ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม
เพื่อการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ 2 มิติ

นายธิวรรณ์ เชาวนาดิศัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

TIME-DOMAIN FINITE-ELEMENT METHOD WITH POLYGONAL ELEMENTS FOR OPTICAL WAVE PROPAGATION ANALYSIS IN TWO-DIMENSIONAL PHOTONIC CRYSTAL CIRCUITS

Mr. Thiwan Chowanadisai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม เพื่อการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ 2 มิติ
โดย	นาย ธิวรรณ์ เชาวนาดิศัย
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชัย รัตนธรรมพันธ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร. ทิพรัตน์ วงษ์เจริญ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พสุ แก้วปลั่ง)

ธิวรรน์ เชาวนาดิศัย : ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม เพื่อการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์. (TIME-DOMAIN FINITE-ELEMENT METHOD WITH POLYGONAL ELEMENTS FOR WAVE PROPAGATION ANALYSIS IN PHOTONIC CRYSTAL CIRCUITS) อ. ที่ปรึกษา : ผศ.ดร. ทับทิม อ่างแก้ว, 95 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอแนวทางเพื่อการพัฒนาสมรรถนะของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาเพื่อการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ โดยมุ่งเน้นไปที่การลดระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณลักษณะของคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลา โดยลดขนาดของระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้ในการคำนวณลง ในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้มีการนำการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมมาใช้ในการคำนวณแทนการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานคือรูปสามเหลี่ยม โดยเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมเพียงหนึ่งเอลิเมนต์สามารถใช้แทนเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมหลายเอลิเมนต์ได้ ซึ่งมีผลทำให้ลดจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ และส่งผลให้ใช้ระยะเวลาในการคำนวณลักษณะของคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลาน้อยลงได้ในที่สุด

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทดสอบสมรรถนะของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมในการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ที่ถูกออกแบบให้มีลักษณะต่างๆเช่น แบบท่อตรง (Waveguide), แบบโค้งรูปตัว L (90° bend), แบบรูปตัว Y (Beam Splitter) เป็นต้น โดยพิจารณาเปรียบเทียบสมรรถนะในการคำนวณคือความถูกต้องของผลและระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณกับระเบียบวิธีมาตรฐานซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม จากผลการทดสอบพบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมให้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานซึ่งแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม โดยที่ใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยกว่า

ภาควิชา........วิศวกรรมไฟฟ้า................. ลายมือชื่อนิสิต ธิวรรน์ เชาวนาดิศัย
สาขาวิชา........วิศวกรรมไฟฟ้า................ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Tud
ปีการศึกษา......2550........................

4970356921 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: TIME-DOMAIN FINITE-ELEMENT / BEAM PROPAGATION ANALYSIS / POLYGONAL FINITE ELEMENT / PHOTONIC CRYSTAL CIRCUITS

THIWAN CHOWANADISAI : TIME-DOMAIN FINITE-ELEMENT METHOD WITH POLYGONAL ELEMENTS FOR OPTICAL WAVE PROPGATION ANALYSIS IN TWO-DIMENSIONAL PHOTONIC CRYSTAL CIRCUITS THESIS ADVISOR : ASST.PROF. TUPTIM ANGKAEW, D.Eng., 95 pp.

This thesis proposes the new numerical treatment in order to reduce the computation time in time-domain finite-element method by reducing the size of linear system equation that depended on the number of nodal points. The use of convex polygonal element in finite-element scheme has been proposed in this thesis. A large number of triangular elements can be replaced by one polygonal element. Thus, the number of nodal points can be reduced.

To validate the proposed method, numerical results are shown for analyzing the pulse propagation in 2 dimensional photonic crystal circuits and are compared with the time-domain finite-element method using triangular elements. We observed that the time-domain finite-element method using the polygonal elements has the good improvement in the computation time of the field propagation along the 2 dimensional photonic crystal circuits. The reduction of computation time is beneficial for computation successively in time.

Department .... Electrical Engineering .... Student's signature .... thiwan Chowanadisai

Field of study .... Electrical Engineering .... Advisor's signature .... tuptim Angkaew

Academic year .... 2008 ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถือกำเกิดขึ้นและเสร็จสมบูรณ์ได้ เนื่องด้วยความกรุณาของอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว ซึ่งมีส่วนช่วยในการประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้พื้นฐานที่เป็นประโยชน์ในการทำงานวิจัย คอยให้คำแนะนำต่างๆ ตลอดจนคำวิจารณ์ในเชิงสร้างสรรค์เปรียบเสมือนรากฐานและแรงผลักดันให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ผลงานวิจัยทั้งหมดสำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์ด้านอุปกรณ์ และสถานที่ใช้ทำวิจัย ณ ห้องปฏิบัติการศูนย์เชี่ยวชาญเฉพาะด้านเทคโนโลยีโทรคมนาคม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และขอขอบคุณโครงการเสริมสร้างความเชื่อมโยงระหว่างระหว่างภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและภาคเอกชนทางด้านการวิจัยและพัฒนา (Cooperation Project between department of electrical engineering and private sector research and development) ที่ให้เงินทุนสนับสนุนในการทำวิจัยตลอดระยะเวลา 1 ปี (พ.ศ. 2550)

ขอขอบคุณอาจารย์ลัญจกร พี่โอ๋ พี่อาร์ท พี่หนุ่ม พี่ยอด พี่ช้าง พี่เบ พี่แก๊ป พี่จ๊อบตี่ และนักฟุตบอลของทีมห้องปฏิบัติการวิจัยโทรคมนาคมทุกท่านที่ทำให้ผู้วิจัยได้ออกกำลังกายเพื่อให้มีสุขภาพกายและใจที่แข็งแรงอยู่เสมอ

ขอบคุณ จั๊ก นก ทอป พี่ตู้ เบิร์ด พี่มด น้องปุ๊ก สมาชิกห้องปฏิบัติการวิจัยโทรคมนาคมและพี่ๆน้องๆที่กำลังศึกษาอยู่ทุกท่าน สำหรับความช่วยเหลือและกำลังใจดีๆที่มอบให้ผู้ทำวิจัยตลอดมา

ท้ายที่สุด ขอกราบขอบพระคุณ พ่อและแม่ ที่ได้ให้การสนับสนุนด้านการเรียน ที่อยู่อาศัย และ ให้กำลังใจตลอดเวลาที่ศึกษาอยู่จนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

สิ่งดีๆ ที่ได้รับจากทุกคนล้วนเป็นส่วนสำคัญในการรังสรรค์ให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประสบผลสำเร็จ ดังนั้นจึงไม่มีคำกล่าวใดๆ ที่สามารถทดแทนสิ่งเหล่านั้นได้ จึงคงไว้ซึ่งความรู้สึกซาบซึ้งและขอบคุณตลอดไป

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ จ

กิตติกรรมประกาศ ฉ

สารบัญ ช

สารบัญภาพ ญ

สารบัญตาราง ณ

บทที่

1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 2

1.1.1 วงจรผลึกโฟโตนิกและคุณสมบัติของวงจรผลึกโฟโตนิก 3

1.1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์หาคุณสมบัติของวงจรผลึกโฟโตนิก 3

1.2 แนวทางของวิทยานิพนธ์ 5

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ 7

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ 8

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 8

1.6 ขั้นตอนและวิธีการดำเนินงาน 8

2 หลักการและทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก 10

2.1 ความนำ 10

2.2 สมการคลื่นแสงในโดเมนเวลาสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก 10

2.3 สมการบีมโพรพาเกชันของคลื่นแสงในโดเมนเวลา 12

2.4 การวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา 14

2.5 การประมาณค่าตอบของสมการอนุพันธ์โดยใช้การประมาณแบบพาเด (Padé approximation) และอัลกอริทึมของแคลงและนิโคลสัน (Crank-Nicholson algorithm) 16

บทที่ หน้า

2.6 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา) 18

2.6.1 ขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมแบ่งเมช) 19

2.6.2 ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์) 19

2.6.3 ขั้นตอนของอัลกอริทึมของแคลงและนิโคลสัน 20

2.6.4 สรุปขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา 21

2.7 สมรรถนะในการคำนวณของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา 21

2.8 ปัญหาที่พบจากงานวิจัยในอดีต 24

3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมและฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการคำนวณ 25

3.1 ความนำ 25

3.2 การเปลี่ยนแปลงในอัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาของงานวิทยานิพนธ์นี้ 25

3.3 ฟังก์ชันรูปร่าง 26

3.3.1 ฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม 26

3.3.2 ฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม 29

3.3.2.1 ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม 30

3.3.2.2 ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม 32

3.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส 37

3.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างและอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส 38

4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมและฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการคำนวณ 41

4.1 ความนำ 41

4.2 การตรวจสอบความถูกต้องและสมรรถนะในเรื่องระยะเวลาการคำนวณเบื้องต้นของระเบียบวิธีที่นำเสนอ 42

4.3 การตรวจสอบความถูกต้องและสมรรถนะในเรื่องระยะเวลาการคำนวณของการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปแบบต่างๆ ของระเบียบวิธีที่นำเสนอ 46

4.3.1 วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา (90° curved bend photonic crystal circuit) 46

บทที่ หน้า

4.3.2 วงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา (90° sharped bend photonic crystal circuit) 56

