บรรณานุกรม

แชรม วิลเบอร์, และคณะ. <u>สื่อมวลชนใหม่ ๆ : รายงานสำหรับนักวางแผนการศึกษา</u> ศรีน้อย โพวาทอง แปล, สำนักเลขาธิการคณะกรรมการแห่งชาติว่าด้วยการศึกษาวิทยาศาสตร์และวัฒนธรรม, 2514, 242 หน้า.

เตือนใจ ทองสำริต. "บทเรียนสำเร็จรูป (Programmed Instruction)," รายงานประกอบการศึกษาวิชา Individual Study แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัยจุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2515.

นิพนธ์ ศุขปรีดี. "บทเรียนโปรแกรม," <u>นวกรรมเทคโนโลยีการศึกษา</u>. โรงพิมพ์พิฆเณศ, 2519, หน้า 45 – 88.

เปรื่อง กุมุท. <u>การสร้างแบบเรียนสำเร็จรูป</u>. พิมพ์ครั้งที่ 2. วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2516, 131 หน้า.

พลรัตน์ ลักษณียนาวิน. "การทดลองสอนพีชคณิตโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป," วิทยานิพนธ์ แผนกวิชาวิจัยการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2514. (อัดสำเนา).

วรรณา เจียมทะวงษ์. "การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้วิชาเลขคณิตชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed Textbook) กับการสอนตามแบบปกติ," ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2515. (อัดสำเนา).

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ. <u>บทคัดย่องานวิจัยการศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ</u>. โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว, 2513.

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ. แบบเรียนคณิตศาสตร์ ก. ตอนที่ 2 (ตรีโกณมิติ) ประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย. พิมพ์ครั้งที่ 9. โรงพิมพ์คุรุสภา, 2513, 84 หน้า.

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ. ประมวลบทความเกี่ยวกับนวกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา. โรงพิมพ์คุรุสภา, 2515, 242 หน้า.

สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ. "การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเซทในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ," ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2518. (อัดสำเนา).

อาร์เธอร์ ก็อดแมน. แบบเรียนวิชาตรีโกณมิติ ก – ข ประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย แปลจาก A Programmed Textbook Trigonometry โดย ฝ่ายวิชาการบริษัทสำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, พิมพ์ครั้งที่ 1. 2514, 187 หน้า.

เอื้อน ปิ่นเงิน. "การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่อง ในระดับชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ," ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2518. (อัดสำเนา).

American Association of School Administrators and Research Division, National Education Association. "Programmed Instruction in Large School System," in Curcular, 7 (September, 1966), p.25.

Banghart, Frank W., and others. "An Experimental Study of Programmed Versus Traditional Elementary School Mathematics," The Arithmetic Teacher, 10 (April, 1963), 199 - 204.

Beane, Donald. "A Comparision of Linear and Branching Techniques of Programmed Instruction in Plane Geometry," A.V. Communication Review, 15 (Summer, 1967), p.190.

Calvin, Alen D. Programmed Instruction. Indiana University Press, 1969.

Carpenter and Fillmer. "A Comparison of Teaching Machines and Programmed Text in the Teaching of Algebra," Journal of Educational Research, 58 (January, 1965), 218-221.

Collagan, Robert B. "The Construction and Evaluation of a Programmed Course in Mathematics Necessary for Success in Collegiate Physical Science," Dissertation Abstracts, 30: 1070 - 1071 A, 1969.

Corrigan, Robert E. "Programmed Instruction as a System Approach to the Education," Trends in Programmed Instruction. Washington D.C., 1964, p.36.

Davis, Floyed Wayne. "A study of Three Methods of Utilizing Programmed Algebra Textbooks," Dissertation Abstracts, 27 (8) : 2272 - A, 1967.

Dessart, Donald Joseph. "A Study of Programmed Learning with Superior Eighth Grade Students," A.V. Communication Review, 14, 1966, p.424.

Devine, Donald F. "Student Attitudes and Achievement : A Comparison between the Effects of Programmed Instruction and Conventional Classroom Approach in Teaching Algebra I," The Mathematics Teacher, 61(3), (March, 1968), 296 - 301.

Easterday, Kenneth, and Easterday, Helen. "Ninth - Grade Algebra, Programmed Instruction, and Sex Differences: An Experiment," The Mathematics Teacher, 61(3), (March, 1963), 302 - 307.

Fan, Chung - Teh. Item Analysis Table. Education Testing Service, Princton, New Jersey, 1952, 32 pp.

Ferguson, George A. Statistic Analysis in Psychology and Education. New York: McGraw - Hill Book Company, Inc., 1966.

Fine, Benjamin. Teaching Machines. New York : Sterling Publishing Co., Inc., 1962.

Fishell, Kenneth Nelson. "Utilization Patterns of Programmed Materials in the Junior High School," Dissertation Abstracts, 25(5):2881, 1964.

Fry, Edward B. Teaching Machine and Programmed Instruction. New York: McGraw - Hill Book Company, Inc., 1963.

Fund For the Advancement of Education. Four Case Study of Programmed Instruction. New York, 1964.

Garrett, Henry E. Statistics in Psychology and Education. Vakils, Feffer and Simons Private Ltd., 1966.

Glasser, Robert. Teaching Machines and Programmed Learning II. Washington, D.C., 1965.

Greatsinger, Calvin. "An Experimental Study of Programmed Instruction in Division of Fractions," Dissertation Abstracts A, 27(7 - 8) : 2442 - A, 1966.

Guilford, J.P. <u>Fundamental Statistic in Psychology and Education</u>. New York : McGraw - Hill Book Company, Inc., 1965.

Hamer, J.W. <u>Program Learning Practice with Particular Reference to the Developing Countries</u>. Enfield College of Technology, 1973.

Hanson, Lincoln F. <u>Program'63</u>. Washington, 1963.

Huges, J.L. <u>Programmed Instruction for Schools and Industry</u>. Chicago : Science Research Associates, Inc., 1962.

Kinder, James S. <u>Using Audio - Visual Materials in Education</u>. New York, 1965.

Lach, Ivan John. "Report of a Study on the Use of Programmed Workbooks to Provide for Partially Individualized Mathematics Instruction in the Junior High School," <u>The Mathematics Teacher</u>, 63(6), (October, 1970), 512 - 515.

Lane, Binnie Ray. "An Experiment with Programmed Instruction as a Supplement to Teaching College Mathematics by Close-Circuit Television," <u>Dissertation Abstracts</u>, 23(10), (April, 1963), p. 3817.

Leith, G.O.M. <u>A Handbook of Programmed Learning</u>. 2nd. ed., University of Birmingham, 1966.

Lindquist, Evert F. <u>Education Measurement</u>. Washington, D.C., American Council on Education, 1955.

Meadowcroft, B.A. "Comparison of Two Methods of Using Programmed Learning," <u>Arithmetic Teacher</u>, 12, 1965, 422 - 425.

Moses, John Irven. "A Comparison of the Results of Achievement with Programmed Learning and Traditional Classroom Techniques in First Year Algebra at Spring Branch Junior High School," Dissertation Abstracts, 25 : 5793 - A, 1965.

Ofiesh, Gabriel D. Trends in Programmed Instruction. Washington, D.C., 1964.

Pereira, P.D. Introduction to Programmed Learning. Geneva : Management Development Brank Human Resources Department, Manual, No. 25, 1971.

Randolph, Paul H. "An Experiment in Programmed Instruction in Junior High School," A.V. Communication Review, 13, 1965, p. 449.

Reed, Jerry Franklin. "The Relative Effectiveness of Programmed and Conventional Textbooks as Supplements to Classroom Lecture in the Teaching of Elementary Modern Mathematics," Dissertation Abstracts, 30(4) : 1989 - A, 1971.

Rigg, Corinne Whitlow. "The Construction and Evaluation of a Programmed Text on the Interpretation of Graphs for Grade Five," Dissertation Abstracts, 27(9) : 2748 - A, 1967.

Salisbury, Robert Gardner. "A Study of Programmed Instruction in Selected Secondary Schools of Ohio," Dissertation Abstracts, 27(3) : 712 - A, 1966.

Schramm, Wilbur. The Research on Programmed Instruction : An Annotated Bibliography. Washington, D.C., 1964.

Taber, Julian I. and Glasser, Robert. Learning and Programmed Instruction. Massachusettes : Addison Wesley Publishing Co., Inc., 1965.

White, Charles Calvin. "The Use of Programmed Texts for Remedial Mathematics Instruction in College," Dissertation Abstracts, 30(8) : 3373 - A, 1970.

Wiebe, Arthur John. "Comparative Effects of Three Methods of Utilizing Programmed Mathematics Materials with Low - Achievevers," Dissertation Abstracts, 27(4) : 1002 - A, 1966.

Zachest, Virginia. "Top - Trying Out Programs," Trends in Programmed Instruction. Washington, D.C., 1964, p.84.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

1. วัตถุประสงค์ของการสอน

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
1. ความหมายของวิชาตรีโกณมิติ – ให้นักเรียนรู้ความหมายของวิชาตรีโกณมิติ	– ให้นักเรียนบอกความหมายของวิชาตรีโกณมิติได้ (ช่อง 1)
2. มุมที่จุดใด ๆ (Angle at a point) – ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องมุม	1. ให้นักเรียนบอกได้ถูกต้องว่าเมื่อเส้นตรงสองเส้นมาพบกันที่จุด ๆ หนึ่งจะทำให้เกิดมุมขึ้น (ช่อง 1) 2. ให้นักเรียนใช้สัญลักษณ์ "^" หรือ "∠" แทน "มุม" ได้ (ช่อง 1) 3. ถ้ากำหนดรูปภาพมุมต่าง ๆ ให้ นักเรียนใช้ตัวอักษรสามตัวเรียกชื่อมุมนั้น ๆ ได้ (ช่อง 1) 4. ถ้ากำหนดมุมต่าง ๆ ให้ นักเรียนจะต้องชี้หรือบอกส่วนที่เรียกว่า "แขน" ของมุมและตำแหน่งที่เรียกว่า "จุดยอด" ได้ (ช่อง 1)

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
3. การวัดมุมโดยการหมุน (Measuring Angles by Rotation) – ให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องการเกิดมุมและการวัดมุมโดยการหมุน	1. ให้นักเรียนบอกได้ว่า เมื่อปลายข้างหนึ่งของเส้นตรงหมุนรอบจุดคงที่ครบ 1 รอบ เส้นตรงนั้นจะหมุนไปเป็นมุม 360° (ช่อง 1) 2. ให้นักเรียนบอกได้ว่า "หนึ่งมุมฉาก" เป็นมุมที่เกิดขึ้นจากเส้นตรงที่เป็นแขนข้างหนึ่งของมุมหมุนไป 1 ใน 4 ของรอบในข้อ 1. และมีขนาดของมุมเป็น 90° (ช่อง 1) 3. ถ้ากำหนดรูปภาพที่เป็นมุมฉากให้ นักเรียนใช้เครื่องหมายกำกับมุมฉากได้ (ช่อง 1) 4. ให้นักเรียนบอกได้ว่าครึ่งหนึ่งของรอบในข้อ 1. เส้นตรงที่เป็นแขนของมุมจะต่อกันเป็นเส้นตรงเดียวกัน และมีขนาดของมุม 180° หรือสองมุมฉาก (ช่อง 1) 5. เมื่อกำหนดให้เส้นตรงเส้นหนึ่งหมุนรอบจุดคงที่จุดหนึ่งมากกว่า 1 รอบ นักเรียนจะต้องหาตำแหน่งสุดท้ายของเส้น

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
	ตรงนั้นได้ และบอกขนาดของมุมที่ตำแหน่งใหม่ของเส้นตรงนั้นทำกับตำแหน่งเดิมได้ (ช่อง 1,59,36, 71 และ 22)
4. <u>การวัดมุมมาตราอังกฤษ</u> – ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องการวัดมุม การบวก การลบ มุมในมาตราอังกฤษ	1. ให้นักเรียนบอกได้ว่ามุม 1° แบ่งได้ $60'$ และมุม $1'$ แบ่งได้ $60''$ (ช่อง 49) 2. เมื่อกำหนดรูปภาพมุมให้ นักเรียนจะต้องใช้ไม้โปรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุมนั้นได้ (ช่อง 49) 3. เมื่อกำหนดค่าของมุมในมาตราอังกฤษ ให้นักเรียนหาผลบวกและผลต่างของมุมเหล่านั้นได้ (ช่อง 49,70,39,44 และ 13)
5. <u>ประเภทของมุมกำหนดตามขนาดของความกว้าง</u> – ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องมุมชนิดต่าง ๆ ที่แบ่งตามขนาดความกว้างของมุม	1. ให้นักเรียนบอกความหมายของ "มุมแหลม" "มุมป้าน" และ "มุมกลับ" ได้และเขียนความหมายดังกล่าวในรูปอย่างย่อๆได้ (ช่อง 38) 2. เมื่อกำหนดขนาดความกว้างของมุมให้นักเรียนบอกประเภทของมุมนั้น ๆ ได้ (ช่อง 38,28,19)

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
	3. ให้นักเรียนบอกส่วนต่าง ๆ ของวงกลมได้ถูกต้อง (ช่อง 38)
6. <u>ความสัมพันธ์ของมุม</u> - ให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของมุม	1. ให้นักเรียนบอกความหมายของมุมประชิดได้ (ช่อง 21) 2. ให้นักเรียนบอกคุณสมบัติของมุมตรงกันข้ามได้ (ช่อง 21) 3. ให้นักเรียนบอกความหมายของมุมประกอบหนึ่งมุมฉากและมุมประกอบสองมุมฉากได้ (ช่อง 21) 4. ให้นักเรียนบอกได้ว่าขนาดของมุมทั้งสามภายในสามเหลี่ยมรวมกันมีค่าเท่ากับสองมุมฉากหรือ 180° (ช่อง 21) 5. เมื่อกำหนดขนาดของมุมต่าง ๆ ให้นักเรียนบอกขนาดของมุมประกอบหนึ่งมุมฉากและมุมประกอบสองมุมฉากของมุมนั้นได้ (ช่อง 21,15,32,54 และ 14) 6. เมื่อกำหนดขนาดของมุมภายในของสามเหลี่ยมให้ 2 มุม นักเรียนบอกขนาดของมุมที่สามได้ (ช่อง 21,54,14)

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
7. <u>อัตราส่วนตรีโกณมิติ</u> – เพื่อให้นักเรียนมีความรู้เกี่ยว-กับอัตราส่วนตรีโกณมิติ	1. เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมุมหนึ่งของสามเหลี่ยมรูปนั้นให้ นัก-เรียนจะต้องบอกด้านที่เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมและด้านประชิดมุมที่กำหนดให้นั้นได้ (ช่อง 33) 2. ให้นักเรียนบอกความหมายของอัตรา-ส่วนตรีโกณมิติที่เรียกว่า sine, cosine และ tangent ได้ (ช่อง 33) 3. ให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติ sine, cosine และ tangent ของมุมใด ๆ ในรูปอย่างย่อ ๆ ได้ (ช่อง 33) 4. ให้นักเรียนบอกได้ว่าอัตราส่วนตรีโกณ-มิติ sine หรือ cosine หรือ tangent ของมุมขนาดหนึ่งย่อมมีค่าคงที่ค่าหนึ่ง (ช่อง 33) 5. เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้นักเรียนจะต้องบอกค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติต่าง ๆ ของมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมนั้นในรูปอัตราส่วนของด้านได้ (ช่อง 33,61,3,50,73,69,20)

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
8. <u>อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมพิเศษบางมุม</u> – ให้นักเรียนมีความรู้เกี่ยวกับค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 45°,30° และ 60°	1. ให้นักเรียนบอกวิธีหา sine, cosine, tangent ของมุม 45°,30° และ 60° ได้ (ช่อง 66) 2. ให้นักเรียนบอกค่า sine, cosine และ tangent ของมุม 45°,30° และ 60° ได้ (ช่อง 66) 3. ให้นักเรียนบอกได้ว่า sin 45° มีค่าเท่ากับ cos 45°, sin 60° มีค่าเท่ากับ cos 30° และ sin 30° มีค่าเท่ากับ cos 60° (ช่อง 66, 60)
9. <u>วิธีใช้ตารางตรีโกณมิติ</u> – ให้นักเรียนมีความเข้าใจการใช้ตารางตรีโกณมิติ	– เมื่อกำหนด sine หรือ cosine หรือ tangent ของมุมขนาดต่าง ๆ ที่ไม่เกิน 90° ให้ นักเรียนบอกค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติเหล่านั้นได้ โดยการอ่านตารางตรีโกณมิติ (ช่อง 27,16)
10. <u>การแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก</u> – ให้นักเรียนมีความเข้าใจในการแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก	1. ให้นักเรียนบอกความหมายของการแก้สามเหลี่ยมมุมฉากได้ (ช่อง 46) 2. เมื่อกำหนดความยาวของด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้ 1 ด้านกับมุม 1 มุม นักเรียน

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
	จะต้องบอกขนาดของส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมได้ (ช่อง 46) 3. เมื่อกำหนดความยาวของด้านของสาม-เหลี่ยมมุมฉากให้ 2 ด้าน นักเรียนจะต้องบอกความยาวของด้านและขนาดของมุมที่เหลือได้ (ช่อง 46,53,68 และ 34)
11. <u>ตัวอย่างแบบง่ายในการหาความสูงและระยะทาง</u> – ให้นักเรียนมีความเข้าใจในการหาความสูงและระยะทางในเบื้องต้น	1. ให้นักเรียนบอกความหมายของ "มุมก้ม" และ "มุมเงย" ได้ และเมื่อกำหนดรูปภาพมุมให้ นักเรียนจะต้องชี้หรือบอกมุมที่เป็นมุมก้ม และมุมเงยได้ (ช่อง 40) 2. เมื่อกำหนดมุมเงย และความสูงให้ นักเรียนหาระยะทางในแนวราบได้ (ช่อง 40,24,4,18) 3. เมื่อกำหนดมุมเงยและระยะทางตามแนวราบให้ นักเรียนหาความสูงได้ (ช่อง 40,24,4,18) 4. เมื่อกำหนดมุมก้มและระยะทางตามแนว-ราบให้ นักเรียนหาความสูงได้ (ช่อง 40) 5. เมื่อกำหนดมุมก้มและความสูงให้ นัก-เรียนหาระยะทางตามแนวราบได้(ช่อง4)

