บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "เวคเตอร์" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามลำดับขั้นดังนี้

1. <u>ศึกษาเทคนิคและวิธีการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม</u>

ผู้วิจัยได้ศึกษาเทคนิคและวิธีการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมอย่างละเอียด ในที่สุด ได้ตกลงเลือกสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรง ทั้งนี้เพราะ

1.1 บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงเป็นแบบที่มีคนนิยมใช้มากที่สุด ใช้ได้ง่ายที่สุด และมีวิธีการไม่ยุ่งยากซับซ้อน เหมาะสำหรับผู้วิจัยซึ่งเพิ่งเริ่มสร้างเป็นครั้งแรก

1.2 การให้นักเรียนได้สร้างคำตอบเองและเขียนคำตอบลงไป จะช่วยย้ำความเข้าใจและมโนทัศน์ของนักเรียนให้ถูกต้องยิ่งขึ้น

2. <u>ศึกษาเนื้อหาเรื่อง "เวคเตอร์"</u>

ผู้วิจัยได้ศึกษาเนื้อหาวิชาเรื่องนี้อย่างละเอียดจากตำราต่างประเทศหลายเล่ม และพิจารณาเอกสารประกอบการเรียนการสอนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีประกอบ ทั้งนี้เนื่องจากยังไม่มีตำราคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาไทยที่กล่าวถึงเรื่องเวคเตอร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเล่มอื่น การกำหนดขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่จะสอนได้ยึดตามหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

3. <u>ตั้งวัตถุประสงค์ทั่วไปและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม</u>

เพื่อกำหนดเนื้อหาวิชาที่จะสอนให้ชัดเจน ผู้วิจัยจึงสร้างวัตถุประสงค์ทั่วไปขึ้น

นอกจากนี้ยังได้แจกแจงวัตถุประสงค์ทั่วไปเหล่านั้นสร้างเป็นวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม เพื่อบ่งพฤติกรรมที่สามารถวัดได้และสังเกตได้ของนักเรียนที่จะแสดงว่ามีความรู้ความ-เข้าใจในมโนทัศน์เหล่านั้นแล้ว

วัตถุประสงค์ทั่วไปและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมเรื่อง "เวคเตอร์" มีดังนี้

1. ให้รู้ความหมายของเวคเตอร์
   - 1.1 นักเรียนบอกได้ว่าปริมาณที่กำหนดให้เป็นปริมาณที่บอกเฉพาะขนาด (ก.1-ก.2)
   - 1.2 เมื่อกำหนดปริมาณที่บอกเฉพาะขนาดให้ นักเรียนบอกได้ว่าเป็นปริมาณสเกลาร์ (ก.3-ก.6)
   - 1.3 นักเรียนบอกได้ว่าปริมาณที่กำหนดให้เป็นปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง (ก.7-ก.8)
   - 1.4 เมื่อกำหนดปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทางให้ นักเรียนบอกได้ว่าเป็นปริมาณเวคเตอร์ (ก.9-ก.11)
   - 1.5 เมื่อกำหนดปริมาณใดๆให้ นักเรียนบอกได้ว่าปริมาณใดเป็นสเกลาร์และปริมาณใดเป็นเวคเตอร์ (ก.12-ก.14 แบบสอบข้อที่ 1-2)
   - 1.6 นักเรียนสรุปความหมายของเวคเตอร์ได้ (ก.15-ก.16 แบบสอบข้อที่ 3-4)
2. ให้รู้จักใช้สัญลักษณ์แทนเวคเตอร์
   - 2.1 เมื่อกำหนดขนาดและทิศทางให้ นักเรียนเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางได้ (ก.17-ก.18)
   - 2.2 นักเรียนเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.19-ก.22 แบบสอบข้อที่ 5)
   - 2.3 เมื่อกำหนดเวคเตอร์ให้ นักเรียนบอกจุดเริ่มต้นและจุดปลายได้ (ก.23-ก.25 แบบสอบข้อที่ 6)
   - 2.4 นักเรียนเขียนสัญลักษณ์แทนเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.26-ก.31 แบบสอบข้อที่ 7)

3. ให้รู้จักเวคเตอร์อิสระและเวคเตอร์จำกัด

3.1 เมื่อกำหนดเวคเตอร์ให้ นักเรียนบอกได้ว่าเวคเตอร์ใดบ้างที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน (ก.32)

3.2 นักเรียนบอกได้ว่าเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกันจะเท่ากัน (ก.33-ก.36 แบบสอบข้อที่ 8)

3.3 นักเรียนบอกได้ว่าเวคเตอร์อิสระเป็นเวคเตอร์ที่ไม่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้ (ก.37-ก.40 แบบสอบข้อที่ 9)

3.4 นักเรียนบอกได้ว่า เวคเตอร์จำกัดเป็นเวคเตอร์ที่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้ (ก.41-ก.44 แบบสอบข้อที่ 10)

3.5 นักเรียนสรุปได้ว่า เวคเตอร์จำกัดจะเป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระ (ก.45-ก.48 แบบสอบข้อที่ 11)

3.6 นักเรียนสรุปได้ว่าเวคเตอร์จำกัดที่เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระเดียวกันย่อมเท่ากัน (ก.49-ก.50)

4. ให้เข้าใจการบวกและการลบเวคเตอร์และรู้คุณสมบัติของการบวกเวคเตอร์

4.1 เมื่อกำหนดปริมาณเวคเตอร์ที่มีเวคเตอร์ต่อเนื่องกัน นักเรียนบอกจุดเริ่มต้นและจุดปลายของปริมาณเวคเตอร์นั้นได้ (ก.51-ก.57)

4.2 นักเรียนบอกได้ว่าผลบวกของเวคเตอร์ที่ต่อเนื่องกันจะเท่ากับเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเดียวกับเวคเตอร์ที่ต่อเนื่องกันนั้น (ก.58-ก.62)

4.3 นักเรียนบอกผลบวกของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.63-ก.68 แบบสอบข้อที่ 12-14)

4.4 นักเรียนเขียนรูปแสดงผลบวกของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.69-ก.75)

4.5 นักเรียนบอกได้ว่าเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายที่จุดเดียวกันเรียกว่า เวคเตอร์ศูนย์ (ก.76-ก.79 แบบสอบข้อที่ 15)

4.6 นักเรียนบอกได้ว่าเวคเตอร์สองเวคเตอร์ใดๆที่มีขนาดเท่ากันแต่มี

ทิศทางตรงข้ามกันบวกกันจะได้เวคเตอร์ศูนย์ (ก.80-ก.82 แบบสอบข้อที่ 16)

4.7 นักเรียนเขียนสัญญลักษณ์แทนเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรง-ข้ามกับเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.83-ก.84)

4.8 นักเรียนสรุปได้ว่าเวคเตอร์มีคุณสมบัติปิดสำหรับการบวก (ก.85-ก.87)

4.9 นักเรียนสรุปได้ว่าเวคเตอร์มีคุณสมบัติการสลับที่สำหรับการบวก (ก.88-ก.91)

4.10 นักเรียนสรุปได้ว่าเวคเตอร์มีคุณสมบัติการจัดหมู่สำหรับการบวก (ก.92-ก.94 แบบสอบข้อที่ 17)

4.11 นักเรียนสรุปได้ว่าเวคเตอร์มีเวคเตอร์ศูนย์เป็นเอกลักษณ์สำหรับการ-บวก (ก.95-ก.98 แบบสอบข้อที่ 18)

4.12 นักเรียนสรุปได้ว่าเวคเตอร์มีอินเวอร์สสำหรับการบวก (ก.99-ก.102)

4.13 นักเรียนเขียนอินเวอร์สของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.103-ก.105)

4.14 นักเรียนบอกได้ว่าการลบเวคเตอร์ u ด้วยเวคเตอร์ v ใดๆคือ การ-บวกเวคเตอร์ u กับอินเวอร์สของเวคเตอร์ v (ก.106-ก.108 แบบสอบข้อที่ 19)

4.15 นักเรียนบอกผลลบของสองเวคเตอร์ใดๆจากรูปที่กำหนดให้ได้ (ก.109-ก.113 แบบสอบข้อที่ 20-21)

4.16 นักเรียนเขียนรูปแสดงผลลบของสองเวคเตอร์ใดๆที่กำหนดให้ได้ (ก.114-ก.120)

5. ให้เข้าใจการคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์และรู้คุณสมบัติของการคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์

5.1 เมื่อกำหนดเวคเตอร์ที่เป็น n เท่าของเวคเตอร์ใดๆให้ นักเรียนบอกขนาดและทิศทางของเวคเตอร์นั้นได้ (ก.121-ก.126 แบบสอบข้อที่ 22-23)

5.2 นักเรียนเขียนรูปแสดงเวคเตอร์ที่เป็นผลคูณของเวคเตอร์กับสเกลาร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.127-ก.131)

5.3 นักเรียนสรุปได้ว่าเมื่อคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ที่เป็นจำนวนจริงบวกจะได้เวคเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับเวคเตอร์เดิม และเมื่อคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ที่เป็นจำนวนจริงลบจะได้เวคเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวคเตอร์เดิม (ก.132 แบบสอบข้อที่ 24)

5.4 นักเรียนสรุปได้ว่าเมื่อคูณเวคเตอร์ใดๆกับศูนย์จะได้เวคเตอร์ศูนย์ และเมื่อคูณเวคเตอร์ศูนย์กับสเกลาร์ใดๆจะได้เวคเตอร์ศูนย์เช่นกัน (ก.133-ก.135 แบบสอบข้อที่ 25)

5.5 นักเรียนบอกได้ว่าเวคเตอร์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลคูณของสเกลาร์กับอีกเวคเตอร์หนึ่งได้ เวคเตอร์ทั้งสองจะขนานกัน (ก.136-ก.140 แบบสอบข้อที่ 26)

5.6 นักเรียนสรุปได้ว่า การคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ใดๆจะมีคุณสมบัติปิด (ก.141-ก.143 แบบสอบข้อที่ 27)

5.7 นักเรียนสรุปได้ว่า การคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ใดๆจะมีคุณสมบัติการจัดหมู่ (ก.144-ก.146)

5.8 นักเรียนสรุปได้ว่า การคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ใดๆจะมีคุณสมบัติการกระจาย (ก.147-ก.159 แบบสอบข้อที่ 28)

5.9 นักเรียนบอกได้ว่าสเกลาร์ 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ (ก.160-ก.163 แบบสอบข้อที่ 29)

6. ให้รู้จักใช้เวคเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบางบทในเรขาคณิต

6.1 นักเรียนใช้เวคเตอร์พิสูจน์ได้ว่าเส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมใดๆย่อมยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สามและขนานกับด้านที่สาม (ก.164-ก.170 แบบสอบข้อที่ 30)

6.2 นักเรียนใช้เวคเตอร์พิสูจน์ได้ว่าเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้าน-ขนานย่อมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน (ก.171-ก.179 แบบสอบข้อที่ 31-32)

7. ให้รู้จักเวคเตอร์และสัญญลักษณ์ในระนาบพิกัดฉาก

7.1 เมื่อกำหนดจุดใดๆในระนาบพิกัดฉาก นักเรียนเขียน"คู่ลำดับ"บอกตำแหน่งของจุดนั้นได้ (ก.180-ก.182)

7.2 เมื่อกำหนด"คู่ลำดับ" นักเรียนลงจุดในระนาบพิกัดฉากได้ (ก.183)

7.3 นักเรียนบอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงที่มีทั้งขนาดและทิศทางในระนาบพิกัดฉากเป็นเวคเตอร์ (ก.184)

7.4 เมื่อกำหนดเวคเตอร์ในระนาบพิกัดฉาก นักเรียนบอกจุดเริ่มต้นและจุดปลายได้ (ก.185 แบบสอบข้อที่ 33)

7.5 เมื่อกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลาย นักเรียนเขียนเวคเตอร์ในระนาบพิกัดฉากได้ (ก.186-ก.187)

7.6 นักเรียนบอกได้ว่าเวคเตอร์ที่เท่ากันในระนาบพิกัดฉากเป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระเดียวกัน (ก.188-ก.189)

7.7 นักเรียนเขียนสัญญลักษณ์ $[a,b]$ บอกเวคเตอร์อิสระของเวคเตอร์ที่กำหนดในระนาบพิกัดฉากได้ (ก.190-ก.193 แบบสอบข้อที่ 34)

7.8 เมื่อกำหนดเวคเตอร์อิสระและจุดเริ่มต้นให้ นักเรียนเขียนเวคเตอร์ลงในระนาบพิกัดฉากได้ (ก.194-ก.195)

7.9 เมื่อกำหนดเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (x_1,y_1) และจุดปลายที่ (x_2,y_2) นักเรียนสรุปได้ว่าเวคเตอร์อิสระเท่ากับ $[x_2-x_1,y_2-y_1]$ (ก.196-ก.197)

7.10 นักเรียนบอกเวคเตอร์อิสระของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.198-ก.204 แบบสอบข้อที่ 35-37)

8. ให้เข้าใจการบวกเวคเตอร์ การลบเวคเตอร์และการคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ในระนาบพิกัดฉาก

8.1 นักเรียนสรุปได้ว่าผลบวกของเวคเตอร์ $[a,b]$ และ $[c,d]$ จะเท่ากับ $[a+c,b+d]$ (ก.205-ก.211)

8.2 นักเรียนบอกผลบวกของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.212-ก.216

แบบสอบข้อที่ 38-39)

8.3 นักเรียนบอกคุณสมบัติการสลับที่สำหรับการบวกเวคเตอร์ได้ (ก.217-ก.218)

8.4 นักเรียนบอกคุณสมบัติการจัดหมู่สำหรับการบวกเวคเตอร์ได้ (ก.219-ก.220)

8.5 นักเรียนบอกได้ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวกเวคเตอร์ในระนาบพิกัดฉากคือ $[0,0]$ (ก.221-ก.222)

8.6 นักเรียนบอกได้ว่าอินเวอร์สสำหรับการบวกของ $[a,b]$ คือ $[-a,-b]$ (ก.223-ก.225 แบบสอบข้อที่ 40)

8.7 นักเรียนบอกผลลบของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.226-ก.230 แบบสอบข้อที่ 41)

8.8 นักเรียนสรุปได้ว่าผลคูณของเวคเตอร์ $[a,b]$ กับสเกลาร์ β ใดๆ จะเท่ากับ $[\beta a+\beta b]$ (ก.231-ก.234)

8.9 นักเรียนบอกผลคูณของเวคเตอร์กับสเกลาร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.235-ก.236 แบบสอบข้อที่ 42)

8.10 เมื่อกำหนดนิพจน์ของเวคเตอร์มาให้ นักเรียนหาผลสำเร็จได้ถูกต้อง (ก.237-ก.239 แบบสอบข้อที่ 43)

9. ให้สามารถหาขนาดของเวคเตอร์

9.1 นักเรียนบอกขนาดของปริมาณเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.240-ก.241)

9.2 นักเรียนใช้สัญลักษณ์ $|\ |$ บอกขนาดของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.242-ก.244 แบบสอบข้อที่ 44)

9.3 เมื่อกำหนดเวคเตอร์ใดๆในระนาบ นักเรียนหาขนาดของเวคเตอร์นั้นได้ โดยใช้ทฤษฎีของพีธากอรัส (ก.245-ก.249)

9.4 นักเรียนสรุปได้ว่าขนาดของเวคเตอร์ $[a,b]$ ใดๆจะเท่ากับรากที่-สองของผลบวกของกำลังสองของ a กับกำลังสองของ b (ก.250)

9.5 นักเรียนบอกขนาดของเวคเตอร์ใดๆ ที่กำหนดให้ได้ (ก.251-ก.256 แบบสอบข้อที่ 45-46)

10. ให้รู้จักเวคเตอร์หนึ่งหน่วย และสามารถเขียนเวคเตอร์ใดๆ ในรูปของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย i และ j ได้

10.1 นักเรียนบอกขนาดของ [1,0] และ [0,1] ได้ (ก.257)

10.2 นักเรียนสรุปได้ว่า เวคเตอร์ [1,0] และ [0,1] เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วย (ก.258 แบบสอบข้อที่ 47)

10.3 นักเรียนบอกเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของเวคเตอร์ที่กำหนดให้ได้ (ก.259-ก.265 แบบสอบข้อที่ 48)

10.4 นักเรียนเขียนเวคเตอร์ที่กำหนดให้ในรูปผลบวกของ [1,0] และ [0,1] ได้ (ก.266-ก.269)

10.5 นักเรียนเขียนเวคเตอร์ที่กำหนดให้ในรูปของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย i และ j ได้ (ก.270-ก.279 แบบสอบข้อที่ 49-50)

4. <u>สร้างแบบสอบก่อนและหลังเรียนบทเรียน</u>

ผู้วิจัยได้สร้างแบบสอบขึ้น เพื่อเป็นเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของบทเรียน โดยสร้างตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม เพื่อจะได้แบบสอบที่มีความแม่นตรงเชิงเนื้อหา (Content Validity) สูง แบบสอบที่สร้างขึ้นเป็นแบบเลือกตอบ(Multiple Choice) ชนิด 4 ตัวเลือก สร้างครั้งแรกมีจำนวน 62 ข้อ ผู้วิจัยได้นำแบบสอบนี้ไปทดสอบเพื่อหาค่าความเชื่อมั่น(Reliability) ค่าความยาก(Item Difficulty) และค่าอำนาจจำแนก(Power Discrimination) กับนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา วิทยาลัยครูภูเก็ต จังหวัดภูเก็ต จำนวน 112 คน

ผู้วิจัยได้คำนวณค่าความเชื่อมั่น(r_{tt}) ของแบบสอบชุดนี้ โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (สูตร 20) ผลปรากฏว่า แบบสอบมีค่าความเชื่อมั่น 0.783 (ดูรายละเอียดตารางที่ 3-4 ในภาคผนวก)

ต่อจากนั้น ผู้วิจัยได้คำนวณค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของ

แบบสอบแต่ละข้อ โดยใช้เทคนิค 27% แล้วเปิดตารางวิเคราะห์ของ จุง เต ฟาน (Chung Tae Fan) ผู้วิจัยได้เลือกข้อสอบที่มีค่าความยากระหว่าง .20 ถึง .80 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไป มาจำนวน 50 ข้อ (ดูตารางที่ 5 ในภาคผนวก) เพื่อนำไปใช้เป็นเครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนต่อไป

แบบสอบก่อนและหลังเรียนบทเรียน

แบบสอบเรื่อง "เวคเตอร์"

<u>คำสั่ง</u> จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย "X" ลงในกระดาษคำตอบให้ตรงกับข้อที่นักเรียนเลือก

1. จากข้อต่อไปนี้ ข้อใด<u>ไม่เป็น</u>ปริมาณสเกลาร์

   ก.การเคลื่อนที่ ข.อุณหภูมิ

   ค.น้ำหนัก ง.ปริมาตร

2. จากข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นปริมาณเวคเตอร์

   ก.อุณหภูมิ 30 องศาเซนเซียส ข.ส่วนของเส้นตรงขนาด 2 เมตร

   ค.ข้าวสารหนัก 10 กิโลกรัม ง.การเดินทางไปทางทิศใต้ 10 เมตร

3. ปริมาณเวคเตอร์คืออะไร

   ก.ปริมาณที่บอกขนาดอย่างเดียว ข.ปริมาณที่บอกทิศทางอย่างเดียว

   ค.ปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง ง.ปริมาณที่บอกเฉพาะตำแหน่ง

4. ข้อแตกต่างระหว่างปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวคเตอร์คือข้อใด

   ก.ปริมาณเวคเตอร์มีขนาด ข.ปริมาณเวคเตอร์มีทิศทาง

   ค.ปริมาณสเกลาร์มีขนาด ง.ปริมาณสเกลาร์มีทิศทาง

5. เวคเตอร์ที่เขียนแทนการแล่นของเรือยนต์ไปทางทิศตะวันตก 3 ไมล์ คือข้อใด

   ก. $A \longrightarrow B$ ข. $A \longleftarrow B$

   ค. $A \text{ ——— } B$ ง. $B \text{ ——— } A$

6. จากรูป $A \longleftarrow B$ จงบอกจุดเริ่มต้นและจุดปลาย

   ก. AB เป็นจุดเริ่มต้นและจุดปลาย ข. $\overrightarrow{AB}$ เป็นจุดเริ่มต้นและจุดปลาย