4.3.3 วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y (Y-branch photonic crystal circuit) 65

4.3.4 วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T (T-branch photonic crystal circuit) 73

5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ 81

5.1 สรุปผลการวิจัย 81

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต 82

รายการอ้างอิง 83

ภาคผนวก 85

บทความทางวิชาการที่ได้รับการเผยแพร่ 86

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 95

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 1.1 เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลของ Knight, Birks, Russell และ Atkin ในปี ค.ศ. 1996 1

รูปที่ 1.2 ตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกโดยใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด 6

รูปที่ 1.3 ตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกโดยใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม 7

รูปที่ 2.1 โดเมนสำหรับวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบ PML 10

รูปที่ 2.2 โดเมนสำหรับวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกถูกแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยรูปสามเหลี่ยม (Triangular elements) 15

รูปที่ 2.3 กระบวนการตามขั้นตอนของการแบ่งเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมแบ่งเมช 19

รูปที่ 2.4 กระบวนการตามขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์ 20

รูปที่ 2.5 กระบวนการตามขั้นตอนของอัลกอริทึมของแคลง-นิโคลสัน 22

รูปที่ 2.6 กระบวนทั้งหมดของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา 23

รูปที่ 3.1 การเปลี่ยนแปลงในกระบวนการของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา 27

รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและพื้นที่ของสามเหลี่ยมเล็กสำหรับคำนวณพื้นที่พิกัด 28

รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันรูปร่างตัวที่ 1 สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม 32

รูปที่ 3.4 ฟังก์ชันรูปร่างตัวที่ 1 สำหรับเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยม 36

รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม 1 เอลิเมนต์ ถูกแบ่งให้เป็นรูปสามเหลี่ยมย่อย เพื่อการประมาณค่าของการอินทิเกรตโดยใช้ Simpson’s rule 39

รูปที่ 4.1 วงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง (Photonic Crystal Waveguide) ล้อมรอบด้วย PML 42

รูปที่ 4.2(ก) ผลึกโฟโตนิกที่เป็นส่วนแคลดดิ้งของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง 42

รูปที่ 4.2(ข) แถบช่องความถี่โฟโตนิก (Photonic band gap, PBG) ของผลึกโฟโตนิกในรูปที่ 4.2(ก) 42

รูปที่ 4.3 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง 43

ภาพประกอบ		หน้า
รูปที่ 4.4	การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง	44
รูปที่ 4.5	การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง	44
รูปที่ 4.6	ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน	45
รูปที่ 4.7	ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม	45
รูปที่ 4.8	วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา (90° Curved bend photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML	47
รูปที่ 4.9	สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบ โค้งงอ 90 องศา	48
รูปที่ 4.10	การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา	49
รูปที่ 4.11	การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม)สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา	49
รูปที่ 4.12(ก)	ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน	50
รูปที่ 4.12(ข)	ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 60 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน	50

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 4.13(ก) ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 51
รูปที่ 4.13(ข) ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 60 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 51
รูปที่ 4.14 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ท ของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน 52
รูปที่ 4.15 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ท ของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 53
รูปที่ 4.16 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ 54
รูปที่ 4.17 วงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา (Zero Curvature 90^{o} bend photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML 56
รูปที่ 4.18 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบ โค้งงอ 90 องศา 57
รูปที่ 4.19 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา 58
รูปที่ 4.20 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม)สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา 58
รูปที่ 4.21(ก) ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้

ภาพประกอบ หน้า

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม 59

รูปที่ 4.21(ข) ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 60 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม 59

รูปที่ 4.22(ก) ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 60

รูปที่ 4.22(ข) ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 60 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 60

รูปที่ 4.23 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน 61

รูปที่ 4.24 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 62

รูปที่ 4.25 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ 63

รูปที่ 4.26 วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัววาย (Y-Branch Photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML 65

รูปที่ 4.27 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัววาย 66

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 4.28 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y 67

รูปที่ 4.29 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y 67

รูปที่ 4.30 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุทโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม 68

รูปที่ 4.31 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุทโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 68

รูปที่ 4.32 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกเตอร์บีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน 69

รูปที่ 4.33 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกเตอร์บีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 70

รูปที่ 4.34 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับของวงจรผลึกโฟโตนิกเตอร์บีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ 71

รูปที่ 4.35 วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T (T-Branch Photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML 73

รูปที่ 4.36 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T 74

รูปที่ 4.37 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T 75

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 4.38 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T 75

รูปที่ 4.39 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุทโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม 76

รูปที่ 4.40 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุทโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 76

รูปที่ 4.41 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน 77

รูปที่ 4.42 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม 78

รูปที่ 4.43 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ 79

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

ตารางที่ 2.1 ความหมายของตัวแปรต่างๆที่ใช้ในสมการคลื่น TE และ TM โหมด 11

ตารางที่ 2.2 พารามิเตอร์ของ PML 11

ตารางที่ 3.1 สรุปฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยม 35

ตารางที่ 4.1 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง 44

ตารางที่ 4.2 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานของระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง 46

ตารางที่ 4.3 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา 48

ตารางที่ 4.4 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานของระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา 55

ตารางที่ 4.5 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา 57

ตารางที่ 4.6 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานของระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา 64

ตารางที่ 4.7 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y 66

ตารางที่ 4.8 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐาน ของ ระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์

ภาพประกอบ หน้า

แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y 72

ตารางที่ 4.9 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T 74

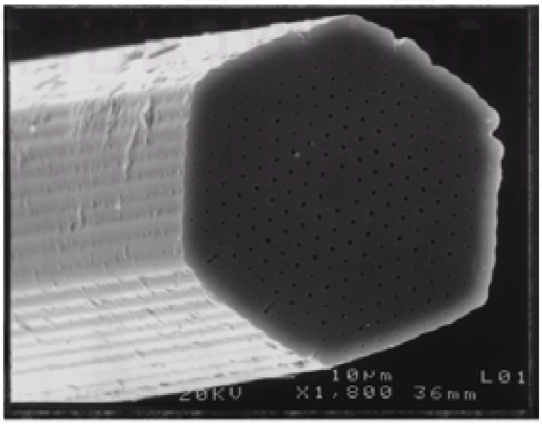
ตารางที่ 4.10 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐาน ของ ระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T 80

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

งานวิจัยนี้ริเริ่มมาจากการที่นักวิจัยหลายกลุ่มมีความต้องการศึกษากลไกการนำแสงของเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอล (PCF) โดยมีการจัดเรียงรูอากาศรายคาบ (Periodic holes) สลับกับแก้วว่าสามารถนำแสงได้หรือไม่ จึงได้มีการสร้างต้นแบบเส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกและทดลองหาคุณสมบัติต่างๆของเส้นใยนำแสง เช่น ความสูญเสียในเส้นใยนำแสงและดิสเพอร์ชัน เป็นต้น โดยในปี ค.ศ. 1996 มีนักวิจัยกลุ่มแรก คือ กลุ่มของ Knight, Birks, Russell และ Atkin [1] ได้ทดลองสร้างเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอล ซึ่งมีแกนทำจากแท่งแก้วซิลิกาตันและถูกล้อมรอบด้วยแท่งแก้วที่เจาะเป็นรูอากาศรูปวงกลมแบบรวงผึ้งตลอดทางยาวหลายวง ส่วนแกนของเส้นใยนำแสงโฟโตนิกมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4.6 ไมโครเมตร , ระยะพิตช์ (ระยะห่างระหว่างรูอากาศที่อยู่ใกล้กัน) 2.3 ไมโครเมตร , ขนาดของรูอากาศ 0.2 ไมโครเมตร และความยาวของเส้นใยนำแสง 1 เมตร ดังรูปที่ 1.1 ในงานวิจัยของกลุ่มนี้ได้ทดลองยิงแสงเลเซอร์ที่ต้นทางเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลแล้วนำกล้องไมโครสแกนอิเล็กตรอนไว้ที่ปลายทางของเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอล ปรากฏว่ามองเห็นแสงที่มีความเข้มของแสงมากๆ อยู่บริเวณแกนกลางและความเข้มของแสงจะค่อยๆลดลงที่บริเวณระหว่างรูอากาศที่อยู่ใกล้กัน คุณสมบัติที่พบคือเกิดแบบแผนคลื่นเดี่ยว (single mode) ในช่วงความยาวคลื่นกว้างตั้งแต่ 331 ถึง 1550 นาโนเมตร ซึ่งจากผลการทดลองแสดงให้เห็นว่ามีความเป็นไปได้ที่เส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกสามารถนำแสงได้



รูปที่ 1.1 เส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกของ Knight, Birks, Russell และ Atkin ในปี ค.ศ. 1996