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
12. <u>ความลาดและเกรเดียน</u> – ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องความลาดและเกรเดียน	1. ให้นักเรียนบอกความหมายของมุมลาดและเกรเดียนของเส้นได้ (ช่อง 64) 2. เมื่อกำหนดความสูง (หรือความลึก) ของสิ่งหนึ่งให้และกำหนดระยะทางตามแนวราบจากจุดหนึ่งถึงสิ่งนั้นให้ นักเรียนจะต้องบอกค่ามุมลาดขึ้น (หรือมุมลาดลง) ณ ตำแหน่งนั้น และบอกค่าเกรเดียนได้ (ช่อง 64) 3. เมื่อกำหนดค่ามุมลาดของสิ่งหนึ่งให้นักเรียนบอกค่าเกรเดียนของสิ่งนั้นได้ (ช่อง 64,45,55) 4. เมื่อกำหนดค่าเกรเดียนของสิ่งหนึ่งให้นักเรียนหาค่ามุมลาดของสิ่งนั้นได้ (ช่อง 4,9)
13. <u>ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ (1)</u> – ให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมประกอบหนึ่งมุมฉากซึ่งกันและกัน	1. นักเรียนจะต้องบอกได้ว่าค่า sine ของมุมหนึ่งจะเท่ากับค่า cosine ของมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุมนั้น (ช่อง 25) 2. นักเรียนจะต้องบอกได้ว่าค่า cosine ของมุมหนึ่งจะเท่ากับค่า sine ของมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุมนั้น (ช่อง25)

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
	3. ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ sine, cosine และ tangent เมื่อกำหนดค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อัตราส่วนหนึ่งของมุม ๆ หนึ่งให้ นักเรียนจะต้องบอกค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหลือ (สำหรับมุมนั้น ๆ) ได้โดยไม่ต้องใช้ตารางตรีโกณมิติ (ช่อง 25,76,81, 12 และ 82)
14. <u>อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหลือ</u> – ให้นักเรียนมีความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เป็นส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เรียนไปแล้วและการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติที่กล่าวถึง	1. ให้นักเรียนบอกความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เรียกว่า cosecant, secant และ cotangent ของมุมต่าง ๆ ได้ (ช่อง 29) 2. ให้นักเรียนบอกความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ sine กับ cosecant, cosine กับ secent และ tangent กับ cotangent ของมุมหนึ่ง ๆ ได้ (ช่อง 29) 3. ให้นักเรียนใช้คำย่อของ cosecant, secant และ cotangent ของมุมหนึ่ง ๆ ได้ (ช่อง 29) 4. ให้นักเรียนใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ cosecant, secant และ cotangent

หัวข้อเรื่องและวัตถุประสงค์ทั่วไป	วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
	เพื่อหลีกเลี่ยงการหารที่ยุ่งยากในการหาความสูงและระยะทางได้ (ช่อง 25,76,81,12 และ 82)
15. <u>ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ (2)</u> – ให้นักเรียนมีความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างอัตรา-ส่วนตรีโกณมิติมากขึ้น และมีความเข้าใจในการนำความสัมพันธ์ไปใช้	1. ให้นักเรียนบอกความสัมพันธ์ของอัตรา-ส่วนตรีโกณมิติทั้งหมดในรูปต่าง ๆ ได้ (ช่อง 6) 2. เมื่อกำหนดค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมหนึ่งให้ นักเรียนหาค่าของอัตรา-ส่วนตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุมนั้นได้โดยไม่ต้องใช้ตารางตรีโกณมิติ (ช่อง 6, 62)

2. โครงการสอนระยะยาว

ช่วงเวลาในการสอน	หัวข้อเรื่อง
คาบที่ 1	– ความหมายของวิชาตรีโกณมิติ – มุมที่จุดใด ๆ – การวัดมุมโดยการหมุน – การวัดมุมมาตราอังกฤษ
คาบที่ 2	– ประเภทของมุมกำหนดตามขนาดของความกว้าง – ความสัมพันธ์ของมุม
คาบที่ 3	– อัตราส่วนตรีโกณมิติ
คาบที่ 4	– อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมพิเศษบางมุม
คาบที่ 5	– วิธีใช้ตารางตรีโกณมิติ
คาบที่ 6	– วิธีใช้ตารางตรีโกณมิติ (ต่อ)
คาบที่ 7	– การแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก
คาบที่ 8	– ตัวอย่างแบบง่ายในการหาความสูงและระยะทาง
คาบที่ 9	– ตัวอย่างแบบง่ายในการหาความสูงและระยะทาง (ต่อ)
คาบที่ 10	– ความลาดและเกรเดียน
คาบที่ 11	– ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ (1)
คาบที่ 12	– อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหลือ
คาบที่ 13	– ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ (2)

ภาคผนวก ข.

สูตรสถิติที่ใช้ในการวิจัย

1. มัชฌิมเลขคณิต[1] ($\bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$\bar{X}$ คือ มัชฌิมเลขคณิต หรือ ค่าเฉลี่ยของคะแนน

$\sum X$ คือ ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

N คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

2. ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน[2] (S.D.)

$$S.D. = \sqrt{\frac{N(\sum X^2) - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

S.D. คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$ คือ ผลรวมของคะแนน X

N คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

$\sum X^2$ คือ ผลรวมของคะแนน X^2

---

[1] Henry E. Garrett, Statistics in Psychology and Education (Vakils, Feffer and Simons Private Ltd., 1966), p.27.

[2] J.P. Guilford, Fundamental Statistic in Psychology and Education (New York : McGraw - Hill Book Company, Inc., 1965), p.91.

3. <u>ค่าความเที่ยง (reliability) ของแบบทดสอบ</u> หาโดยใช้สูตรของ คูเดอร์ ริชาร์ดสัน -20 (Kuder - Richardson -20)[3]

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{S_t^2 - \sum pq}{S_t^2}\right)$$

r_{tt} คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

n คือ จำนวนข้อของแบบทดสอบ

S_t^2 คือ ค่าความแปรปรวนของคะแนน

p คือ อัตราของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

$$p = \frac{\text{จำนวนคนตอบถูกในแต่ละข้อ}}{\text{จำนวนคนสอบทั้งหมด}}$$

q คือ อัตราของคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

$$q = 1 - p$$

4. <u>การทดสอบค่าที[4] (t - test)</u>

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

t คือ ค่าสถิติที

$\bar{X}_1$ คือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนในกลุ่มที่ 1

$\bar{X}_2$ คือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนในกลุ่มที่ 2

S_1^2 คือ ความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มที่ 1

S_2^2 คือ ความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มที่ 2

---

[3] Evert F. Lindquist, <u>Education Measurement</u> (Washington, D.C.: American Council on Education, 1955), p. 587.

[4] George A. Ferguson, <u>Statistic Analysis in Psychology and Education</u> (New York : McGraw - Hill Book Company, Inc., 1966), p. 170.

N_1 คือ จำนวนตัวอย่างประชากรในกลุ่มที่ 1

N_2 คือ จำนวนตัวอย่างประชากรในกลุ่มที่ 2

5. <u>มัชฌิมเลขคณิต ($\bar{X}_i$) ของคะแนนความคิดเห็น</u>

$$\bar{X}_i = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + f_4X_4 + f_5X_5}{N_i}$$

$\bar{X}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนข้อที่ i

N_i คือ จำนวนคำตอบทั้งหมดสำหรับข้อที่ i

f คือ ค่าความถี่

X คือ ค่าระดับความคิดเห็น

โดย $X_1 = 1$

$X_2 = 2$

$X_3 = 3$

$X_4 = 4$

$X_5 = 5$

ภาคผนวก ค.

1. <u>แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้วิชาตรีโกณมิติ</u>

<u>คำอธิบายวิธีทำข้อสอบ</u>

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 32 ข้อ ต้องการให้นักเรียนทำเสร็จทุกข้อในเวลา 1 ชั่วโมง 20 นาที คำถามแต่ละข้อมีคำตอบให้เลือก 4 คำตอบ ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวจากข้อ ก.,ข.,ค. หรือ ง. เมื่อเลือกคำตอบใดก็กาเครื่องหมาย × ในวงเล็บใต้อักษรของข้อที่เลือกนั้นในกระดาษคำตอบ

<u>ตัวอย่าง</u> (0) ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง?

ก. 1 + 2 = 4

ข. 4 + 2 = 6

ค. 3 + 2 = 6

ง. 6 + 2 = 7

ข้อนี้คำตอบที่ถูกต้องคือ 4 + 2 = 6 ซึ่งตรงกับข้อ ข. นักเรียนก็ไปตอบในกระดาษคำตอบ ดังนี้

	ก.	ข.	ค.	ง.
(0)	( )	(×)	( )	( )

2. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบ ก็ให้ขีดเส้นหนา ๆ ทับคำตอบเดิมเสียก่อน

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ก. เป็นข้อ ค.

	ก.	ข.	ค.	ง.
(00)	(~~×~~)	( )	(×)	( )

3. ถ้าต้องการทดเลข ให้ทดลงในแผ่นกระดาษที่แจกให้ต่างหาก อย่าขีดเขียนลงบนแบบทดสอบและตารางตรีโกณมิติที่แจกให้

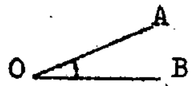
4. ถ้าพบข้อยากให้ข้ามไปทำข้ออื่นเสียก่อน จงพยายามทำให้เสร็จทุกข้อ

(โปรดอย่าพลิกจนกว่าผู้คุมสอบจะสั่ง)

1. มุม $90^\circ\ 2'$ ลบด้วย $15^\circ\ 25'$ จะได้ผลลัพธ์เท่าไร

   ก. $74^\circ\ 37'$ ข. $74^\circ\ 55'$ ค. $-74^\circ\ 47'$ ง. $-74^\circ\ 55'$

2. ถ้า $A\hat{O}B = 26^\circ\ 32'$ และ AO หมุนรอบจุด O ทวนเข็มนาฬิกาไป $174^\circ\ 45'$ ตำแหน่งใหม่ของ AO จะทำมุมเท่าไรกับ OB



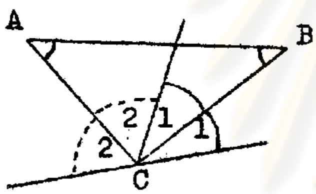
   ก. $21^\circ\ 17'$ ข. $143^\circ\ 13'$ ค. $158^\circ\ 40'$ ง. $201^\circ\ 17'$

3. มุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุม $124^\circ\ 16'$ คือมุมในข้อใด

   ก. $-34^\circ\ 16'$ ข. $34^\circ\ 16'$ ค. $55^\circ\ 16'$ ง. $-55^\circ\ 16'$

4. มุมประกอบสองมุมฉากของมุม $A - 10^\circ$ คือมุมในข้อใด

   ก. $170^\circ - A$ ข. $170^\circ + A$ ค. $190^\circ - A$ ง. $190^\circ + A$

5. 

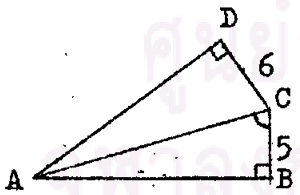
   จากรูป ถ้า $A\hat{B}C = B\hat{A}C$ แล้ว $A\hat{B}C$ จะกางกี่องศา

   ก. 30° ข. 35°

   ค. 45° ง. 60°

6. ในสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $\sin A = \frac{2}{3}$ แล้ว $\cos C$ มีค่าเท่าไร

   ก. $\frac{2}{3}$ ข. $\frac{4}{9}$ ค. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ง. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

7. 

   จากรูป ถ้า $A\hat{C}B = 60^\circ$, $BC = 5$ หน่วย และ $DC = 6$ หน่วย ดังนั้น $\cos D\hat{A}C$ มีค่าเท่าไร

   ก. $\frac{3}{5}$ ข. $\frac{4}{5}$ ค. $\frac{5}{4}$ ง. $\frac{5}{3}$

<u>หมายเหตุ</u> ดูข้อสอบฉบับสมบูรณ์ได้ที่ห้องสมุดของแผนกวิชาวิจัยการศึกษา

2. แบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมวิชาตรีโกณมิติ

คำสั่ง : ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมาย × ในช่องความคิดเห็นหลังข้อความตามลำดับความคิดเห็นของนักเรียน เช่น เห็นด้วยกับข้อความมากที่สุด ก็เขียนเครื่องหมาย × ลงตรงช่อง "มากที่สุด" เห็นด้วยน้อย ก็เขียนเครื่องหมาย × ลงตรงช่อง "น้อย" เป็นต้น

ข้อ	ข้อความ	ความคิดเห็น				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1.	นักเรียนชอบเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมประกอบการเรียน	....	...	....	...	......
2.	บทเรียนโปรแกรมมีส่วนช่วยการเรียนของนักเรียน	....	...	....	...	......
3.	การเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบการสอนของครูเป็นการสิ้นเปลืองเวลาโดยใช่เหตุ	....	...	....	...	......
4.	การเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมทำให้ครูมีโอกาสได้ใกล้ชิดกับนักเรียนและช่วยอธิบายเป็นส่วนตัวมากขึ้น	....	...	....	...	......
5.	ในการใช้บทเรียนโปรแกรมนี้ นักเรียนชอบที่จะเปิดคำตอบดูก่อน	....	...	....	...	......
6.	บทเรียนโปรแกรมมีส่วนช่วยให้นักเรียนรู้จักวิธีการเรียนรู้ด้วยตนเองจากสิ่งที่ง่ายไปหาสิ่งที่ยากและซับซ้อน	....	...	....	...	......
7.	การเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมทำให้ผู้เรียนเกิดความเคร่งเครียด	....	...	....	...	......

ข้อ	ข้อความ	ความคิดเห็น				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
8.	บทเรียนโปรแกรมช่วยให้ได้เรียนไปตามความสามารถของผู้เรียนเอง	....	......	....	......	......
9.	บทเรียนโปรแกรมน่าจะใช้สำหรับทบทวนบทเรียนมากกว่าที่จะเป็นการเรียนใหม่ ๆ	....	......	....	......	......

10. ให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นอื่น ๆ ที่มีต่อการเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ข้างล่างนี้

....

....

....

....

....

....

ภาคผนวก ง

1. <u>ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของข้อทดสอบ</u>

ข้อที่	P_H	P_L	p	r
1	88	72	.80	.24
2	92	64	.79	.34
3	88	72	.80	.24
4	88	60	.75	.36
5	84	68	.76	.21
6	80	64	.72	.20
7	92	28	.63	.66
8	84	68	.76	.21
* 9	84	72	.76	.17
10	92	48	.72	.53
11	88	60	.75	.36
12	80	4	.37	.77
13	76	36	.56	.41
14	88	60	.75	.36
15	100	48	.80	.73
16	88	32	.62	.58
17	80	40	.61	.42
18	68	36	.52	.32
19	84	28	.57	.56
* 20	76	60	.68	.18
21	84	68	.76	.21
22	72	8	.37	.66
23	96	44	.74	.64
24	68	40	.54	.29
25	84	32	.59	.53
26	88	24	.58	.64
27	72	20	.45	.52
28	84	28	.57	.56
29	84	40	.63	.47
30	92	56	.76	.47
31	80	40	.61	.42
32	96	56	.79	.57

* ข้อที่นำไปปรับปรุงก่อนใช้ทดสอบจริง

ค่า p เฉลี่ย = 0.66

ค่า r เฉลี่ย = 0.43

2. การหาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ

1. การหาค่าความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ (s_t^2)

X	f	X^2	fX	fX^2
31	1	961	31	961
30	3	900	90	2700
29	2	841	58	1682
28	4	784	112	3136
27	6	729	162	4374
26	4	676	104	2704
25	6	625	150	3750
24	4	576	96	2304
23	6	529	138	3174
22	5	484	110	2420
21	6	441	126	2646
20	4	400	80	1600
19	6	361	114	2166
18	5	324	90	1620
17	6	289	102	1734
16	6	256	96	1536
15	6	225	90	1350
14	3	196	42	598
12	5	144	60	720
11	3	121	33	363
9	1	81	9	81
Σ	92		1893	41619

$$s_t^2 = \frac{N(\Sigma fX^2) - (\Sigma fX)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{92(41619) - (1893)^2}{92(92-1)}$$

$$= 29.3238$$

2. ค่า p, q และ pq ของข้อทดสอบ

ข้อที่	p	q	pq
1	.82	.18	.1476
2	.78	.22	.1716
3	.78	.22	.1716
4	.70	.30	.2100
5	.77	.23	.1771
6	.67	.33	.2211
7	.60	.40	.2400
8	.73	.27	.1971
9	.76	.24	.1824
10	.68	.32	.2176
11	.74	.26	.1924
12	.43	.57	.2451
13	.51	.49	.2499
14	.72	.28	.2016
15	.76	.24	.1824
16	.58	.42	.2436
17	.65	.35	.2275
18	.49	.51	.2499
19	.58	.42	.2436
20	.67	.33	.2211
21	.76	.24	.1824
22	.38	.62	.2356
23.	.72	.28	.2016
24	.57	.43	.2451
25	.54	.46	.2484
26	.53	.47	.2491
27	.45	.55	.2475
28	.53	.47	.2491
29	.60	.40	.2400
30	.76	.24	.1824
31	.60	.40	.2400
32	.70	.30	.2100
$\sum$			6.9244

หาความเที่ยงของแบบทดสอบ จากสูตร

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{S_t^2 - \sum pq}{S_t^2}\right)$$

r_{tt} แทนค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ

n แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

S_t^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนน

p แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

$$p = \frac{\text{จำนวนคนตอบถูกในแต่ละข้อ}}{\text{จำนวนคนสอบทั้งหมด}}$$

q แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

$$q = 1 - p$$

$$r_{tt} = \frac{32}{32-1}\left(\frac{29.3238 - 6.9244}{29.3238}\right)$$

$$= \frac{32}{31}(0.7639)$$

$$= 0.7885$$

ภาคผนวก จ.