   ค. A เป็นจุดเริ่มต้นและ B เป็นจุดปลาย ง. B เป็นจุดเริ่มต้นและ A เป็นจุดปลาย

7. ข้อใดคือสัญลักษณ์ที่เขียนแทนเวคเตอร์ $Q \longleftarrow P$

   ก. $\overrightarrow{QP}$ หรือ QP ข. $\overrightarrow{QP}$

   ค. $\overrightarrow{PQ}$ หรือ PQ ง. $\overrightarrow{PQ}$

8. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ หมายความว่าอย่างไร

ก. $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{EF}$ มีขนาดเท่ากันและขนานกัน

ข. $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{EF}$ มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

ค. $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{EF}$ มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน

ง. $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{EF}$ มีทิศทางเดียวกันและขนานกัน

9. เวคเตอร์อิสระคือเวคเตอร์ชนิดใด

ก.บอกขนาดอย่างเดียว　　ข.บอกทิศทางอย่างเดียว

ค.บอกเฉพาะขนาดกับทิศทาง　　ง.บอกจุดเริ่มต้นและจุดปลาย

10. เวคเตอร์จำกัดคือเวคเตอร์ชนิดใด

ก.บอกขนาดอย่างเดียว　　ข.บอกทิศทางอย่างเดียว

ค.บอกเฉพาะขนาดกับทิศทาง　　ง.บอกจุดเริ่มต้นและจุดปลาย

11. จากข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นคำกล่าวที่ถูกต้อง

ก.เวคเตอร์จำกัดเป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระ

ข.เวคเตอร์อิสระเป็นสมาชิกของเวคเตอร์จำกัด

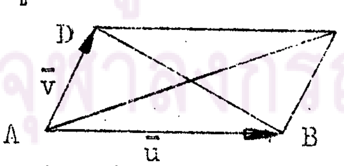
ค.เวคเตอร์จำกัดเป็นอินเวอร์สของเวคเตอร์อิสระ

ง.เวคเตอร์อิสระและเวคเตอร์จำกัดไม่เกี่ยวข้องกัน

12. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$ มีค่าเท่าใด

ก. $\overrightarrow{BE}$　　ข. $\overrightarrow{BF}$　　ค. $\overrightarrow{CF}$　　ง. $\overrightarrow{DD}$

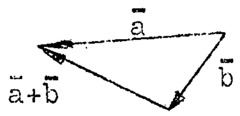
13. จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือข้อใด

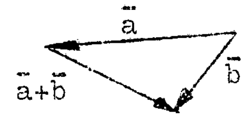


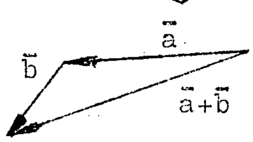
ก. $\overrightarrow{AC}$　　ข. $\overrightarrow{CA}$

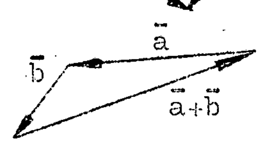
ค. $\overrightarrow{BD}$　　ง. $\overrightarrow{DB}$

14. รูปในข้อใดที่แสดงผลบวกของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ ได้ถูกต้อง

ก.


ข.


ค.


ง.


15. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ มีค่าเท่าใด

ก. $\bar{0}$ ข. $\overrightarrow{AC}$ ค. $\overrightarrow{DA}$ ง. $\overrightarrow{AB}$

16. $\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TS}$ มีค่าเท่าใด

ก. $\overrightarrow{ST}$ ข. $\overrightarrow{TS}$ ค. $2\overrightarrow{ST}$ ง. $\bar{0}$

17. เราสรุปว่า $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ โดยใช้คุณสมบัติข้อใด

ก.คุณสมบัติปิด, ข.คุณสมบัติการจัดหมู่

ค.คุณสมบัติการสลับที่ ง.คุณสมบัติการกระจาย

18. กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ใดๆ $\bar{0}$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก เพราะข้อใด

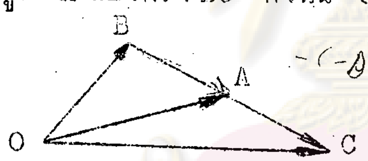
ก. $\bar{u}+\bar{v} = \bar{0} = \bar{v}+\bar{u}$ ข. $\bar{u}+(-\bar{u}) = \bar{0} = (-\bar{u})+\bar{u}$

ค. $\bar{u}+\bar{0} = \bar{u} = \bar{0}+\bar{u}$ ง. $\bar{0}+0 = \bar{0} = 0+\bar{0}$

19. $\bar{a}-\bar{b}$ มีผลลัพธ์ตรงกับข้อใด

ก. $\bar{b}-\bar{a}$ ข. $\bar{b}+\bar{a}$ ค. $\bar{a}-(-\bar{b})$ ง. $\bar{a}+(-\bar{b})$

20. จากรูป A แบ่งครึ่ง BC ดังนั้น $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}$ มีค่าเท่าใด

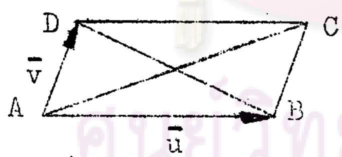


$-(-\overrightarrow{BA})$

ก. $\overrightarrow{OC}$ ข. $\overrightarrow{OB}$

ค. $\overrightarrow{AC}$ ง. $\overrightarrow{BC}$

21. จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD $\bar{u}-\bar{v}$ มีค่าเท่าใด



ก. $\overrightarrow{DB}$ ข. $\overrightarrow{BD}$

ค. $\overrightarrow{AC}$ ง. $\overrightarrow{CA}$

22. เวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น 3 เท่าของ $\bar{u}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือเวคเตอร์ใด

ก. $3\bar{u}$ ข. $-3\bar{u}$ ค. $4\bar{u}$ ง. $-4\bar{u}$

23. ถ้า $\bar{a}$ มีทิศทางไปทางทิศตะวันออก $-10\bar{a}$ จะมีทิศทางไปทางใด

ก.ทิศตะวันตก ข.ทิศตะวันออก ค.ทิศใต้ ง.ทิศเหนือ

24. ถ้า $m\bar{v}$ เป็นเวคเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ แสดงว่า m เป็นจำนวนใด

ก.ศูนย์ ข.จำนวนจริงลบ ค.จำนวนจริงบวก ง.จำนวนจริงใดๆ

25. ถ้า a เป็นจำนวนใดๆ จะได้ $a.\bar{0}$ เท่ากับเท่าใด

ก. 0 ข. $\bar{0}$ ค. a ง. $\bar{a}$

26. ถ้า $\bar{u}=4\bar{v}$ ผลสรุปคือข้อใด

ก. $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่ขนานกันแต่มีทิศทางเดียวกัน

ข. $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่ขนานกันและมีทิศทางตรงข้ามกัน

ค. $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานกันและมีทิศทางเดียวกัน

ง. $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานกันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

27. ถ้า a เป็นสเกลาร์ใดๆ $\bar{v}$xa จะได้คำตอบเป็นอะไร

ก.จำนวนจริง ข.เส้นตรง ค.สเกลาร์ ง.เวคเตอร์

28. เราสรุปว่า $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u}+a\bar{v}$ ตามคุณสมบัติอะไร

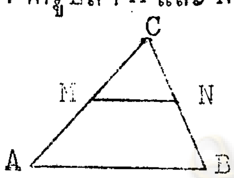
ก.คุณสมบัติปิด ข.คุณสมบัติการสลับที่

ค.คุณสมบัติการจัดหมู่ ง.คุณสมบัติการกระจาย

29. เอกลักษณ์สำหรับการคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์คืออะไร

ก. 0 ข. $\bar{0}$ ค. 1 ง. -1

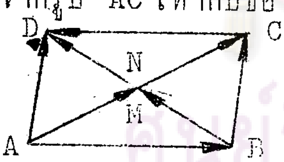
30. จากรูปถ้า M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ CB ตามลำดับ ผลสรุปคือข้อใด



ก. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ข. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN})$

ค. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ง. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB})$

31. จากรูป $\overrightarrow{AC}$ เท่ากับข้อใด



ก. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$ ข. $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{ND}$

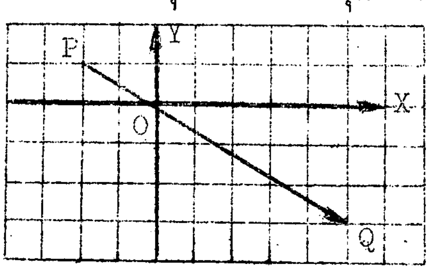
ค. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ง. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

32. จากรูปในข้อ 31 ถ้า $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AC ผลสรุปคือข้อใด

ก. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$ ข. $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ND}$

ค. M,N เป็นจุดบนด้าน AC ง. M,N เป็นจุดเดียวกัน

33. ตำแหน่งของจุดเริ่มต้นและจุดปลายของ $\overrightarrow{PQ}$ คือจุดใด



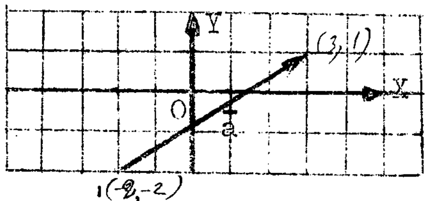
ก. (1,-2) และ (-3,5)

ข. (-2,1) และ (5,-3)

ค. (5,-3) และ (-2,1)

ง. (2,1) และ (-5,-3)

34. $\bar{a}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระในข้อใด



ก. $[3,1]$ ข. $[2,3]$
ค. $[3,5]$ ง. $[5,3]$

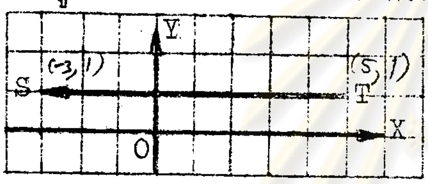
35. กำหนดคู่ลำดับของ $A=(3,-4), B=(4,5)$ $\overrightarrow{AB}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์ใด

ก. $[-1,-9]$ ข. $[1,9]$ ค. $[-1,-2]$ ง. $[1,1]$

36. กำหนดคู่ลำดับของ $O=(0,0), C=(-2,-1)$ $\overrightarrow{OC}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์ใด

ก. $[1,2]$ ข. $[2,1]$ ค. $[-1,-2]$ ง. $[-2,-1]$

37. จากรูป $\overrightarrow{TS}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์ใด



ก. $[-8,1]$ ข. $[8,1]$
ค. $[-8,0]$ ง. $[8,0]$

38. $[1,3]+[-8,4]$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

ก. $[9,7]$ ข. $[-9,1]$ ค. $[5,-5]$ ง. $[-7,7]$

39. กำหนดคู่ลำดับของ $O=(0,0), A=(2,2), B=(5,4)$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

ก. $[3,2]$ ข. $[7,6]$ ค. $[-3,-2]$ ง. $[6,7]$

40. อินเวอร์สของเวคเตอร์ $[2,-3]$ คือเวคเตอร์ใด

ก. $[0,0]$ ข. $[-2,-3]$ ค. $[-3,2]$ ง. $[-2,3]$

41. ถ้า $\bar{a}=[5,3]$, $\bar{b}=[2,-5]$ $\bar{a}-\bar{b}$ คือเวคเตอร์ใด

ก. $[3,-2]$ ข. $[3,8]$ ค. $[7,-2]$ ง. $[-7,-8]$

42. ถ้า $\bar{u}=[3,-1]$ $3\bar{u}$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

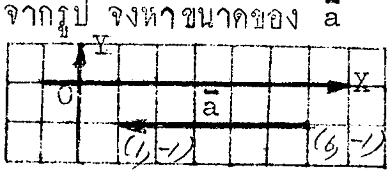
ก. $[9,-1]$ ข. $[3,-3]$ ค. $[9,-3]$ ง. $[6,-2]$

-4, -2 3, 6

43. เมื่อ $\bar{u}=[3,4]$, $\bar{v}=[-2,-1]$, $\bar{w}=[-1,-2]$ $\bar{u}+2\bar{v}-3\bar{w}$ มีคำตอบตรงกับข้อใด

ก. $[0,1]$ (2, 8) ข. $[2,8]$ ค. $[-4,-4]$ ง. $[4,8]$

44. จากรูป จงหาขนาดของ $\bar{a}$



ก. 5 ข. -5
ค. 2 ง. -2

5, 0

45. จงหา $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ เมื่อคู่ลำดับของ A=(1,2),B=(5,7)

ก. $\sqrt{41}$ ข. $\sqrt{117}$ ค. 6 ง. 7

46: $\left|[a,b]\right|$ เท่ากับข้อใด

ก. $\sqrt{a+b}$ ข. $\sqrt{a-b}$

ค. $\sqrt{a^2+b^2}$ ง. $\sqrt{a^2-b^2}$

47. เวคเตอร์ในข้อใดเป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วย

ก. $[1,1]$ ข. $[-1,-1]$

ค. $[0,0]$ ง. $[1,0]$

48. เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $[4,-3]$ เป็นเท่าใด

ก. $[1,-1]$ ข. $[3,-4]$

ค. $\left[\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right]$ ง. $\frac{1}{5}$

49. ให้ $\bar{a}=[2,4]$ $\bar{a}$ เขียนแสดงในรูปของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย i และ j ได้อย่างไร

ก. 2i+4j ข. 2j+4i

ค. 2i-4j ง. -2i-4j

50. $\bar{u}$ = 6i-j มีความหมายเดียวกับเวคเตอร์ใด

ก. $[6,-1]$ ค. $[6,1]$

ค. $[-6,1]$ ง. $[-6,-1]$

5. <u>สร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "เวคเตอร์"</u>

ผู้วิจัยได้สร้างบทเรียนแบบโปรแกรมตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อ แล้วนำบทเรียนไปวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนตามลำดับขั้นดังนี้

5.1 ขั้นหนึ่งคน 2 ครั้ง การทดลองขั้นนี้เพื่อปรับปรุงแก้ไขบทเรียน

5.1.1 ขั้นหนึ่งคนครั้งที่หนึ่ง ผู้วิจัยได้สุ่มนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สี่ของโรงเรียนสุวรรณารามวิทยาคมจำนวนหนึ่งคน เพื่อเรียนบทเรียนระหว่างเวลา 15.30-17.30 น. เป็นเวลา 3 วัน โดยให้นักเรียนทำตามลำดับดังนี้

5.1.1.1 ทำแบบสอบก่อนเรียนบทเรียน

5.1.1.2 เรียนจากบทเรียนแบบโปรแกรม

5.1.1.3 ทำแบบสอบหลังเรียนบทเรียน

5.1.2 ขั้นหนึ่งคนครั้งที่สอง เมื่อปรับปรุงแก้ไขบทเรียนจากการทดลองครั้งที่หนึ่งแล้ว ผู้วิจัยได้นำบทเรียนไปทดลองเป็นครั้งที่สองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สี่ของโรงเรียนวัดเบญจมบพิตรจำนวนหนึ่งคน ใช้เวลาทดลอง 1 วัน ระหว่างเวลา 9.30-16.00 น. โดยดำเนินการเช่นเดียวกับครั้งแรก

5.2 ขั้นกลุ่มเล็ก หลังจากได้แก้ไขปรับปรุงบทเรียนเป็นครั้งที่สองเสร็จแล้ว ผู้วิจัยได้นำบทเรียนไปทดลองกับนักเรียนจำนวน 10 คน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สี่ โรงเรียนสตรีภูเก็ต จังหวัดภูเก็ต ระหว่างเวลา 8.30-12.00 น. เป็นเวลา 2 วัน โดยดำเนินการเช่นเดียวกับขั้นหนึ่งคน

5.3 ขั้นภาคสนาม เป็นขั้นทดลองเพื่อวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองคือ นักเรียนจำนวน 100 คน ระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาปีที่หนึ่ง วิทยาลัยครูภูเก็ต จำนวน 3 ห้องเรียน คือห้อง 1.6,1.7 และ 1.8 ใช้เวลาทดลองรวมทั้งสิ้น 6 วัน ตามตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 1 ตารางเวลาทดลองบทเรียนแบบโปรแกรมขั้นภาคสนาม

เวลา / วัน	8.00 9.00	9.00 10.00	10.00 11.00	11.00 12.00		13.00 14.00	14.00 15.00	15.00 16.00
19มค.19				1.7			1.8	
20มค.19	1.6	1.7	1.6	1.7		1.8	1.8	
21มค.19		1.8	1.8					
22มค.19		1.6 1.8		1.7		1.6		
23มค.19	1.8			1.6		1.6 1.7	1.7	
24มค.19		สอบ						

บทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "เวคเตอร์"

สำหรับ

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

บทเรียนนี้เรียกว่าบทเรียนแบบโปรแกรม เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเรียนได้ด้วยตนเอง บทเรียนจะทำหน้าที่เสมือนเป็นผู้สอนประจำตัวผู้เรียน ดังนั้นผู้เรียนจะต้องปฏิบัติตามคำแนะนำในการเรียนอย่างเคร่งครัด

รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียนมีดังนี้

1. บทเรียนแบบโปรแกรมบทนี้ เขียนขึ้นตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

2. เนื้อหาในบทเรียนแบ่งออกเป็นขั้นเล็กๆ เรียกว่า กรอบ เรียงจากง่ายไปหายาก ตามลำดับ

3. แต่ละกรอบจะมีข้อความรู้ให้ผู้เรียนอ่านและมีคำถามนำให้ผู้เรียนคิดและตอบคำถาม ดังนั้น การอ่านข้อความนักเรียนควรใช้ความสังเกต แล้วเปรียบเทียบจนสามารถสรุปหลักเกณฑ์และนำไปใช้ได้

4. ผู้เรียนจะทราบทันทีว่า คำตอบของผู้เรียนถูกหรือผิด เพราะมีคำตอบเฉลยไว้ด้วย

5. ในแต่ละกรอบแบ่งเป็นสองช่องดังนี้

	ก.1 ในช่องนี้มีข้อความให้ผู้เรียนอ่านและมีคำถามให้ผู้เรียนตอบหรือให้เติมข้อความที่ขาดหายไป
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยของกรอบที่ 1	ก.2
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยของกรอบที่ 2	ก.3

คำแนะนำในการเรียน

นักเรียนจะได้รับประโยชน์มาก ถ้านักเรียนทำตามคำแนะนำต่อไปนี้อย่างเคร่งครัด

1. หากระดาษแข็งเท่าไม้โปรแทรกเตอร์ ปิดข้อความในกรอบที่ 2

2. เริ่มอ่านกรอบที่ 1 แล้วตอบคำถามหรือเติมข้อความที่ขาดหายไป

3. ตรวจคำตอบของนักเรียนด้วยการเลื่อนกระดาษลงไปปิดกรอบที่ 3 นักเรียนจะพบคำตอบเฉลยของกรอบที่ 1 อยู่ทางซ้ายมือของกรอบที่ 2

3.1 ถ้านักเรียน<u>ตอบถูก</u> ให้นักเรียนอ่านกรอบที่ 2 ต่อไป และดำเนินเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ

3.2 ถ้านักเรียน<u>ตอบผิด</u> ให้ย้อนกลับไปอ่านกรอบที่ 1 ให้เข้าใจแล้วคิดใหม่ ขีดฆ่าคำตอบเดิมและเขียนคำตอบที่ถูกต้องใต้คำตอบที่ผิดแล้วจึงอ่านกรอบต่อไป

4. นักเรียนต้องทำทุกๆกรอบจากเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด

5. ขอให้นักเรียนซื่อสัตย์ต่อตนเอง อย่าลอกคำตอบ เพราะบทเรียนที่นักเรียนกำลังทำอยู่นี้ไม่ใช่แบบสอบ แต่เป็นบทเรียนเพื่อการเรียนรู้