งานวิจัยของ Knight, Birks, Russell และ Atkin เป็นงานวิจัยที่ได้รับความสนใจอย่างมากในวงการของเส้นใยนำแสง และจุดประกายทางความคิดให้นักวิจัยหลายกลุ่มพัฒนาเทคโนโลยีในการผลิตและศึกษาคุณสมบัติเพิ่มเติมของเส้นใยนำแสงโฟโตนิคริสตอล ในปี ค.ศ. 1999 ได้มีนักวิจัยกลุ่มของ Bennett , Monro และ Richardson [2] สร้างเส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกมีความยาว 50 เมตร เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 250 ไมโครเมตร ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของรูอากาศ 0.34 ไมโครเมตร และ ระยะพิตช์ 1.8 ไมโครเมตร ได้ทดลองวัดการสูญเสียในเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลได้ 0.24 dB/m หรือ 240 dB/km (เส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน 0.2 dB/km) และ วัดดิสเพอร์ชันที่ความยาวคลื่นแสงเท่ากับ 1550 นาโนเมตรได้ 50 $ps.nm^{-1}.km^{-1}$

ในปีเดียวกัน ได้มีงานวิจัยของกลุ่มนักวิจัยคือ Birk, Moglievtsev, Knight และ Russell [3] ได้สร้างเส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกที่แตกต่างจากงานวิจัยของ Knight, Birks, Russell, และ Atkin โดยมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของแกน 0.98 ไมโครเมตร เมื่อทดลองวัดดิสเพอร์ชันแล้วได้ -2,000 $ps.nm^{-1}.km^{-1}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 20 เท่าของเส้นใยนำแสงชดเชยดิสเพอร์ชัน (DCF) แบบมาตรฐาน จึงสามารถชดเชยดิสเพอร์ชันได้ดีกว่าเส้นใยนำแสงแบบชดเชยดิสเพอร์ชันมาตรฐาน

เนื่องจากงานวิจัยที่เกิดขึ้นในปี ค.ศ. 1999 ผลการทดลองเส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิก~~คริสตอล~~ พบว่ามีการสูญเสียมากในเส้นใยนำแสง ดังนั้นในปี ค.ศ. 2001 จึงได้มีกลุ่มนักวิจัยคือ Kubota, Suzuki, Kawanishi, Nakazawa, Tanaka, และ Fujita [4] ได้สร้างเส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกให้มีการสูญเสียในเส้นใยนำแสง~~ให้~~ลดลง เส้นใยนำแสงที่สร้างขึ้นมา มีความยาว 2 กิโลเมตร ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของแกนเท่ากับ 3.1 ไมโครเมตร ขนาดของรูอากาศ 1.51 ไมโครเมตร และ ระยะพิตช์ 2.26 ไมโครเมตร โดยวัดการสูญเสียในเส้นใยนำแสงที่ความยาวคลื่นเท่ากับ 1550 นาโนเมตรได้ 3.2 dB/km และมีดิสเพอร์ชันเท่ากับศูนย์ที่ความยาวคลื่นเท่ากับ 810 นาโนเมตร ซึ่งการสูญเสียในเส้นใยนำแสงประเภทนี้ลดลงจากการงานวิจัยในปี ค.ศ. 1999 เป็นอย่างมาก และใกล้เคียงกับเส้นใยนำแสงมาตรฐาน

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้น จะสังเกตได้ว่า การสูญเสียและดิสเพอร์ชันในเส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกมีค่าแตกต่างกันไป โดยขึ้นอยู่กับ เส้นผ่านศูนย์กลางของแกน, ขนาดของรูอากาศ, และ ระยะพิตช์ ดังนั้นจึงได้มีนักวิจัยอีกหลายกลุ่มที่พยายามหาวิธีการคำนวณวิเคราะห์แสง ซึ่งถือว่าเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เพื่อหาลักษณะการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนหน้าตัด และวิเคราะห์แถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิก (photonic band gap) เพื่อหาช่วงของความยาวคลื่นที่สามารถนำมาใช้งานในสถานะของการนำคลื่น โดยผลึกโฟโตนิกที่มีขนาด

ของรูอากาศและระยะพิตช์ที่แตกต่างกันก็จะมีคุณสมบัติแถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกที่แตกต่างกันไป ซึ่งมีงานวิจัยต่างๆได้เสนอวิธีการคำนวณวิเคราะห์แถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกไว้หลายวิธีที่น่าสนใจด้วยกัน เช่น ใน ปี ค.ศ. 2001 งานวิจัยของ Shumpert [5] ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ โดยใช้ระเบียบวิธี plane wave expansion method (PWEM), ในปี ค.ศ. 2002 งานวิจัยกลุ่มของ Hiett [6] ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลีเมนต์ (finite element method) เป็นต้น

1.1.1 วงจรผลึกโฟโตนิกและคุณสมบัติของวงจรผลึกโฟโตนิก

~~หลัง~~ผลจากงานวิจัยของกลุ่มนักวิจัยของ Knight, Birks, Russell และ Atkin ทำให้ได้ข้อสรุปได้ว่ามีความเป็นไปได้ที่เส้นใยนำแสงผลึกโฟโตนิกจะสามารถนำแสงได้ นักวิจัยหลายกลุ่มเริ่มศึกษากลไกการนำแสงในอุปกรณ์ต่างๆซึ่งใช้กันในระบบส่งสัญญาณทางแสงที่ทำจากผลึกโฟโตนิกนอกจากเส้นใยแสงผลึกโฟโตนิก ตัวอย่างเช่น วงจรแบ่งกำลัง (beam splitter), วงจรคัปเปลอร์แบบมีทิศทาง (directional coupler) เป็นต้น โดยเรียกอุปกรณ์ต่างๆดังกล่าวว่าเป็นวงจรผลึกโฟโตนิก (photonic crystal circuits) การสร้างวงจรผลึกโฟโตนิกจะทำได้ด้วยการนำผลึกโฟโตนิกมาเรียงตัวกันแบบไม่เป็นรายคาบทั้งหมดแต่มีตำหนิ (defected photonic crystal) และส่งสัญญาณแสงที่มีความถี่อยู่ในแถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกไปตามบริเวณที่เกิดการเรียงตัวกันไม่เป็นรายคาบหรือตำหนินั้น ซึ่งคุณสมบัติของวงจรผลึกโฟโตนิกที่ต้องการทราบคือการสูญเสียในวงจรผลึกโฟโตนิกและความสามารถในการส่งผ่านแสงผ่านวงจรผลึกโฟโตนิก ปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อคุณสมบัติดังกล่าวคือการวางตำแหน่งและวิธีการเรียงตัวกันของตำแหน่งตำหนิ มีงานวิจัยหลายงานที่เสนอวิธีการหาคุณสมบัติของวงจรผลึกโฟโตนิกไว้อย่างน่าสนใจ โดยใช้ระเบียบวิธีการวิเคราะห์แตกต่างกันไป

1.1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์หาคุณสมบัติของวงจรผลึกโฟโตนิก

ในปี ค.ศ. 1996 งานวิจัยของ Mekis, Chen, Kurland, Fan, Villeneuve, และ Joannopoulos [7] ได้ศึกษากลไกการนำแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก ที่มีแกนเป็นอากาศล้อมรอบไปด้วยแท่งไดอิเล็กทริกที่มีดรรชนีหักเหเท่ากับ 3.4 มีเส้นผ่านศูนย์กลางของแกนเท่ากับระยะพิตช์ คือ 0.58 ไมโครเมตร และแท่งไดอิเล็กทริกมีรัศมีเท่ากับ 0.18 เท่าของระยะพิตช์ คือ 0.1034 ไมโครเมตร ~~โดย~~วงจรผลึกโฟโตนิกถูกออกแบบให้เป็นรูปตัว L และใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา (finite difference time domain) เพื่อวิเคราะห์คลื่นแสงที่แพร่กระจายไปตามวงจรผลึกโฟโตนิกรูปตัว L ที่เวลาต่างๆกัน และวิเคราะห์หาสัมประสิทธิ์การส่งผ่านไปยังเอาท์พุทพอร์ทและสัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับมายังอินพุทพอร์ท ซึ่งหลักการของระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องใน

โดเมนเวลานี้กล่าวโดยสรุปคือ เป็นการนำหลักการของระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite-difference method) มาแก้ปัญหาทั้งที่แต่ละตำแหน่งของวงจรและที่เวลาต่างๆ โดยประมาณสมการของคลื่นแสง (time-domain equation) ในโดเมนที่เกิดขึ้นให้อยู่ในรูปของสมการผลต่างของคลื่นที่แต่ละตำแหน่งและเวลา ข้อดีของระเบียบวิธีนี้ก็คือ ไม่มีความซับซ้อนมากนักในการเขียนโปรแกรมสำหรับคำนวณ แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อนำระเบียบวิธีนี้มาแก้ปัญหาเพื่อวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกก็ยังมีข้อจำกัดที่เห็นได้ชัดเจนอยู่บางประการ กล่าวคือ

1. ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาเป็นการแก้ปัญหาคลื่นแสงโดยตรง (direct method) ในการส่งคลื่นแสงที่แพร่กระจายในวงจรผลึกโฟโตนิกซึ่งมีความถี่สูงมาก มีผลทำให้เมื่อเลือกใช้ระเบียบวิธีนี้แก้ปัญหาแล้ว จำเป็นต้องแบ่งระยะห่างระหว่างจุดเวลา (time step size) ให้สั้นมากเพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่ดี การแบ่งระยะห่างระหว่างจุดเวลาที่สั้นมากนี้เองทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมวลผลเป็นอย่างมาก