บทเรียนโปรแกรมวิชาตรีโกณมิติ

บทเรียนแบบโปรแกรม

วิชาตรีโกณมิติ

(A PROGRAMMED LESSON TRIGONOMETRY)

ตัดตอนมาจาก

แบบเรียนวิชาตรีโกณมิติ ก—ข

ประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย

โดย

ARTHUR GODMAN

และ

ฝ่ายวิชาการ บริษัทสำนักพิมพ์ ไทยวัฒนาพานิช จำกัด

ข้อแนะนำในการใช้บทเรียน

โครงสร้างของบทเรียน

โปรแกรมการสอนตรีโกณมิติฉบับนี้แบ่งออกเป็นบทย่อย ๆ ตอนท้ายของแต่ละบทย่อยเป็นคำถาม เพื่อทดสอบว่าท่านเข้าใจเนื้อหาวิชาในบทเรียนนั้นเพียงใด เมื่อท่านตอบคำถามแล้วให้เลือกตรวจดูคำตอบตามที่ได้ให้ไว้ หรือพลิกดูคำตอบในหน้าถัดไป ถ้าคำตอบของท่านถูกต้องก็ขึ้นบทต่อไปได้ หรือขึ้นแบบทดสอบใหม่ได้ แต่ถ้าคำตอบของท่านผิด ข้อผิดพลาดนั้นก็จะได้รับคำอธิบาย เมื่ออธิบายแล้วจะมีคำถามให้ท่านทดลองทำอีกครั้งหนึ่งเพื่อดูว่าท่านได้เรียนรู้อะไรบ้างจากความผิดพลาดนั้น และคราวนี้เข้าใจบทเรียนถูกต้องดีขึ้นหรือยัง

ตัวบทเรียนย่อย ๆ และคำอธิบายข้อผิดพลาดต่าง ๆ นั้น จัดไว้เป็นช่อง ๆ (frame) ช่องเหล่านี้มีหมายเลขกำกับไว้ เช่น ช่อง 1, ช่อง 2, ช่อง 3, - - - ฯลฯ ท่านจะต้องติดตามไปกับหมายเลขช่องเหล่านี้ ช่องหนึ่ง ๆ อาจจะไม่จบในหน้าเดียว บางทีก็ต่อไปยังหน้าถัดไปด้วย ดังนั้นอย่าลืมพลิกหน้าถัดไปถ้าท่านเห็นว่าข้อความในช่องนั้นยังไม่จบ

ตัวอย่างการใช้ช่อง (frame)

สมมุติว่าท่านกำลังศึกษาอยู่ที่ช่อง 49 ซึ่งว่าด้วยการวัดมุมมาตราอังกฤษ ตอนท้ายของช่องนี้เป็นคำถามเพื่อทดสอบความเข้าใจในเรื่องที่กำลังเรียน มีคำตอบไว้ให้ 3 คำตอบ ให้ท่านตอบคำถามด้วยตนเองก่อน แล้วจึงดูว่าคำตอบที่ให้ไว้ข้อไหนตรงกับคำตอบของท่าน แต่ละคำตอบจะนำท่านไปยังช่องใหม่ ตัวอย่างเช่น ตอบตรงกับข้อ (ก) ให้ไปดูคำชี้แจงในช่อง 70 ตอบตรงกับข้อ (ข) ให้ไปดูคำชี้แจงในช่อง 39 และตอบตรงกับข้อ (ค) ให้ไปดูคำชี้แจงในช่อง 44 สมมุติว่าคำตอบข้อ (ค) เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ในช่อง 44 ก็จะบอกให้ท่านทราบว่าคำตอบของท่านถูกต้อง และจะบอกให้ท่านต่อไปยังช่องของบทต่อไปได้ แต่ถ้าคำตอบของท่านตรงกับข้ออื่น ความผิดพลาดของท่านก็จะอธิบายไว้ในช่องนั้น แล้วมีคำถามให้ท่านทดลองทำอีกครั้ง ทำเสร็จแล้วให้ติดตามดูคำชี้แจงในช่องต่อไป ถ้าคราวนี้ท่านทำได้ถูกต้องแล้ว ท่านก็จะขึ้นบทต่อไปได้ แต่ถ้ายังไม่ถูกอีกก็จะมีคำอธิบายให้ทราบอีก

WORK BOOK

Work Book จำเป็นต้องใช้คู่กับบทเรียนโดยตลอด การเรียนคณิตศาสตร์ต้องการการ

ฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอเพื่อให้สามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ หลังจากจบบทเรียนบทใดบทหนึ่งแล้ว ก่อนจะขึ้นบทต่อไป จะมีคำสั่งให้ทำแบบฝึกหัดใน Work Book แบบฝึกหัดเหล่านี้จะช่วยให้ท่านฝึกหัดนำความรู้ไปใช้ให้เป็นผล และช่วยให้ท่านเข้าใจจดจำเนื้อหาวิชาได้แม่นยำขึ้น นอกจากนั้น แบบฝึกหัดยังจะช่วยให้ท่านได้ฝึกหัดทดสอบใช้ความรู้เพื่อการสอบด้วย

<u>วิธีติดตามในการสอน</u>

1. จดหมายเลขช่องที่ท่านกำลังทำอยู่ ถ้าไม่จดจำไว้ท่านอาจจะหลงและจะยุ่งยากในการกลับไปหาว่าเคิมเรียนมาถึงตรงไหน ท่านอาจจะใช้ Work Book เป็นเครื่องทบทวนได้เป็นอย่างดี เพราะท่านย่อมทราบดีว่าแบบฝึกหัดบทไหนใน Work Book ที่พึ่งทำเสร็จไป ในนั้นจะมีคำสั่งเกี่ยวกับช่องต่อไปในตัวบทเรียนนี้บอกให้ท่านทราบว่าท่านจะต้องศึกษาต่อช่องไหน

2. คำจำกัดความหรือนิยามและสูตรสำคัญ ๆ ซึ่งท่านจะต้องจำได้ทำเครื่องหมายให้เด่นชัดแล้วโดยเขียนอยู่ในกรอบสี่เหลี่ยม สิ่งที่ควรปฏิบัติก็คือ

ก. จดนิยามและสูตรเหล่านี้ไว้เป็นพิเศษในสมุดบันทึก

ข. ต้องแน่ใจว่าท่านเข้าใจและจำได้แม่นยำแล้ว

ค. บันทึกหมายเลขช่องของนิยามหรือสูตรแต่ละข้อไว้เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อ ๆ ไป

3. ความมุ่งหมายของบทเรียนนี้คือสอนให้ท่านเข้าใจตรีโกณมิติและนำไปใช้อย่างได้ผล แต่ความสำเร็จขึ้นอยู่กับตัวท่านเอง เวลาทำแบบฝึกหัดอย่าทำแบบเดาสุ่ม แต่จงทำออกมาจริง ๆ และทำให้เรียบรอย

<u>คำเตือน</u>

คุณค่าของวิธีการสอนแบบนี้จะไม่มีผล ถ้าท่านไม่ติดตามรายการสอนไปตามลำดับ หรือไม่ทำตามคำสั่งเมื่อเรียนจบแต่ละช่อง.

—oo—

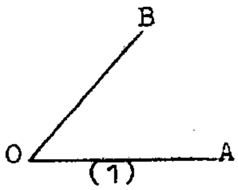
สารบัญ

ความหมายของวิชาตรีโกณมิติ

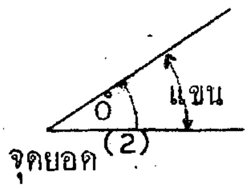
วิชาตรีโกณมิติ (Trigonometry) เป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ ซึ่งว่าด้วยการวัดและคำนวณเกี่ยวกับด้าน มุมและพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม มาจากคำว่า Tri-ตรี แปลว่า สาม gono-โกณ แปลว่า ด้านหรือเหลี่ยม metry-มิติ แปลว่า การวัด ทั้งนี้เพราะกำเนิดของวิชาตรีโกณมิติ ก็เพื่อใช้แก้ปัญหาในรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมจะแก้ได้เมื่อสามารถคำนวณหาด้านและมุมทั้งหมดได้จากด้านและมุมที่รู้แล้ว หรือกำหนดมาให้

มุมที่จุดใด ๆ (Angles at a point)

มุมเกิดขึ้นเมื่อเส้นตรงสองเส้นมาพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

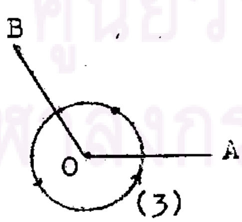


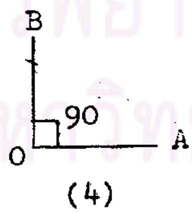
ในรูปที่ 1 เส้นตรง AO กับ BO พบกันที่จุด O มุมที่เกิดขึ้นเรียกว่ามุม BOA หรือมุม AOB เครื่องหมาย $\angle$ หรือ $\frown$ ใช้เป็นสัญลักษณ์บอกมุม ดังนั้นมุมที่เกิดขึ้นนี้อาจเขียนได้ว่า $B\hat{O}A$ หรือ $A\hat{O}B$ หรือ $\angle BOA$ หรือ $\angle AOB$

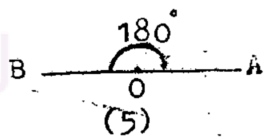


ในการเรียกชื่อมุมใช้อักษร 3 ตัว อักษรตัวกลางบอกจุดที่เกิดมุม เส้นตรงทั้งสองที่ทำให้เกิดมุมเรียกว่า "แขน" (Arms) ของมุม (ดังรูปที่ 2) จุดที่แขนทั้งสองมาพบกันเรียกว่า "จุดยอด" (Vertex)

การวัดมุมโดยการหมุน (Measuring Angles by Rotation)







ในรูปที่ 3 ให้เส้น OB ตั้งต้นในตำแหน่งเดียวกับ OA แล้วหมุนไปรอบจุด O ในทิศทางตามลูกศร เมื่อหมุนไปจนกระทั่งกลับสู่ตำแหน่ง OA อีกครั้งหนึ่ง เป็นอันว่าหมุนครบ 1 รอบ มุมที่เกิดจากการหมุนครบ 1 รอบนี้ แบ่งออกได้เป็น 360 ส่วนเท่า ๆ กัน ส่วนเหล่านี้เรียกว่าองศา (Degree) ดังนั้น การหมุนครบ 1 รอบจึงเป็นมุม 360 องศา เขียนโดยย่อว่า 360° หนึ่งใน

สี่ของรอบเรียกว่า มุมฉาก และเป็นมุม 90 องศา (เขียนว่า 90°) รูปที่ 4 แสดงให้เห็นมุมฉาก พึงสังเกตเครื่องหมายที่ใช้บอกมุมฉาก ตัวอย่างของมุมฉากคือ มุมระหว่างพื้นห้องกับผนัง ในรูปที่ 5 แสดงให้เห็นว่า ครึ่งหนึ่งของรอบเกิดเป็นเส้นตรง ดังเช่น $A\hat{O}B$ เป็น 180° หรือ 2 มุมฉาก และ AOB เป็นเส้นตรง

นิยาม มุมเกิดขึ้นจากการหมุนของเส้นตรงรอบจุดคงที่ (fixed point) จุดคงที่นั้นคือจุดยอดของมุม

การหมุนของเส้นตรงรอบจุดคงที่ จะหมุนกี่รอบก็ได้ไม่จำกัด อาจจะเป็น 3 รอบ, 10 รอบ, 50 รอบ หรือมากกว่านั้นก็ได้

คำถาม เส้นตรง OA หมุนรอบจุด O เป็นจำนวนหนึ่งรอบครึ่ง ตำแหน่งสุดท้ายของเส้นคือ OB อยากทราบว่าคำตอบต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง?

(ก) BOA ทำมุมหนึ่งมุมฉาก (ไปที่ช่อง 59)

(ข) BOA เป็นเส้นตรง (ไปที่ช่อง 36)

(ค) OB และ OA ทับกันสนิท (ไปที่ช่อง 71)

(จากช่อง 1) ช่อง 59

ท่านไม่ได้คำตอบที่ถูกต้อง เพราะว่าเมื่อ OA หมุนไปครบหนึ่งรอบ จะกลับไปสู่ตำแหน่ง OA ใหม่อีกครั้ง ต่อจากนั้น OA หมุนไปอีกครึ่งรอบ รวมทั้งหมดเป็น $1\frac{1}{2}$ รอบ ตำแหน่งของOB จึงทำมุมเท่ากับครึ่งรอบ นั่นคือ 180° ดังนั้น BOA จึงเป็นเส้นตรง กล่าวโดยทั่วไปแล้ว ถ้าเส้นตรงหมุนมากกว่าหนึ่งรอบ จำนวนเต็มรอบนั้นลบทิ้งไปได้ ตำแหน่งสุดท้ายของเส้นได้จากเศษของการหมุนที่เหลืออยู่ ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเส้นตรงหมุนไป $3\frac{3}{4}$ รอบ ตำแหน่งสุดท้ายของเส้นนั้นเป็นเสมือนกับหมุนไปเพียง $\frac{3}{4}$ รอบ คราวนี้พยายามตอบคำถามข้อนี้

คำถาม เส้นตรง OA หมุนรอบจุด O เป็นจำนวน $2\frac{1}{4}$ รอบ ตำแหน่งสุดท้ายของเส้นคือ OB มุมที่เกิดขึ้นโดยเส้น BO และ AO คือมุมอะไร?

ไปที่ช่อง 22 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 1)

ช่อง 36

ถูกต้อง คำตอบของท่านถูกต้อง เมื่อ OA หมุนไปครบหนึ่งรอบ ก็กลับมาอยู่ในตำแหน่งเดิมอีกครั้ง จากนั้น OA หมุนต่อไปอีกครึ่งรอบ รวมทั้งหมดเป็น $1\frac{1}{2}$ รอบ ตำแหน่งสุดท้ายของ OB จึงทำมุมเท่ากับครึ่งรอบคือ 180° ดังนั้น AOB จึงเป็นเส้นตรง ไปที่ช่อง 49

(จากช่อง 1)

ช่อง 71

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง OB ทับกันสนิทกับ OA เมื่อ OA หมุนไปครบหนึ่งรอบ แต่OA ยังต้องหมุนต่อไปอีกครึ่งรอบ รวมเป็น $1\frac{1}{2}$ รอบ ตำแหน่งสุดท้ายของ OB จึงทำมุมเท่ากับครึ่ง หนึ่งของรอบ นั่นคือ 180° ดังนั้น AOB จึงเป็นเส้นตรง กล่าวโดยทั่วไปแล้ว ถ้าเส้นตรงหมุนไปมากกว่าหนึ่งรอบ จำนวนเต็มรอบนั้นลบทิ้งได้ และตำแหน่งสุดท้ายของเส้นได้จากเศษของการหมุนที่เหลืออยู่ ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเส้นตรงหมุนไป $3\frac{3}{4}$ รอบ ตำแหน่งสุดท้ายของเส้นนั้นเป็นเสมือนกับหมุนไปเพียง $\frac{3}{4}$ รอบ คราวนี้พยายามตอบคำถามข้อนี้

<u>คำถาม</u> เส้น OA หมุนรอบจุด O เป็นจำนวน $2\frac{1}{4}$ รอบ ตำแหน่งสุดท้ายของเส้นคือ OB มุมที่เกิดขึ้นโดยเส้น BO และ AO คือมุมอะไร ไปที่ช่อง 22 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 59 หรือ 71)

ช่อง 22

ถ้าคำตอบของท่านคือหนึ่งมุมฉากก็ถูกต้อง คำตอบอื่น ๆ ผิด เส้นตรง OA หลังจากหมุนไปครบ 2 รอบแล้ว ก็กลับไปสู่ตำแหน่งตั้งต้นอีกครั้งหนึ่ง เมื่อหมุนต่อไปอีก $\frac{1}{4}$ รอบ ตำแหน่งสุดท้ายจึงเป็นเสมือนกับว่าเส้นนั้นเพิ่งหมุนไปได้ $\frac{1}{4}$ รอบ นั่นคือ 90° หรือหนึ่งมุมฉาก

ถ้าคำตอบของท่านถูก ไปที่ช่อง 49

ถ้าคำตอบของท่านผิด แสดงว่ายังไม่เข้าใจบทเรียนแท้จริง กลับไปที่ช่อง 1 และตั้งต้นใหม่

(จากช่อง 22 หรือ 36)

ช่อง 49

<u>การวัดมุมมาตราอังกฤษ (Sexagesimal measure for angles)</u> หนึ่งรอบของ

เส้นตรงที่หมุนรอบจุดคงที่แบ่งได้เป็น 360 ส่วนเท่า ๆ กัน แต่ละส่วนเรียกว่า 1 องศา หนึ่งมุมฉากคือ $\frac{1}{4}$ ของรอบ คือ 90° แต่ละองศาในระบบอังกฤษแบ่งต่อไปได้อีกเป็น 60 ลิปดา (minutes) เขียนโดยย่อว่า $60' = 1^\circ$ (60 ลิปดาเท่ากับหนึ่งองศา) แต่ละลิปดาสามารถแบ่งออกไปได้อีกเป็น 60 ฟิลิปดา (seconds) หนึ่งฟิลิปดาเป็นมุมที่เล็กมาก หน่วยของมุมเล็กขนาดนี้ใช้ในการเดินเรือและการสำรวจ แต่ในวิชาคณิตศาสตร์ส่วนมากไม่ใช้ถึงฟิลิปดา 60 ฟิลิปดาเขียนโดยย่อว่า $60''$

<u>การบวกมุมในมาตราอังกฤษ</u>

<u>ตัวอย่าง</u> จงบวก $26^\circ\ 36'$ กับ $37^\circ\ 29'$

$$\begin{array}{rrr} & 26^\circ & 36' \\ + & 37^\circ & 29' \\ \hline & 64^\circ & 05' \\ \hline\hline \end{array}$$

<u>หมายเหตุ</u> (1) $36' + 29' = 65'$ ซึ่งเท่ากับ $1^\circ 5'$ จึงทดหนึ่งองศาไปรวมกับพวกองศาด้วยกัน

(2) $26^\circ + 37^\circ = 63^\circ$ บวกกับที่ทดมาอีก 1° จึงเป็น 64°

<u>การลบมุมในมาตราอังกฤษ</u>

<u>ตัวอย่าง</u> จงลบ $34^\circ\ 27'$ จาก $90^\circ\ 00'$

$$\begin{array}{rrr} & 90^\circ & 00' \\ - & 34^\circ & 27' \\ \hline & 55^\circ & 33' \\ \hline\hline \end{array}$$