6. อย่าแข่งขันกันตอบเพียงเพื่อให้เสร็จก่อนเพื่อน เพราะจะทำให้นักเรียนตอบคำถามโดยไม่ได้คิดตาม จะไม่ช่วยให้เกิดความเข้าใจในเรื่องนั้นๆได้เลย

7. เมื่อจบบทเรียนแล้ว จะมีแบบสอบให้นักเรียนทำ เพื่อวัดดูว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเพียงใด

บทที่ 1

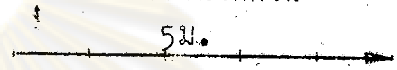
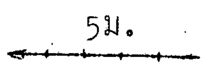
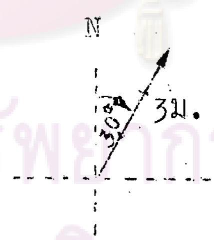
ความหมายและสัญญลักษณ์

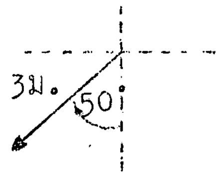
	ก.1 น้ำหนัก ความสูง พื้นที่ ปริมาตร และความยาว ล้วนแต่เป็นตัวอย่างของปริมาณที่บอกเฉพาะขนาด ดังนั้น ความยาวของเชือก 5 เมตร ก็เป็นปริมาณที่บอกเฉพาะ..........อย่างเดียว
ขนาด	ก.2 ถ้าบอกว่า มีเงิน 10 บาท พื้นที่ห้อง 4 ตารางเมตร วัตถุมีปริมาตร 50 ลูกบาศก์เซนติเมตร การบอกเช่นนี้ เป็นการบอกเฉพาะ.......ของปริมาณ
ขนาด	ก.3 ปริมาณที่บอกเฉพาะขนาดอย่างเดียวนี้ เราเรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ดังนั้น ความยาวของเชือก 5 เมตร เงิน 10 บาท เหล่านี้ จึงเป็นปริมาณ........... เพราะเป็นปริมาณที่บอก..........อย่างเดียว
สเกลาร์ ขนาด	ก.4 น้ำหนักของส้ม 2 กิโลกรัม เป็นปริมาณ........... เพราะเป็นปริมาณที่บอก...........อย่างเดียว

สเกลาร์ ขนาด	ก.5 "ความน่ารัก" ไม่เป็นปริมาณ.......... เพราะ..........ปริมาณที่บอกขนาด (เป็น/ไม่เป็น)
สเกลาร์ ไม่เป็น	ก.6 "การแล่นของเรือลำหนึ่งไปทางทิศใต้ 30 ไมล์" ไม่เป็นปริมาณที่บอกเฉพาะขนาดอย่างเดียว **ดังนั้น** จึง..........ปริมาณสเกลาร์ (เป็น/ไม่เป็น)
ไม่เป็น	ก.7 "การแล่นของเรือลำหนึ่งไปทางทิศใต้ 30 ไมล์" เป็นตัวอย่างการบอกปริมาณที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ ซึ่งนอกจากจะบอกขนาดของระยะทางแล้ว ยังบอกทิศทางของการ – เคลื่อนที่อีกด้วย จึงไม่เป็นปริมาณสเกลาร์ ฉะนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า ปริมาณที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่จะบอกทั้ง..........และ.......... จึง..........ปริมาณสเกลาร์
ขนาดและทิศทาง ไม่เป็น	ก.8 ดังนั้น "การบินของเครื่องบินลำหนึ่งไปทางทิศเหนือด้วยอัตราเร็ว 400 กิโลเมตรต่อชั่วโมง" ซึ่งเป็นปริมาณที่บอกทั้ง.........และ......... จึง..........ปริมาณสเกลาร์

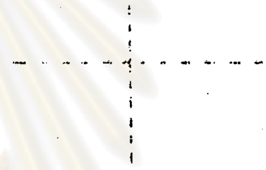
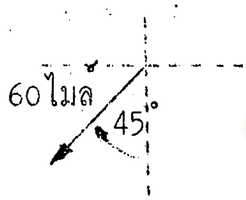
ขนาดและทิศทาง ไม่เป็น	ก.9 ปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทางนี้ เราเรียกว่า ปริมาณเวคเตอร์ (vector quantity) ดังนั้น "การบินของเครื่องบินไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 400 ไมล์" จึงเป็นปริมาณ............เพราะบอกทั้ง......................
เวคเตอร์ ขนาดและทิศทาง	ก.10 ความเร็วของเรือข้ามฟากที่แล่นจากฝั่งหนึ่งไปยังอีกฝั่งหนึ่งโดยใช้อัตราเร็ว 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมงในทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก60° เป็นปริมาณ......... เพราะบอก......................
เวคเตอร์ ขนาดและทิศทาง	ก.11 จึงสรุปได้ว่าปริมาณที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ ซึ่งได้แก่ ความเร็ว ความเร่ง แรง เป็นต้น เป็นปริมาณ............เพราะเป็นปริมาณที่บอก..................
เวคเตอร์ ขนาดและทิศทาง	ก.12 "ออกแรง 50 ปอนด์ ผลักก้อนหินก้อนหนึ่งไปทางทิศใต้" เป็นปริมาณ...........เพราะบอก............... "น้ำมัน 2000 ลิตร" เป็นปริมาณ............... เพราะบอก.................

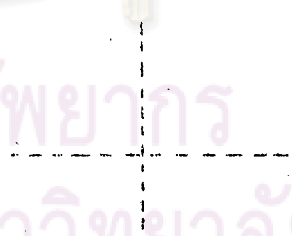
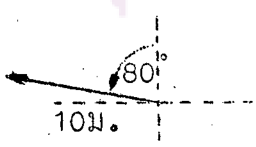
เวคเตอร์,ขนาดและ ทิศทาง สเกลาร์,ขนาด	ก.13 ถ้าบอกว่า เดินทางจากกรุงเทพฯไปพิษณุโลก ก็เป็นการบอกทั้ง...............ของการเดินทาง จึงเป็นปริมาณ........... แต่ถ้าบอกว่า เสานี้สูง 50 เมตร เป็นการบอก .... จึงเป็นปริมาณ...........
ขนาดและทิศทาง, เวคเตอร์ ขนาด,สเกลาร์	ก.14 "ส่วนของเส้นตรง" เป็นปริมาณ............ เพราะบอกเฉพาะ................. "ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง" เป็นปริมาณ...... ....เพราะบอก.................
สเกลาร์,ขนาด เวคเตอร์,ขนาดและ ทิศทาง	ก.15 จึงสรุปได้ว่า ปริมาณใดๆก็ตามที่บอกแต่ขนาด เราเรียกว่า................... และปริมาณใดๆก็ตามที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง เราเรียกว่า.................
ปริมาณสเกลาร์ ปริมาณเวคเตอร์	ก.16 ดังนั้น ปริมาณเวคเตอร์คือ.................. .... และ ปริมาณสเกลาร์คือ...................... ....

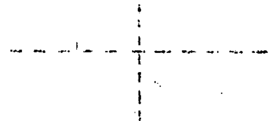
ปริมาณที่บอกทั้งขนาด- และทิศทาง ปริมาณที่บอกแต่ขนาด	ก.17 ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง (directed line segment) เราเขียนได้โดยให้ <u>ความยาวของเส้นตรง</u> แทนขนาด และ<u>หัวลูกศร</u>บอกทิศทาง เช่น ส่วนของเส้นตรงที่มีขนาด 5 เมตร และมีทิศทางไปทางทิศตะวันออก เราเขียนได้ดังนี้  จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีขนาด 5 เมตร และมีทิศ-ทางไปทางทิศตะวันตก
	ก.18 ส่วนของเส้นตรงที่มีขนาด 3 เมตร และมีทิศทางไปทางทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก 30° (N30°E) คือ  ดังนั้น ส่วนของเส้นตรงที่มีขนาด 3 เมตร และมีทิศทางไปทางทิศใต้เฉียงไปทางตะวันตก 50° (S50W) คือ (จงเขียนโดยประมาณ)

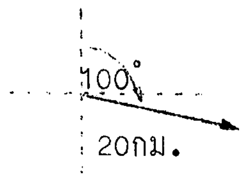
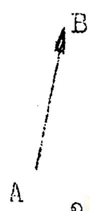
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>ก.19

ปริมาณเวคเตอร์ จึงเขียนแทนได้ด้วย <u>ส่วนของเส้น-ตรงที่มีทิศทาง</u> โดยมีความยาวของเส้นตรงแทน........ และหัวลูกศรบอก...........</td>
</tr>
<tr>
<td>ขนาด,ทิศทาง</td>
<td>ก.20

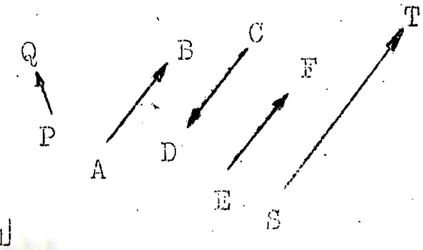
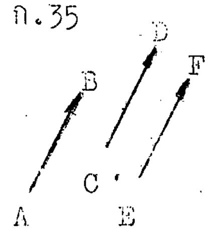
ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง ที่เขียนแทนเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ไป 60 ไมล์ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ (ต.ต.) คือ
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>ก.21

การเดินทางของนักสำรวจไปทางทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันตก 80° เป็นระยะทาง 10 เมตร จะเขียนรูปแสดงได้ดังนี้
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>ก.22

เวคเตอร์ขนาด 20 กิโลเมตร ในทิศทางที่เบนจากทิศเหนือไปทางตะวันออก 100° จะเขียนรูปแสดงได้ดังนี้
</td>
</tr>
</table>

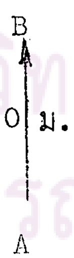
	ก.23  เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจาก A ไป B เราเรียก A ว่า จุดเริ่มต้น (initial point) และเรียก B ว่า จุดปลาย (terminal point) ในทำนองเดียวกัน  เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจาก...ไป.... จึงเรียก C ว่า......... และ D ว่า.........
C, D จุดเริ่มต้น, จุดปลาย	ก.24  เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจาก...ไป.... จึงเรียก....ว่าจุดเริ่มต้น และ....ว่าจุดปลาย
F, E F, E	ก.25 "เครื่องบินบินจากกรุงเทพฯไปยังเชียงใหม่" เป็นปริมาณเวคเตอร์ที่มี.............เป็นจุดเริ่มต้น และ.............เป็นจุดปลาย
กรุงเทพฯ เชียงใหม่	ก.26 เวคเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจาก A ไป B เรียกว่า เวคเตอร์ AB และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ (หรือ $\overrightarrow{AB}$ ก็ได้) ดังนั้น เวคเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจาก C ไป D เรียกว่า............ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ....

เวคเตอร์ CD $\overrightarrow{CD}$	ก.27  เป็นเวคเตอร์ที่มี......เป็นจุดเริ่มต้น และ ......เป็นจุดปลาย จึงเรียกว่า........... และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์.........
A,B เวคเตอร์ AB, $\overrightarrow{AB}$	ก.28  เป็นเวคเตอร์ที่มี......เป็นจุดเริ่มต้น และ ......เป็นจุดปลาย จึงเรียกว่า........... และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์.........
B,A เวคเตอร์ BA, $\overrightarrow{BA}$	ก.29  เรียกว่า........... และเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์...........
เวคเตอร์ DC $\overrightarrow{DC}$	ก.30 การเขียนสัญลักษณ์แทนเวคเตอร์อาจใช้อักษรตัวเดียว มีเครื่องหมาย → หรือ – กำกับ เช่น อาจใช้สัญลักษณ์ $\vec{u}$ หรือ $\underline{u}$ แทนเวคเตอร์ u ก็ได้ ดังนั้น $\vec{a}$ หรือ $\underline{a}$ ก็เป็นสัญลักษณ์ที่เขียนแทน..........
เวคเตอร์ a	ก.31 เวคเตอร์ w ก็อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์........ หรือ........

$\bar{w}$, $\underline{w}$	ก.32  จากรูป $\vec{AB}$ และ $\vec{PQ}$ มีขนาดไม่เท่ากันและมีทิศทางต่างกัน $\vec{AB}$ และ.... มีขนาดไม่เท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน $\vec{AB}$ และ.... มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางตรงข้ามกัน ....และ.... มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน
$\vec{ST}$, $\vec{CD}$ $\vec{AB}$ และ $\vec{EF}$	ก.33 ถ้า $\vec{AB}$ และ $\vec{EF}$ มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เวคเตอร์ทั้งสองจะเท่ากัน และเขียนแสดงด้วย $\vec{AB} = \vec{EF}$ ดังนั้น ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เราก็เขียนแสดงด้วย..............
$\bar{u} = \bar{v}$	ก.34 จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์ที่มี..............และ ....จะเท่ากัน
ขนาดเท่ากันและ ทิศทางเดียวกัน	ก.35  ถ้า $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EF}$ ต่างก็เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาด 10หน่วย และมีทิศทางไปทางทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก 30° ดังรูป จะได้ว่า $\vec{AB}, \vec{CD}$และ$\vec{EF}$ เป็นเวคเตอร์ที่............ (เท่ากัน/ไม่เท่ากัน)

เท่ากัน	ก.36 ดังนั้น การเคลื่อนที่ไป 10 หน่วย ทางทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก 30° จึงอาจแสดงด้วย $\overrightarrow{AB}$ หรือ $\overrightarrow{CD}$ หรือ $\overrightarrow{PQ}$ หรือเวคเตอร์อื่นๆ ถ้าเวคเตอร์เหล่านั้น......................
เท่ากัน	ก.37 การเคลื่อนที่ไป 10 หน่วย ทางทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก 30° เป็นเวคเตอร์ที่บอกขนาดและทิศทาง แต่ไม่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้ เวคเตอร์เช่นนี้เรียกว่า เวคเตอร์อิสระ (free vectors) ด้วยเหตุนี้ การเดินทางไปทางทิศใต้ 60 เมตร จึงเป็นเวคเตอร์........... เพราะ............... (กำหนด/ไม่กำหนด) จุดเริ่มต้นและจุดปลายให้
อิสระ, ไม่กำหนด	ก.38 เรากล่าวได้ว่า เวคเตอร์อิสระ คือ เวคเตอร์ที่ไม่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้ ดังนั้น การแล่นของเรือด้วยความเร็ว 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ไปทางทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก 200° เป็นเวคเตอร์........... เพราะ............... ....

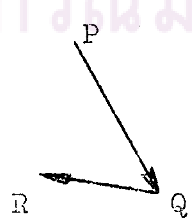
อิสระ, ไม่กำหนดจุด- เริ่มต้นและจุดปลายให้	ก.39 การบินไป 950 กิโลเมตร ทางทิศตะวันออก เป็นเวคเตอร์............ เพราะ................. จุดเริ่มต้นและจุดปลายให้
อิสระ, ไม่กำหนด	ก.40 การบินจากกรุงเทพฯไปเชียงใหม่ เป็นเวคเตอร์-อิสระหรือไม่ ....(เป็น/ไม่เป็น) เพราะ..............จุดเริ่มต้นและจุดปลายให้
ไม่เป็น, กำหนด	ก.41 เวคเตอร์ที่<u>กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้</u> จะเรียกว่า <u>เวคเตอร์จำกัด</u> (fixed vectors) ดังนั้น การบินจากกรุงเทพฯไปเชียงใหม่**เป็นเวคเตอร์**..........เพราะ...........จุดเริ่มต้นและจุดปลาย
จำกัด, กำหนด	ก.42 เรือข้ามฟากจาก<u>ท่าพรานนกมายังท่าพระจันทร์</u> เป็นเวคเตอร์.........เพราะมี.............เป็นจุดเริ่มต้น และมี..............เป็นจุดปลาย
จำกัด, ท่าพรานนก ท่าพระจันทร์	ก.43 $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวคเตอร์......... เพราะมีจุดเริ่มต้นที่........... และมีจุดปลายที่...........

จำกัด A,B	ก.44 จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์ที่ไม่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้ เราเรียกว่า................ และเวคเตอร์ที่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้ เราเรียกว่า................
เวคเตอร์อิสระ เวคเตอร์จำกัด	ก.45 ถ้า$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ และ$\overrightarrow{EF}$ ต่างก็เขียนแทนเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ 10 หน่วยในทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก 30° จะพบว่า$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ และ$\overrightarrow{EF}$ เป็นเวคเตอร์........... (อิสระ/จำกัด) ที่เขียนแทนเวคเตอร์...........ของการเคลื่อนที่ 10 (อิสระ/จำกัด) หน่วยในทิศเหนือเฉียงไปทางตะวันออก 30°
จำกัด,อิสระ	ก.46  ถ้า$\overrightarrow{AB}$ เขียนแทนเวคเตอร์ที่มีขนาด 10 เมตร ไปทางทิศเหนือ ดังรูป เรากล่าวว่า$\overrightarrow{AB}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์ที่มีขนาด 10 เมตรไปทางทิศเหนือ ดังนั้นจะพบว่า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวคเตอร์...........ที่เป็น............ (อิสระ/จำกัด) ของเวคเตอร์...........ที่มีขนาด 10 เมตรไปทางทิศเหนือ (อิสระ/จำกัด)

จำกัด, สมาชิก, อิสระ	ก.47 ถ้า $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาด 3 หน่วย และมีทิศทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ก็แสดงว่า $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเวคเตอร์.........ที่เป็น.........ของเวคเตอร์..........ที่มีขนาด 3 หน่วย และมีทิศทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ
จำกัด, สมาชิก, อิสระ	ก.48 จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์..........ใดๆ **จะเป็นสมาชิก**ของเวคเตอร์...........
จำกัด, อิสระ	ก.49 ถ้า $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ และ $\overrightarrow{PQ}$ ต่างก็เป็นเวคเตอร์จำกัดที่เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระที่มีขนาด 50 ไมล์ไปทางทิศใต้ จะได้ว่า $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ และ $\overrightarrow{PQ}$ จะ............
เท่ากัน	ก.50 จึงสรุปได้อีกว่า เวคเตอร์จำกัดที่เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระเดียวกันย่อม.............
เท่ากัน	

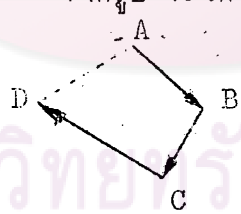
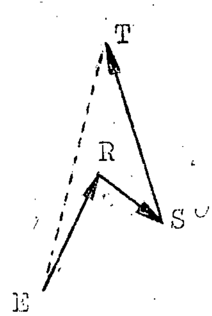
บทที่ 2

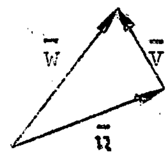
การบวกและการลบเวกเตอร์

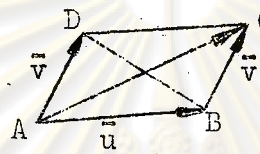
	ก.51 เมื่อพิจารณาเวกเตอร์ที่แทนการเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปเชียงใหม่แล้วเดินทางต่อไปเชียงราย ต่อจากนั้นก็กลับมาพิษณุโลก จะพบว่าการเดินทางครั้งนี้มีเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องกันอยู่ 3 เวกเตอร์ เวกเตอร์แรก คือการเดินทางจาก.......ไป......... เวกเตอร์ที่สองคือการเดินทางจาก.......ไป......... เวกเตอร์ที่สามคือการเดินทางจาก.......ไป.........
กรุงเทพฯ,เชียงใหม่ เชียงใหม่,เชียงราย เชียงราย,พิษณุโลก	ก.52 จาก การเดินทางจากกรุงเทพฯไปเชียงใหม่แล้วเดินทางต่อไปเชียงราย ต่อจากนั้นก็กลับมาพิษณุโลก จะพบว่า การเดินทางครั้งนี้ มีจุดเริ่มต้นที่......... และจุดปลายที่..........
กรุงเทพฯ,พิษณุโลก	ก.53  $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$ มีเวกเตอร์ต่อเนื่องกันอยู่...... เวกเตอร์ คือ เวกเตอร์จาก......ไป...... และเวกเตอร์จาก......ไป...... ดังนั้น $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$ จะมีจุดเริ่มต้นที่.....และจุดปลายที่.....