2. เนื่องจากระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาใช้การประมาณสมการของคลื่นให้อยู่ในสมการผลต่างบริเวณ ในการคำนวณ (computation domain) จะถูกแบ่งออกเป็นตารางกริดรูปสี่เหลี่ยม (grid) ซึ่งการแบ่งบริเวณดังกล่าวออกเป็นตารางกริดรูปสี่เหลี่ยม ทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหากรณีที่รอยต่อของตัวกลางเป็นเส้นโค้ง ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากนัก

เนื่องจากข้อจำกัดของระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา ต่อมาในปี ค.ศ. 2000 ได้มีงานวิจัยของกลุ่มนักวิจัย คือ Koshiba, Tsuji, และ Hikari [8] เสนอการหาคุณสมบัติของวงจรผลึกโฟโตนิกโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา (finite element beam propagation time domain) โดยนำมาใช้ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกที่ออกแบบให้เป็นรูปร่างต่างๆ เช่น วงจรรูปตัว L, วงจรแบ่งกำลัง, และ วงจรคัปเปลอร์แบบมีทิศทาง เป็นต้น ซึ่งระเบียบวิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้ถือเป็นการแก้ไขข้อจำกัดของระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาทั้งสองประการด้วย กล่าวคือ

1. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา ถือว่าคลื่นแสงประกอบไปด้วย คลื่นพาห์ (Carrier wave) และคลื่นที่ถูกมอดูเลต (Modulated wave) โดยคลื่นพาห์จะมีความถี่สูงกว่าคลื่นที่ถูกมอดูเลตมาก จากความจริงดังกล่าว สมการของคลื่นในโดเมนเวลา (Time-domain equation) จึงถูกเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสมการคลื่นในโดเมนเวลาของคลื่นที่ถูกมอดูเลต เรียกว่า สมการบีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา (Time-domain beam propagation equation) และวิเคราะห์หาฟังก์ชันคลื่นที่ถูกมอดูเลตแทนการวิเคราะห์หาคลื่นแสง

โดยตรง ซึ่งมีผลทำให้ไม่ต้องแบ่งระยะห่างระหว่างจุดเวลาให้สั้นมากเหมือนระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา

2. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาสามารถแก้ปัญหาที่ตำแหน่งต่างๆในโดเมนได้เป็นอย่างดี เนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) นั้นสามารถแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดใดๆ ก็ได้ตามความเหมาะสม กล่าวคือ สามารถแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กในบริเวณที่ต้องการทราบค่าของสัญญาณแสงอย่างละเอียด และ แบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดใหญ่ขึ้นในบริเวณที่เราไม่ต้องการทราบค่าของคลื่นแสงอย่างละเอียดมากนัก นอกจากนี้การแบ่งเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งเป็นมาตรฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทำให้สามารถแบ่งเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับรูปร่างของปัญหาที่พิจารณาที่เป็นลักษณะโค้งได้เป็นอย่างดี

จากข้อดีที่กล่าวมา ทำให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาคือระเบียบวิธีที่มีความแม่นยำในการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงที่ดีมากและน่าจะนำมาพัฒนาให้ระเบียบวิธีดังกล่าวมีสมรรถนะในการคำนวณที่ดีขึ้น

1.2 แนวทางของวิทยานิพนธ์

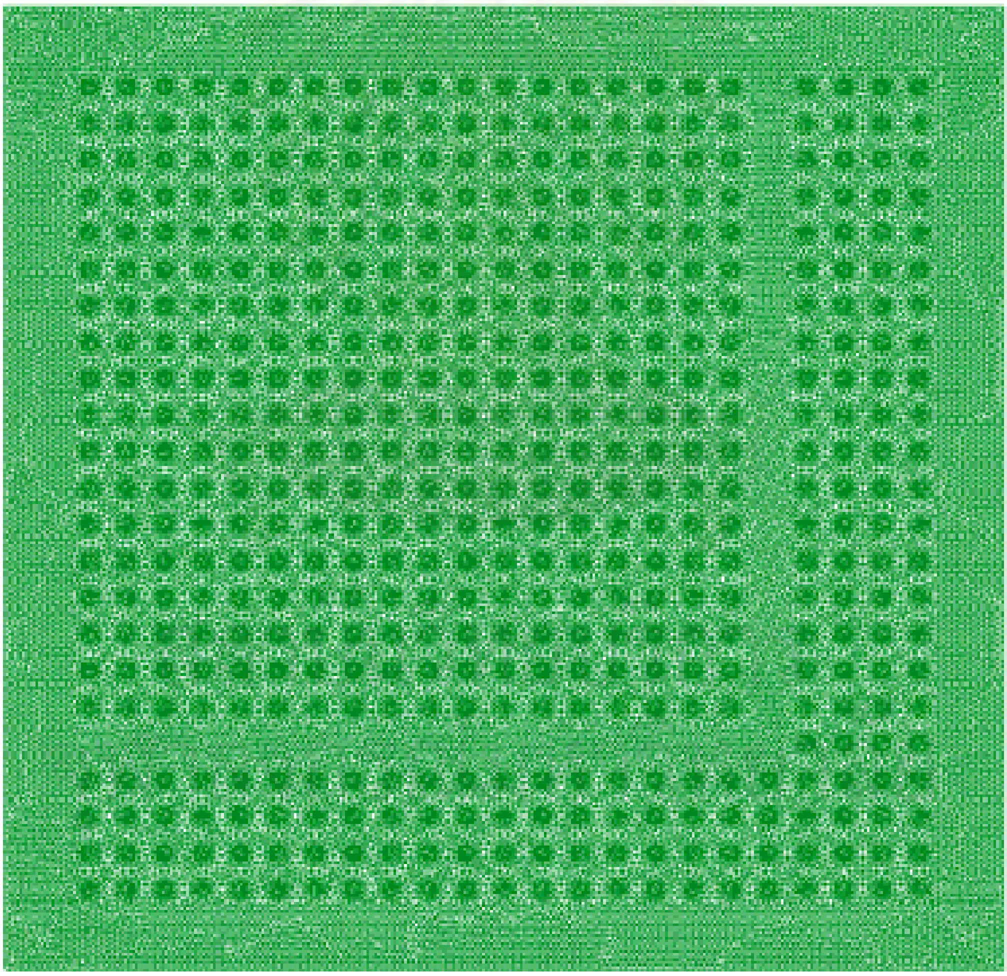
จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลามาใช้วิเคราะห์ลักษณะสัญญาณแสงในท่อนำสัญญาณแสงแบบผลึกโฟโตนิก พบว่า ลักษณะของคลื่นแสงที่แต่ละจุดเวลานั้นจะสามารถหาคำตอบได้ด้วยการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยขนาดของระบบสมการเชิงเส้นจะเท่ากับจำนวนโหนด (Nodal point) ที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถกล่าวได้ว่า ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพื่อวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในแต่ละจุดเวลาจะขึ้นอยู่กับขนาดของระบบสมการเชิงเส้นหรือจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะแก้ปัญหาสนามที่ตำแหน่งต่างๆ (Space) ได้ดี แต่ก็มีข้อจำกัดอยู่บางประการที่ทำให้ระเบียบวิธีนี้ใช้ระยะเวลานานในการคำนวณโดยไม่จำเป็น

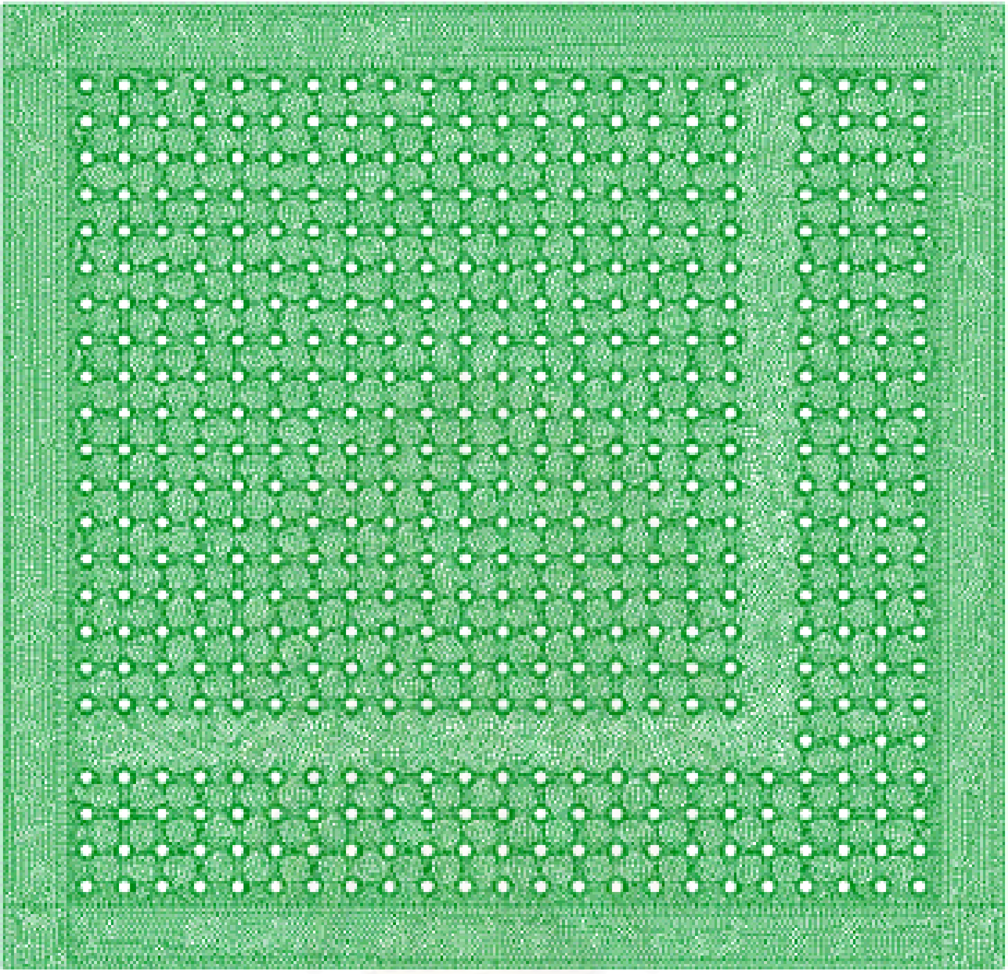
1. เมื่อนำระเบียบวิธีนี้ไปวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกที่มีขนาดค่อนข้างใหญ่ จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ก็จะมีมาก ส่งผลให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณของระเบียบวิธีนี้สูงตามไปด้วย

2. การแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีนี้โดยทั่วไปแล้วใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด เมื่อแก้ปัญหาสนามในบริเวณที่เป็นวงกลมที่ส่วนแคลดดิ้งของท่อนำคลื่นแสง แม้ว่าจะไม่ต้องการทราบลักษณะของสัญญาณแสงอย่างละเอียดมากนักในบริเวณนั้น แต่ก็จำเป็นต้องแบ่งเอลิเมนต์ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวนมากพอสมควรเพื่อที่จะประกอบกันเป็นรูปวงกลม มีผลทำให้จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นมีมากเกินความจำเป็น

จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์จะมีข้อเสียในเรื่องระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณอันเนื่องมาจากข้อจำกัดในการแบ่งเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมในกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ (รูปที่ 1.2) ในงานวิจัยนี้จึงคิดวิธีการแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบใหม่คือรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal element) (รูปที่ 1.3) เพื่อพัฒนาสมรรถนะของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาให้ใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยลง



รูปที่ 1.2 ตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกโดยใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด



รูปที่ 1.3 ตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกโดยใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

ในปี ค.ศ. 2006 ได้มีงานวิจัยทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของ Sukumar และ Malsch [14] ที่นำการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมมาใช้และทำให้สมรรถนะในการคำนวณของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดีขึ้นกว่าการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน กล่าวคือ ที่อันดับของฟังก์ชันรูปร่างเดียวกัน จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมน้อยกว่ารูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน ทำให้งานวิทยานิพนธ์นี้มีแนวคิดในการใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมมาใช้ในบริเวณตัวกลางที่มีขนาดเล็ก เช่น ในบริเวณรูอากาศ เป็นต้น ดังแสดงในรูปที่ 1.3

1.4 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1. ลดระยะเวลาในการคำนวณเพื่อวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงที่แพร่กระจายในวงจรผลึกโฟโตนิกของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา โดยใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบใหม่คือรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Elements)

2. เปรียบเทียบสมรรถนะในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวัตถุประสงค์ข้อ 1 ระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้เทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งเป็นเทคนิคที่งานวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอ กับ ระเบียบวิธีเดียวกันแต่ใช้เทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานคือรูปสามเหลี่ยม โดยจะพิจารณาเปรียบเทียบในเรื่องของความสอดคล้องของผลการวิเคราะห์ที่ได้ และระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณของทั้งสองเทคนิคดังกล่าว

1.5 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. วิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงที่แพร่กระจายในวงจรผลึกโฟโตนิก 2 มิติที่ถูกออกแบบให้มีลักษณะต่างๆ ตามการประยุกต์ใช้งานในการสื่อสารทางแสง โดยใช้ระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบใหม่คือรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Elements)

2. วงจรผลึกโฟโตนิกที่นำมาวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสง สร้างจากผลึกโฟโตนิกที่มีคุณสมบัติของวัสดุเป็นแบบเชิงเส้นและไอโซโทรปิก (linear isotropic)

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีสมรรถนะที่ดีขึ้นในด้านของระยะเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก

2. ได้ความรู้เกี่ยวกับหลักการของระเบียบวิธีต่างๆในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกตลอดจนข้อดีและข้อเสียของแต่ละระเบียบวิธีนั้น

3. ได้ความรู้เกี่ยวกับการนำคุณสมบัติทางคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของผลึกโฟโตนิกมาประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรมไฟฟ้า

1.7 ขั้นตอนและวิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาทฤษฎีและระเบียบวิธีต่างๆเพื่อการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกจากงานวิจัยที่ผ่านมา

2. ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

3. ศึกษาการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยมและลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส (Wachspress's interpolation function) ซึ่งถูกนำมาใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

4. เขียนโปรแกรมจำลองผลการวิเคราะห์คลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกที่ถูกออกแบบให้มีลักษณะต่างๆ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยม

5. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้และสมรรถนะในการคำนวณกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยม

6. เขียนบทความวิจัยเพื่อเผยแพร่ผลงานวิจัย

7. จัดทำเอกสารวิทยานิพนธ์

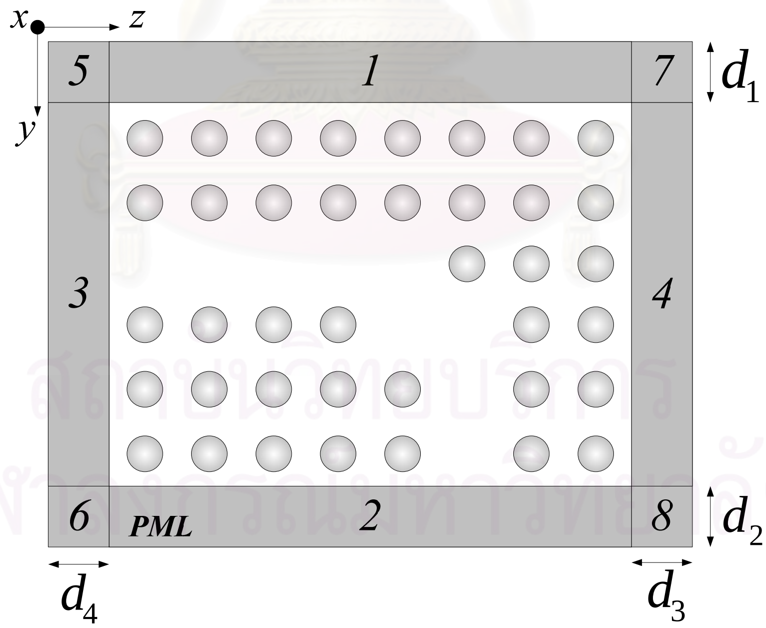
บทที่ 2

หลักการและทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก

2.1 ความนำ

การวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกนั้น จะเริ่มต้นจากสมการคลื่นแสงในโดเมนเวลาและหาคำตอบของสมการด้วยระเบียบวิธีต่างๆ ในบทที่ 2 นี้เป็นการอธิบายถึงวิธีการหาคำตอบของสมการคลื่นแสงในโดเมนของเวลาโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา โดยจะอธิบายว่าจากสมการคลื่นแสงในโดเมนเวลาสู่ระบบสมการเชิงเส้นขนาดใหญ่สำหรับการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลานั้นมีขั้นตอนทางคณิตศาสตร์อย่างไรบ้าง ตลอดจนกล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อสมรรถนะในการคำนวณและข้อจำกัดของระเบียบวิธีนี้

2.2 สมการคลื่นแสงในโดเมนเวลาสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก



รูปที่ 2.1 โดเมนสำหรับวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบ PML

เมื่อพิจารณาคลื่นแสงที่เคลื่อนที่ไปตามวงจรผลึกโฟโตนิกดังรูปที่ 2.1 โดยสมมติให้คลื่นแสงมีการเปลี่ยนแปลงเฉพาะในแนวแกน y และ z โดยไม่มีการเปลี่ยนในแนวแกน x

เนื่องจากแสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กซึ่งเป็นองค์ประกอบของคลื่นแสง จึงมีความสัมพันธ์เป็นไปตามสมการแมกซ์เวลล์ในโดเมนของเวลา (Maxwell's equation in time domain) ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดตัวกลางภายใน เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตช์เฟสสมบูรณ์ PML (Perfectly match layer) [9] ฟังก์ชันของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกจะสามารถหาได้จากสมการคลื่น TE และ TM โหมดดังสมการที่ (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \frac{s_y s_z q}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.1)$$

โดย

$$\Phi = E_x, p = 1, q = n^2 \quad \text{สำหรับ TE โหมด} \qquad (2.2)$$

$$\Phi = H_x, p = \frac{1}{n^2}, q = 1 \quad \text{สำหรับ TM โหมด} \qquad (2.3)$$

ซึ่งความหมายของตัวแปรต่างๆที่ใช้ในสมการ (2.1) – (2.3) แสดงได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ความหมายของตัวแปรต่างๆที่ใช้ในสมการคลื่น TE และ TM โหมด