<u>หมายเหตุ</u> (1) ขอยืมมา $1^\circ = 60'$ ลบ $27'$ จาก $60' = 33'$

(2) $89^\circ - 34^\circ$ เหลือ 55°

<u>คำถาม</u> จงลบ $78^\circ\ 48'$ ออกจาก $180^\circ\ 00'$

<u>ตอบ</u> (ก) $101^\circ\ 52'$ ไปที่ช่อง 70

(ข) $111^\circ\ 52'$ ไปที่ช่อง 39

(ค) $101^\circ\ 12'$ ไปที่ช่อง 44

(จากช่อง 49) ช่อง 70

คำตอบ $101^\circ\ 52'$ ผิด ท่านลืมลบ $48'$ ออกจาก $60'$ ซึ่งจะเหลือ $12'$ คำตอบที่ถูกต้องคือ $101^\circ\ 12'$ จงตรวจดูการลบของท่าน พิสูจน์กับคำตอบที่ถูกต้อง แล้วตอบคำถามข้อนี้

<u>คำถาม</u> จงลบ $27^\circ\ 18'$ ออกจาก $90^\circ\ 00'$

ไปที่ช่อง 13 เพื่อตรวจคำตอบ

ช่อง 39

(จากช่อง 49)

คำตอบของท่านผิด วิธีคิดคำนวณที่ถูกต้องเป็นดังนี้

$$\begin{array}{rr} 180^\circ & 00' \\ -\ \underline{78^\circ} & \underline{48'} \\ \underline{\underline{101^\circ}} & \underline{\underline{12'}} \end{array}$$

<u>อธิบาย</u>

(1) $60' - 48' = 12'$

(2) $179^\circ - 78^\circ = 101^\circ$

ตรวจดูการคิดคำนวณของท่านว่าผิดตรงไหน แล้วตอบคำถามข้อนี้

<u>คำถาม</u> จงลบ $27^\circ\ 18'$ ออกจาก $90^\circ\ 00'$

ไปที่ช่อง 13 เพื่อตรวจคำตอบ

ช่อง 44

(จากช่อง 49)

คำตอบของท่านถูกต้อง จงทำแบบฝึกหัดที่ 1 ใน Work Book ซึ่งท่านจะได้ฝึกการวัดมุมแบบมาตราอังกฤษเพิ่มเติม เมื่อทำแบบฝึกหัดที่ 1 เสร็จแล้วไปที่ช่อง 38

ช่อง 13

(จากช่อง 39 หรือ 70)

วิธีทำที่ถูกต้องคือ

$$\begin{array}{rr} 90^\circ & 00' \\ -\ \underline{27^\circ} & \underline{18'} \\ \underline{\underline{62^\circ}} & \underline{\underline{42'}} \end{array}$$

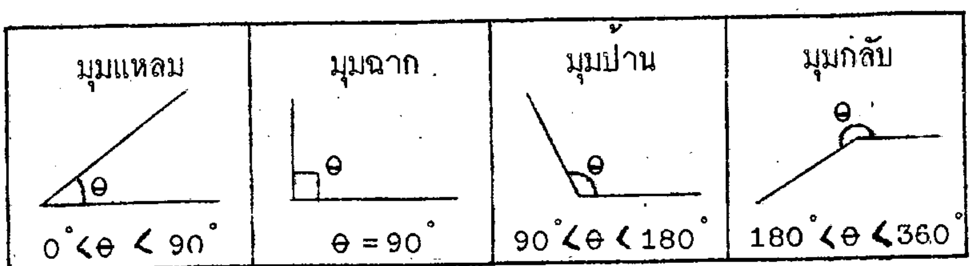
ถ้าคำตอบของท่านยังไม่ถูก กลับไปที่ช่อง 49 และทบทวนบทเรียนใหม่ ถ้าคำตอบของท่านถูกต้อง ไปทำแบบฝึกหัดที่ 1 ใน Work Book เพื่อฝึกหัดเพิ่มเติม เมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จแล้ว ไปที่ช่อง 38

ช่อง 38

(จากช่อง 13 หรือ 44 หรือแบบฝึกหัดที่ 1)

<u>ประเภทของมุมกำหนดตามความกว้าง</u>

ตัวอักษรกรีก θ (ออกเสียงว่า "theta") ใช้สำหรับเรียกชื่อมุมที่จะพิจารณา



แสดงให้เห็นมุมชนิดต่าง ๆ แบ่งตามขนาดความกว้างของมุม

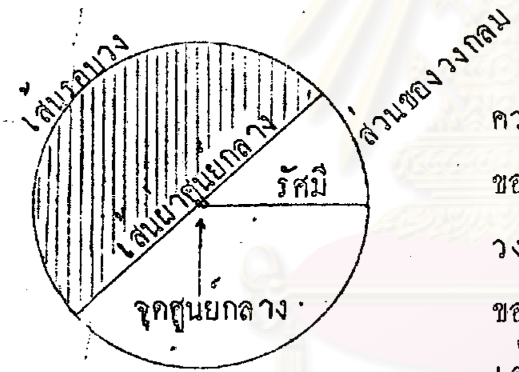
มุมแหลม มุมชนิดนี้กางน้อยกว่า 90° หรือน้อยกว่า 1 มุมฉาก ถ้ามุมนั้นคือ θ เราเขียนได้ว่า $\theta < 90°$ และโดยเหตุที่มุมนั้นต้องใหญ่กว่า 0° ด้วย เพราะว่าแขนข้างหนึ่งจะต้องหมุนให้เกิดมุม ดังนั้น $\theta > 0°$ เพราะฉะนั้น มุมแหลมจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° เขียนย่อ ๆ ว่า $0° < \theta < 90°$

มุมฉาก มุมฉากคือมุมหนึ่งในสี่ของรอบ เป็นมุม 90° เขียนเป็นตัวเลขว่า $\theta = 90°$ จงสังเกตเครื่องหมายสำหรับบอกมุมฉากด้วย

มุมป้าน มุมชนิดนี้ใหญ่กว่า 90° แต่เล็กกว่า 180° ถ้ามุมนั้นคือ θ ดังนั้น $\theta > 90°$ และ $\theta < 180°$ เพราะฉะนั้น $90° < \theta < 180°$

มุมกลับ มุมชนิดนี้ใหญ่กว่า 180° แต่เล็กกว่า 360° เขียนโดยย่อสำหรับมุม θ ว่า $180° < \theta < 360°$

ควอดแรนต์และวงกลม (Quadrants and circles)



ส่วนต่าง ๆ ของวงกลม แสดงให้เห็นในรูป ความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลาง (d) เป็น 2 เท่าของเส้นรัศมี (r) พื้นที่แรเงาเป็นครึ่งหนึ่งของรูปวงกลม (semi-circle) ควอดแรนต์ คือหนึ่งในสี่ของวงกลม เส้นรอบวง (circumference) คือเส้นโค้งรอบวงกลม, วงกลมซึ่งมีรัศมี r จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ ซึ่ง π เป็นค่าคงที่ มีค่าเท่ากับ 3.142 หรือประมาณ $\frac{22}{7}$ (หรือ $\pi = 180°$)

(π เป็นตัวอักษรกรีก ออกเสียงว่า "pi")

คำถาม มุมป้านใหญ่กว่าหรือเล็กกว่ามุมกลับ

ตอบ (ก) ใหญ่กว่า ไปที่ช่อง 29

(ข) เล็กกว่า ไปที่ช่อง 47

(จากช่อง 38) ช่อง 28

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง มุมป้านเล็กกว่า 180° และมุมกลับใหญ่กว่า 180° ดังนั้นมุมป้านต้องเล็กกว่ามุมกลับ พยายามตอบคำถามข้อนี้

คำถาม มุม 160° เป็นมุมแหลมหรือมุมป้าน หรือมุมกลับ?

ไปที่ช่อง 19 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 38) ช่อง 47

คำตอบของท่านถูกต้อง ไปทำแบบฝึกหัดที่ 2 ใน Work Book เพื่อทดสอบความรู้เรื่องมุมชนิดต่าง ๆ เมื่อจบแบบฝึกหัดที่ 2 แล้วไปที่ช่อง 21

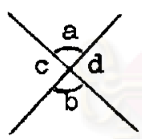
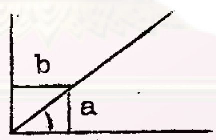
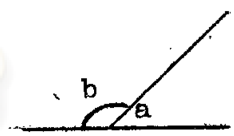
(จากช่อง 28) ช่อง 19

มุม 160° กางน้อยกว่า 180° แต่ใหญ่กว่า 90° ถ้า $\theta = 160^\circ$ ดังนั้น $\theta < 180^\circ$ และ $\theta > 90^\circ$ ดังนั้น $90^\circ < \theta < 180^\circ$ นั่นคือเป็นมุมป้าน ถ้าคำตอบของท่านคือ "มุมป้าน" ไปทำแบบฝึกหัดที่ 2 ใน Work Book เพื่อทดสอบความรู้เรื่องมุมชนิดต่าง ๆ เมื่อจบแบบฝึกหัดที่ 2 แล้ว ไปที่ช่อง 21 แต่ถ้าคำตอบของท่านไม่ถูก เป็นการสมควรอย่างยิ่งที่จะทบทวนความหมายของมุมใหม่ กลับไปที่ช่อง 38 และตั้งต้นใหม่

(จากช่อง 19 หรือ 47 หรือ แบบฝึกหัดที่ 2) ช่อง 21

<u>ความสัมพันธ์ของมุม (The relationship of angles)</u>

มุมประชิด คือ มุมที่มีจุดยอดร่วมกัน

มุมตรงข้าม	มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก	มุมประกอบสองมุมฉาก
		
$a=b,\quad c=d$	$a+b=90^\circ$	$a+b=180^\circ$

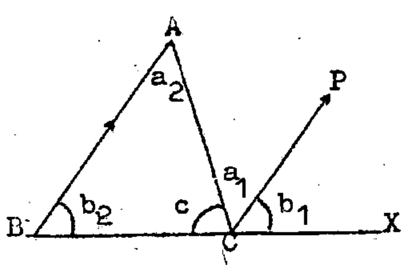
แสดงให้เห็นแบบสำคัญ ๆ ของมุมประชิด

<u>มุมตรงข้าม</u> ย่อมเท่ากัน

<u>มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก</u> คือมุมที่รวมกันแล้วเท่ากับ 90° หรือหนึ่งมุมฉาก

<u>มุมประกอบสองมุมฉาก</u> คือมุมที่รวมกันแล้วเท่ากับ 180° หรือสองมุมฉาก

<u>ผลบวกของมุมภายในสามเหลี่ยม</u>



ในรูป ABC เป็นสามเหลี่ยม ต่อด้าน BC ไปจนถึงจุด X และลากเส้น CP ผ่าน C ให้ขนานกับ AB

$a_1 = a_2$ (เพราะว่า AB ขนานกับ CP)

$b_1 = b_2$ (เพราะว่า AB ขนานกับ CP)

แต่ $c+a_1+b_1 = 180^\circ = 2$ มุมฉาก

มุมทั้งสามในสามเหลี่ยมบวกกันเท่ากับสองมุมฉาก หรือ 180°

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> มุมประกอบสองมุมฉากของ 57° คือมุมอะไร?

มุมประกอบสองมุมฉาก คือมุมที่บวกกันเป็น 180°

$\therefore$ มุมประกอบสองมุมฉาก คือ $180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> มุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ 64° คือมุมอะไร?

มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก คือมุมที่บวกกันเป็น 90°

$\therefore$ มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก คือ $90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ต่อไปนี้ อะไรคือ (ก) มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก และ

(ข) มุมประกอบสองมุมฉากของ 85°

(ก) มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก คือ $90^\circ - 85^\circ = 5^\circ$

(ข) มุมประกอบสองมุมฉาก คือ $180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$

<u>คำถาม</u> ก) มุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ 63° คือมุมอะไร?

ข) มุมประกอบสองมุมฉากของ 124° คือมุมอะไร?

ค) มุมสองมุมในสามเหลี่ยมคือ มุม 68° และ 75° มุมที่สามของสามเหลี่ยม.นี้จะกางกี่องศา

ไปที่ช่อง 32 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 21) ช่อง 32

คำตอบคือ (ก) 27° (ข) 56° (ค) 37° ถ้าท่านตอบถูกทั้งสามข้อ ไปทำแบบฝึกหัดที่ 3 ใน Work Book หลังจากทำแบบฝึกหัดที่ 4 เสร็จแล้ว ต่อไปยังช่อง 33 ถ้าท่านตอบไม่ถูกครบทั้งสามข้อ ไปที่ช่อง 54

(จากช่อง 32) ช่อง 54

คำตอบที่ให้ทำได้ดังนี้

มุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ 63° คือ $90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$

มุมประกอบสองมุมฉากของ 124° คือ 180°–124° = 56°

มุมสองมุมในสามเหลี่ยมบวกกันได้ 68° + 75° = 143° มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมบวกกันได้ 180° ฉะนั้นมุมที่เหลือ คือ 180°–143° = 37°

<u>คำถาม</u> (ก) มุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ 16° คืออะไร?

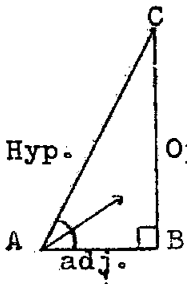
(ข) มุมสองมุมในสามเหลี่ยมคือ 109° และ 37° จงหามุมที่สาม

ไปที่ช่อง 14 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 54) ช่อง 14

คำตอบคือ (ก) 74° (ข) 34° ถ้าท่านตอบถูกทั้งสองข้อ ให้ไปทำแบบฝึกหัดที่ 3 ใน Work Book หลังจากทำแบบฝึกหัดที่ 3 เสร็จแล้ว ต่อไปที่ช่อง 33 ถ้าท่านตอบไม่ถูกครบทั้งสองข้อ กลับไปที่ช่อง 21 และทบทวนความสัมพันธ์ของมุมใหม่

(จากช่อง 14 หรือ 32 หรือแบบฝึกหัดที่ 3) ช่อง 33



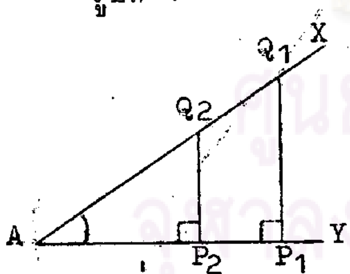
รูปที่ 1

<u>อัตราส่วนตรีโกณมิติ (The Trigonometrical Ratios)</u>

ในรูปที่ 1 ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม B เป็นมุมฉาก พิจารณามุม A ด้าน AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก (Hypotenuse) ด้าน AB เป็นด้านประชิด (Adjacent) ของมุม A และด้าน BC เป็นด้านตรงข้ามมุม (Opposite) ของมุม A

Tangent ของมุม A = $\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$

Tangent ของมุม A เขียนย่อ ๆ ว่า tan A



รูปที่ 2

รูปที่ 2 แสดงมุม A กับแขน AX และ AY จุด P_1 และ P_2 เป็นจุดใด ๆ บน AY ลากเส้นตั้งฉาก P_1Q_1 และ P_2Q_2 ไปยัง AX สามเหลี่ยม AP_1Q_1 และสามเหลี่ยม AP_2Q_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย (similar) ดังนั้น $\frac{Q_1P_1}{Q_2P_2} = \frac{AP_1}{AP_2}$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $\frac{Q_1P_1}{AP_1} = \frac{Q_2P_2}{AP_2} = \tan A$

ฉะนั้น สำหรับมุม A ใด ๆ ที่กำหนดให้ อัตราส่วนของเส้นที่ลากตั้งฉากกับฐานด้านประชิดมุม จะคงที่เสมอ และอัตราส่วนนี้เรียกว่า tangent ของ A แต่ละมุมจะมีค่า tangent ของมันเอง

<u>แบบฝึกหัดที่ 1</u> จงสร้างมุม XAY = 40° โดยใช้ไม้โปรแทรกเตอร์ แขน AX และ AY ลากยาวเท่าใดก็ได้ตามต้องการ ให้จุด P_1, P_2 และ P_3 เป็นจุดใด ๆ บน AY ลากเส้น P_1Q_1, P_2Q_2 และ P_3Q_3 ตั้งฉากกับ AY คล้ายดังรูปที่ 2 วัดความยาวของ AP_1, AP_2, AP_3, P_1Q_1 P_2Q_2 และ P_3Q_3 แล้วจงคำนวณหาอัตราส่วน $\frac{P_1Q_1}{AP_1}, \frac{P_2Q_2}{AP_2}, \frac{P_3Q_3}{AP_3}$ เปรียบเทียบกันระหว่างอัตราส่วนทั้งสาม ท่านควรจะได้ค่าโดยประมาณ (ของแต่ละอัตราส่วน) 0.84

(เครื่องหมาย ≃ หมายถึง "ประมาณเท่ากับ")

<u>Sine ของมุม</u>

ในรูปที่ 1 Sine ของมุม A $= \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}} = \frac{BC}{AC}$

Sine ของมุม A เขียนย่อ ๆ ว่า sin A สำหรับมุม A ใด ๆ ที่กำหนดให้ อัตราส่วนของด้านตรงข้ามมุมกับด้านตรงกันข้ามฉาก ย่อมคงที่เสมอ แต่ละมุมย่อมมีค่า sine ของมันเอง

<u>Cosine ของมุม</u>

ในรูปที่ 1 Cosine ของมุมA $= \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}} = \frac{AB}{AC}$

Cosine ของมุม A เขียนย่อ ๆ ว่า cos A สำหรับมุมใด ๆ ที่กำหนดให้ อัตราส่วนของด้านประชิดมุมกับด้านตรงข้ามฉาก ย่อมคงที่เสมอ แต่ละมุมย่อมมีค่า Cosine ของมันเอง

<u>แบบฝึกหัดที่ 2</u> จากรูปในแบบฝึกหัดที่ 1 หาความยาวของด้าน AQ_1, AQ_2, AQ_3 แล้วคำนวณหาอัตราส่วนต่อไปนี้

(ก) $\frac{P_1Q_1}{AQ_1}, \frac{P_2Q_2}{AQ_2}, \frac{P_3Q_3}{AQ_3}$ (ข) $\frac{AP_1}{AQ_1}, \frac{AP_2}{AQ_2}, \frac{AP_3}{AQ_3}$

ท่านพบอะไรในการเปรียบเทียบค่าของอัตราส่วนทั้งหมด

อัตราส่วนในข้อ (ก) คือ Sine ของมุม ซึ่ง ≃ 0.64

อัตราส่วนในข้อ (ข) คือ Cosine ของมุม ซึ่ง ≃ 0.77

อัตราส่วนตรีโกณมิติจำเป็นต้องท่องจำให้ขึ้นใจ ดังที่สรุปให้ดังนี้

tan A = tangent ของมุม A = $\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}}$

sin A = sine ของมุม A = $\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}$

cos A = cosine ของมุม A = $\frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}$