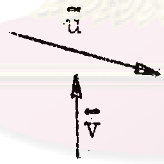
2 P,Q,Q,R P,R	ก.54 ดังนั้น $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE}$ มีเวคเตอร์ต่อเนื่องอยู่...... เวคเตอร์ และมีจุดเริ่มต้นที่......จุดปลายที่........
4 A,E	ก.55 การเดินทางโดยเครื่องบินจากกรุงเทพฯไปสงขลา แล้วเดินทางต่อไปยังภูเก็ต มีเวคเตอร์ต่อเนื่องกันอยู่.. .....เวคเตอร์ และการเดินทางครั้งนี้มีจุดเริ่มต้นที่.............. จุดปลายที่...............
2 กรุงเทพฯ,ภูเก็ต	ก.56 สำหรับการเดินทางโดยเครื่องบินจากกรุงเทพฯตรงไป ภูเก็ต จะมีเวคเตอร์เพียง......เวคเตอร์ และการเดินทางครั้งนี้มีจุดเริ่มต้นที่............. จุดปลายที่..............
1 กรุงเทพฯ,ภูเก็ต	ก.57 จะพบว่า การเดินทางจากกรุงเทพฯไปสงขลาแล้วเดินทางต่อมาภูเก็ต กับ การเดินทางจากกรุงเทพฯตรงไปภูเก็ตนั้น มีจุดเริ่มต้นและจุดปลาย.................. (ต่างกัน/อย่างเดียวกัน) คือ จาก.............ไป..............

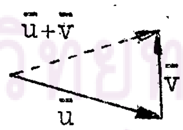
อย่างเดียวกัน กรุงเทพฯ,ภูเก็ต	ก.58 การเดินทาง 2 แบบใดๆ ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายอย่างเดียวกัน เราถือว่า เท่ากัน  จากรูป $\overrightarrow{BS}$ แทนการเดินทางจากกรุงเทพฯไปสงขลา $\overrightarrow{SP}$ แทนการเดินทางจากสงขลาไปภูเก็ต $\overrightarrow{BP}$ แทนการเดินทางจากกรุงเทพฯไปภูเก็ต การเดินทางจากกรุงเทพฯไปสงขลาแล้วเดินทางต่อมาภูเก็ต จึงเขียนแทนด้วย................ และการเดินทางจากกรุงเทพฯตรงไปภูเก็ต ก็เขียนแทนด้วย............ ดังนั้น จะได้ว่า $\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SP}$ =.......
$\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SP}$ $\overrightarrow{BP}$ $\overrightarrow{BP}$	ก.59 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ มีจุดเริ่มต้นที่....และจุดปลายที่..... $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ มีจุดเริ่มต้นที่....และจุดปลายที่..... ดังนั้น $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ .... $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ (เท่ากับ/ไม่เท่ากับ)
A,D A,D เท่ากับ	ก.60 $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}$ มีจุดเริ่มต้นที่.... จุดปลายที่..... ดังนั้น $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}$ .... $\overrightarrow{PT}$
P,T เท่ากับ	ก.61 $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$ .... $\overrightarrow{CF}$

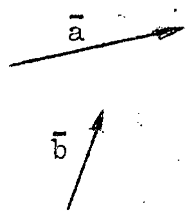
เท่ากับ	ก.62 จึงสรุปได้ว่า <u>ผลบวก</u> ของเวคเตอร์ที่ต่อเนื่องกันจะเท่ากับเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด.............ของเวค- (เริ่มต้น/ปลาย) เตอร์<u>ตัวแรก</u>และมีจุดปลายที่จุด ....ของเวคเตอร์<u>ตัวสุดท้าย</u> (เริ่มต้น/ปลาย)
เริ่มต้น,ปลาย	ก.63 ผลบวกของ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{QR}$ คือ...........
$\overrightarrow{PR}$	ก.64 $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NO}$ = ...
$\overrightarrow{KO}$	ก.65 จากรูป จะได้ว่า  .... + ... + ... = ...
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ = $\overrightarrow{AD}$	ก.66  จากรูป จะได้ว่า .... + ... + ... = ...

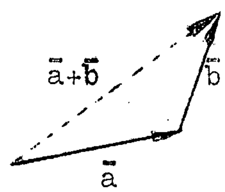
<table>
<tr>
<td>$\overrightarrow{ER}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{ET}$</td>
<td>ก.67


จากรูป จะได้ว่า
.... + ... = ...</td>
</tr>
<tr>
<td>$\bar{u}+\bar{v} = \bar{w}$</td>
<td>ก.68
ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้ว่า


$\bar{u} + \bar{v} =$......</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overrightarrow{AC}$</td>
<td>ก.69
ดังนั้น เมื่อต้องการหาผลบวกของเวคเตอร์ใดๆ เราก็ทำได้โดยการเขียนรูป เช่น
จาก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่กำหนด จะหา $\bar{u}+\bar{v}$ ได้ดังนี้


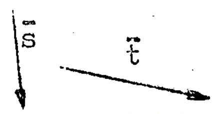
1. เขียน $\bar{u}$ (เวคเตอร์ตัวตั้ง)
2. เขียน $\bar{v}$ <u>ให้มีจุดเริ่มต้นที่จุดปลายของ $\bar{u}$</u> ดังรูป


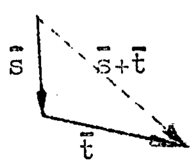
3. เวคเตอร์จากจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ ไปยังจุดปลายของ $\bar{v}$ คือ $\bar{u}+\bar{v}$ ที่ต้องการ
จาก $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ ที่กำหนดให้ จงเขียนรูปแสดง $\bar{a}+\bar{b}$

</td>
</tr>
</table>



ก.70

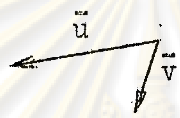
จงเขียนรูปแสดง $\bar{s}+\bar{t}$ จาก $\bar{s}$ และ $\bar{t}$ ที่กำหนดให้

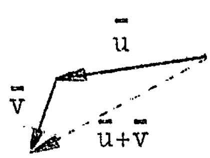




ก.71

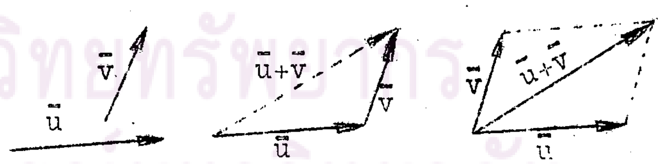
จงเขียนรูปแสดง $\bar{u}+\bar{v}$ จาก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่กำหนดให้





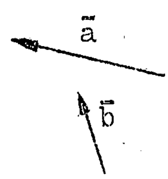
ก.72

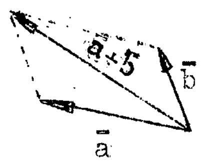
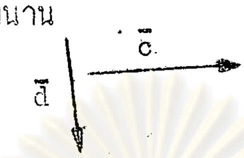
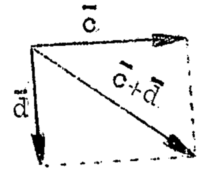
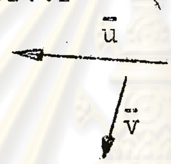
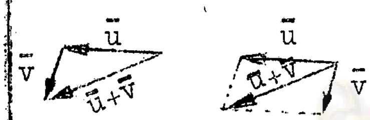
การหา $\bar{u}+\bar{v}$ นั้น อาจทำอีกวิธีหนึ่งคือ ให้<u>จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นจุดเดียวกัน</u> แล้ว<u>สร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน</u> เวคเตอร์ที่เป็นผลลัพธ์จะเป็นเวคเตอร์ที่แทนด้วยเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยมีจุดเริ่มต้นเดียวกับเวคเตอร์ที่กำหนดให้ ดังรูป

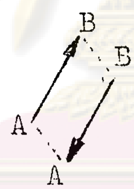


<u>วิธีที่1</u> <u>วิธีที่2</u>

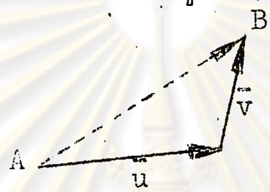
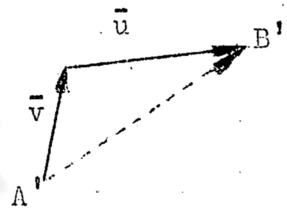
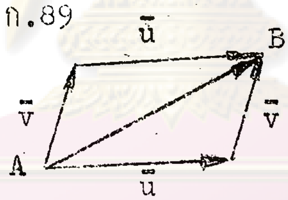
จงหา $\bar{a}+\bar{b}$ โดยวิธีสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน



 	ก.73 จงหาผลลัพธ์ของ $\bar{c}+\bar{d}$ โดยวิธีสร้างสี่เหลี่ยมด้าน-ขนาน 
 	ก.74 จงเขียนรูปแสดง $\bar{u}+\bar{v}$ จาก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่กำหนดให้มาทั้งสองวิธี  วิธีที่1 วิธีที่2
 	ก.75 ผลบวกของเวคเตอร์ไม่ขึ้นอยู่กับการเลือกตำแหน่งของจุดเริ่มต้น จะเลือกจุดใดๆผลบวกที่ได้ก็จะ..........กัน (เท่า/ไม่เท่า)
เท่า	ก.76 นักเรียนคงตอบได้ว่า $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ = ...
$\overrightarrow{AA}$	ก.77 จะพบว่า $\overrightarrow{AA}$หรือ $\overrightarrow{PP}$ หรือ$\overrightarrow{BB}$ ต่างก็เป็นเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายที่จุด..............และจะมีขนาด (เดียวกัน/ต่างกัน) เป็น............

เดียวกัน, ศูนย์	ก.78 เวคเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เราเรียกว่า <u>เวคเตอร์ศูนย์</u> และเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\bar{0}$ ดังนั้น เราจึงเรียกเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายที่จุดเดียวกันว่า เวคเตอร์....... และเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ ....
ศูนย์, $\bar{0}$	ก.79 นั่นคือ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} =$........
$\bar{0}$	ก.80  $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ มีขนาด.......... แต่มีทิศทาง............... และ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} =$.......
เท่ากัน, ตรงข้ามกัน $\bar{0}$	ก.81 จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์สองเวคเตอร์ใดๆที่มีขนาด...............แต่ทิศทาง............ บวกกันจะได้ <u>เวคเตอร์ศูนย์</u>
เท่ากัน, ตรงข้ามกัน	ก.82 $\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TS} =$ .... $\overrightarrow{CD} +$ ..... $= \bar{0}$

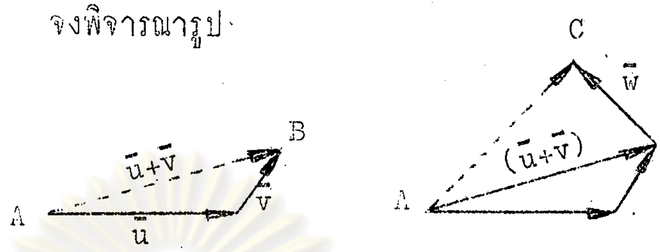
$\bar{0}$ $\overrightarrow{DC}$	ก.83 เราจะเขียนแทนเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ$\bar{u}$ ด้วยสัญญลักษณ์ $\underline{-\bar{u}}$ ดังนั้น เราจะเขียนแทนเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\overrightarrow{AB}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ด้วยสัญญลักษณ์ ....
$-\overrightarrow{AB}$	ก.84 จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) =$ ...... $\bar{a}$ +..... $= \bar{0}$
$\bar{0}$ $-\bar{a}$	ก.85 จะพบว่า สำหรับ$\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ใดๆ จะมี $\bar{w}$ ซึ่ง $\bar{u} + \bar{v} = \bar{w}$ ดังนั้น ผลบวกของเวคเตอร์สองเวคเตอร์ใดๆ จะเป็น .... (สเกลาร์/เวคเตอร์)
เวคเตอร์	ก.86 สำหรับจำนวนจริงใดๆ เมื่อบวกกันผลบวกก็ยังคงเป็นจำนวนจริงอยู่ เรากล่าวว่า จำนวนจริงมีคุณ<u>สมบัติปิด-สำหรับการบวก</u> ดังนั้น เมื่อ<u>ผลบวก</u>ของ<u>เวคเตอร์</u>สองเวคเตอร์ใดๆยังคงเป็น<u>เวคเตอร์</u> เราจึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ.. ....

ปิดสำหรับการบวก	ก.87 เวคเตอร์มีคุณสมบัติปิดสำหรับการบวกเพราะ ผลบวกของสองเวคเตอร์ใดๆยังคงเป็น ....
เวคเตอร์	ก.88 จงพิจารณารูป   $\overrightarrow{AB}$ = ...+.... $\overrightarrow{A'B'}$ = ...+....
$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{u}$	ก.89  จากรูป จะได้ว่า ...+... = $\overrightarrow{AB}$ = ...+...
$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{u}$	ก.90 สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใดๆ จะได้ $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติการสลับที่สำหรับการบวก ดังนั้น $\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{RS}$ = $\overrightarrow{RS}$+..... = ... เพราะเวคเตอร์มีคุณสมบัติ...........สำหรับการบวก
$\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$ การสลับที่	ก.91 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ = ... + ... = ...

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

ก.92

จงพิจารณารูป

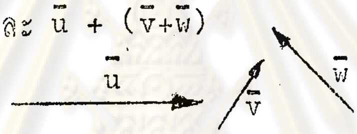


$\overrightarrow{AB} = \bar{u}+\bar{v}$ ดังนั้น $\overrightarrow{AC}$ = (...+...) +...

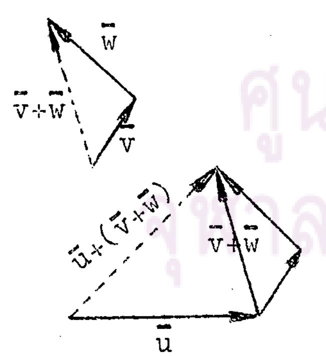
$(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$

ก.93

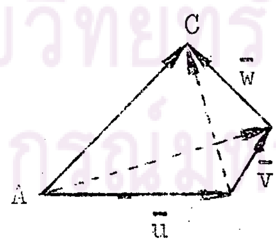
กำหนด $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ จงเขียนรูปแสดง $\bar{v}+\bar{w}$ และ $\bar{u} + (\bar{v}+\bar{w})$



$\bar{v}+\bar{w}$ $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$



ก.94



เวคเตอร์จะมีคุณสมบัติการจัดหมู่-สำหรับการบวก ถ้า

$(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$

สำหรับ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ใดๆ

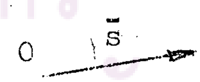
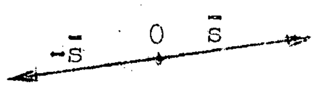
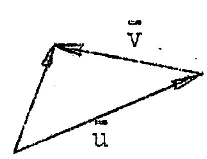
จากรูป $\overrightarrow{AC}$ = (...+...)+....

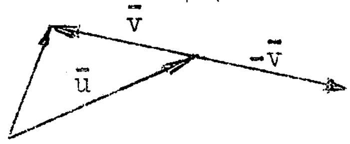
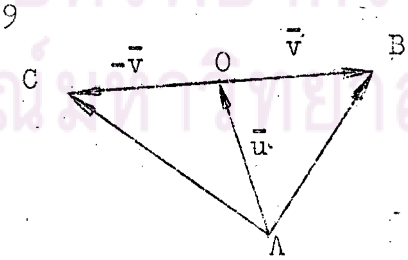
หรือ $\overrightarrow{AC}$ = ...+(...+...)

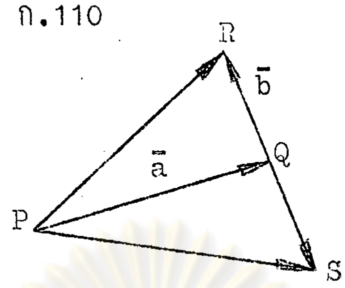
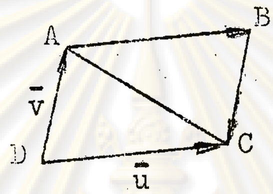
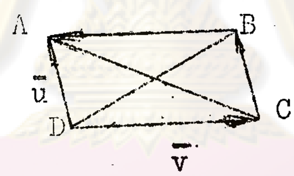
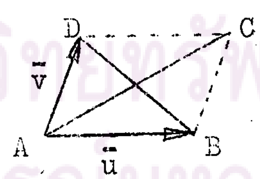
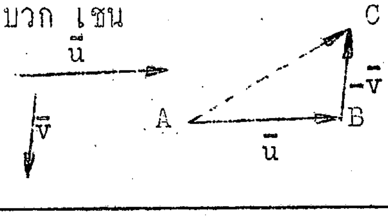
แสดงว่า $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$

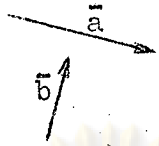
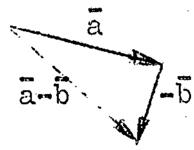
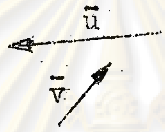
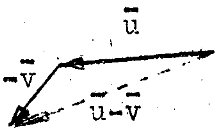
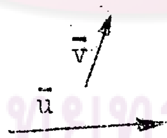
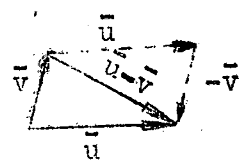
จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ........สำหรับการบวก

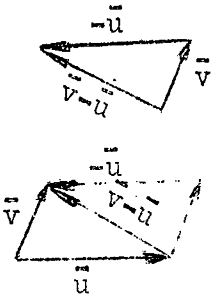
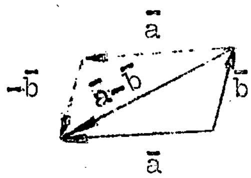
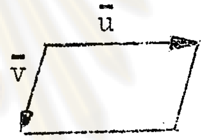
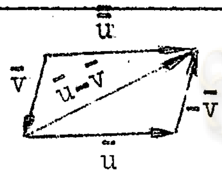
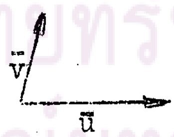
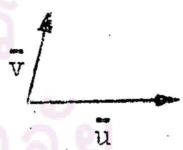
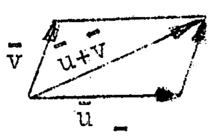
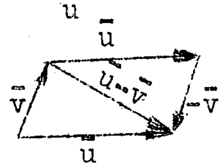
$(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$, $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$ การจัดหมู่	ก.95 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \ldots\ldots\ldots = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB}$	ก.96 ดังนั้น $\overrightarrow{AB} + \underline{\bar{0}} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB}$, $\bar{0}$	ก.97 ดังนั้น เมื่อ $\bar{u}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ จะได้ $\bar{u} + \ldots\ldots = \bar{u} = \ldots\ldots + \bar{u}$
$\bar{0}$, $\bar{0}$	ก.98 จาก $\bar{u}+\bar{0} = \bar{u} = \bar{0}+\bar{u}$ จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มี $\bar{0}$ เป็น เอกลักษณ์สำหรับการบวก ดังนั้น $\bar{w} + \ldots\ldots = \bar{w}$ เพราะ เวคเตอร์ศูนย์ เป็น .... สำหรับการบวก
$\bar{0}$, เอกลักษณ์	ก.99 สำหรับ $\bar{u}$ ใดๆ $\bar{u} + \ldots\ldots = \bar{0}$
$-\bar{u}$	ก.100 เราจะเรียก $-\bar{u}$ ว่าเป็น อินเวอร์ส (inverse) สำหรับการบวกของ $\bar{u}$ ในทำนองเดียวกัน $-\overrightarrow{AB}$ ก็จะเป็น .... สำหรับการบวกของ.....