E_x	องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน x
H_x	องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวแกน x
t	เวลา
c	ความเร็วของแสงในอากาศว่าง (Free space)
n	ดัชนีหักเหของแสง (Refractive index)
s_y และ s_z	ค่าพารามิเตอร์ PML ซึ่งจะมีค่าขึ้นอยู่กับหมายเลขของพื้นที่ของ PML ในรูปที่ 5 ตามตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 พารามิเตอร์ของ PML

พารามิเตอร์	**บริเวณของ PML**							
PML	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
s_y	s_1	s_2	1	1	s_1	s_2	s_1	s_2
s_z	1	1	s_3	s_4	s_3	s_3	s_4	s_4

เงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในงานวิทยาพนธ์นี้ คือชั้นแมตช์เฟสสมบูรณ์แบบที่ใช้กันทั่วไป Conventional PML [9] และ พารามิเตอร์ของ PML s_1, s_2, s_3 และ s_4 จะเป็นไปตามสมการ

$$s_i = 1 - j\left(\frac{\rho}{d_i}\right)^2 \tan\delta_i \tag{2.4}$$

โดย ρ คือ ระยะจากจุดเริ่มต้นของ PML เลเยอร์, d_i คือความหนาของ PML ที่ด้านต่างๆ ดังรูปที่ 2.1 และ δ_i คือ loss angle [9]

คำตอบของสมการคลื่นในสมการที่ (2.1), $\Phi(y,z,t)$ คือ คลื่นแสง ซึ่งเป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับตำแหน่งใน 2 แนวแกนคือ y,z และเวลาคือ t

2.3 สมการบีมโพรพาเกชันของคลื่นแสงในโดเมนเวลา

เนื่องจากคลื่นแสงที่แพร่กระจายในวงจรผลึกโฟโตนิกมีความถี่สูงมาก การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแก้ปัญหาในสมการที่ (2.1) เพื่อวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงโดยตรง จำเป็นต้องแบ่งระยะห่างระหว่างจุดเวลา (time step size) ให้สั้นมากเพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่ดี ซึ่งจะทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมวลผลเป็นอย่างมาก

ในความเป็นจริงแล้วคลื่นแสงที่แพร่กระจายในวงจรผลึกโฟโตนิกนั้นจะประกอบไปด้วยคลื่นพาห์ (Carrier wave) และคลื่นที่ถูกมอดูเลต (Modulated wave) โดยคลื่นพาห์จะมีความถี่สูงกว่าคลื่นที่ถูกมอดูเลตมาก จากความจริงดังกล่าว สมการของคลื่นในโดเมนเวลา (Time-domain equation) จึงถูกเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสมการคลื่นในโดเมนเวลาของคลื่นที่ถูกมอดูเลต เรียกว่าสมการบีมโพรพาเกชันของคลื่นแสงในโดเมนเวลา (Time-domain beam propagation equation) และวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงโดยเริ่มต้นจากสมการนี้ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

สมมติให้คลื่นแสงอยู่ในรูปของผลคูณของคลื่นที่ถูกมอดูเลต (Modulated wave) กับคลื่นพาห์ที่มีความถี่สูงโดยมีความถี่เชิงมุมเท่ากับ ω_0 ดังนั้น

$$\Phi(y,z,t) = \phi(y,z,t)\exp(j\omega_0 t) \tag{2.5}$$

จากสมการที่ (5) เมื่อหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับตำแหน่ง y,z และเวลา t และอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลา t จะได้ว่า

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\phi \exp(j\omega_0 t)\right] = \phi\frac{\partial}{\partial t}\exp(j\omega_0 t) + \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= (j\omega_0)\phi\exp(j\omega_0 t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}\exp(j\omega_0 t) \end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(j\omega_0)\phi\exp(j\omega_0 t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\exp(j\omega_0 t)\right] \\ &= (j\omega_0)\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\exp(j\omega_0 t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\exp(j\omega_0 t)\right] \\ &= (j\omega_0)\left[\phi\frac{\partial}{\partial t}\exp(j\omega_0 t) + \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial t}\right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\exp(j\omega_0 t) + \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right] \\ &= \left[-\omega_0^2\phi\exp(j\omega_0 t) + (j\omega_0)\exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial t}\right] \\ &\quad + \left[(j\omega_0)\exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega_0^2\exp(j\omega_0 t)\phi + (j2\omega_0)\exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{2.9}$$

เมื่อนำสมการที่ (2.6), (2.7) และ (2.9) แทนในสมการที่ (2.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&-\frac{s_y s_z q}{c^2}\left[-\omega_0^2\exp(j\omega_0 t)\phi + (j2\omega_0)\exp(j\omega_0 t)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \exp(j\omega_0 t)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right] \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\exp(j\omega_0 t) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\exp(j\omega_0 t) = 0 \end{aligned}\tag{2.10}$$

ตัดพจน์ตัวร่วม $\exp(j\omega_0 t)$ ออก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \frac{s_y s_z q}{c^2}\omega_0^2\phi - (j2\omega_0)\frac{s_y s_z q}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &-\frac{s_y s_z q}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\tag{2.11}$$

สมการที่ 2.11 นี้จะถูกเรียกว่า “**สมการบีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา** (Time-domain beam propagation equation)” ซึ่งมีคำตอบคือคลื่นที่ถูกมอดูเลต (Modulated wave), $\phi(y,z,t)$

เนื่องจากคำตอบของสมการบีมโพรพาเกชันของคลื่นแสงในสมการที่ (2.11) คือ คลื่นที่ถูกมอดูเลตซึ่งมีความถี่น้อยกว่าคลื่นแสงในสมการที่ (2.1) ดังนั้นการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงจากสมการบีมโพรพาเกชันของคลื่นแสง โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะสามารถแบ่งระยะห่างระหว่างจุดเวลาได้กว้างมากกว่าและสิ้นเปลืองหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณน้อยกว่าการวิเคราะห์จากสมการคลื่นแสงโดยตรง

2.4 การวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

ในกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนทางตำแหน่งที่เราต้องการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงจะถูกแบ่งให้เป็นโดเมนย่อยจำนวนจำกัดดังตัวอย่างในรูปที่ 2.2 เรียกโดเมนย่อยแต่ละอันว่าเอลิเมนต์ (elements) ค่าของ $\phi(y,z,t)$ ในแต่ละเอลิเมนต์, $\phi^e(y,z,t)$ จะถูกประมาณให้อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function or Interpolating function), $N_i^e(y,z)$ กับฟังก์ชันของเวลาที่ไม่ทราบค่าที่ตำแหน่งโหนดของแต่ละเอลิเมนต์, $\phi_i^e(t)$ จำนวน n พจน์ดังสมการที่ (2.12) โดย n มีค่าเท่ากับจำนวนโหนดย่อยของแต่ละเอลิเมนต์ เช่น $n=3$ สำหรับเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยม

$$\phi^e(y,z,t)=\sum_{i=1}^{n}N_i^e(y,z)\phi_i^e(t) \tag{2.12}$$

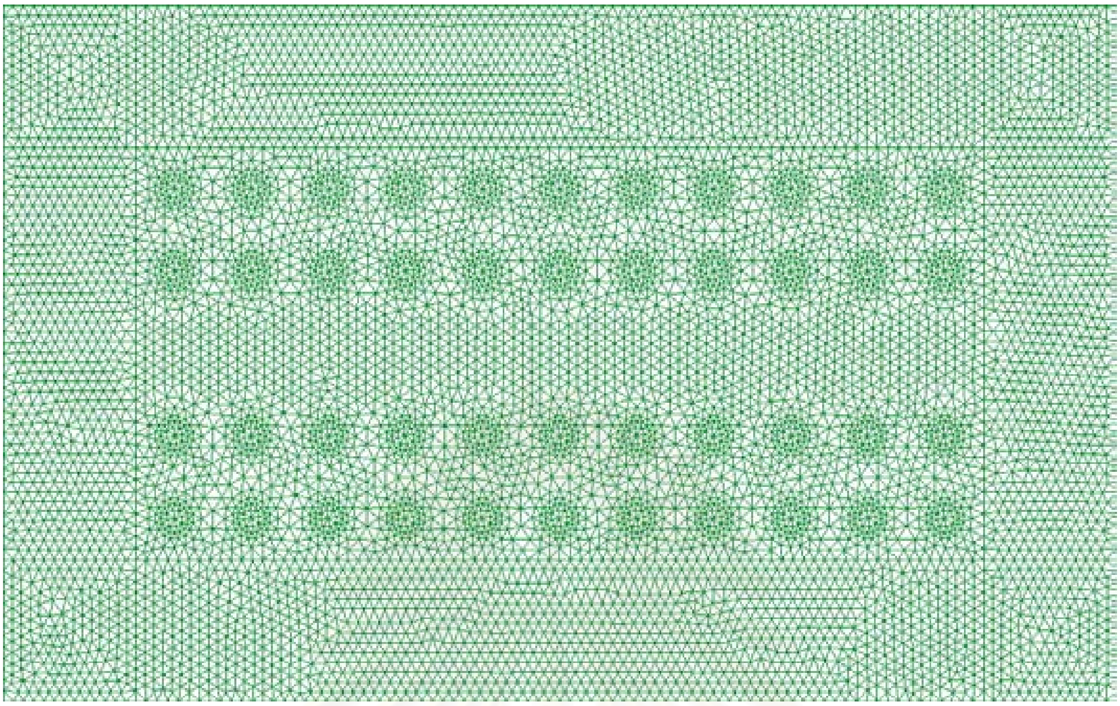
สมการที่ 2.12 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ 2.13

$$\phi^e(y,z,t)=\{\mathbf{N}\}^T\{\phi\} \tag{2.12}$$

โดย

$$\{\mathbf{N}\} = \begin{Bmatrix} N_1^e(y,z) \\ N_2^e(y,z) \\ . \\ . \\ N_n^e(y,z) \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

$$\{\phi\} = \{\phi_1^e(t) \quad \phi_2^e(t) \quad . \quad . \quad \phi_n^e(t)\} \tag{2.14}$$