คำถาม XYZ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม Y เป็นมุมฉาก และมี XY เป็นด้านฐาน ค่าของ sin X คือ

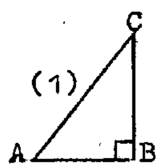
(ก) $\frac{XY}{XZ}$ ไปที่ช่อง 61

(ข) $\frac{YZ}{XZ}$ ไปที่ช่อง 3

(ค) $\frac{YZ}{XY}$ ไปที่ช่อง 50

(จากช่อง 33) ช่อง 61

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง XY เป็นด้านประชิดมุม และ XZ เป็นด้านตรงข้ามฉาก ดังนั้นอัตราส่วนที่ท่านตอบจึงเป็นของ cos X ด้านตรงข้ามมุมคือ YZ และอัตราส่วนที่ถูกต้องคือ $\frac{YZ}{XZ}$



คำถาม รูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ค่าของ cos A คือ

(ก) $\frac{AC}{BC}$ ไปที่ช่อง 73

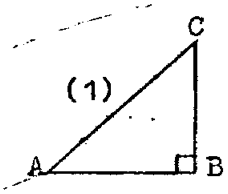
(ข) $\frac{AB}{AC}$ ไปที่ช่อง 69

(จากช่อง 33) ช่อง 3

คำตอบของท่านถูกต้อง ไปทำแบบฝึกหัดที่ 4 ใน Work Book หมั่นทบทวนกับตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ในช่อง 33 เมื่อเวลาทำแบบฝึกหัดและเมื่อเสร็จแบบฝึกหัดที่ 4 แล้วไปที่ช่อง 66

(จากช่อง 33) ช่อง 50

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง YZ เป็นด้านตรงข้ามมุมและ XY เป็นด้านประชิดมุม ฉะนั้น อัตราส่วนที่ได้จึงเป็นของ tan X อัตราส่วนที่ถูกต้องคือ $\frac{YZ}{XZ}$



<u>คำถาม</u> รูปนี้แสดงให้เห็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ค่าของ cos A คือ

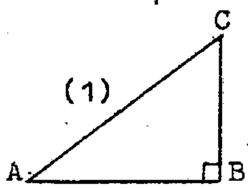
(ก) $\frac{AC}{BC}$ ไปที่ช่อง 73

(ข) $\frac{AB}{AC}$ ไปที่ช่อง 69

(จากช่อง 50 หรือ 61) ช่อง 73

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง AC เป็นด้านตรงข้ามฉาก และ BC เป็นด้านตรงข้ามมุม ด้านประชิดมุมคือ AB ฉะนั้น อัตราส่วนที่ถูกต้องคือ

$$\cos A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}} = \frac{AB}{CA}$$



<u>คำถาม</u> รูปนี้แสดงสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ค่าของ tan A คืออะไร?
ไปที่ช่อง 20 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 50 หรือ 61) ช่อง 69

คำตอบของท่านถูกต้อง ไปทำแบบฝึกหัดที่ 4 ใน Work Book หมั่นทบทวนกับตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติในช่อง 33 เมื่อเวลาทำแบบฝึกหัด และเมื่อเสร็จแบบฝึกหัดที่ 4 แล้วไปที่ช่อง 66

(จากช่อง 73) ช่อง 20

ในสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้ ด้านตรงข้ามมุม A คือ BC และด้านประชิดมุม A คือ AB

$$\tan A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

ถ้าคำตอบของท่านถูก ไปทำแบบฝึกหัดที่ 4 ใน Work Book หมั่นทบทวนกับตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติในช่อง 33 เมื่อเวลาทำแบบฝึกหัดและเมื่อเสร็จแบบฝึกหัดที่ 4 แล้วไปที่ช่อง 66

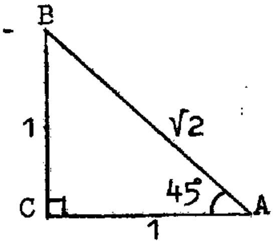
ถ้าคำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง แสดงว่ายังไม่เข้าใจวิธีหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ กลับไปที่ช่อง 33 อ่านคำอธิบายอย่างรอบคอบ และพยายามตอบคำถามใหม่อีกครั้งหนึ่ง

(จากช่อง 3 หรือ 20 หรือ 69 หรือแบบฝึกหัดที่ 4) ช่อง 66

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมพิเศษบางมุม

มุม 30°, 45° และ 60° ซึ่งเป็นเศษส่วนอย่างง่ายที่สุดของหนึ่งมุมฉาก มักจะเกิดขึ้นบ่อยมาก ในปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น จึงควรที่จะทราบอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมเหล่านี้ ในรูปที่ง่ายที่สุด

มุม 45°



รูปที่ 1

ในรูปที่ 1 ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้าน $BC = AC$

ดังนั้น $\hat{B} = \hat{A} = 45^\circ$

ถ้า BC และ $AC = 1$ หน่วยของความยาว

ดังนั้น $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 1+1 = 2$ (ตามทฤษฎีของไพธากอรัส)

$\therefore$ $AB = \sqrt{2}$ หน่วยของความยาว

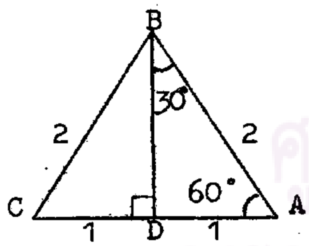
พิจารณา $\hat{A}$ ($= 45^\circ$)

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\pi = 180^\circ)$$

$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1} = 1$$

มุม 30° และ 60°



รูปที่ 2

ในรูปที่ 2 ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มี $BD \perp AC$ ถ้าแต่ละด้านเป็น 2 หน่วยความยาว ดังนั้น AD เป็น 1 หน่วยความยาวเพราะเส้นตั้งฉากแบ่งครึ่งด้านฐาน ในสามเหลี่ยม BDA

$AB^2 = BD^2 + AD^2$ (ตามทฤษฎีของไพธากอรัส)

$\therefore$ $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 4-1 = 3$

$\therefore$ $BD = \sqrt{3}$

สำหรับมุม 60° พิจารณามุม A

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{1} \text{ หรือ } \sqrt{3}$$

สำหรับมุม 30° พิจารณามุม DBA

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30^\circ = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ตัวอย่างของการใช้ค่ามุมเหล่านี้ อาจจะตอบในรูปเสอร์ดก็ได้ (รูปติด root) หรือทำเป็นรูปอย่างง่ายก็ได้ และจะหาค่ารากที่สองออกมาเป็นทศนิยมก็ได้

<u>คำถาม</u> ถ้ากล่าวว่า "sin 60° เท่ากับ cos 30°" ข้อความนี้ (ก) จริง หรือ
(ข) ไม่จริง

ไปที่ช่อง 60 เพื่อตรวจสอบคำตอบของท่าน

(จากช่อง 66) ช่อง 60

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ฉะนั้นข้อความนี้จึงเป็นความจริง ถ้าคำตอบของท่านถูกต้อง ต่อไปที่ช่อง 27 ถ้าคำตอบของท่านไม่ถูกต้อง อ่านทบทวนช่อง 66 อีก และพยายามตอบคำถามใหม่อีกครั้ง

(จากช่อง 60) ช่อง 27

<u>วิธีใช้ตารางตรีโกณมิติ</u>

ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมทั้งหมดอ่านได้จากตาราง วิธีใช้ตารางตรีโกณมิติจะแสดงด้วยตัวอย่าง tangent ของมุม ค่า tangent ของมุมหาได้จากตารางที่เรียกว่า "Natural Tangents" นี่คือ ส่วนหนึ่งของตาราง Natural Tangents

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
32°	0.6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
59°	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
63°	1.9626	9711	9797	9883	9970	$\overline{0057}$	$\overline{0145}$	$\overline{0233}$	$\overline{0323}$	$\overline{0413}$	15	29	44	58	73

ช่องแรกทางซ้ายสุดของตาราง บอกจำนวนองศา ตอนบนสุดของช่องถัด ๆ ไปบอกจำนวนลิบดาซึ่งเขียนไว้ว่า 0′, 6′, 12′, 18′ ฯลฯ ในช่อง 0′ จะบอกค่าของ tangent ของจำนวนองศา ในช่ององศา ตัวอย่างเช่น tan 32° = 0.6249, tan 59° = 1.6643 ตัวเลขในช่อง 6′, 12′ ฯลฯ เป็นค่าทศนิยมเท่านั้น ให้เข้าใจว่าจำนวนเต็มหน้าจุดทศนิยมเท่ากับในช่อง 0′ ตัวอย่างเช่น

$\tan 59^\circ 42' = 1.7113$ ~~เมื่อจำนวนเต็มหน้าจุดทศนิยมเปลี่ยนไป~~ จะแสดงให้รู้ด้วยขีดบนตัวเลข ตัวอย่าง $\tan 63^\circ 24'$ เป็น 1.9970, $\tan 63^\circ 30'$ เป็น 2.0057 ตัวเลข 0057 จะมีขีดข้างบน เพื่อแสดงให้รู้ว่าเลขจำนวนเต็มหน้าจุดทศนิยมเปลี่ยนจาก 1 เป็น 2 ค่ากลาง ๆ ของลิบดาแสดงไว้ในช่องผลต่าง (Mean Difference)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\tan 32^\circ 40'$

$\because \tan 32^\circ 36' = 0.6395$

บวกกับผลต่างอีก $4' = \underline{\quad 16}$

$\therefore \tan 32^\circ 40' = \underline{\underline{0.6411}}$

จะเห็นว่าค่าของ $\tan 32^\circ 40'$ ในตารางจะอยู่ในระหว่างค่าของ $\tan 32^\circ 36'$ และ $\tan 32^\circ 42'$ แทนที่จะบวก $4'$ กับ $36'$ เราอาจจะลบ $2'$ ออกจาก $42'$ ก็ได้ แต่ผลลัพธ์ที่ออกจะไม่เท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า $\tan 59^\circ 47'$

$\because \tan 59^\circ 42' = 1.7113$	$\because \tan 59^\circ 48' = 1.7182$
บวกกับผลต่างอีก $5' = \underline{\quad 56}$	ลบด้วยผลต่าง $1' = \underline{\quad 11}$
$\therefore \tan 59^\circ 47' = \underline{\underline{1.769}}$	$\therefore \tan 59^\circ 47' = \underline{\underline{1.7171}}$

ผลลัพธ์ 1.7171 ดีกว่า เพราะใช้ผลต่างน้อยกว่า ในตารางค่าทศนิยมสี่ตำแหน่ง ตำแหน่งที่สี่เชื่อถือไม่ได้มากนัก คำตอบจะเอาถูกต้องเพียง 3 ตำแหน่งแรกเท่านั้น สำหรับมุมใกล้ 90° ไม่ได้ให้ค่าผลต่างไว้ในตาราง จะต้องคิดหาเอาเอง เช่น จงหาค่าของ $\tan 38^\circ 8'$

$\tan 83^\circ 12' = 8.3863$	เนื่องจากผลต่างของ $6' = 0.1227$
$\tan 83^\circ 06' = \underline{8.2636}$	$\therefore$ ผลต่าง $1' = 0.0204$
ผลต่างของ $6' = \underline{0.1227}$	$\therefore$ ผลต่าง $2' = 0.0408$
$\tan 83^\circ 06' = 8.2636$	(ใช้เทียบบัญญัติไตรยางค์)
บวกผลต่าง $2' = \underline{0.0408}$ +	
$\tan 83^\circ 08' = \underline{\underline{8.3044}}$	(ทศนิยมตำแหน่งที่สี่เชื่อถือไม่ได้มากนัก)

การหามุมที่มีค่า tangent เป็น 1.7134 ให้ดูจากตารางหาจำนวนที่ใกล้นี้ที่สุดจะพบ 1.7113 ซึ่งเป็นค่าของ $\tan 59^\circ 42'$ ผลต่าง (1.7134–1.7113) คือ 21 จำนวนที่ใกล้ 21 ที่สุดคือ

ผลต่าง 23 ของ 2′ ฉะนั้น 1.7134 คือ tan 59° 44′

ค่าของ sine และ cosine ของมุม หาได้โดยวิธีเดียวกับการหาค่า tangent ทุกประการ โดยดูจากตาราง "Natural Sines" และ "Natural Cosines" การหาค่าของ sine และ cosine เป็นเรื่องง่ายเพราะทุกค่าของ sine และ cosine น้อยกว่า 1 เสมอ ผลต่างสำหรับ sine ในช่องผลต่างให้นำมาบวก (เหมือน tangent) แต่ผลต่างของ cosine ในช่องผลต่างให้นำมาลบ (เพราะมุมยิ่งโตขึ้น ค่า cosine ของมุมนั้นยิ่งน้อยลง) ดังนั้น สำหรับค่าของ cosine นี้ พึงจำหลักต่อไปนี้ให้ดี มิฉะนั้นจะเผลอผิดได้

"ถ้านำมุมมาบวกกัน จะต้องนำค่าของมุมมาลบกัน หรือถ้านำมุมมาลบกัน จะต้องนำค่าของมุมมาบวกกัน"

<u>คำถาม</u> จงหาค่าของ cos 36° 27′ จากตาราง

ไปที่ช่อง 16 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 27) ช่อง 16

$$\begin{array}{lcr} \cos 36^\circ 24' & = & 0.8049 \\ \text{ผลต่าง} \quad \overset{+}{3'} & = & \overset{-}{\underline{5}} \\ \therefore \cos 36^\circ 27' & = & \underline{0.8044} \end{array}$$

ท่านทำผิดดังต่อไปนี้บ้างหรือไม่?

1) ดูตัวเลขผิดแถว

2) ดูลิบดาผิดช่อง

3) เอาผลต่างมาบวก แทนที่จะนำมาลบสำหรับค่าของ cosine (หรือในทางกลับกัน) การฝึกอ่านตารางเป็นสิ่งจำเป็น ฉะนั้น จงไปทำแบบฝึกหัดที่ 5 ใน Work Book หมั่นทบทวนวิธีอ่านตารางในช่อง 27 เมื่อทำแบบฝึกหัดที่ 5 เสร็จแล้ว ต่อไปที่ช่อง 46

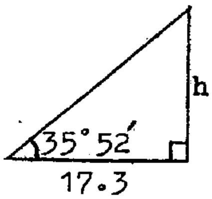
(จากช่อง 16 หรือแบบฝึกหัดที่ 5) ช่อง 46

<u>การแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก</u>

การแก้สามเหลี่ยม คือการหาด้านทั้งสามและมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม สามเหลี่ยม

ทุกรูปประกอบด้วย 6 ส่วนด้วยกัน (คือ 3 ด้าน และ 3 มุม) ถ้าทราบสามส่วน อีกสามส่วนที่เหลือก็หาได้ เว้นเสียแต่สามส่วนที่ทราบนั้นเป็นมุมเสียทั้งสาม ในสามเหลี่ยมมุมฉาก มุมหนึ่งคือมุมฉาก ย่อมเป็นมุมที่ทราบแล้วเสมอ ต้องการทราบอีกเพียง 2 ส่วน เพื่อใช้แก้สามเหลี่ยมนั้น สองส่วนที่ต้องการนั้นอาจจะเป็น (ก) ด้านหนึ่งด้านและมุมหนึ่งมุม หรือ (ข) ด้านสองด้าน แต่ถ้าเป็นมุมสองมุมจะไม่เพียงพอที่จะใช้แก้ปัญหาสามเหลี่ยม เนื่องจากมุมสามมุมบอกให้ทราบแต่เพียงรูปร่าง ไม่บอกขนาดความกว้าง

<u>การแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดด้านให้หนึ่งด้านและมุมให้หนึ่งมุม</u>



รูปที่ 1

รูปที่ 1 แสดงสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนดความยาวให้หนึ่งด้าน (17.3) และมุมให้หนึ่งมุม (33° 52′)

มุมที่สาม $= 180^\circ - 90^\circ - 33^\circ\ 52' = 56^\circ\ 08'$

ด้าน h หาได้จาก $\tan 33^\circ\ 52' = \dfrac{h}{17.3}$

$\therefore h = \tan 33^\circ\ 52' \times 17.3$

$= 0.6717 \times 17.3$

$= 11.61$

ด้านตรงข้ามฉากหาได้จาก $\cos 33^\circ\ 52' = \dfrac{17.3}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}$

$\therefore$ ด้านตรงข้ามฉาก $\times \cos 33^\circ\ 52' = 17.3$

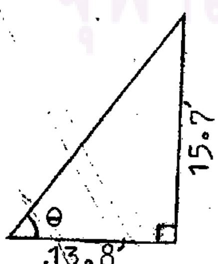
$\therefore$ ด้านตรงข้ามฉาก $= \dfrac{17.3}{\cos 33^\circ\ 52'}$

$= \dfrac{17.3}{0.8303}$

$= 20.83$

<u>ตอบ</u> มุมที่สามคือ 56° 08′ ด้านตรงข้ามฉาก คือ 20.83 และด้านที่เหลือคือ 11.61

<u>การแก้สามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดด้านให้สองด้าน</u>



รูปที่ 2

รูปที่ 2 แสดงสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งกำหนดด้านยาวสองด้าน ด้านหนึ่งยาว 15.7 และอีกด้านหนึ่งยาว 13.8 เลือกใช้มุม θ ที่กำหนดไว้ในการหาส่วนอื่น ๆ

$\tan \theta = \dfrac{15.7}{13.8}$

$= 1.138$

$\therefore \quad \theta = 48^\circ\ 42'$ (คิดเป็นลิบดาที่ใกล้ที่สุด)

มุมที่สาม $= 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ\ 42' = 41^\circ\ 18'$

$$\sin\ \theta = \frac{15.7}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}$$

$$\therefore \text{ด้านตรงข้ามฉาก} = \frac{15.7}{\sin\theta} = \frac{15.7}{\sin 48^\circ\ 42'} = \frac{15.7}{.7513} = 20.9$$

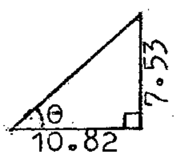
<u>ตอบ</u> ด้านที่เหลือยาว 20.9 และมุมอีก 2 มุมคือ $48^\circ\ 42'$ และ $41^\circ\ 18'$