อินเวอร์ส, $\overrightarrow{AB}$	ก.101 ดังนั้น ถ้าผลบวกของสองเวคเตอร์ใดๆเป็นเวคเตอร์-ศูนย์ เวคเตอร์ทั้งสองจะเป็น .... สำหรับ .... ของกันและกัน
อินเวอร์ส,การบวก	ก.102 เมื่อ $\bar{u}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ จะมี .... เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ $\bar{u}$ เสมอ จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มี .... สำหรับการบวก
$-\bar{u}$ อินเวอร์ส	ก.103 อินเวอร์สสำหรับการบวกของเวคเตอร์ที่แทนการเดิน-ทางไปทางทิศเหนือ 10 ไมล์ ก็คือ เวคเตอร์ที่แทนการเดินทางไปทางทิศ .... เป็นระยะทาง......ไมล์
ใต้, 10	ก.104 จงเขียนอินเวอร์สสำหรับการบวกของ $\bar{s}$ ที่กำหนดให้ โดยให้มีจุดเริ่มต้นที่จุด O 
	ก.105 จากจุดปลายของ $\bar{u}$ จงเขียนอินเวอร์สของ $\bar{v}$ 

	ก.106 จากที่นักเรียนทราบแล้วในเรื่องระบบจำนวน เราได้นิยามให้ $a-b = a+(-b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ในทำนองเดียวกัน เรื่องของเวคเตอร์ เราก็นิยาม <u>การลบเวคเตอร์</u> โดย $\bar{a}-\bar{b} = \bar{a}+(-\bar{b})$ เมื่อ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ ดังนั้น $\bar{u} - \bar{v}$ = ...
$\bar{u} + (-\bar{v})$	ก.107 นักเรียนคงจำได้ว่า $(-\bar{v})$ ก็คือ..........สำหรับการบวกของ $\bar{v}$
อินเว่อร์ส	ก.108 นั่นคือ การลบ $\bar{u}$ ด้วย $\bar{v}$ ใดๆก็คือการ.........$\bar{u}$ กับ..........ของ $\bar{v}$
บวก อินเวอร์ส	ก.109  จากรูป $\bar{u} + \bar{v} = \overrightarrow{AB}$ และ $\bar{u} - \bar{v}$ = ...

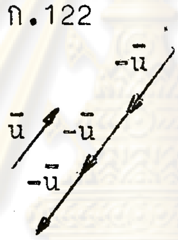
$\overrightarrow{AC}$	ก.110  Q เป็นจุดกึ่งกลางของ RS $\bar{a} + \bar{b}$ = ... $\bar{a} - \bar{b}$ = ...
$\overrightarrow{PR}$ $\overrightarrow{PS}$	ก.111  ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{BC}$ = ... ดังนั้น $\bar{u} - \bar{v}$ = ...
$-\bar{v}$ $\overrightarrow{AC}$	ก.112  ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\bar{u} - \bar{v}$ = ...
$\overrightarrow{CA}$	ก.113  ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\bar{u} + \bar{v}$ = ... $\bar{u} - \bar{v}$ = ...
$\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{DB}$	ก.114 เนื่องจาก $\bar{u}-\bar{v}$ ก็คือ $\bar{u}+(-\bar{v})$ ดังนั้นการเขียนรูปแสดง $\bar{u}-\bar{v}$ ก็ใช้หลักเดียวกับการเขียนรูปแสดงการบวก เช่น  $\bar{u} - \bar{v}$ = ...

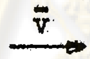
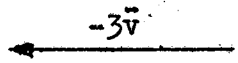
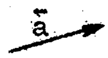
$\overrightarrow{AC}$	ก.115 กำหนด $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ จงเขียนรูปแสดง $\bar{a}-\bar{b}$ 
	ก.116 จงเขียนรูปแสดง $\bar{u}-\bar{v}$ 
	ก.117 นักเรียนคงยังจำได้ว่า เราอาจหา $\bar{u}+\bar{v}$ ได้โดยวิธีสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน ดังนั้น ในการหา $\bar{u}-\bar{v}$ เราก็ทำได้โดยวิธีเดียวกัน แต่ควรระวังในการกำหนดหัวลูกศรให้ถูกต้อง ดังรูป  <u>วิธีที่ 1</u> <u>วิธีที่ 2</u> จาก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่กำหนดให้ จงเขียนรูปแสดง $\bar{v}-\bar{u}$ ทั้ง 2 วิธี <u>วิธีที่ 1</u> <u>วิธีที่ 2</u>

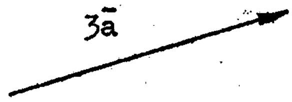
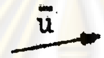
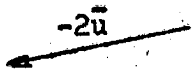
	ก.118 จงสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพื่อแสดง $\bar{a}-\bar{b}$ 
	ก.119 จงเขียน $\bar{u}-\bar{v}$ ลงในสี่เหลี่ยมด้านขนานข้างล่างนี้พร้อมกับกำหนดหัวลูกศรให้ชัดเจน 
	ก.120 จาก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่กำหนดให้ จงสร้างสี่เหลี่ยมด้าน-ขนานแสดง $\bar{u}+\bar{v}$ และ $\bar{u}-\bar{v}$   แสดง $\bar{u}+\bar{v}$ แสดง $\bar{u}-\bar{v}$
	

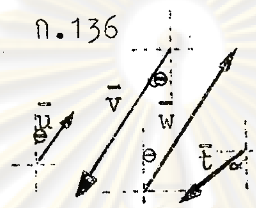
บทที่ 3

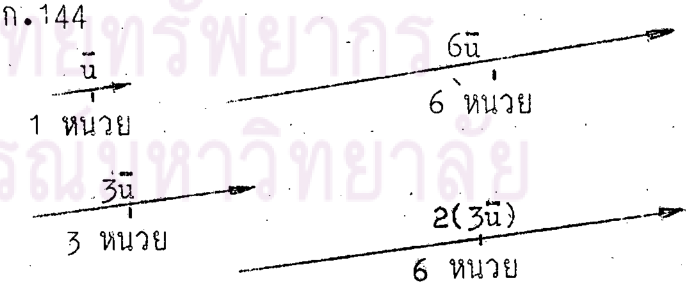
การคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์

	ก.121  $\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}$ เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น ......เท่าของ $\bar{u}$ และมีทิศทาง ....กับ $\bar{u}$ (เดียวกัน/ตรงข้าม)
3 เดียวกัน	ก.122  $(-\bar{u})+(-\bar{u})+(-\bar{u})$ เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น.....เท่าของ $\bar{u}$ และมีทิศทาง ....กับ $\bar{u}$
3 **ตรงข้าม**	ก.123 เวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น <u>3 เท่าของ $\bar{u}$</u> และมีทิศทาง<u>เดียวกับ$\bar{u}$</u> เราเขียนแทนด้วย $3\bar{u}$ และเวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น <u>3 เท่าของ$\bar{u}$</u> แต่มีทิศทาง<u>ตรงข้ามกับ $\bar{u}$</u> เราเขียนแทนด้วย $-3\bar{u}$ นั่นคือ $\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}$ = ... $(-\bar{u})+(-\bar{u})+(-\bar{u})$ = ...
$3\bar{u}$ $-3\bar{u}$	ก.124 ดังนั้น $10\bar{a}$ ก็คือเวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น......เท่าของ $\bar{a}$ และ มีทิศทาง...............กับ $\bar{a}$

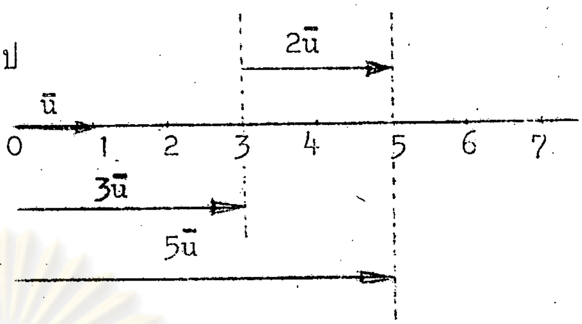
10 เดียวกัน	ก.125 $-5\vec{v}$ คือเวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น......เท่าของ $\vec{v}$ และมีทิศทาง.............กับ $\vec{v}$
5 ตรงข้าม	ก.126 5 เท่าของเวคเตอร์ที่มีขนาด 10 กิโลเมตรไปทางทิศตะวันออก ก็คือเวคเตอร์ที่มีขนาด............. ไปทางทิศ..................
50 กิโลเมตร ตะวันออก	ก.127 จงเขียนรูปแสดงเวคเตอร์ $-3\vec{v}$ โดยประมาณ 
	ก.128 $-5, 10, -3, 3$ เหล่านี้เป็น................. (เวคเตอร์/สเกลาร์) ดังนั้น $5\vec{u}$, $-5\vec{v}$, $-3\vec{v}$ เหล่านี้จึงเป็น<u>ผลคูณของเวคเตอร์</u>กับ...............
สเกลาร์ สเกลาร์	ก.129 จงเขียนรูปแสดงเวคเตอร์ที่เป็นผลคูณของ $\vec{a}$ กับ 3 

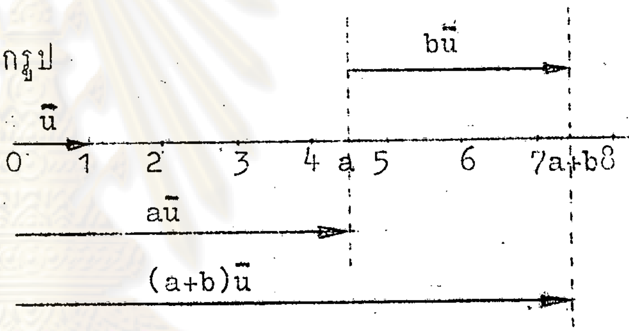
	ก.130 จงเขียนรูปแสดงเวคเตอร์ที่เป็นผลคูณของ $\bar{v}$ กับ -1 
	ก.131 จงเขียนรูปแสดงเวคเตอร์ที่เป็นผลคูณของ $\bar{u}$ กับ -2 
	ก.132 จึงสรุปได้ว่า เมื่อคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ที่เป็น <u>จำนวนจริงบวก</u> จะได้เวคเตอร์ที่มีทิศทาง........... เวคเตอร์เดิม และเมื่อคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ที่เป็น<u>จำนวนจริงลบ</u> จะได้เวคเตอร์ที่มีทิศทาง...........เวคเตอร์เดิม
เดียวกับ ตรงข้ามกับ	ก.133 เราทราบมาแล้วว่า เวคเตอร์ศูนย์คือเวคเตอร์ที่มี <u>ขนาดเป็นศูนย์</u> ดังนั้น เมื่อ a เป็นสเกลาร์ใดๆ $a.\bar{0}$ = ...
$\bar{0}$	ก.134 นอกจากนี้ เมื่อ $\bar{u}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ เราจะได้ $0.\bar{u}$ = ...

$\bar{0}$	ก.135 จึงสรุปได้ว่า เมื่อนำเวคเตอร์ศูนย์คูณกับสเกลาร์ใดๆ จะได้...............และเมื่อนำเวคเตอร์ใดๆคูณกับศูนย์ จะได้..............เช่นกัน
เวคเตอร์ศูนย์ เวคเตอร์ศูนย์	ก.136  จากรูป $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ......จะขนานกัน
$\bar{w}$	ก.137 จะสังเกตเห็นว่า เวคเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงข้ามกันจะ...............กัน (ขนาน/ไม่ขนาน)
ขนาน	ก.138 กำหนด $\bar{u} = -3\bar{v}$ ดังนั้น $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ จะ..........กัน
ขนาน	ก.139 กำหนด $\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{b}$ ดังนั้น $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$ จะ..........กัน
ขนาน	ก.140 จึงสรุปได้ว่า ถ้า $\bar{u}=a\bar{v}$ สำหรับ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และสเกลาร์ a ใดๆแล้ว $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ จะ..........กัน

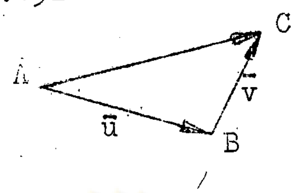
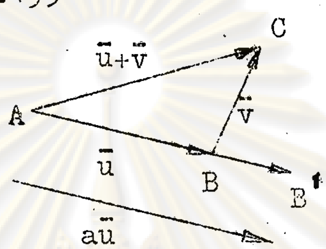
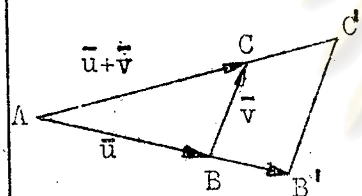
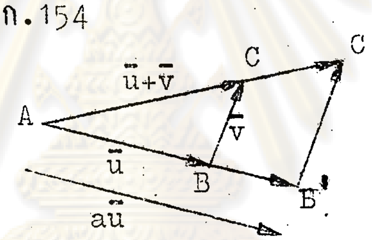
ขนาน	ก.141 นักเรียนคงจำได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติปิดสำหรับการบวก เพราะผลบวกของสองเวคเตอร์ใดๆ ยังคงเป็นเวคเตอร์ ดังนั้น $\bar{u}+\bar{u} = 2\bar{u}$ เป็น..............
เวคเตอร์	ก.142 นักเรียนก็ได้เขียนเวคเตอร์ $5\bar{u}$, $-5\bar{v}$, $-3\bar{a}$ มาแล้ว นั่นแสดงว่า **ผลคูณของเวคเตอร์กับสเกลาร์ใดๆ** เป็น....................
เวคเตอร์	ก.143 ผลคูณของเวคเตอร์กับสเกลาร์ใดๆเป็นเวคเตอร์ จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ........สำหรับ................เวคเตอร์กับสเกลาร์
ปิด,การคูณ	ก.144  เราทราบแล้วว่า $(2.3)\bar{u} = 6\bar{u}$ และจากรูปจะพบว่า $2(3\bar{u}) = 6\bar{u}$ ดังนั้น $(2.3)\bar{u} = 2(.....)$

$2(\underline{3\bar{u}})$	ก.145 ถ้านักเรียนเขียนรูปดู จะพบว่าสำหรับสเกลาร์ a, b และเวคเตอร์ u ใดๆ จะได้ $(ab)\bar{u} = a(\ldots\ldots\ldots)$
$a(\underline{b\bar{u}})$	ก.146 จาก $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$ เราสรุปได้ว่า เวคเตอร์มี<u>คุณสมบัติการจัดหมู่</u><u>สำหรับการบวก</u> ดังนั้น จาก $(ab)\bar{u} = a(b\bar{u})$ จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ ....สำหรับ.. ....เวคเตอร์กับ ....
การจัดหมู่,การคูณ, สเกลาร์	ก.147 ในเรื่องระบบจำนวน เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนใดๆ จะได้ว่า 1. $(a+b)c = ac+bc$ และ 2. $a(b+c) = ab+ac$ คุณสมบัติ 2 ข้อนี้ เราเรียกว่า <u>คุณสมบัติการกระจาย</u> ดังนั้น ในเรื่องเวคเตอร์ เมื่อ a, b เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ ถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า 1. $(a+b)\bar{u} = a\bar{u}+b\bar{u}$ และ 2. $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u}+a\bar{v}$ เราก็สรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ............ เช่นกัน

<table>
<tr>
<td>การกระจาย</td>
<td>ก.148
จากรูป


จะพบว่า $3\bar{u} + 2\bar{u} =$ ....</td>
</tr>
<tr>
<td>$5\bar{u}$</td>
<td>ก.149
จากรูป


จะพบว่า $(a+b)\bar{u} =$ ...... + ...</td>
</tr>
<tr>
<td>$a\bar{u}+b\bar{u}$</td>
<td>ก.150
เพราะ $(a+b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$
จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ.............
สำหรับข้อที่ 1</td>
</tr>
<tr>
<td>การกระจาย</td>
<td>ก.151
ดังนั้น $(7+8)\bar{v} =$ ..... + ...
เพราะเวคเตอร์มีคุณสมบัติ ....</td>
</tr>
</table>

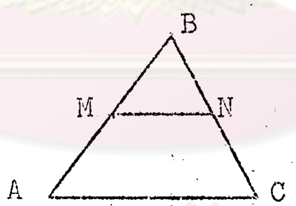
$7\bar{v}+8\bar{v}$ การกระจาย	ก.152  $\overrightarrow{AB}=\bar{u}$, $\overrightarrow{BC}=\bar{v}$ ดังนั้น $\overrightarrow{AC}$ = ...
$\bar{u}+\bar{v}$	ก.153  จากจุด B' จงลาก B'C' <u>ให้ขนานกับ BC</u> พบ AC ที่ต่อออกไปที่ C'
	ก.154  สามเหลี่ยม ABC และAB'C' เป็น<u>สามเหลี่ยมคล้าย</u> ดังนั้น อัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันย่อมเท่ากัน นั่นคือ $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB'}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{B'C'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC'}}$ หรือ $\frac{\bar{u}}{a\bar{u}} = \frac{\dots}{\overrightarrow{B'C'}} = \frac{(\bar{u}+\bar{v})}{\overrightarrow{AC'}}$
$\bar{v}$	ก.155 จาก $\frac{\bar{u}}{a\bar{u}} = \frac{\bar{v}}{\overrightarrow{B'C'}}$ ดังนั้น $\frac{1}{a} = \frac{\bar{v}}{\overrightarrow{B'C'}}$ และจะได้ว่า $\overrightarrow{B'C'}$ = ...

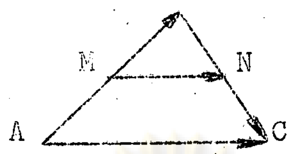
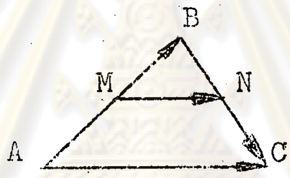
$a\bar{v}$	ก.156 จาก $\frac{1}{a} = \frac{(\bar{u}+\bar{v})}{\overrightarrow{AC'}}$ จะได้ว่า $\overrightarrow{AC'}$ = ...
$a(\bar{u}+\bar{v})$	ก.157 $\overrightarrow{AB'} = a\bar{u}$, $\overrightarrow{B'C'} = a\bar{v}$, $\overrightarrow{AC'} = a(\bar{u}+\bar{v})$ และ $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'}$ = ... ดังนั้น $a\bar{u} + a\bar{v} = a(........)$
$\overrightarrow{AC'}$ $a(\bar{u}+\bar{v})$	ก.158 เราพิสูจนได้แล้วว่า $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u}+a\bar{v}$ จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ .... สำหรับข้อที่ 2
การกระจาย	ก.159 ดังนั้น $\frac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v})$ = ... เพราะเวคเตอร์มีคุณสมบัติ ....
$\frac{1}{2}\bar{u}+\frac{1}{2}\bar{v}$ การกระจาย	ก.160 สำหรับเวคเตอร์ u ใดๆ ผลคูณของ $\bar{u}$ กับ 1 คือ ....

