %d %d\n",ii[i],jj[i],kk[i],ti[i],pl[i]);
      for(p=0;p<ntyp;p++)
       for(nn=0;nn<int(npar);nn++){
        i=x[p][nn]/dx;
        j=y[p][nn]/dx;
        k=z[p][nn]/dx;
                                         //Distribution at [nvar/2][nvar/2]
        if(i==ii[nvar/2]&&j==jj[nvar/2]&&k==kk[nvar/2])
         fprintf(f4[p],"%d %f %f %f\n",nn,x[p][nn],y[p][nn],z[p][nn]);
       }
     break;
     case 2:
      for(i=0;i<nvar;i++)
       fprintf(f0,"%d %d %d %d\n",ii[i],jj[i],kk[i],ti[i]);
     break;
    }
                                          //Density of Particles in a Cell
    for(k=0;k<nr[2];k++)
     for(j=0;j<nr[1];j++)
      for(i=0;i<nr[0];i++)
       fprintf(f3,"%.0f %.0f\n",no[0][i][j][k],no[1][i][j][k]);
   }
                                          //Event by Time
   if(tt%tplot==0){
    switch (mo){
     case 1:
      for(nn=0;nn<nvar;nn++)
       fprintf(f1[nn],"%d %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %.0f %.0f %e
                       %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e\n",tt,xo[0][nn]
                      ,yo[0][pl[nn]],zo[0][pl[nn]],vxo[0][pl[nn]]
                      ,vyo[0][pl[nn]],vzo[0][pl[nn]],xo[1][pl[nn]]
                      ,yo[1][pl[nn]],zo[1][pl[nn]],vxo[1][pl[nn]]
                      ,vyo[1][pl[nn]],vzo[1][pl[nn]]
                      ,no[0][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,no[1][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,phi[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Ex[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Ey[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Ez[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Bxo[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Byo[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Bzo[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,p_energy[0],k_energy[0],p_energy[1],k_energy[1]);
     break;

     case 2:
      for(nn=0;nn<nvar;nn++)
       fprintf(f1[nn],"%d 0 0 0 %e %e %e 0 0 0 %e %e %e %.0f %.0f %e %e %e
                       %e %e %e %e %e %e %e %e\n",tt
                     ,uxo[0][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                     ,uyo[0][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                     ,uzo[0][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                     ,uxo[1][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                     ,uyo[1][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
```

```
                      ,uzo[1][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,no[0][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,no[1][ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,phi[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Ex[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Ey[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]],Ez[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Bxo[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Byo[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,Bzo[ii[nn]][jj[nn]][kk[nn]]
                      ,p_energy[0],k_energy[0],p_energy[1],k_energy[1]);
     break;
    }
   }
   for(nn=0;nn<nvar;nn++)
    if(tt==ti[nn])
     for(k=0;k<nr[2];k++)
      for(j=0;j<nr[1];j++)
       for(i=0;i<nr[0];i++)
        fprintf(f2[nn],"%.0f %.0f %e %e %e %e %e %e
%e\n",no[0][i][j][k],no[1][i][j][k],phi[i][j][k],Ex[i][j][k],Ey[i][j][k],
Ez[i][j][k],Bxo[i][j][k],Byo[i][j][k],Bzo[i][j][k]);

  tt=tt+1;
  t=t+dt;
 }while(tt<=ntime);

}fclose(f4[1]);
}fclose(f4[0]);
}fclose(f3);
}fclose(f2[6]);
}fclose(f2[5]);
}fclose(f2[4]);
}fclose(f2[3]);
}fclose(f2[2]);
}fclose(f2[1]);
}fclose(f2[0]);
}fclose(f1[6]);
}fclose(f1[5]);
}fclose(f1[4]);
}fclose(f1[3]);
}fclose(f1[2]);
}fclose(f1[1]);
}fclose(f1[0]);
}fclose(f0);
system ("PAUSE");
return(0);
}
/**************************************************************************/
/**************************************************************************/
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

สายฝน จำปาทอง เกิด 24 กันยายน 2525 เป็นลูกคนสุดท้องในบรรดาพี่น้องทั้งหมด 3 คน จบการศึกษาระดับปริญญาตรีจากภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัยในปี 2546 จากนั้นเข้าศึกษาต่อระดับปริญญาโทที่ภาควิชานิวเคลียร์เทคโนโลยี คณะวิศวกรรมศาสตร์ ในปี 2547