<u>สรุปวิธีทำ</u> 1) ใช้ด้านทั้งสองที่กำหนดให้พิจารณามุมจากอัตราส่วนที่เหมาะสมที่สุด

2) พิจารณามุมที่สองจากข้อเท็จจริงที่ว่าต้องเท่ากับ $180^\circ - 90^\circ - \theta$

3) ใช้มุมหนึ่งมุมกับด้านหนึ่งด้านพิจารณาด้านที่เหลือ

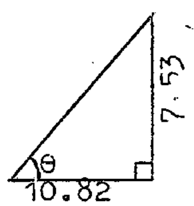
<u>คำถาม</u> รูปที่ 3 แสดงสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งกำหนดความยาวของด้านให้สองด้าน จงหาค่าของมุมทำเครื่องหมาย θ



<u>ตอบ</u> (ก) $\theta = 34^\circ\ 50'$ ไปที่ช่อง 53

(ข) $\theta =$ ค่าอื่น ๆ ไปที่ช่อง 68

(จากช่อง 46 หรือ ช่อง 68) ช่อง 53



ถูกแล้ว มุม θ เท่ากับมุม $34^\circ\ 50'$

$$\tan\ \theta = \frac{7.53}{10.82} = 0.6959$$

$\therefore \theta = 34^\circ\ 50'$ (ดูจากตารางว่า θ เท่ากับกี่องศา tangent จึงจะมีค่า 0.6959)

<u>คำถาม</u> จากรูปสามเหลี่ยมเดิม แต่คราวนี้จงหามุมที่เหลือและด้านตรงข้ามฉาก ดูคำตอบที่ช่อง 34

(จากช่อง 46) ช่อง 68

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง ตรวจดูวิธีทำของท่านใหม่อีกครั้ง เพื่อว่าจะทราบข้อผิดพลาดด้วยตนเอง ไปที่ช่อง 53 เพื่อดูวิธีทำที่ถูกต้องแล้วตอบคำถามในช่องนั้นด้วย

(จากช่อง 53) ช่อง 34

มุมที่เหลือเท่ากับ $180^\circ - 90^\circ - 34^\circ\ 50' = 55^\circ\ 10'$ ความยาวของด้านตรงข้ามฉากหาได้จาก

$$\sin 34^\circ\ 50' = \frac{7.53}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}$$

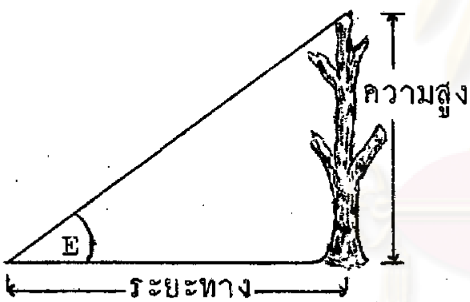
$$\therefore \sin 34^\circ\ 50' \times \text{ด้านตรงข้ามฉาก} = 7.53$$

$$\therefore \text{ด้านตรงข้ามฉาก} = \frac{7.53}{34^\circ\ 50'} = \frac{7.53}{0.5712} = 13.52$$

ถ้าท่านได้คำตอบถูกทั้งสองข้อ ไปทำแบบฝึกหัดที่ 6 ใน Work Book เสร็จแล้วไปที่ช่อง 40

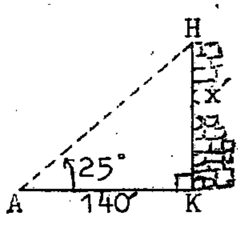
ถ้าท่านตอบไม่ถูกทั้งสองข้อ กลับไปที่ช่อง 46 และดูการแก้สามเหลี่ยมมุมฉากใหม่อีกครั้ง

(จากช่อง 34 หรือแบบฝึกหัดที่ 6) ช่อง 40



<u>ตัวอย่างแบบง่ายในการหาความสูงและระยะทาง</u> วิชาตรีโกณมิติใช้หาความสูงของวัตถุ รูปด้านซ้ายนี้แสดงปัญหาแบบง่ายในการหาความสูงและระยะทาง ความสูงของต้นไม้สามารถคำนวณหาได้ระหว่างแนวระดับ (horizontal) กับยอดของต้นไม้ มุมที่เรียกว่ามุมเงย(angle of elevation) คือมุม E ในไดอะแกรม ผู้สังเกตการณ์วัดระยะทางระหว่างจุดที่ยืนกับต้นไม้ แล้วคำนวณความสูงของต้นไม้ จาก tan(ของมุมเงย) เท่ากับ $\frac{\text{ความสูง}}{\text{ระยะทาง}}$ ซึ่งเป็นวิธีง่ายที่สุดในการหาความสูงของต้นไม้

<u>ตัวอย่าง</u> มุมเงยของยอดตึกเป็น 25° เมื่อวัดจากจุด ๆ หนึ่งบนพื้นดิน ซึ่งห่างจากตัวตึกนั้น 140 ฟุต จงหาความสูงของตึก



จากรูป A เป็นจุดสังเกต

AK เป็นระยะห่างในแนวระดับ (AK เป็นระดับพื้นดิน)

HK เป็นความสูงของตึก

25° เป็นมุมเงย

ให้ HK เท่ากับ x ฟุต

$$\tan 25^\circ = \frac{HK}{AK} = \frac{x}{140}$$

$$\therefore 0.4663 = \frac{x}{140} \qquad (\because \tan 25^\circ = 0.4663)$$

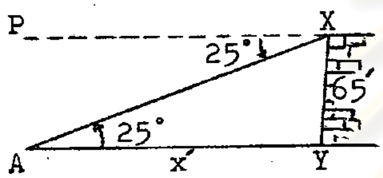
$$\therefore \quad x = 140 \times 0.4663$$

$= 65.282$ ฟุต หรือ $= 65.3$ ฟุต

(ใช้ค่าทศนิยมเพียง 3 ตำแหน่ง จากตารางของ tangent ที่ให้ค่าทศนิยมไว้ 4 ตำแหน่ง)

<u>มุมก้ม (angle of depression)</u> คือมุมจากแนวระดับกางลงไปสู่จุดที่ต้องการสังเกต

<u>ตัวอย่าง</u> จากหน้าต่าง X ซึ่งสูง 65 ฟุต มุมก้มที่ทำกับวัตถุ A บนพื้นดินเป็น 25° จงหาระยะห่างของวัตถุจากฐาน Y ของตึก



จากรูป X เป็นหน้าต่าง

XY เป็นตัวตึก

A เป็นวัตถุ

แนวระดับแสดงด้วยเส้นประ มุมก้ม (25°) คือมุม PXA

มุมนี้เท่ากับ $X\hat{A}Y$ (มุมสลับกัน)

ให้ x' เป็นระยะทางจาก A ถึง Y

เนื่องจากมุมที่ Y เป็นมุมฉาก, $A\hat{X}Y = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

ดังนั้น $\frac{x'}{65} = \tan A\hat{X}Y$

$x = 65 \times \tan A\hat{X}Y = 65 \tan 65^\circ = 65 \times 2.1445$ (จากตาราง)

$= 139.3925$ ฟุต

$= 139.4$ ฟุต

(<u>หมายเหตุ</u> ในการคำนวณอาจจะใช้ $\tan 25^\circ$ ก็ได้ แต่ใช้ $\tan 65^\circ$ เพราะว่าเป็นการง่ายที่จะหาจาก $65 \times \tan 65^\circ$ แทนที่จะหาจาก $\frac{65}{\tan 25^\circ}$.)

<u>สรุปในการแก้ปัญหาในการหาความสูงและระยะทาง</u>

1. ปัญหาเหล่านี้จะอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. เขียนไดอะแกรมตามที่โจทย์กำหนดให้
3. เขียนองศาของมุมก้มหรือมุมเงยลงในไดอะแกรม
4. เขียนจำนวนความสูงและระยะทางลงในไดอะแกรม

5. ใช้สูตร tan (ของมุมเงย) = $\frac{\text{ความสูง}}{\text{ระยะทาง}}$

6. คำนวณหาค่าที่ต้องการ

<u>คำถาม</u> ยอดเสาโทรเลขทำมุมเงย 60° เมื่อมองจากจุดหนึ่งซึ่งห่างจากโคนเสา 25 ฟุต จงหาความสูงของเสาโทรเลข

ไปที่ช่อง 24 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 40)

ช่อง 24

ท่านเขียนไดอะแกรมแล้วหรือยัง? จากไดอะแกรม ความสูง h ของเสาโทรเลข และระยะห่างจากโคนเสา มีความสัมพันธ์กันโดย

$$\tan\ (\text{ของมุมเงย}) = \frac{h}{25} = \tan 60^\circ$$

$$\therefore\ h = 25 \times \tan 60^\circ = 25 \times \sqrt{3} = 25 \times 1.732 = 43.3 \text{ ฟุต}$$

ถ้าคำตอบของท่านถูกต้อง ไปทำแบบฝึกหัดที่ 7 ใน Work Book เมื่อทำแบบฝึกหัดนี้เสร็จแล้ว ต่อไปที่ช่อง 64

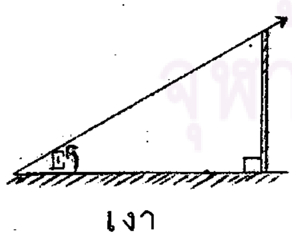
ถ้าคำตอบของท่านไม่ถูก พยายามตอบคำถามนี้

<u>คำถาม</u> ไม้อันหนึ่งมีความสูงเท่าใด ถ้าเงาของมันยาว 4 ฟุต ในขณะที่มุมเงยของดวงอาทิตย์เป็น 70°

ไปที่ช่อง 4 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 24)

ช่อง 4



ท่านควรเขียนไดอะแกรมคล้ายรูปนี้ เมื่อ E เป็นมุมเงย (70°) และความยาวของเงาเป็น 4 ฟุต

ให้ h เป็นความสูงของท่อนไม้

ดังนั้น $\tan E = \frac{h}{4}$

$$\therefore\ h = \tan 70^\circ \times 4$$

$$= 2.7475 \times 4$$

$$= 10.99 \text{ ฟุต}$$

ถ้าคำตอบของท่านถูก ไปทำแบบฝึกหัดที่ 7 ใน Work Book เสร็จแล้วไปที่ช่อง 64

ถ้าคำตอบของท่านไม่ถูก พยายามตอบคำถามนี้

คำถาม จากระยะห่าง 120 ฟุต มุมเงยของตึกเป็น 35° จงหาความสูงของตึก ไปที่ช่อง 18 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 4) ช่อง 18

ท่านเขียนไดอะแกรมแล้วหรือยัง? ให้ h เป็นความสูงของตึก

ดังนั้น จากไดอะแกรม $\frac{h}{120} = \tan 35°$

$\therefore \quad h = 120 \times \tan 35° = 120 \times 0.7002 \doteq 84.034$ ฟุต

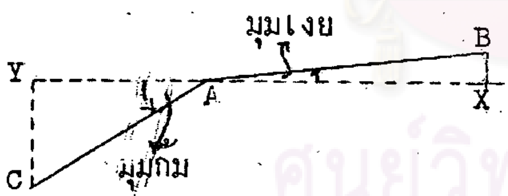
$= 84.0$ ฟุต

ถ้าคำตอบของท่านถูก ไปทำแบบฝึกหัดที่ 7 ใน Work Book เสร็จแล้วไปที่ช่อง 64

ถ้าคำตอบของท่านไม่ถูก แสดงว่ายังไม่เข้าใจวิธีแก้ปัญหาการหาความสูงและระยะทาง กลับไปที่ช่อง 40 แล้วตั้งต้นใหม่อีกครั้ง

(จากช่อง 4 หรือ 18 หรือ 24 หรือแบบฝึกหัดที่ 7) ช่อง 64

ความลาดและเกรเดียน (Slopes and Gradients)



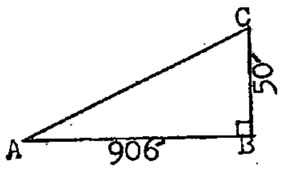
จากรูป แสดงส่วนตัดของเส้นทางซึ่งลาดขึ้นจาก A ไป B และลาดลงจาก A ไป C

มุมเงย คือมุมระหว่าง AB กับแนวระดับ (เส้นทางลาดขึ้นสู่ B)

มุมก้ม คือมุมระหว่าง AC และแนวระดับ (เส้นทางลาดลงสู่)

มุมเงย เรียกว่า มุมลาดขึ้น ของเส้นทาง และมุมก้ม เรียกว่า มุมลาดลง tan(ของมุมเงย) = $\frac{BX}{AX}$ ค่าของ tangent นี้เรียกว่า "เกรเดียน" (คืออัตราความชัน) ของเส้นทาง เกรเดียนมักจะบอกให้ทราบในรูปของเศษส่วน ซึ่งมี 1 เป็นเศษ (numerator) ซึ่งจากนี้จะได้ระยะทาง AX สำหรับความสูงที่เพิ่มขึ้น 1 ฟุต หรือระยะทาง AY สำหรับความสูงที่ลดลง 1 ฟุต

ตัวอย่าง จุด C สูงกว่าจุด A อยู่ 50 ฟุต ระยะทางตามแนวระดับระหว่าง A และ



C คือ 906 ฟุต จงคำนวณหามุมลาดและเกรเดียน

จากรูป แสดงไดอะแกรม ซึ่งเขียนจากสิ่งที่กำหนดให้

AB เป็นระยะทางแนวระดับระหว่าง A และ C เท่ากับ 906 ฟุต

มุมลาด = $\hat{A}$

$$\tan A = \frac{50}{906} = 0.0522$$

$$\therefore \hat{A} = 3^\circ\ 9' = \text{มุมลาด (angle of slope)}$$

เกรเดียน = tan (ของมุมลาด) = $\tan A = \frac{50}{906} = \frac{1}{18.12}$

$\therefore$ เกรเดียน คือ $\frac{1}{18.12}$ ซึ่งมักจะทำให้เป็นจำนวนเต็มที่ใกล้เคียงที่สุด ฉะนั้น เกรเดียนคือ $\frac{1}{18}$ ในลักษณะนี้ เกรเดียนอาจจะมองเห็นได้จากด้านข้างของทางรถไฟ

<u>คำถาม</u> มุมลาดของทางรถไฟเป็น $2^\circ\ 17'$ จงแสดงค่าของเกรเดียนในรูปเศษส่วนซึ่งมี 1 เป็นตัวเศษ

<u>ตอบ</u> (ก) $\frac{1}{40}$ ไปที่ช่อง 45

(ข) $\frac{1}{25}$ ไปที่ช่อง 55

(ค) คำตอบอื่น ๆ ไปที่ช่อง 55

ช่อง 45

(จากช่อง 55 หรือ 64)

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง เกรเดียน = tan (ของมุมลาด)

$\therefore$ เกรเดียน = $\tan 2^\circ\ 17' = 0.0399 = \frac{399}{1000} \simeq \frac{1}{25}$

$\therefore$ เกรเดียน คือ $\frac{1}{25}$

คราวนี้พยายามตอบคำถามนี้

<u>คำถาม</u> เกรเดียนของถนนเป็น $\frac{1}{5}$ มุมลาดเป็นเท่าใด?

ไปที่ช่อง 9 เพื่อตรวจคำตอบ

ช่อง 55

(จากช่อง 64)

ถ้าคำตอบของท่านคือ $\frac{1}{25}$ ก็เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ไปทำแบบฝึกหัดที่ 8 ใน Work Book เสร็จแล้วไปที่ช่อง 25 ถ้าท่านได้คำตอบเป็นอย่างอื่น ไปที่ช่อง 45 เพื่อดูวิธีทำที่ถูกต้อง

(จากช่อง 45) ช่อง 9

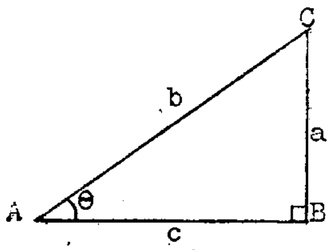
เกรเดียน = tan (ของมุมลาด) = $\frac{1}{5}$ ถ้า S เป็นมุมลาด

ดังนั้น tan S = $\frac{1}{5}$ = 0.2 $\therefore$ S = 11° 19′ (จากตาราง)

ถ้าคำตอบของท่านถูกต้อง ไปทำแบบฝึกหัดที่ 8 ใน Work Book เสร็จแล้วไปที่ช่อง 25 ถ้าคำตอบของท่านผิด กลับไปที่ช่อง 64 และทบทวนใหม่อีกครั้ง

(จากช่อง 9 หรือ 55 หรือแบบฝึกหัดที่ 8) ช่อง 25

ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ (1)



ถ้ากำหนดอัตราส่วนตรีโกณมิติหนึ่งของมุมหนึ่งมาให้ อัตราส่วนอื่นสามารถคำนวณได้จากสิ่งที่กำหนดให้นั้น

จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้าน a อยู่ตรงข้ามมุม A ด้าน b ตรงข้ามมุม B และ c ตรงข้ามมุม C (นี่เป็นข้อตกลงในการเรียกชื่อด้านต่าง ๆ ในตรีโกณมิติ เช่น ด้าน y ก็หมายถึงด้านตรงข้ามกับมุม Y)

พิจารณามุม θ

ถ้ากำหนด sin θ มาให้ ดังนั้น $\sin\theta = \frac{a}{b}$

ดังนั้น c ก็คำนวณได้ตามทฤษฎีของไพธากอรัส

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad \therefore c^2 = b^2 - a^2 \quad \therefore c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

จงใช้วิธีนี้ ถ้าอัตราส่วนที่กำหนดมาให้เป็นเศษส่วน

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{7}{25}$ จงหา cos θ และ tan θ โดยไม่ต้องใช้ตาราง

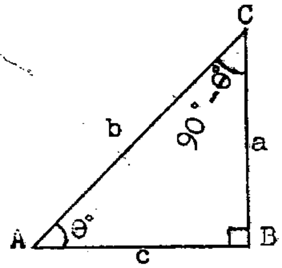
ในรูปข้างบน a = 7, b = 25

$\therefore$ $c = \sqrt{(25)^2-(7)^2} = \sqrt{625-49} = \sqrt{576} = 24$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{c}{b} = \frac{24}{25}$

$\therefore$ $\tan\theta = \frac{a}{c} = \frac{7}{24}$

มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก (Complementary Angles)