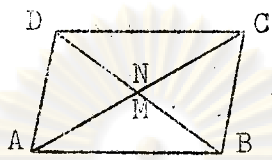
นี	ก.161 จากเรื่องการบวกเวคเตอร์ เราทราบแล้วว่า $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a} = \bar{0} + \bar{a}$ แต่สำหรับการคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ เราจะพบว่า $\bar{a}$ . ... = $\bar{a}$ = ...$\bar{a}$
1,1	ก.162 เราเรียก $\bar{0}$ ว่าเป็น เอกลักษณ์สำหรับการบวก เพราะ $\bar{a}+\bar{0} = \bar{a} = \bar{0}+\bar{a}$ ในทำนองเดียวกัน จาก $\bar{a}.1 = \bar{a} = 1.\bar{a}$ เราจึงเรียก 1 ว่าเป็น................สำหรับ... ....เวคเตอร์กับ............
เอกลักษณ์,การคูณ, สเกลาร์	ก.163 ดังนั้น สำหรับการคูณเวคเตอร์กับสเกลาร์ จึงมี ....เป็นเอกลักษณ์
1	

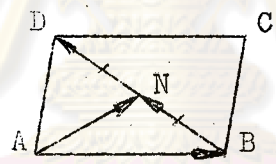
บทที่ 4

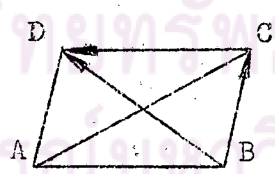
การพิสูจน์เรขาคณิตโดยใช้เวคเตอร์

	ก.164 การศึกษาเรื่องเวคเตอร์มิได้มีประโยชน์เฉพาะที่จะนำไปใช้ในเรื่องการเคลื่อนที่เท่านั้น แต่จะเป็นประโยชน์ในการศึกษาโครงสร้างของคณิตศาสตร์และเป็นรากฐานของวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ ทฤษฎีต่างๆ ทั้งในเรขาคณิตแบบยูคลิดและเรขาคณิตวิเคราะห์อาจพิสูจน์ได้โดยใช้เวคเตอร์ ในตอนนี้เราจะยกตัวอย่างทฤษฎีบทเรขาคณิตแบบยูคลิดที่รู้จักกันดีมาพิสูจน์สัก 2 ทฤษฎี จากรูปข้างล่างนี้ ให้นักเรียนพิจารณาดูว่า ผลสรุปควรจะเป็นอย่างไร  <u>กำหนดให้</u> ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ BC ตามลำดับ เราควรจะได้ว่า MN ยาวเป็น........ของ AC และ..........กับ AC (ขนาน/ไม่ขนาน)
ครึ่งหนึ่ง (1/2) ขนาน	ก.165 นั่นคือ เรากำลังจะพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมใดๆย่อมยาวเป็น.......ของด้านที่สาม และ..........กับด้านที่สาม

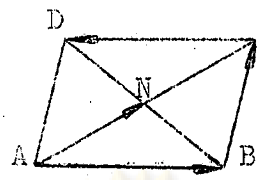
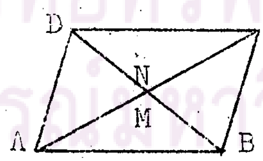
ครึ่งหนึ่ง ขนาน	ก.166  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ = ... และ $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ = ...
$\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{MN}$	ก.167 กำหนด M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ดังนั้น $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}$...... และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ BC ดังนั้น $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}$......
$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$	ก.168  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ แต่ $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ดังนั้น $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}$(......+......) หรือ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}$......
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AC}$	ก.169 จาก $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ แสดงว่า $\overrightarrow{MN}$ .... (ขนาน/ไม่ขนาน) กับ $\overrightarrow{AC}$ และยาวเป็น........ของ $\overrightarrow{AC}$
ขนาน ครึ่งหนึ่ง	ก.170 จึงสรุปได้ว่า เส้นตรงที่ต่อจุด.........ของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมใดๆย่อมยาวเป็น.........ของด้านที่สาม และ..........กับด้านที่สาม

<table>
<tr>
<td>กึ่งกลาง
ครึ่งหนึ่ง
ขนาน</td>
<td>ก.171
ในการพิสูจน์ว่า เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน


<u>กำหนดให้</u> ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน
M เป็นจุดกึ่งกลางของ AC
และN เป็นจุดกึ่งกลางของ BD
<u>จะต้องพิสูจน์ว่า</u> M เป็นจุดเดียวกับ.........</td>
</tr>
<tr>
<td>N</td>
<td>ก.172


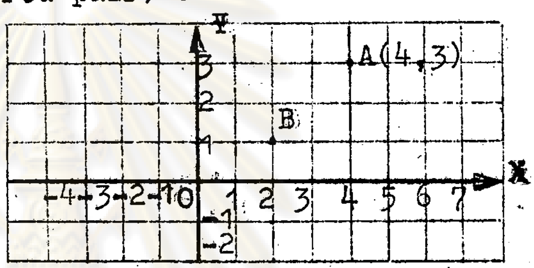
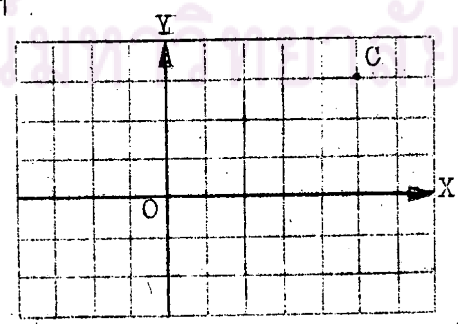
N เป็นจุดกึ่งกลางของ BD
ดังนั้น $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}$.......
และ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} +$ ......
จะได้ว่า $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}$......</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{BN}$
$\overrightarrow{BD}$</td>
<td>ก.173


จากรูป
$\overrightarrow{BD} =$ .....+.....</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$</td>
<td>ก.174
จาก $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
และ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
ดังนั้น $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}($.....+.....$)$</td>
</tr>
</table>

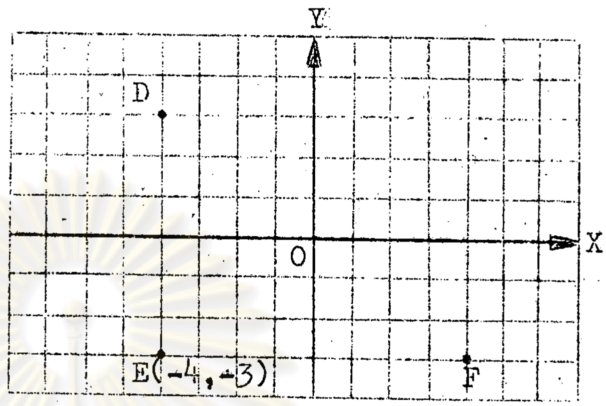
$\vec{BC}+\vec{CD}$	ก.175  จาก $\vec{AN} = \vec{AB}+\frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{CD})$ $= \vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{CD}$ และจากรูป $\vec{CD}=$ ..... ดังนั้น $\vec{AN}= \vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}(.....)$
$-\vec{AB}$, $-\vec{AB}$	ก.176 นั่นคือ $\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AB}$ $= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$ $= \frac{1}{2}(.....+.....)$ $= \frac{1}{2}$.......
$(\vec{AB}+\vec{BC})$ $\vec{AC}$	ก.177 จาก $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ แสดงว่า N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน...........
AC	ก.178  เราพิสูจน์ได้ว่า N เป็นจุดกึ่งกลางของ AC แต่เรากำหนดให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AC ดังนั้น M และN เป็นจุด ....
เดียวกัน แบ่งครึ่ง	ก.179 นั่นคือ เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน........ ซึ่งกันและกัน

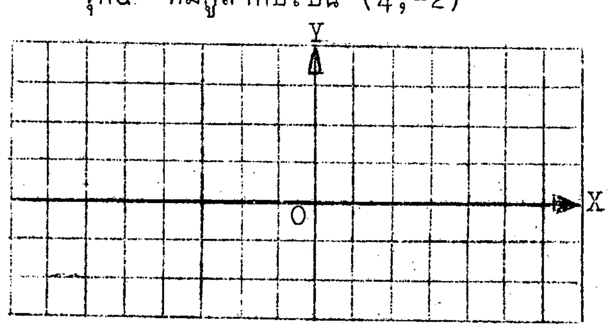
บทที่ 5

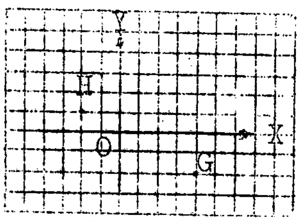
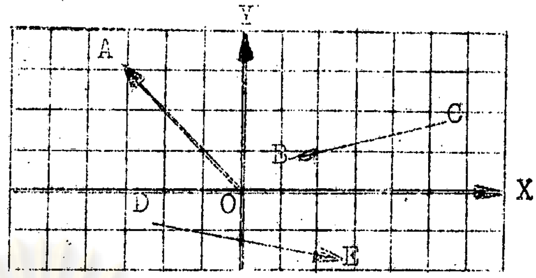
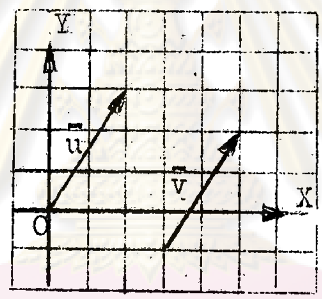
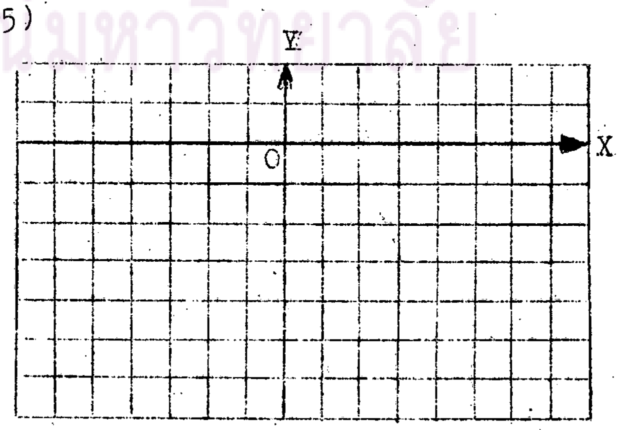
เวคเตอร์ในระนาบพิกัดฉาก

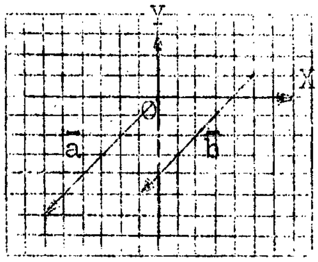
	ก.180 นักเรียนเคยเรียนมาแล้วว่า ในระนาบพิกัดฉากนั้น ตำแหน่งของจุดใดๆ แสดงได้ในรูปของ คู่ลำดับ (ordered pair) เช่น  คู่ลำดับของจุด A คือ (4,3) เมื่อ 4 คือระยะบนแกน X ที่นับจากจุด O ไปทางบวก และ 3 คือระยะบนแกน Y ที่นับจากจุด O ไปทางบวก ดังนั้น จุด B มีระยะบนแกน X ไปทางบวก....หน่วย และ มีระยะบนแกน Y ไปทางบวก....หน่วย คู่ลำดับของจุด B คือ.............
2,1 (2,1)	ก.181  คู่ลำดับของจุด C คือ.............

<table>
<tr>
<td>(5,3)</td>
<td>ก.182



จุด E มีระยะบนแกน X ไปทาง<u>ลบ</u> 4 หน่วย
และมีระยะบนแกน Y ไปทาง<u>ลบ</u> 3 หน่วย
ดังนั้น คู่ลำดับของจุด E คือ (-4,-3)
จากรูป คู่ลำดับของจุด D คือ ....
และ คู่ลำดับของจุด F คือ ....</td>
</tr>
<tr>
<td>(-4,3)
(4,-3)</td>
<td>ก.183
คู่ลำดับของจุด H คือ (-2,1) แสดงว่า
จุดH มีระยะบนแกน X ไปทาง..... .....หน่วย
และมีระยะบนแกน Y ไปทาง..... .....หน่วย
จงลงจุดH ที่มีคู่ลำดับเป็น (-2,1) และ
จุดG ที่มีคู่ลำดับเป็น (4,-2)

</td>
</tr>
</table>

ลบ, 2 บวก, 1  	ก.184  $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DE}$ ต่างก็เป็น<u>เวคเตอร์</u> เพราะเป็นส่วนของเส้นตรงที่มีทั้ง ....และ ....
ขนาด,ทิศทาง	ก.185  $\bar{u}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (...,...) และมีจุดปลายที่ (...,...) $\bar{v}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (...,...) และมีจุดปลายที่ (...,...)
(0,0),(2,3) (3,-1),(5,2)	ก.186 จงเขียน $\bar{a}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (0,0) จุดปลายที่ (-6,-6) และ $\bar{b}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (5,1) จุดปลายที่ (-1,-5) 



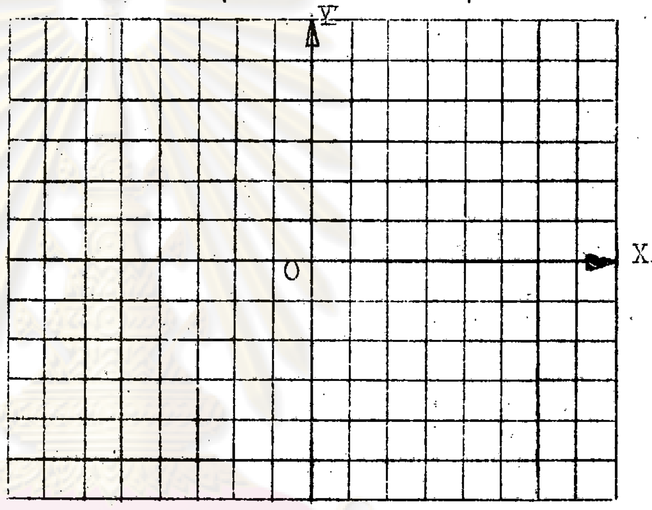
ก.187

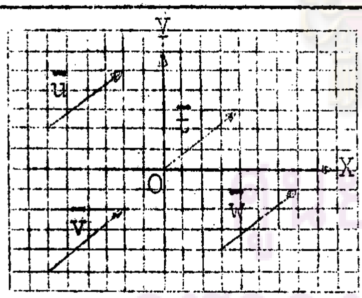
จงเขียน $\bar{t}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่(0,0) จุดปลายที่(4,3)

$\bar{u}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่(-6,2)จุดปลายที่(-2,5)

$\bar{v}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่(-6,-5)จุดปลายที่ (-2,-2)

และ $\bar{w}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่(3,-4)จุดปลายที่(7,-1)





ก.188

$\bar{t}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ที่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายให้ จะเป็น เวคเตอร์...........

(อิสระ,จำกัด)

จำกัด

ก.189

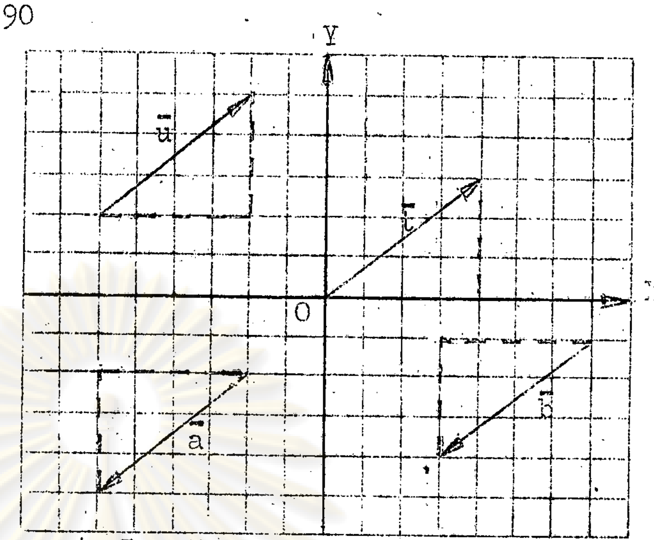
$\bar{t} = \bar{u} = \bar{v} = \bar{w}$ แสดงว่า

$\bar{t}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวคเตอร์......... ที่เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระ................

(เดียวกัน/ต่างกัน)

จำกัด, เดียวกัน

ก.190



จากรูป $\bar{t} = \bar{u}$

ดังนั้น $\bar{t}$ และ $\bar{u}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระเดียวกัน และจะสังเกตพบว่า

นับจากจุดเริ่มต้นของ $\bar{t}$ และ $\bar{u}$ จะมีระยะไปตามแนวนอนทางบวก 4 หน่วย แล้วนับต่อไปตามแนวตั้งทางบวกถึงจุดปลาย 3 หน่วย

เราจึงเขียนแทนเวคเตอร์อิสระที่มี $\bar{t}$ และ $\bar{u}$ เป็นสมาชิกด้วยสัญญลักษณ์ $[4,3]$

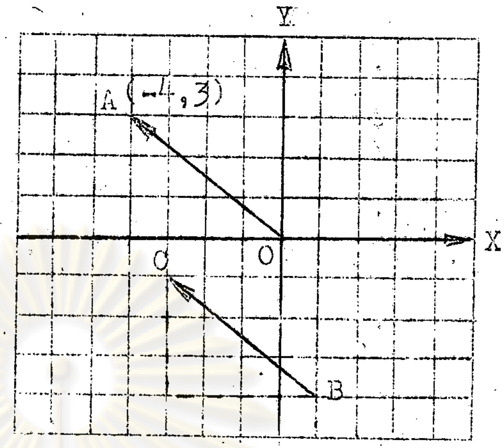
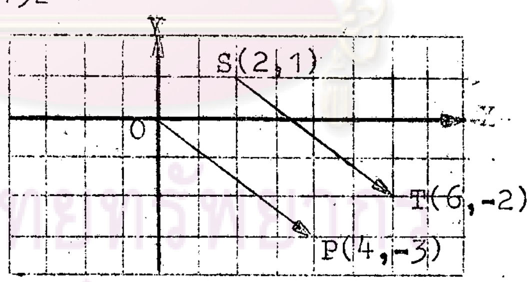
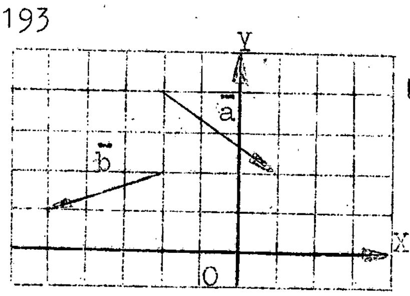
จงพิจารณารูปข้างบน

$$\bar{a} = \bar{b}$$

ดังนั้น $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระ-........... และนับจากจุด...........ของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ จะมีระยะไปตามแนวนอนทางลบ 4หน่วย แล้วนับต่อไปตามแนว.......ทาง......ถึงจุด........ 3หน่วย

ดังนั้น เวคเตอร์อิสระของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ คือ

$[-4, \ldots.]$

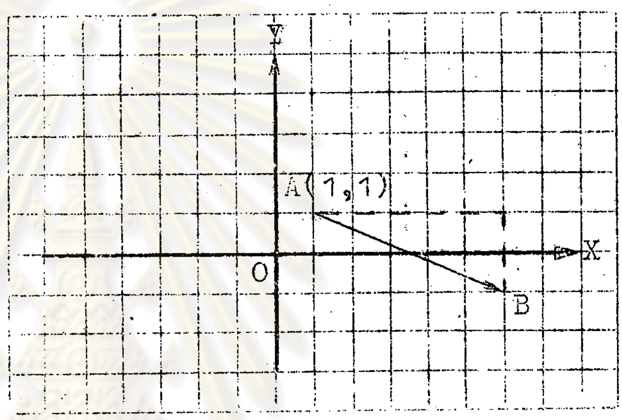
เดียวกัน, เริ่มต้น, แนว-ตั้ง, ลบ ,ปลาย [-4,-3]	ก.191  จากจุดเริ่มต้น O และ B จะมีระยะไปตามแนวนอน ทาง...... ..... หน่วย และมีระยะไปตามแนวตั้ง ทาง...... ..... หน่วย ดังนั้น เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OA}$ และ $\overrightarrow{BC}$ คือ........
ลบ,4 บวก,3 [-4,3]	ก.192  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{ST}$ คือ ....
[4,-3]	ก.193  เวคเตอร์อิสระของ $\bar{a}$ คือ .... $\bar{b}$ คือ ....