รูปที่ 1

ในรูปนี้ ABC เป็นสามเหลี่ยม ซึ่งมีมุมฉากที่ B มุม A คือมุม θ มุม C เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ θ นั่นคือ

$\hat{C} = 90^\circ - \theta^\circ$ ดังนั้น $\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$

$(\hat{A}+\hat{C} + 90^\circ = 180^\circ)$

$\sin\theta = \frac{a}{b} = \cos C = \cos(90^\circ - \theta^\circ)$

$\cos\theta = \frac{c}{b} = \sin C = \sin(90^\circ - \theta^\circ)$

ข้อควรจำ $\boxed{\begin{array}{l}\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\end{array}}$ เนื่องจาก $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ เรเดียน

ตรวจดูความสัมพันธ์เหล่านี้ในตารางสำหรับมุมพิเศษบางมุม (ช่อง 66)

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ)$

$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ)$

ตรวจดูตารางสัมพันธ์นี้ในตาราง $\sin 36^\circ = 0.5878 = \cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ)$

<u>คำถาม</u> ถ้า $\tan\theta = \frac{5}{12}$ จงหาค่าของ $\cos\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตาราง (เขียนรูปที่ 1 และเขียนอัตราส่วนที่กำหนดให้ลงในรูป)

<u>ตอบ</u> (ก) $\frac{12}{\sqrt{119}}$ ไปที่ช่อง 76

(ข) $\frac{12}{13}$ ไปที่ช่อง 81

(ค) $\frac{5}{13}$ ไปที่ช่อง 12

(จากช่อง 12 หรือ 25) ช่อง 76

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง จากรูปที่ 1 ในที่นี้ a = 5, c = 12

จาก $b^2 = \sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169}$

$\therefore b = 13$

เนื่องจาก $\cos\theta = \frac{c}{b}$ $\therefore \cos\theta = \frac{12}{13}$

ตรวจคำตอบของท่าน หาให้พบที่ผิด แล้วพยายามตอบคำถามนี้

<u>คำถาม</u> ถ้า $\cos\theta = \frac{8}{10}$ จงหาค่าของ $\sin\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตาราง (ใช้รูปที่ 1 ในช่องแต่กำหนดค่าใหม่ของแต่ละด้าน)

ไปที่ช่อง 82 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 25) ช่อง 81

คำตอบของท่านถูกต้อง ไปที่ช่อง 29

(จากช่อง 25) ช่อง 12

คำตอบของท่านไม่ถูกต้อง ไปที่ช่อง 76 เพื่อดูวิธีทำที่ถูกต้อง

(จากช่อง 76) ช่อง 82

ในสามเหลี่ยม ABC ในที่นี้ $c = 8, b = 10$

จาก $b^2 = a^2+c^2$

$\therefore\ a^2 = b^2-c^2$

$\therefore\ a = \sqrt{b^2-c^2}$

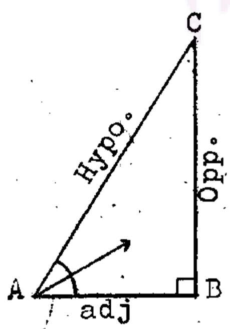
$\therefore\ a = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{a}{b} = \frac{6}{10}$ หรือ $\frac{3}{5}$

ถ้าท่านตอบ $\frac{6}{10}$ หรือ $\frac{3}{5}$ ไปที่ช่อง 29 ถ้าตอบอย่างอื่น ท่านต้องกลับไปที่ช่อง 25 และทบทวนบทเรียนใหม่

(จากช่อง 81 หรือ 82) ช่อง 29

<u>อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหลือ</u>



ในรูปที่ 1 ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม B เป็นมุมฉาก

$\sin A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}$, $\cos A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}$

$\tan A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}}$

ถ้ากลับอัตราส่วน ข้างบนลงข้างล่าง หรือกลับเศษเป็นส่วน จะได้

อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหลือ นั่นคือ

$$\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม}}$$

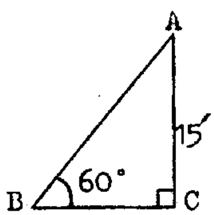
$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}$$

cosec, sec และ cot เป็นคำย่อของ cosecant, secant, cotangent ตามลำดับ

ตารางของฟังก์ชั่นเหล่านี้ มีวิธีใช้เช่นเดียวกับตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติอื่นที่ท่านเคยใช้มาแล้ว ตารางของ cosecant, cotangent เป็นเช่นเดียวกับของ cosine คือต้องเอาผลต่าง (mean difference) ไปลบ (เมื่อเอามุมไปบวกกัน)

อัตราส่วนเหล่านี้จำเป็นต้องใช้บ่อย ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงการหารในเวลาคำนวณ ในการแก้ปัญหาใด ๆ ในตรีโกณมิติ จงเลือกใช้อัตราส่วน (จากในหกอย่างนี้) ที่จะช่วยลดทอนความยุ่งยากในการคำนวณได้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

<u>ตัวอย่าง</u> บันไดอันหนึ่งทำมุม 60° กับแนวระดับและพาดกำแพงสูง 15 ฟุต บันไดอันนี้ยาวเท่าใด



จากรูป AB เป็นบันได AC เป็นกำแพง AC = 15 ฟุต

$$\frac{AC}{AB} = \sin 60^\circ$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \text{cosec}\,60^\circ$$

$$\therefore AB = AC\ \text{cosec}\,60^\circ = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \times \frac{1.732}{2} \text{ ฟุต}$$

$$\therefore AB = 12.99 \text{ ฟุต}$$

(<u>หมายเหตุ</u> ถ้าใช้ sin 60° การคำนวณจะเป็น $AB = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$ แต่ถ้าใช้ cosec 60° จะหลีกเลี่ยงการหารที่ยากได้ ความคลาดเคลื่อนในการคิดเลขเวลาทำวิธีหารและวิธีลบ จะมากกว่าในวิธีคูณและวิธีบวก

<u>คำถาม</u> ว่าวลอยสูง 300 ฟุต ขณะที่สายป่านทำมุมลาดลง 15° กับแนวดิ่ง สายป่านยาวเท่าใด (กำหนดให้ cos 15° = 0.9659 และ
sec 15° = 1.0353

ไปที่ช่อง 74 เพื่อตรวจคำตอบและเปรียบเทียบวิธีคิดคำนวณของท่าน

(จากช่อง 29) ช่อง 74

ท่านเขียนไดอะแกรมแล้วหรือยัง จากไดอะแกรม เมื่อ s เป็นความยาวของสายป่าน เราจะได้

$$\frac{300}{s} = \cos 15^\circ$$

$$\therefore \frac{s}{300} = \sec 15^\circ$$

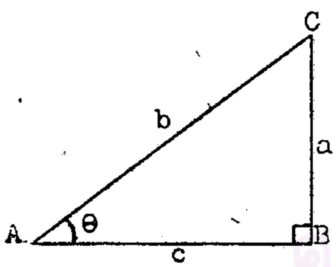
$$\therefore s = 300 \times \sec 15^\circ = 300 \times 1.0353 = 310.59 \text{ ฟุต}$$

หรือ $s = 311$ ฟุต

ถ้าคำตอบของท่านถูก ไปทำแบบฝึกหัดที่ 9 ใน Work Book เมื่อเสร็จแล้วไปที่ช่อง 6 ถ้าคำตอบของท่านไม่ถูก กลับไปที่ช่อง 29 และอ่านบทเรียนใหม่ เพื่อดูว่าที่นี้ท่านจะตอบได้ถูกต้องหรือไม่

(จากช่อง 74 หรือแบบฝึกหัดที่ 9) ช่อง 6

<u>ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ (2)</u>



จากรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่ B ด้าน a,b,c อยู่ตรงกันข้ามกับมุม A,B,C ตามลำดับ พิจารณามุมที่ทำเครื่องหมาย θ

$$\sin\theta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

ในทำนองเดียวกัน $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ และ

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \tan\theta$$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

มุม C และมุม θ เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉาก $\therefore \hat{C} = 90^\circ - \theta^\circ$

$$\tan\theta = \frac{a}{c} = \cot C = \cot(90^\circ - \theta^\circ)$$

$$\cot\theta = \frac{c}{a} = \tan C = \tan(90^\circ - \theta^\circ)$$

สรุปความสัมพันธ์ให้ท่องจำได้ดังต่อไปนี้

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$	$\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$	$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

$\sin\theta = \cos(90^\circ-\theta^\circ)$ $\cos\theta = \sin(90^\circ-0^\circ)$	$\tan\theta = \cot(90^\circ-\theta^\circ)$ $\cot\theta = \tan(90^\circ-\theta^\circ)$

<u>หฤษฎีของไพธากอรัส (Pythagoras' Theorem)</u> ในเทอมของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในรูปข้างต้น $\sin\theta = \frac{a}{b}$ และ $\cos\theta = \frac{c}{b}$

โดยหฤษฎีของไพธากอรัส $a^2+c^2 = b^2$

หารด้วย b^2 ตลอด; $\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2} = 1$

นั่นคือ $(\frac{a}{b})^2+(\frac{c}{b})^2 = 1$ ซึ่งก็คือ $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = 1$

$(\sin\theta)^2$ เขียนว่า $\sin^2\theta$ และ $(\cos\theta)^2$ เขียนว่า $\cos^2\theta$

ดังนั้น $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

<u>การใช้หฤษฎีของไพธากอรัสคำนวณหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ</u>

$\because \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \quad \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$\therefore \quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ----------(1)

หรือ $\because \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \quad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ ----------(2)

$\therefore \quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ ----------(3)

หรือ $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$ ----------(4)

ในทำนองเดียวกัน $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ ----(5)

จาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

หารด้วย $\cos^2\theta$ ตลอด ; $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

ซึ่งก็คือ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$$\therefore \sec\theta = \sqrt{\tan^2\theta + 1} \quad \text{------------} \quad (6)$$

หรือ $$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} \quad \text{------------} \quad (7)$$

จาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

หารด้วย $\sin^2\theta$ ตลอด; $\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$$

$$\therefore \mathrm{cosec}\,\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta} \quad \text{------}(8)$$

หรือ $$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} \quad \text{------}(9)$$

จาก (7); $$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cot^2\theta}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cot^2\theta+1}{\cot^2\theta}}} = \frac{\cot\theta}{\sqrt{\cot^2\theta+1}} \quad \text{--}(10)$$

ในทำนองเดียวกัน $$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} \quad \text{------}(11)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\sin\theta = 0.6157$ จงหา $\tan\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตารางตรีโกณมิติ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{0.6157}{\sqrt{1-0.3791}}$$

$$= \frac{.6157}{\sqrt{0.6209}} = \frac{0.6157}{0.7880}$$

$$= 0.7814$$

<u>คำถาม</u> กำหนดให้ $\tan\theta = 1.4281$ จงหา $\tan\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตารางตรีโกณมิติ

ไปที่ช่อง 62 เพื่อตรวจคำตอบ

(จากช่อง 6) ช่อง 62

วิธีคำนวณทำดังนี้

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} = \frac{1.4281}{\sqrt{2.039+1}} = \frac{1.4281}{\sqrt{3.039}}$$

$$= \frac{1.4281}{1.744}$$

$$= 0.8189$$

(ข้อสังเกต จากตารางตรีโกณมิติ ถ้า $\sin\theta = 1.4281$ ดังนั้น $\theta = 55$

$\sin 55^\circ = 0.8192$ คำตอบทั้งสองตรงกันเพียงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

โดยการใช้ตารางหาค่า $\sin\theta$ ความแตกต่างเล็กน้อยที่เกิดขึ้นเนื่องจากความไม่เที่ยงตรงนักในช่องผลต่าง ดังนั้นทศนิยมตำแหน่งที่ 4 จึงเชื่อถือนักไม่ได้)

ถ้าคำตอบของท่านถูก ไปทำแบบฝึกหัดที่ 10 ใน Work Book เมื่อจบแบบฝึกหัดแล้ว ท่านก็ได้เรียนวิชาตรีโกณมิติมามากทีเดียว ท่านต้องพยายามทบทวนเรื่องที่เรียนอยู่เสมอ ๆ ได้ไม่ลืม

ถ้าคำตอบของท่านไม่ถูก กลับไปที่ช่อง 6 และทบทวนใหม่อีกครั้งหนึ่ง

ในการตอบคำถามวิธีคำนวณแบบนี้ ถ้าท่านไม่ท่องเป็นสูตร ท่านอาจจะทำออกมาจากตารางความสัมพันธ์ของอัตราส่วน และทฤษฎีไพธากอรัส

WORK BOOK

แบบฝึกหัดที่ 1 (จากช่อง 13 หรือ 44)

มาตราวัดมุมระบบอังกฤษ

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1) $24^\circ\ 14' + 33^\circ\ 25'$
2) $37^\circ\ 12' + 48^\circ\ 36'$
3) $21^\circ\ 42' + 36^\circ\ 33'$
4) $57^\circ\ 23' + 26^\circ\ 55'$
5) $103^\circ\ 31' + 27^\circ\ 25' + 59^\circ\ 27'$
6) $115^\circ\ 53' + 24^\circ\ 38' + 39^\circ\ 29'$
7) $27^\circ\ 53' - 14^\circ\ 28'$
8) $32^\circ\ 37' - 24^\circ\ 46'$
9) $58^\circ\ 04' - 31^\circ\ 29'$
10) $142^\circ\ 22' - 59^\circ\ 37'$
11) $206^\circ\ 31' - 48^\circ\ 39'$
12) $105^\circ\ 06' - 98^\circ\ 49'$

การคูณในระบบอังกฤษ

$$\begin{array}{r} 36^\circ\ 47' \\ \times\ 2 \\ \hline 73^\circ\ 34' \\ 1^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47' \\ \times\ 2 \\ \hline 1^\circ\ 34' = 94' \end{array}$$

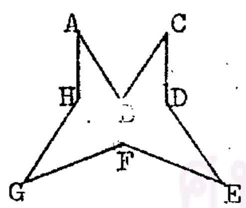
(หมายเหตุ : $60' = 1^\circ$ ทดไป)

13) $24^\circ\ 36' \times 2$
14) $86^\circ\ 51' \times 2$
15) $38^\circ\ 46' \times 3$
16) $27^\circ\ 18' \times 5$

(ไปที่ช่อง 38 ในแบบเรียน)

แบบฝึกหัดที่ 2 (จากช่อง 19 หรือ 27)

ประเภทของมุม



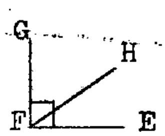
1) ในรูปที่ 1
   (ก) จงบอกชื่อมุมแหลมทั้งหมด (5 มุม)
   (ข) จงบอกชื่อมุมป้านทั้งหมด (3 มุม)

2) ในรูปที่ 2 ถ้า $X\hat{O}Y$ เป็น 54° มุมกลับ $X\hat{O}Y$ เป็นเท่าใด?
   จงหามุมกลับ $X\hat{O}Y$ ถ้า $X\hat{O}Y$ เป็น $33^\circ, 70^\circ, 114^\circ, 172^\circ$

(ไปที่ช่อง 21 ในแบบเรียน)

แบบฝึกหัดที่ 3 (จากช่อง 14 หรือ 32)

มุมประกอบหนึ่งมุมฉากและมุมประกอบสองมุมฉาก



1) ลอกรูปที่ 1 ซึ่ง $E\hat{F}G$ เป็นมุมฉาก และทำให้ $E\hat{F}H$ เท่ากับ 25° (ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์สร้างมุม)
   จงวัด $H\hat{F}G$ หาผลบวกของมุมทั้งสอง

ลอกรูปที่ 1 อีกสองครั้ง ทำให้ $E\hat{F}H$ เท่ากับ (ก) 61° (ข) 18° จงวัด $H\hat{F}G$ และหาผลบวกของมุม เช่นเดียวกับตอนแรก

2) มุมต่อไปนี้ เป็น (ก) มุมแหลม หรือ (ข) มุมป้าน หรือ (ค) มุมกลับ

(1) 93° (2) 86° (3) 347° (4) 211° (5) 167°

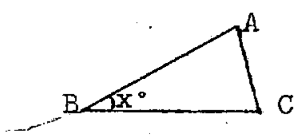
3) จงเขียนมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ $37^\circ, 71^\circ, 58^\circ, 45^\circ, 16^\circ, 25^\circ 30', 48^\circ 3'$

4) จงเขียนมุมประกอบสองมุมฉากของ $145^\circ, 63^\circ, 92^\circ, 123^\circ, 29^\circ, 59^\circ 23', 153^\circ 52'$

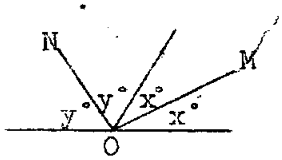
5) จงหามุมที่สามของสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดมุมสองมุมให้ดังนี้

(1) 47° และ 65° (2) 24° และ 77° (3) 56° และ 18°

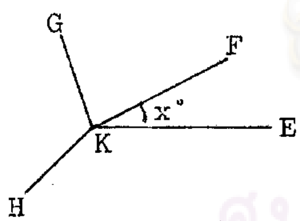
(4) $38^\circ 24'$ และ $21^\circ 36'$ (5) $43^\circ 18'$ และ $95^\circ 33'$ (6) แต่ละมุม 58°



6) ในรูปที่ 2 $A\hat{B}C = x^\circ$ $B\hat{A}C$ ใหญ่เป็นสองเท่าของ $A\hat{B}C$ และ $A\hat{C}B$ ใหญ่เป็นสามเท่าของ $A\hat{B}C$ โดยใช้ความรู้ของท่าน ในเรื่องผลบวกของมุมในรูปสามเหลี่ยม จงเขียนเป็นสมการของ x แล้วแก้สมการนี้เพื่อหา $A\hat{B}C$



7) ในรูปที่ 3 มุมที่กำกับด้วยเครื่องหมาย x° แต่ละมุมกางเท่ากัน และมุมที่กำกับด้วยเครื่องหมาย y° แต่ละมุมกางเท่ากัน จงเขียนเป็นสมการของ x และ y แล้วหา $M\hat{O}N$