[3,-2]

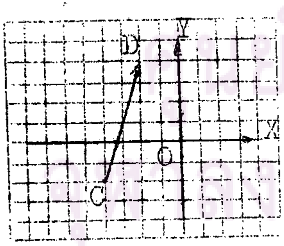
[-3,-1]

ก.194

เมื่อกำหนดเวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{AB}$ = [5,-2] และคู่ลำดับของจุด A คือ(1,1) เราก็เขียน $\overrightarrow{AB}$ ได้ดังรูป โดย<u>เริ่มจาก</u>จุด<u>เริ่มต้น</u> A (1,1) นับไปตามแนวนอนทาง<u>บวก</u> 5 หน่วย แล้วนับต่อไปตามแนวตั้งทาง<u>ลบ</u> 2 หน่วย

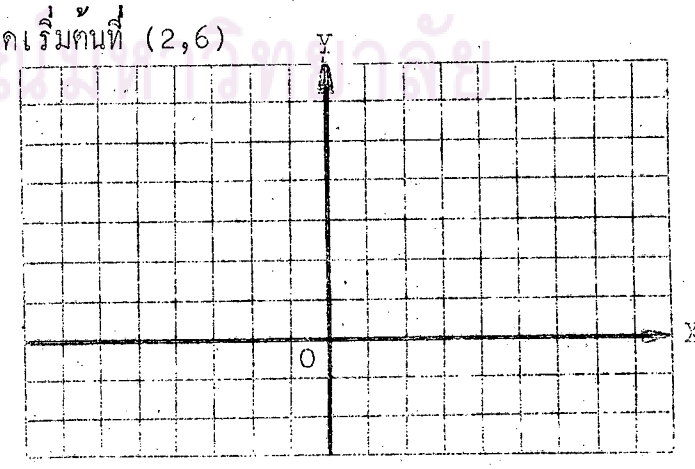


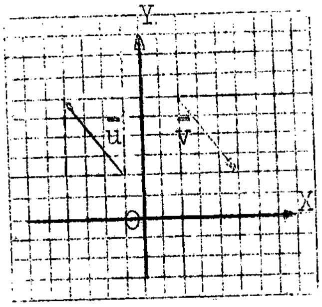
เมื่อเข้าใจแล้ว จงเขียน $\overrightarrow{CD}$ ซึ่งเป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระ[2,6] โดยมีจุดเริ่มต้นที่ (-4,-2)



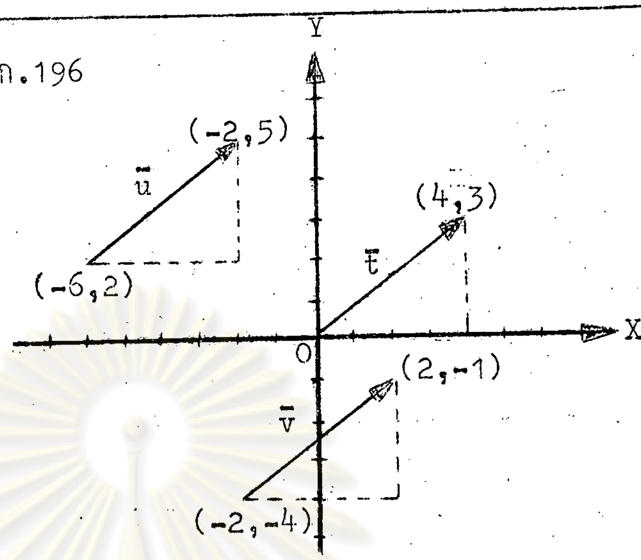
ก.195

จงเขียน $\vec{u}$ ที่เป็นสมาชิกของ [-3,4] ให้มีจุดเริ่มต้นที่ (-1,2) และ $\vec{v}$ ที่เป็นสมาชิกของ[3,-4] ให้มีจุดเริ่มต้นที่ (2,6)





ก.196



จากรูป เราก็หาได้ว่า $\bar{t}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นสมาชิกของเวคเตอร์อิสระ $[4,3]$

เราอาจหาเวคเตอร์อิสระได้โดยไม่ใช้รูป แต่คำนวณจากคู่ลำดับของจุดเริ่มต้นและจุดปลายของเวคเตอร์จำกัดที่กำหนดให้ โดยนำคู่ลำดับของจุดปลายเป็นตัวตั้ง และคู่ลำดับของจุดเริ่มต้นเป็นตัวลบ ดังนี้

$\bar{t}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (0,0) จุดปลายที่ (4,3) ดังนั้น

เวคเตอร์อิสระของ $\bar{t}$ คือ $[4-0,3-0] = [4,3]$

จากจุดเริ่มต้นและจุดปลายของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ในรูป

เวคเตอร์อิสระของ $\bar{u}$ คือ $[-2-(-6), \ldots\ldots] = [4,3]$

เวคเตอร์อิสระของ $\bar{v}$ คือ $[\ldots\ldots, \ldots\ldots] = [4,3]$

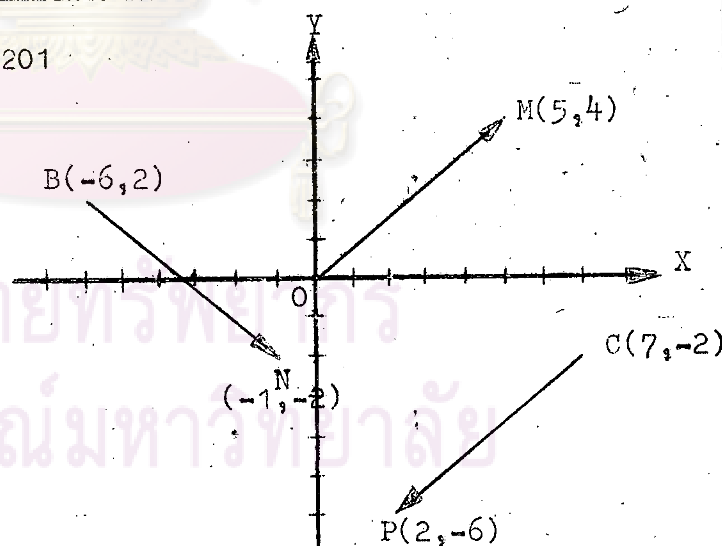
$[-2-(-6), 5-2]$

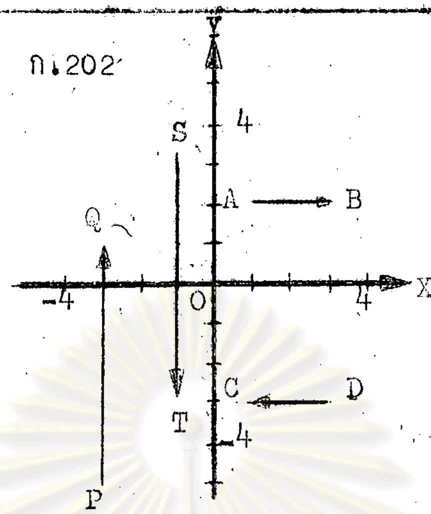
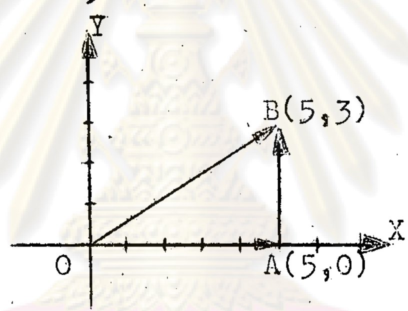
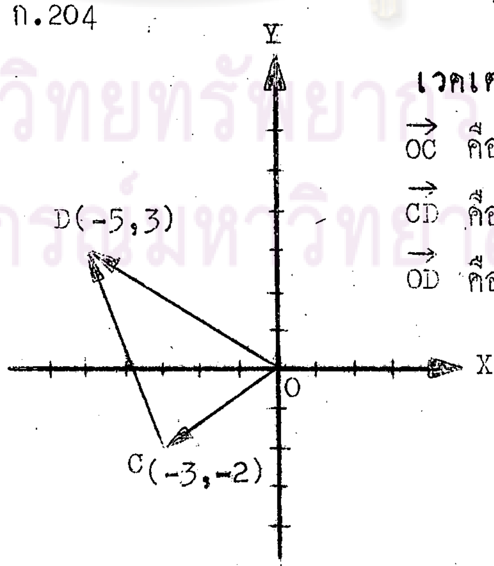
$[2-(-2), -1-(-4)]$

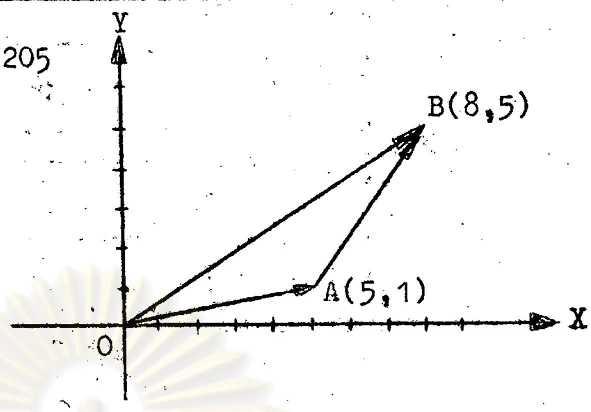
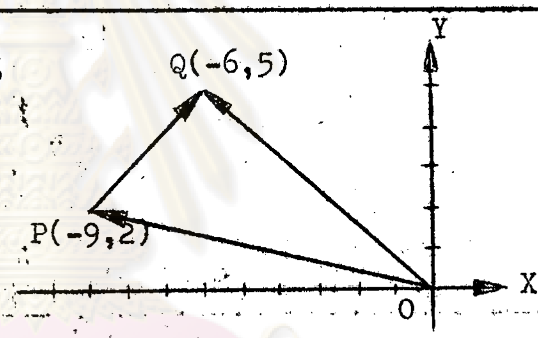
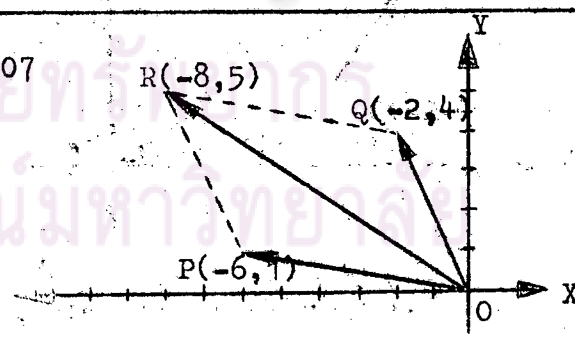
ก.197

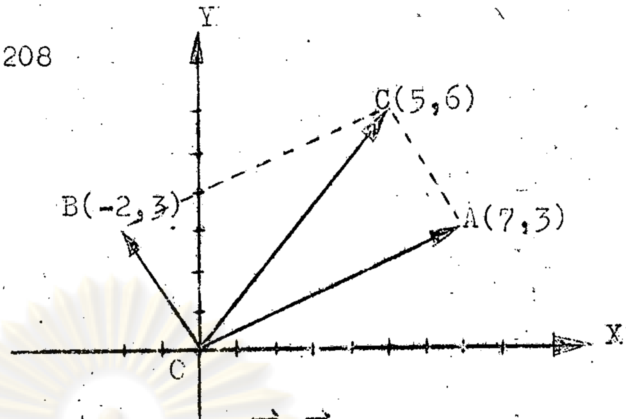
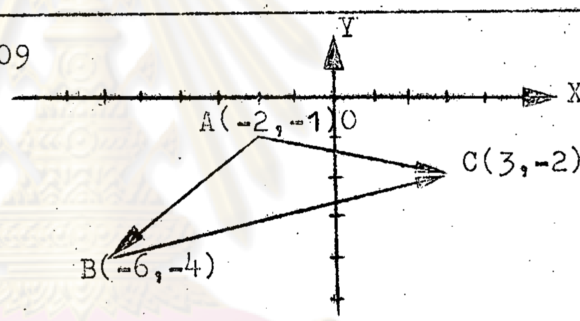
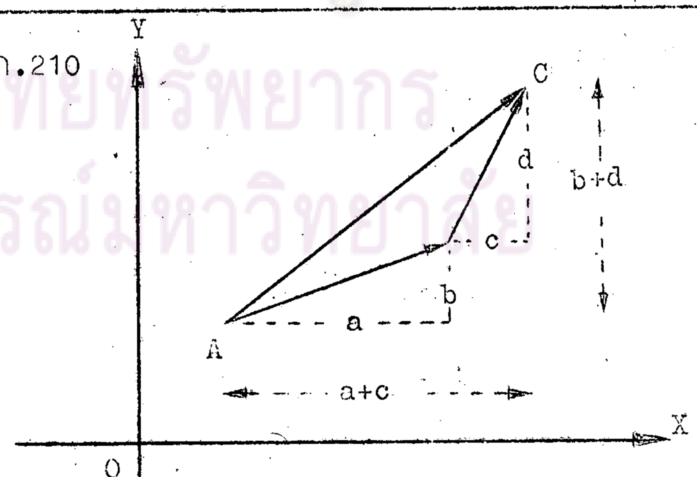
จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์อิสระของเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (x_1,y_1) และจุดปลายที่ (x_2,y_2) ก็คือ

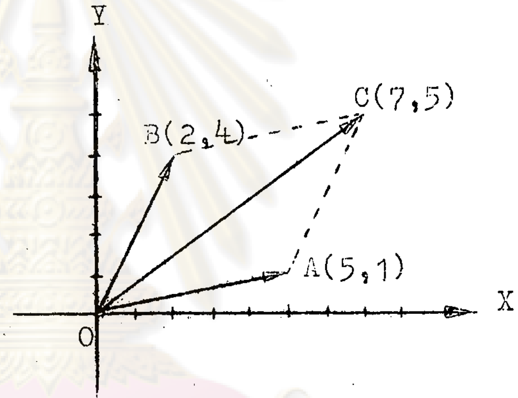
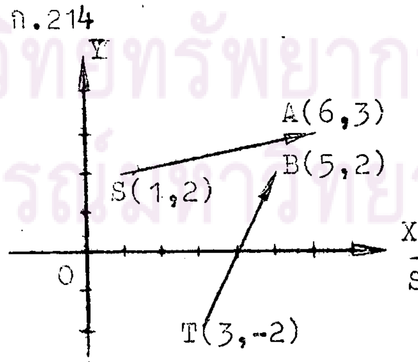
$[\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots]$

$\left[x_2-x_1, y_2-y_1\right]$	ก.198 กำหนดคู่ลำดับของจุด A= (2,-3) และ B= (5,4) ดังนั้น เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{AB}$ คือ ....
$\left[3,7\right]$	ก.199 กำหนดคู่ลำดับของจุด O= (0,0) และ C= (5,-7) ดังนั้น เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OC}$ คือ ....
$\left[5,-7\right]$	ก.200 กำหนดคู่ลำดับของจุด S= (4,-3) และ T= (9,-2) ดังนั้น เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{ST}$ คือ .... และ เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{TS}$ คือ ....
$\left[5,1\right]$ $\left[-5,-1\right]$	ก.201  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OM}$ คือ .... เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{CP}$ คือ .... เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{BN}$ คือ ....

[5,4] [-5,-4] [5,-4]	ก.202  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{AB}$ คือ .... $\overrightarrow{DC}$ คือ .... $\overrightarrow{ST}$ คือ .... $\overrightarrow{PQ}$ คือ ....
[2,0] [-2,0] [0,-6] [0,6]	ก.203  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OA}$ คือ .... $\overrightarrow{AB}$ คือ .... $\overrightarrow{OB}$ คือ ....
[5,0] [0,3] [5,3]	ก.204  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OC}$ คือ .... $\overrightarrow{CD}$ คือ .... $\overrightarrow{OD}$ คือ ....

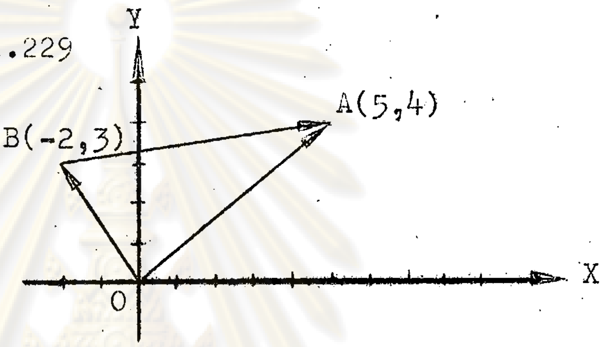
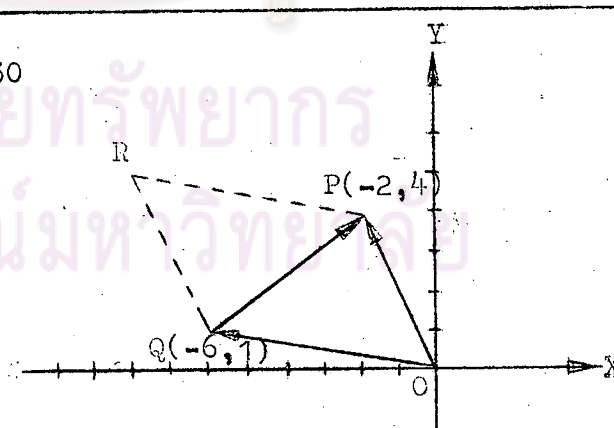
<table>
<tr>
<td>[-3,-2]
[-2,5]
[-5,3]</td>
<td>ก.205

จากรูป จะได้ว่า $\overrightarrow{OA}$ + ... = ...
ดังนั้น [5,1] + ... = ...</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$
[5,1] + [3,4] = [8,5]</td>
<td>ก.206

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$ = [....,....] + [....,....] = [....,....]</td>
</tr>
<tr>
<td>[-9,2] + [3,3] = [-6,5]</td>
<td>ก.207

OQRP เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น
$\overrightarrow{OP}$ + $\overrightarrow{OQ}$ = ...
นั่นคือ [-6,1] + [-2,4] = ...,....</td>
</tr>
</table>

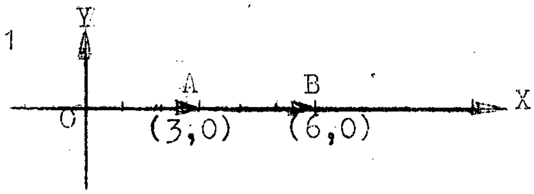
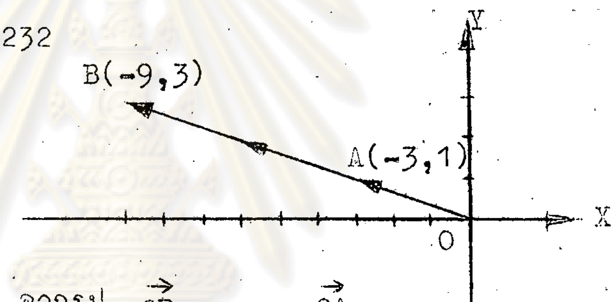
$\vec{OR}$, [-8,5]	ก.208  เวคเตอร์อิสระของ $\vec{OA}+\vec{OB}$ คือ [...,...] + [...,...] = [...,...]
[7,3] + [-2,3] = [5,6]	ก.209  จากรูป [...,...] + [...,...] = [...,...]
[-4,-3] + [9,2] = [5,-1]	ก.210  จากรูป [a,b]+[c,d] = [.......,.......]

$[a+c, b+d]$	ก.211 จึงสรุปได้ว่า ผลบวกของเวคเตอร์อิสระ $[a,b]$ และ $[c,d]$ ใดๆ จะเท่ากับ ....
$[a+c, b+d]$	ก.212 เวคเตอร์ที่เป็นผลบวกของ $[-5,-6]$ และ $[-1,3]$ คือ ....
$[-6,-3]$	ก.213  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ = $[\ldots,\ldots]$
$[7,5]$	ก.214  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{SA}$ = ... $\overrightarrow{TB}$ = ... $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{TB}$ = ...
$[5,1]$, $[2,4]$, $[7,5]$	ก.215 $[7,1] + [-7,-1]$ = ...