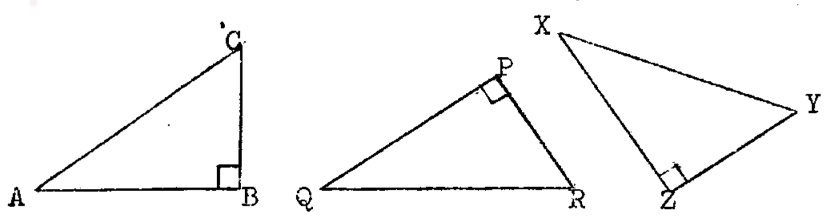


8) ในรูปที่ 4 $E\hat{K}F = x^\circ$ $F\hat{K}G$ ใหญ่เป็นสองเท่าของ $E\hat{K}F$ และ $G\hat{K}H$ ใหญ่เป็นสามเท่าของ $E\hat{K}F$ และ $H\hat{K}E$ ใหญ่เป็นสี่เท่าของ $E\hat{K}F$ จงเขียนเป็นสมการของ x แล้วแก้สมการนี้เพื่อหาค่าของมุมทั้งสี่

(ไปที่ช่อง 33 ในแบบเรียน)

แบบฝึกหัดที่ 4 (จากช่อง 3 หรือ 20 หรือ 69)

อัตราส่วนตรีโกณมิติอย่างง่าย



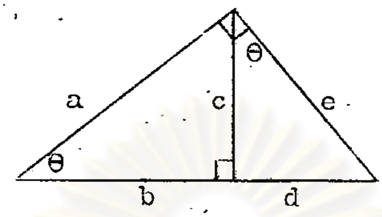
1) จากรูปที่ 1 จงเขียนอัตราส่วนของ

(1) $\sin P\hat{Q}R$ (2) $\cos P\hat{R}Q$ (3) $\tan P\hat{Q}R$ (4) $\tan P\hat{R}Q$

2) จากรูปที่ 1 จงเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เท่ากันกับอัตราส่วนที่กำหนดให้ ในบางกรณีอาจเขียนได้เป็นสองอย่าง เช่น $\frac{PQ}{QR}$ = sin R หรือ cos Q

(1) $\frac{BC}{AC}$ (2) $\frac{XZ}{XY}$ (3) $\frac{AB}{BC}$ (4) $\frac{YZ}{XY}$ (5) $\frac{AB}{AC}$

3) จากรูปที่ 2 จงเขียนค่าของ



(1) sin θ (2) cos θ (3) tan θ ในเทอมของ a,b,c,d,e ให้มากแบบที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

(ไปที่ช่อง 66 ในแบบเรียน)

แบบฝึกหัดที่ 5 (จากช่อง 16)

การใช้ตารางตรีโกณมิติ

1) จากตาราง จงเขียนค่า sine ของมุมต่อไปนี้

(1) $21^\circ 24'$ (2) $21^\circ 26'$ (3) $21^\circ 22'$ (4) $47^\circ 42'$

(5) $47^\circ 40'$ (6) $64^\circ 58'$ (7) $65^\circ 02'$ (8) $3^\circ 13'$

2) จากตาราง จงเขียนค่า cosine ของมุมแต่ละมุมในข้อ 1

3) จากตาราง จงเขียนค่า tangent ของมุมต่อไปนี้

(1) $32^\circ 48'$ (2) $32^\circ 49'$ (3) $32^\circ 47'$ (4) $56^\circ 14'$

(5) $63^\circ 49'$ (6) $18^\circ 03'$ (7) $78^\circ 54'$ (8) $85^\circ 37'$

4) จากตาราง จงเขียนมุมซึ่งมีค่า tangent ดังต่อไปนี้

(1) 0.8816 (2) 0.8826 (3) 0.8806 (4) 0.8093

(5) 0.0528 (6) 1.9496 (7) 2.0265 (8) 3.3434

5) จากตาราง จงเขียนมุมซึ่งมีค่า sine ดังต่อไปนี้

(1) 0.7108 (2) 0.7112 (3) 0.7100 (4) 0.4348

(5) 0.4389 (6) 0.0457 (7) 0.7778 (8) 0.9649

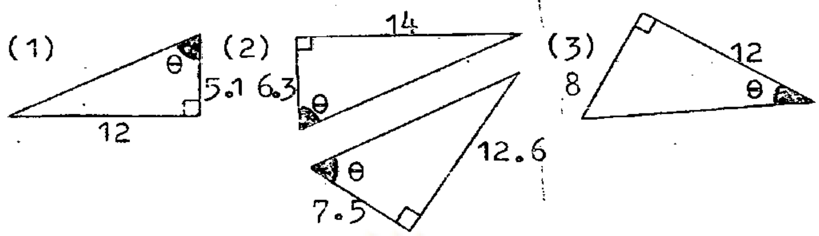
6) จากตาราง จงเขียนมุมซึ่งมีค่า cosine ตามที่ให้ไว้ในข้อ 5

(ไปที่ช่อง 46 ในแบบเรียน)

แบบฝึกหัดที่ 6

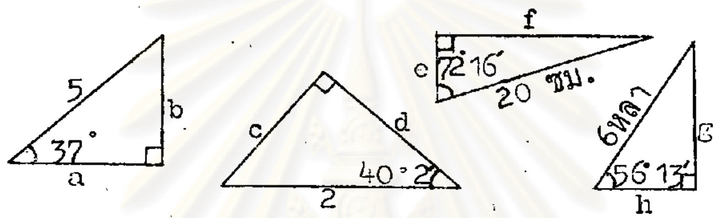
(จากช่อง 34)

การแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก

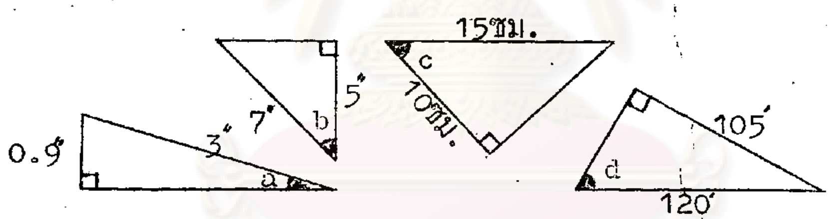


(ตอบถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง และลิบคาของมุมที่ใกล้เคียงที่สุด)

1–4 จงหามุม θ ในสามเหลี่ยมทั้งสี่ที่ให้ไว้ในรูปที่ 1



5–8 จงหาความยาวของ a,b,c,d,e,f,g,h ในรูปที่ 2 และมุมที่เหลือ



9–12 จงหามุม a,b,c และ d ในรูปที่ 3 และหาความยาวของด้านที่สามด้วย

13) เด็กคนหนึ่ง ชักว่าวขึ้นไปสูงจากพื้นดินในแนวดิ่งฉาก 119 เมตร และจุดตั้งฉากนั้นห่างจากตัวเด็กในแนวระดับ 84 เมตร สมมุติว่าสายป่านเป็นเส้นตรง จงหามุมซึ่งว่าวทำกับพื้นดิน

14) สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง มีด้านยาว 15 ซม.กว้าง 8 ซม. จงหามุมระหว่างเส้นทแยงกับด้านยาว

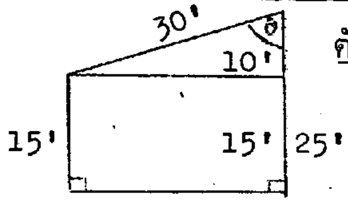
15) บันได ยาว 10 เมตร วางพาดกำแพงซึ่งสูง 4 เมตร ส่วนปลายของบันไดเลยกำแพงไป 3 เมตร จงหามุมที่บันไดทำกับพื้นดิน และปลายบันไดสูงจากพื้นดินเท่าไร

16) รางเลื่อนซึ่งใช้เลื่อนหีบหนักลงจากโกดัง ทำมุมกับพื้นดิน เป็น 12° ถ้ารางเลื่อนยาว 5 เมตร พื้นโกดังอยู่สูงจากพื้นดินเท่าไร

(ไปที่ช่อง 40 ในแบบเรียน)

<u>แบบฝึกหัดที่ 7</u>

<u>การหาความสูงและระยะทางอย่างง่าย</u>



<u>ตัวอย่าง</u> สายวิทยุ ยาว 30 ฟุต ขึงจากยอดเสาสูง 15 ฟุต ถึงขอบล่างของหน้าต่างซึ่งสูงจากพื้นดิน 25 ฟุต มุมกัมของสายอากาศวิทยุเป็นเท่าไร

รูปที่ 1 แสดงไดอะแกรมของปัญหา มุม θ เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุมก้ม (D)

$$\therefore \hat{D} = 90^\circ - \theta$$

เส้นไข่ปลาลากขึ้นเพื่อสร้างเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จากสามเหลี่ยมนี้

$$\cos\theta = \frac{10}{30} = 0.3333$$

$$\therefore \theta = 70^\circ\ 32'$$

$$\therefore \text{มุมก้ม } 90^\circ - \theta = 19^\circ\ 28'$$

1. บันไดยาว 30 ฟุต วางพาดกำแพง ทำมุม 50° กับพื้นดิน กำแพงที่บันไดพาดขึ้นไปถึงนั้นสูงเท่าไร

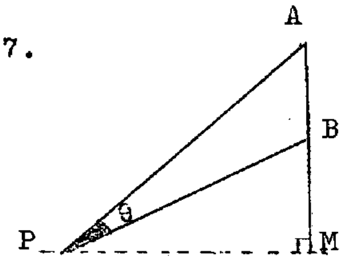
2. ยอดเสาโทรเลข ทำมุมเงย 60° จากจุดซึ่งห่างจากโคนเสาโทรเลข 25 ฟุต เสาโทรเลขสูงเท่าไร

3. จงหามุมเงยของยอดเสาธง ซึ่งสูง 6.3 เมตร จากจุดบนพื้นดินซึ่งอยู่ห่างออกไป 11 เมตร

4. ชายคนหนึ่งต้องการหาความกว้างของแม่น้ำ เขาปักหมุดที่จุด A บนฝั่งตรงกันข้ามกับต้นไม้ B จาก A เขาเดินไปตามชายฝั่ง 200 เมตร ถึงจุด R ซึ่ง $R\hat{A}B = 90^\circ$ และพบว่า $A\hat{R}B = 23^\circ\ 30'$ จงหาความกว้างของแม่น้ำ

5. จากจุดสังเกตการณ์ระดับเดียวกับฐานของหอคอยซึ่งสูง 60 เมตร มุมเงยของยอดหอคอยเป็น 51° 25′ จงหาระยะห่างของจุดสังเกตการณ์จากหอคอย

6. จากยอดหน้าผา มุมก้มที่ทำกับเรือที่อยู่ห่างจากเชิงผา 100 เมตร เป็น 38° 42′ จงหาความสูงของหน้าผา

7.  จงหามุม (θ) ซึ่งรองรับด้วย AB ที่จุด P ในรูปที่ 2 AB แทนหน้าต่าง และ PM เป็นพื้นดิน

AB = 18.5 ฟุต BM= 23 ฟุต PM = 50 ฟุต

(ครั้งแรกหา $A\hat{P}M$ ก่อน แล้วหา $B\hat{P}M$ และนำมาลบกัน)

8. ไม้กระดานยาว 20 ฟุต พาดจากดาดฟ้าเรือถึงท่าเรือทำมุมก้มเป็น 25° ดาดฟ้าเรือสูงกว่าท่าเรือเท่าไร

9. ว่าวซึ่งผูกด้วยสายป่านยาว 300 ฟุต สมมุติว่าสายป่านนั้นเป็นเส้นตรง และทำมุม 68° กับพื้นดิน ว่าวอยู่สูงจากพื้นดินเท่าไร

10. ขาหยั่งโลหะแบบสามขา แต่ละขายาว 5 เมตร วางกางบนพื้นที่ซึ่งทำให้ปลายขาทั้งหมดอยู่ในรูปวงกลามรัศมี 2 เมตร ขาของขาหยั่งทำมุมกับแนวตั้งฉากเท่าไร

(ไปที่ช่อง 64 ในแบบเรียน)

แบบฝึกหัดที่ 8 (จากช่อง 9 หรือ 55)

ความลาดและเกรเดียน

1. ระยะห่างตามแนวระดับระหว่างจุด A และจุด B เป็น 1,269 เมตร มุมเงยจาก A ไปยัง B เป็น 7° 24′ จงหาความสูงของ B ที่อยู่เหนือ A
2. ระยะห่างตามแนวระดับระหว่าง X และ Y เป็น 630 เมตร X สูงกว่า Y 65 เมตร จงหา (ก) มุมเงยจาก Y ไปยัง X (ข) เกรเดียนของความลาด (อัตราความชัน)
3. จุด C อยู่สูงกว่าจุด D 81 เมตร ระยะห่างตามแนวระดับระหว่าง C และ D เป็น 1,239 เมตร จงหา (ก) มุมก้มจาก C ไป D และ (ข) เกรเดียนของความลาด
4. ระยะจาก P มายัง Q เป็น 1,485 เมตร และมุมเงยจาก P ไปยัง Q เป็น2°13′ (ก) ความสูงของ Q เหนือ P เป็นเท่าไร (ข) เกรเดียนของความลาดเป็นเท่าไร
5. ระยะห่างระหว่าง L และ M เป็น 618 เมตร และมุมก้มจาก L มายัง M เป็น 1° 15′ (ก) ความสูงของ L เหนือ M เป็นเท่าไร (ข) เกรเดียนของความลาดเป็นเท่าไร

6. เกรเดียนของความลาด เป็น 1 ต่อ 15 จุด G อยู่บนทางลาด ซึ่งสูงกว่าจุด H อยู่ 22 เมตร ระยะห่างตามแนวระดับระหว่าง G และ H เป็นเท่าไร

7. เกรเดียนของความลาดระหว่างจุดสองจุด K และ L เป็น 1 ต่อ 25 ถ้า K สูงกว่า L มุมก้มจาก K มายัง L เป็นเท่าไร

(ไปที่ช่อง 25 ในแบบเรียน)

<u>แบบฝึกหัดที่ 9</u> (จากช่อง 74)

<u>แบบฝึกหัดอัตราส่วนตรีโกณมิติ</u>

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $\tan \theta = \frac{8}{15}$ จงหา $\sec \theta$ โดยไม่ต้องใช้ตาราง

<u>วิธีทำ</u> (1) ด้านตรงข้ามมุม = 8 ด้านประชิดมุม = 15

$$\therefore \text{ด้านตรงข้ามฉาก} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64+225}$$

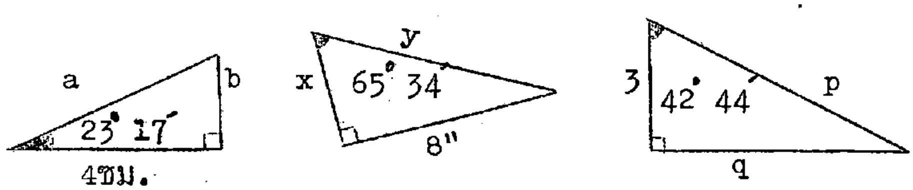
$$= \sqrt{289} = 17$$

(2) $$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{17}{15}$$

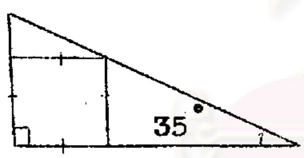
1. ให้ $\sin \theta = \frac{24}{25}$ จงหา (ก) $\cos \theta$ (ข) $\cot\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตาราง
2. ให้ $\operatorname{cosec} \theta = \frac{26}{10}$ จงหา (ก) $\tan \theta$ (ข) $\sec \theta$ โดยไม่ต้องใช้ตาราง
3. ให้ $\cos \theta = \frac{11}{16}$ จงหา (ก) $\operatorname{cosec} \theta$ (ข) $\sin \theta$ โดยไม่ต้องใช้ตาราง

ในปัญหาต่อไปนี้ จงเลือกอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ช่วยลดความยุ่งยากในการคำนวณได้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ คิดค่าทศนิยม 3 ตำแหน่ง และลิบค่าของมุมที่ใกล้เคียงที่สุด

4. จงหา a, b; x, y; p, q ในรูปที่ 1



5. ทุ่นลอย ผูกติดกับโซ่ซึ่งหอดลงสู่ก้นแม่น้ำยาว 29 เมตร ถ้าแม่น้ำนั้นลึก 20 เมตร มุมลาดซึ่งโซ่ทำกับแนวดิ่งเป็นเท่าไร
6. จากเรือลำหนึ่งในทะเล มุมเงยกับยอดผาซึ่งสูง 100 เมตร เป็น 26° 14′ เรืออยู่ห่าง (ก) จากเชิงผาเท่าไร (ข) จากยอดผาเท่าไร
7. รางเลื่อนซึ่งทำมุมลาดลง 20° กับแนวระดับ หอดจากชายฝั่งลงไปยังแม่น้ำเป็นระยะห่างตามแนวระดับ 1.5 เมตร รางเลื่อนนั้นยาวเท่าไร
8. มุมเงยของยอดผาจากเรือในทะเลซึ่งอยู่ห่างจากเชิงผา 200 เมตร เป็น 38°17′ มุมเงยของยอดหอสัญญาณ ซึ่งตั้งอยู่บนยอดของหน้าผา สังเกตเห็นจากเรือเป็น 42° 26′ หอสัญญาณสูงเท่าไร
9. อุโมงค์ในเหมืองขุด ลึกลงไปในแนวตั้งฉาก 50 เมตร อุโมงค์นั้นยาว 219 เมตร มุมที่อุโมงค์ทำกับแนวระดับเป็นเท่าไร
10. ในรูปที่ 2 ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว 5 ซม. จงหาความยาวของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม



(ไปที่ช่อง 6 ในแบบเรียน)

<u>แบบฝึกหัดที่ 10</u> (จากช่อง 62)

<u>การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ</u>

1. ให้ $\cos\theta = 0.8590$ จงหา (ก) $\tan\theta$ และ (ข) $\sin\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตารางตรีโกณมิติ
2. ให้ $\tan\theta = 4.8288$ จงหา (ก) $\cos\theta$ และ (ข) $\sec\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตารางตรีโกณมิติ
3. ให้ $\sin\theta = 0.9385$ จงหา (ก) $\operatorname{cosec}\theta$ และ (ข) $\cot\theta$ โดยไม่ต้องใช้ตารางตรีโกณมิติ

ประวัติการศึกษา

นายพิทักษ์ เสงี่ยมสิน ได้รับปริญญาการศึกษาบัณฑิต สาขามัธยมศึกษา จากวิทยาลัยวิชาการศึกษา ปทุมวัน เมื่อปีการศึกษา 2512

ปัจจุบันรับราชการตำแหน่งอาจารย์ระดับ 4 โรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน สังกัดทบวงมหาวิทยาลัยของรัฐ