[0,0]	ก.216 ให้คู่ลำดับของ A= (0,0), B= (5,2), C= (7,6) ดังนั้น เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ คือ ....
[7,6]	ก.217 [6,-8] + [-3,4] = ... [-3,4] + [6,-8] = ...
[3,-4] [3,-4]	ก.218 เวคเตอร์มีคุณสมบัติ<u>การสลับที่</u>สำหรับการบวก เพราะ [a,b] + [c,d] = ...+........
[c,d] + [a,b]	ก.219 ([3,-2] + [2,5]) + [-5,-3] = ...+ [-5,-3] = ... และ [3,-2]+([2,5] + [-5,-3])= [3,-2] + ... = ...
[5,3] ,[0,0] [-3,2] ,[0,0]	ก.220 เราทราบมาแล้วว่า เวคเตอร์มีคุณสมบัติ<u>การจัดหมู่</u>สำหรับการบวก ดังนั้น ([a,b] + [c,d])+ [e,f] = [a,b] +(.....+.....) เพราะ เวคเตอร์มีคุณสมบัติ ....สำหรับการบวก

($[c,d]$ + $[e,f]$) การจัดหมู่	ก.221 เมื่อ $[a,b]$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ จะได้ว่า $[a,b]+[\ldots,\ldots] = [a,b] = [\ldots,\ldots]+[a,b]$
$[0,0]$, $[0,0]$	ก.222 ดังนั้น <u>เอกลักษณ์สำหรับการบวก</u>ของ $[a,b]$ ใดๆ คือ ....
$[0,0]$	ก.223 $[8,-5] + [\ldots,\ldots] = [0,0]$ และ $[a,b] + [\ldots,\ldots] = [0,0]$
$[-8,5]$ $[-a,-b]$	ก.224 แสดงว่า <u>อินเวอร์สสำหรับการบวก</u>ของ $[a,b]$ ใดๆ คือ ....
$[-a,-b]$	ก.225 $[-c,-d]$ เป็น ....สำหรับการบวกของ $[c,d]$
อินเวอร์ส	ก.226 เราทราบมาแล้วว่า $\bar{u}-\bar{v} = \bar{u}+(-\bar{v})$ ดังนั้น ถ้า $\bar{u} = [a,b]$, $\bar{v} = [c,d]$ จะได้ $[a,b]-[c,d] = [a,b]+[\ldots,\ldots]$

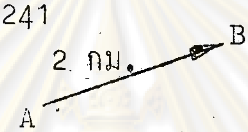
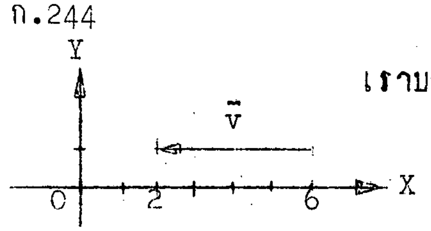
$[-c,-d]$	ก.227 $[3,9]-[-4,-2]=[3,9]+\ldots\ldots\ldots=[7,11]$
$[4,2]$	ก.228 $[-6,1]-[2,-4]=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$[-8,5]$	ก.229  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{BA}$ คือ .... เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ คือ $[\ldots\ldots,\ldots\ldots]-[\ldots\ldots,\ldots\ldots]=[\ldots\ldots,\ldots\ldots]$
$[7,1]$ $[5,4]-[-2,3]=[7,1]$	ก.230  OPRQ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน $[-2,4]-[-6,1]=[\ldots\ldots,\ldots\ldots]$ นั่นคือ $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\ldots\ldots$

$[4,3]$ $\overrightarrow{QP}$	ก.231  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OA} = [3,0]$ เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{OB} = [6,0]$ จากรูป จะพบว่า $\overrightarrow{OB}$ = ...$\overrightarrow{OA}$ ดังนั้น $[6,0]$ = ...$[3,0]$
2 , 2	ก.232  จากรูป $\overrightarrow{OB}$ = ...$\overrightarrow{OA}$ $[-9,3]$ = ...$[-3,1]$ = [....(-3),....(1)]
3,3,3,3	ก.233 ดังนั้น $2[-3,1]$ = [....,....]
$[-6,2]$	ก.234 จึงสรุปได้ว่า ผลคูณของเวคเตอร์อิสระ$[a,b]$ กับสเกลาร์ β ใดๆ จะเท่ากับ [......,......]
$[\beta a,\beta b]$	ก.235 ผลคูณของ$[8,-6]$ กับ 3 คือ ....

$[24,-18]$	ก.236 ถ้า เวคเตอร์อิสระของ $\vec{CD}$ คือ $[-2,3]$ และ $\vec{AB} = 4\vec{CD}$ แสดงว่า เวคเตอร์อิสระของ $\vec{AB}$ = ...
$[-8,12]$	ก.237 กำหนด $\bar{u} = [4,5]$, $\bar{v} = [-2,3]$ ดังนั้น $\bar{u}+2\bar{v} = [4,5] +$ .... = ...
$[-4,6]$ $[0,11]$	ก.238 กำหนด $\bar{a} = [1,3]$, $\bar{b} = [2,-1]$ ดังนั้น $3\bar{a}-2\bar{b}$ = ... - .... = ...
$[3,9]-[4,-2]$ $[-1,11]$	ก.239 กำหนด $\bar{u} = [-10,4]$, $\bar{v} = [5,-2]$ $\bar{w} = [-15,6]$ ดังนั้น $3\bar{u}+3\bar{v}-\bar{w}$ = ... = ... = ...
$[0,0]$	

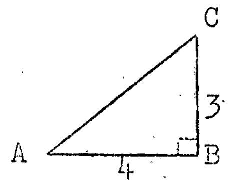
บทที่ 6

ขนาดของเวคเตอร์และเวคเตอร์หนึ่งหน่วย

	ก.240 การเดินทางไปทางทิศใต้ 50 เมตร เป็นเวคเตอร์ที่มีทิศทางไปทางทิศใต้ และมีขนาด.............เมตร
50	ก.241  $\overrightarrow{AB}$ มีขนาด......กิโลเมตร
2	ก.242 เราใช้สัญลักษณ์ $\| \;\|$ แทน<u>ขนาดของเวคเตอร์</u> "ขนาดของ $\bar{u}$ " ก็เขียนแทนด้วย $\|\bar{u}\|$ ดังนั้น "ขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ " ก็เขียนแทนด้วย........
$\|\overrightarrow{AB}\|$	ก.243 $\overrightarrow{AB}$ มีขนาด 2 กิโลเมตร จะเขียนบอกขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ ได้ว่า $\|\overrightarrow{AB}\|$ = ... กิโลเมตร ถ้า $\bar{u}$ แทนเวคเตอร์ที่มีทิศทางไปทางทิศเหนือ 8 ไมล์ จะเขียนบอกขนาดของ $\bar{u}$ ได้ว่า ..... = ... ไมล์
2 $\|\bar{u}\|$= 8	ก.244  เราบอกขนาดเป็น<u>ค่าบวก</u>เสมอ ดังนั้น $\|\bar{v}\|$= ....

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>

ก.245



จากทฤษฎีของพี่ธากอรัส

จะได้ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

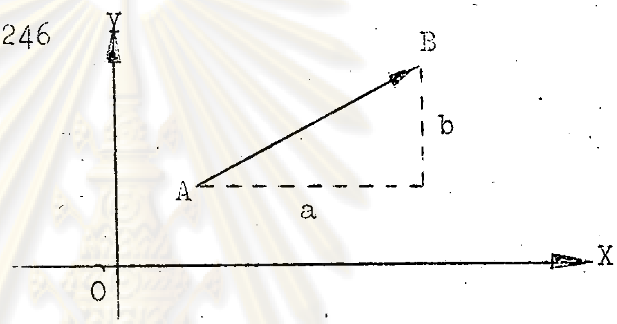
หรือ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

ถ้า AB=4 , BC=3

จะได้ $AC = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

</td>
</tr>
<tr>
<td>$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$</td>
<td>

ก.246

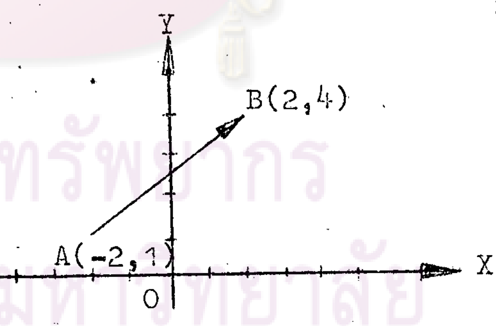


เวคเตอร์อิสระของ $\vec{AB} = [a,b]$

ดังนั้น $|\vec{AB}| = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>$\sqrt{a^2 + b^2}$</td>
<td>

ก.247



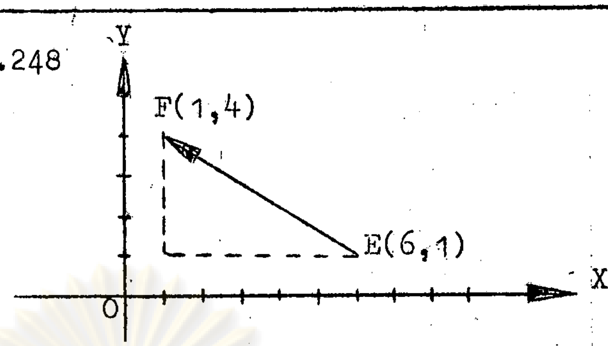
จากรูป A=(-2,1) , B=(2,4)

ดังนั้นเวคเตอร์อิสระของ $\vec{AB} = [4,3]$

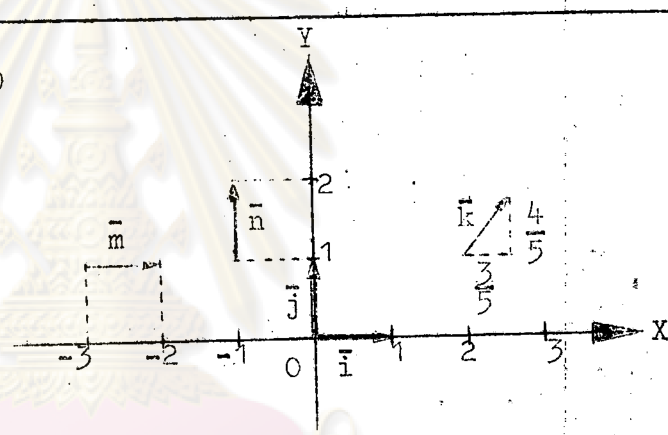
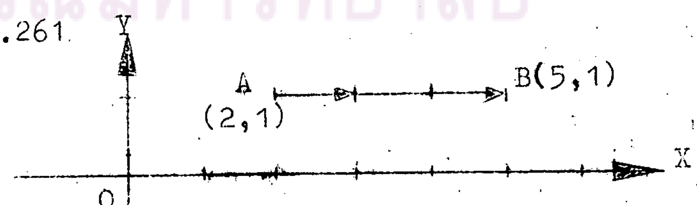
นั่นคือ $|\vec{AB}| = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots}$

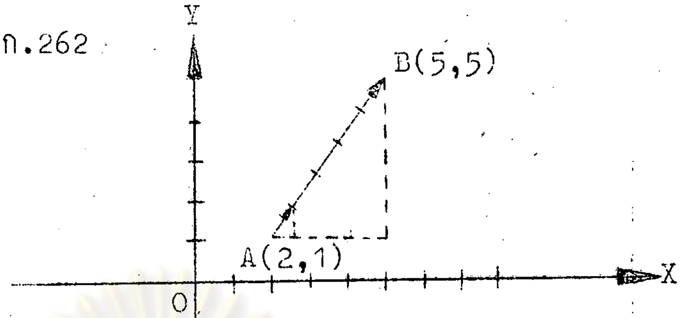
$= \ldots\ldots\ldots$

</td>
</tr>
</table>

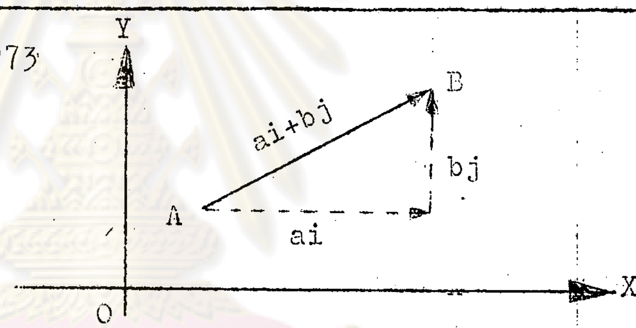
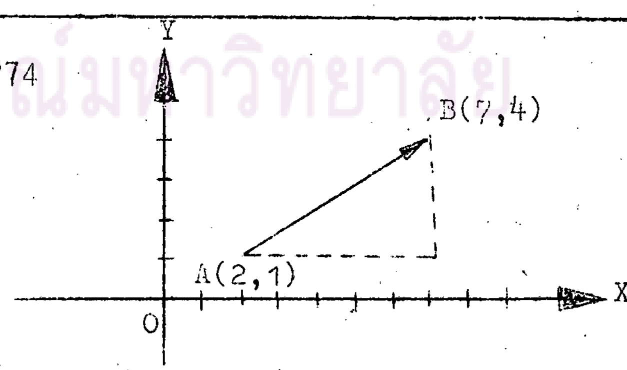
$\sqrt{4^2+3^2} = 5$	ก.248  เวคเตอร์อิสระของ $\vec{EF} = [\ldots\ldots,\ldots\ldots]$ ดังนั้น $\lvert\vec{EF}\rvert = \sqrt{(-5)^2+3^2}$ $= \sqrt{\ldots\ldots+\ldots\ldots}$ $= \sqrt{34}$
$[-5,3]$ $\sqrt{25+9}$	ก.249 ดังนั้น $\lvert[-2,-5]\rvert = \sqrt{\ldots\ldots+\ldots\ldots}$ $= \ldots\ldots$
$\sqrt{29}$	ก.250 จึงสรุปได้ว่า ถ้า $[a,b]$ เป็นเวคเตอร์อิสระใดๆ $\lvert[a,b]\rvert = \ldots\ldots\ldots$
$\sqrt{a^2+b^2}$	ก.251 $\lvert[1,-3]\rvert = \ldots\ldots\ldots$
$\sqrt{10}$	ก.252 เวคเตอร์อิสระของ $\vec{AB} = [3,-1]$ ดังนั้น $\lvert\vec{AB}\rvert = \ldots\ldots\ldots$

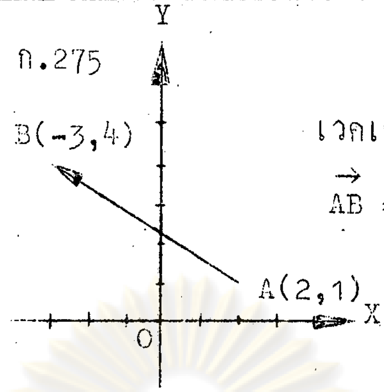
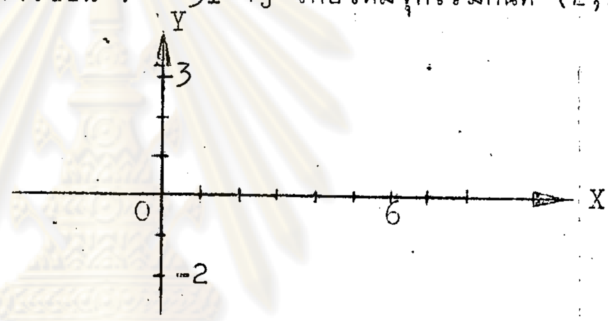
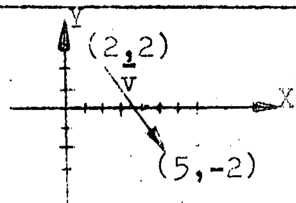
$\sqrt{10}$	ก.253 ถ้าคู่ลำดับของจุด A=(2,3), B=(4,6) $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ = ... = ...
$\sqrt{13}$	ก.254 ถ้าคู่ลำดับของจุด A=(0,0),B=(-2,3),C=(3,5) $\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert[-2,3]+[5,2]\rvert$ $= \lvert[3,5]\rvert$ = ... และ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert+\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert[-2,3]\rvert + \lvert[5,2]\rvert$ $= \sqrt{13}$ + ... ดังนั้น $\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\rvert$ .... $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert+\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ (เท่ากับ/ไม่เท่ากับ)
$\sqrt{34}$, $\sqrt{13}+\sqrt{29}$ ไม่เท่ากับ	ก.255 ขนาดของ [0,6] เท่ากับ ....
6	ก.256 $\left\lvert\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]\right\rvert$ = ...
1	ก.257 $\lvert[1,0]\rvert$ = ... $\lvert[0,1]\rvert$ = ...

1,1	ก.258 เวคเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย เราเรียกว่า <u>เวคเตอร์หนึ่งหน่วย</u> ดังนั้น $[1,0]$ และ $[0,1]$ จึงเป็น.............
เวคเตอร์หนึ่งหน่วย	ก.259 เช่นเดียวกัน $\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$ ก็เป็นเวคเตอร์...........
หนึ่งหน่วย	ก.260  เวคเตอร์อิสระของ $\bar{i}$ และ $\bar{m}$ คือ $[\underline{1},\underline{0}]$ เวคเตอร์อิสระของ $\bar{j}$ และ $\bar{n}$ คือ $[...,...]$ เวคเตอร์อิสระของ $\bar{k}$ คือ $[...,...]$ ดังนั้น $\bar{i},\bar{j},\bar{m},\bar{n},\bar{k}$ เป็นเวคเตอร์.........
$[0,1]$ $\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$ หนึ่งหน่วย	ก.261  $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert[3,0]\rvert =$ .... ดังนั้น เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $[3,0] = \frac{[3,0]}{3} = [.....,.....]$

3 $[1,0]$	ก.262  จากรูป $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert[3,4]\rvert = \underline{5}$ ดังนั้น <u>เวคเตอร์หนึ่งหน่วย</u>ของ $[3,4]$ คือ $\frac{[3,4]}{\lvert[3,4]\rvert}$ = ...
$\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$	ก.263 จึงสรุปได้ว่า เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\bar{u} = \frac{\bar{u}}{\lvert\bar{u}\rvert}$ ดังนั้น เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $[a,b]$ = ...
$\frac{[a,b]}{\lvert[a,b]\rvert}$ หรือ $\frac{[a,b]}{\sqrt{a^2+b^2}}$	ก.264 จาก $\lvert[1,2]\rvert = \sqrt{5}$ จะได้ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $[1,2]$ = ... = ...
$\left[\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$	ก.265 เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $[0,-6]$ คือ............ และ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $[4,-1]$ คือ............

[0,-1] $\left[\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{-1}{\sqrt{17}}\right]$	ก.266 3 [1,0] + 4 [0,1] = [3,0] + [0,4] = [....,....]
[3,4]	ก.267 เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญคือ [1,0] และ [0,1] เราอาจจะเขียนเวคเตอร์อิสระใดๆในรูปผลบวกของเวคเตอร์ [1,0] และ [0,1] ได้ เช่น [3,4] = 3 [1,0] + 4 [0,1] [2,-5] = ...[1,0] - ...[0,1]
2,5	ก.268 [4,-6] = ...[1,0] - .....[0,1] [-5,7] = ...
4,6 -5 [1,0] + 7 [0,1]	ก.269 ดังนั้น สำหรับ [a,b] ใดๆจะเขียนแสดงในรูปผลบวกของเวคเตอร์ [1,0] และ [0,1] ได้ดังนี้ [a,b] = ...
a [1,0] + b [0,1]	ก.270 เราจะเขียนแทนเวคเตอร์ [1,0] ด้วย i และ เขียนแทนเวคเตอร์ [0,1] ด้วย j ดังนั้น [6,9] = 6 [1,0] + 9 [0,1] = 6.... + 9....

6i+9j	ก.271 [2,5] = ...i + ...j [2,-5] = ...
2i+5j 2i−5j	ก.272 จึงสรุปได้ว่า สำหรับ [a,b] ใดๆจะเขียนแสดงในรูปของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย i และ j ได้ดังนี้ [a,b] = ...
ai+bj	ก.273  [a,0] = ... [0,b] = ... [a,b] = ...
ai, bj ai+bj	ก.274  เวคเตอร์อิสระของ $\overrightarrow{AB}$ = [...,...] = ...i+...j

$[5,3] = 5i+3j$	ก.275  เวกเตอร์อิสระของ $\vec{AB} = [\ldots,\ldots] = \ldots i+\ldots j$
$[-5,3] = -5i+3j$	ก.276 จงเขียน $\bar{v}$ = 3i-4j โดยให้มีจุดเริ่มต้นที่ (2,2) 
 	ก.277 ให้คู่ลำดับของจุด O=(0,0) , A=(-2,3) ดังนั้น $\vec{OA}$ = ...i + ...j
-2i+3j	ก.278 $-8i-11j = [\ldots\ldots,\ldots\ldots]$
$[-8,-11]$ 3j	ก.279 ให้ $\bar{u}$= 5i-2j และ $\bar{v}$= -5i+5j ดังนั้น $\bar{u}+\bar{v}$ = ...