รูปที่ 2.2 โดเมนสำหรับวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกถูกแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยรูปสามเหลี่ยม (Triangular elements)

แทนสมการที่ (2.12) ลงในสมการบีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาสมการที่ (2.11) จะเกิดเศษตกค้าง และประมาณคำตอบของสมการที่ (2.11) ตามระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบกาเลอคิน (Galerkin's weight residual method) โดยเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเป็นฟังก์ชันตัวเดียวกับฟังก์ชันรูปร่าง [10],[11] จะได้ชุดสมการหนึ่งที่เป็นสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับสองของ ϕ โดยจำนวนสมการในชุดสมการนั้นจะเท่ากับจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ตามกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาที่เกิดขึ้นนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์เพียงสมการเดียวได้ดังสมการที่ (2.15)

$$-\frac{1}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d^2\{\phi\}}{dt^2}-2j\frac{\omega_0}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d\{\phi\}}{dt}+\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\}=\{0\} \tag{2.15}$$

โดย

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามที่โหนดต่างๆในโดเมน

สมาชิกแถวที่ i ของ $\{\phi\}$ คือ สัญญาณข้อมูล ที่โหนดที่ i ในโดเมน, $\phi_i(t)$

$\{0\}$ คือ เวกเตอร์ศูนย์ (Null vector)

เมทริกซ์ $[\mathbf{K}]$ และ $[\mathbf{M}]$ ในสมการที่ (2.15) สามารถหาได้จากสมการที่ (2.16) - (2.19)

$$[\mathbf{K}] \quad = \sum_e [\mathbf{K}^e] \tag{2.16}$$

$$[\mathbf{M}] \quad = \sum_e [\mathbf{M}^e] \tag{2.17}$$

$$[\mathbf{K}^e] \quad = \iint_e \left[-p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} - p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z} \right] dydz \tag{2.18}$$

$$[\mathbf{M}^e] \quad = \iint_e \left[s_y s_z q \{N\}\{N\}^T \right] dydz \tag{2.19}$$

โดย

$\{\mathbf{N}\}$ คือ เวกเตอร์ของฟังก์ชันรูปร่าง (Vector of shape function) ในสมการที่ (2.13)

$\sum_e$ คือ การรวมกันของ Local เมทริกซ์ของเอลิเมนต์ต่างๆ, $[\mathbf{K}^e]$ และ $[\mathbf{M}^e]$ สู่ Global เมทริกซ์, $[\mathbf{K}]$ และ $[\mathbf{M}]$ ตามหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จะเห็นได้ว่าเมื่อใช้หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการประมาณคำตอบของสมการบีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาแล้ว จะเหลือเพียงสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาเท่านั้น โดยพจน์ที่เป็นอนุพันธ์เทียบกับตำแหน่งจะถูกจัดให้อยู่ในสมการเมทริกซ์ $[\mathbf{K}]$ และ $[\mathbf{M}]$ และแก้ปัญหาโดยใช้หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไป

2.5 **การประมาณคำตอบของสมการอนุพันธ์โดยใช้การประมาณแบบพาเด** (Padé approximation) **และ อัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน** (Crank-Nicholson algorithm)

จากสมการบีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาเมื่อใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แก้ปัญหาที่ตำแหน่งต่างๆในโดเมนแล้ว สมการที่เกิดขึ้นเป็นสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับสอง ในวิทยานิพนธ์นี้ต้องการหาคำตอบของสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาโดยการใช้อัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน (Clank-Nicholson algorithm) แต่อัลกอริทึมดังกล่าวเป็นการประมาณคำตอบของสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับหนึ่ง ดังนั้นจึงต้องประมาณสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับสองคือ สมการที่ (2.15) ให้เป็นสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับหนึ่งเสียก่อน

ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีการประมาณแบบพาเด้ (Padé approximation) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

จัดรูปสมการที่ (2.15) ใหม่จะได้ว่า

$$-\frac{1}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d\{\phi\}}{dt}\left[\frac{d}{dt}+2j\omega_0\right] \quad =-\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\} \tag{2.20}$$

$$-(2j\omega_0)\frac{1}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d\{\phi\}}{dt}\left[-\left(\frac{j}{2\omega_0}\right)\frac{d}{dt}+1\right] \quad =-\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\} \tag{2.21}$$

$$-2j\frac{\omega_0}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d\{\phi\}}{dt} \quad =-\frac{\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\}}{1-\frac{j}{2\omega_0}\frac{d}{dt}} \tag{2.22}$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ของ Padé recurrence [12] จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \quad =\frac{c^2}{2j\omega_0}[\mathbf{M}]^{-1}\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right) \tag{2.23}$$

แทนสมการที่ (2.23) ลงในสมการที่ (2.15) ผลที่ได้คือ

$$-2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]\frac{d\{\phi\}}{dt}+\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\} \quad =\{0\} \tag{2.24}$$

โดย

$$\left[\tilde{\mathbf{M}}\right] \quad =[\mathbf{M}]-\frac{c}{4\omega_0^2}\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right) \tag{2.25}$$

สมการที่ (2.24) คือสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับหนึ่ง จึงสามารถประมาณคำตอบของสมการที่ (2.24) ด้วยการใช้อัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน (Clank-Nicholson algorithm) ได้

คำตอบของสมการที่ (2.24) ที่ประมาณได้จะอยู่ในรูปของเวกเตอร์ของสนามที่จุดเวลาต่างๆ, $\{\phi\}_i$ โดยที่ i คือจำนวนเต็มที่ระบุลำดับที่ของจุดเวลา ดังสมการที่ (2.26)

$$[\mathbf{A}]_i\{\phi\}_{i+1}=[\mathbf{B}]_i\{\phi\}_i \tag{2.26}$$

โดย

$$[\mathbf{A}]_i=-2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i+\theta\Delta t\left([\mathbf{K}]_i+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \tag{2.27}$$

$$[\mathbf{B}]_i=-2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i-(1-\theta)\Delta t\left([\mathbf{K}]_i+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \tag{2.28}$$

Δt คือ ระยะเวลาระหว่างจุดเวลาแต่ละจุด และ θ คือพารามิเตอร์สำหรับควบคุมความมีเสถียรภาพของระเบียบวิธีนี้ ซึ่ง ค่าพารามิเตอร์ θ ที่ทำให้ระเบียบวิธีนี้มีเสถียรภาพจะอยู่ในช่วง $\theta = 0.5 - 0.8$ [5] โดยในการคำนวณของงานวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้ $\theta = 0.5$

เพื่อความถูกต้องและมีเสถียรภาพของการประมาณคำตอบในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา จะต้องแบ่งขนาดของเอลิเมนต์และระยะเวลาระหว่างจุดเวลาให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของ คูแรนท์-เฟดริช-เลวี (Courant-Friedrich-Levy condition) [13] เงื่อนไขนี้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแบ่งระยะเวลาระหว่างจุดเวลาแต่ละจุดในอัลกอริทึมของ แครงค์ นิโคลสัน กับขนาดของเอลิเมนต์ที่แบ่งโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังอสมการที่ (2.29)

$$\Delta t < \frac{\min(l)}{c} \tag{2.29}$$

โดย $\min(l)$ คือ ความยาวที่สั้นที่สุดของระยะขอบของเอลิเมนต์ที่แบ่ง

รูปแบบของการคำนวณค่าของสนามที่โหนดต่างๆและที่แต่ละจุดเวลาในสมการที่ (2.26) จะเป็นการใช้ค่าของสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาแรก (สนามอินพุท) มาคำนวณสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาที่สอง และ ใช้ค่าของสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาที่สอง มาคำนวณสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาถัดไป เป็นเช่นนี้เรื่อยไป

2.6 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

โปรแกรมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก จะแบ่งออกได้เป็น 3 ขั้นตอนใหญ่ๆ คือ

- ขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมแบ่งเมช (Meshing program)
- ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite-element scheme)
- ขั้นตอนอัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน (Clank-Nicholson algorithm or Two-point recurrence scheme)

2.6.1 ขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมแบ่งเมช

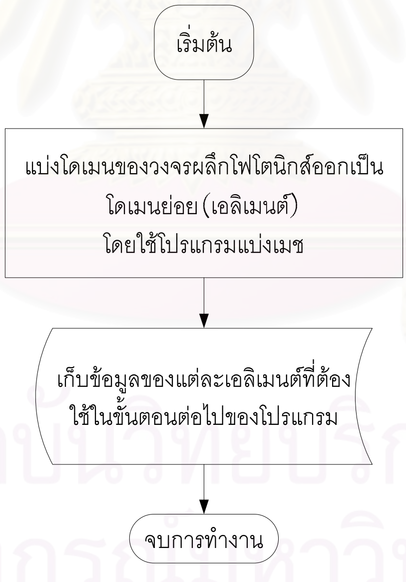
ในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการออกแบบวงจรผลึกโฟโตนิกและแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย โดยใช้โปรแกรม GID8.0.2 และเก็บข้อมูลต่างๆที่จำเป็นต้องใช้ในขั้นตอนต่อไปของโปรแกรม ได้แก่

1. จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเมช
2. พิกัด (y, z) ของแต่ละโหนด
3. ข้อมูลของแต่ละเอลิเมนต์ คือ

   - ลำดับที่ของเอลิเมนต์

   - หมายเลขโหนดท้องถิ่น (Local node number) ของเอลิเมนต์

กระบวนการตามขั้นตอนของการแบ่งเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมแบ่งเมชแสดงในรูปที่ 2.3

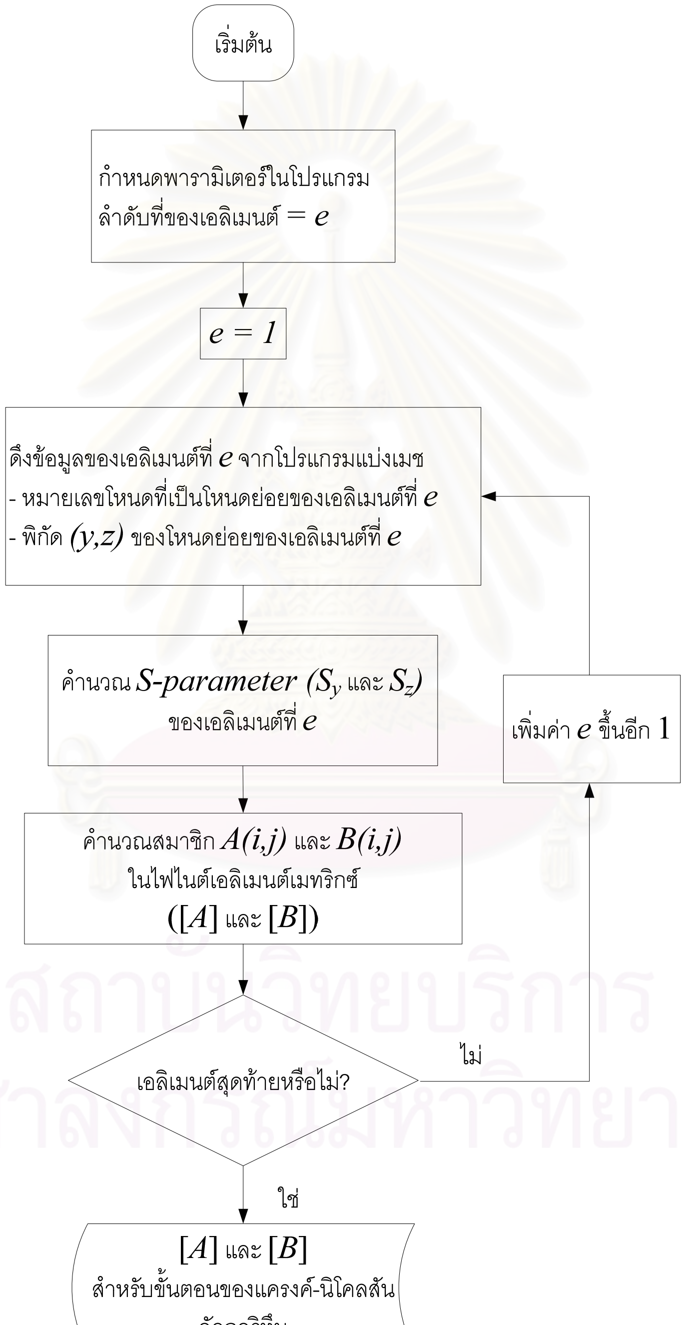


รูปที่ 2.3 กระบวนการตามขั้นตอนของการแบ่งเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมแบ่งเมช

2.6.2 ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนนี้จะเป็นการใช้หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาแก้ปัญหาที่ตำแหน่งต่างๆในโดเมนของวงจรผลึกโฟโตนิก โดยนำค่าของดัชนีหักเหของแสงที่เอลิเมนต์ต่างๆและฟังก์ชัน

รูปร่างมาคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ $[\mathbf{K}]$ และ $[\mathbf{M}]$ ตามสมการที่ (2.16) ถึง (2.19) และ นำเมทริกซ์ $[\mathbf{K}]$ และ $[\mathbf{M}]$ มาคำนวณเมทริกซ์ $[\mathbf{A}]$ และ $[\mathbf{B}]$ ตามสมการที่ (2.25), (2.27) และ (2.28) โปรแกรมจะทำการดึงข้อมูลของแต่ละเอลิเมนต์ที่เตรียมไว้ในขั้นตอน 2.6.1 คือ ลำดับที่และพิกัด (y, z) ของ Local Node ของแต่ละเอลิเมนต์ เพื่อคำนวณสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ $[\mathbf{A}]$ และ $[\mathbf{B}]$ ตามกระบวนการของไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 2.4 กระบวนการตามขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่กล่าวมา สามารถสรุปได้ดังกระบวนการตามรูปที่ 2.4 จะเห็นได้ว่าจำนวนรอบของการทำงานในขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะเท่ากับจำนวนเอลิเมนต์ เพราะฉะนั้นระยะเวลาที่ใช้สำหรับขั้นตอนของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์จะขึ้นอยู่กับจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ในขั้นตอน 2.6.1

2.6.3 ขั้นตอนของอัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน

ขั้นตอนนี้จะเป็นการป้อนคลื่นแสงที่จุดเวลาเริ่มต้น, $\{\phi\}_i$ และแก้สมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ เพื่อคำนวณลักษณะของคลื่นแสงที่จุดเวลาถัดไป, $\{\phi\}_{i+1}$ โดยใช้เมทริกซ์ $[\mathbf{A}]$และ $[\mathbf{B}]$ที่คำนวณได้จากขั้นตอนของไฟไนต์เอลิเมนต์ ตามสมการที่ (2.26) กระบวนการตามขั้นตอนอัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสันดังที่กล่าวมา สามารถสรุปได้ดังรูปที่ 2.5 จะเห็นได้ว่า ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณสำหรับขั้นตอนอัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน จะขึ้นอยู่กับขนาดของระบบสมการเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงหรือจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในขั้นตอน 2.6.1 นั่นเอง

2.6.4 สรุปขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

เมื่อนำขั้นตอนย่อยทั้งสามซึ่งได้แก่ ขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมแบ่งเมช (Meshing program), ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite-element scheme และ ขั้นตอนอัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน (Clank-Nicholson algorithm or Two-point recurrence scheme) มารวมกัน กระบวนการทั้งหมดของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะสามารถสรุปได้ดังรูปที่ 2.6

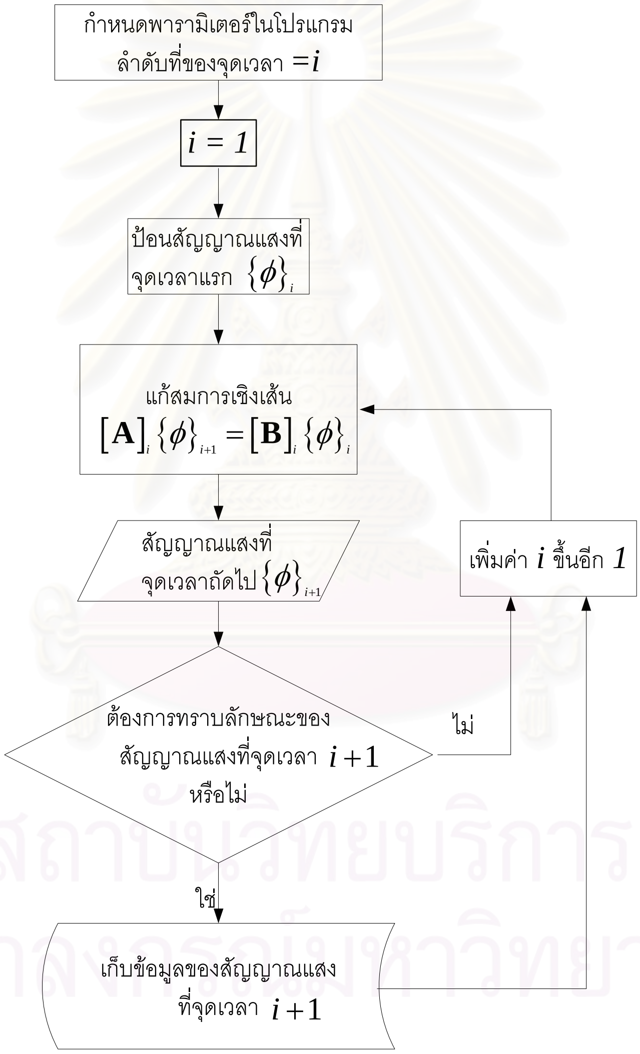
2.7 สมรรถนะในการคำนวณของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

สมรรถนะในการคำนวณของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลานั้น มักจะถูกกล่าวถึงใน 2 ประเด็นก็คือ ความแม่นยำในการคำนวณ (Accuracy) และ ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (Computation time) การพัฒนาสมรรถนะด้านความแม่นยำของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะสามารถทำได้ 2 วิธีก็คือ

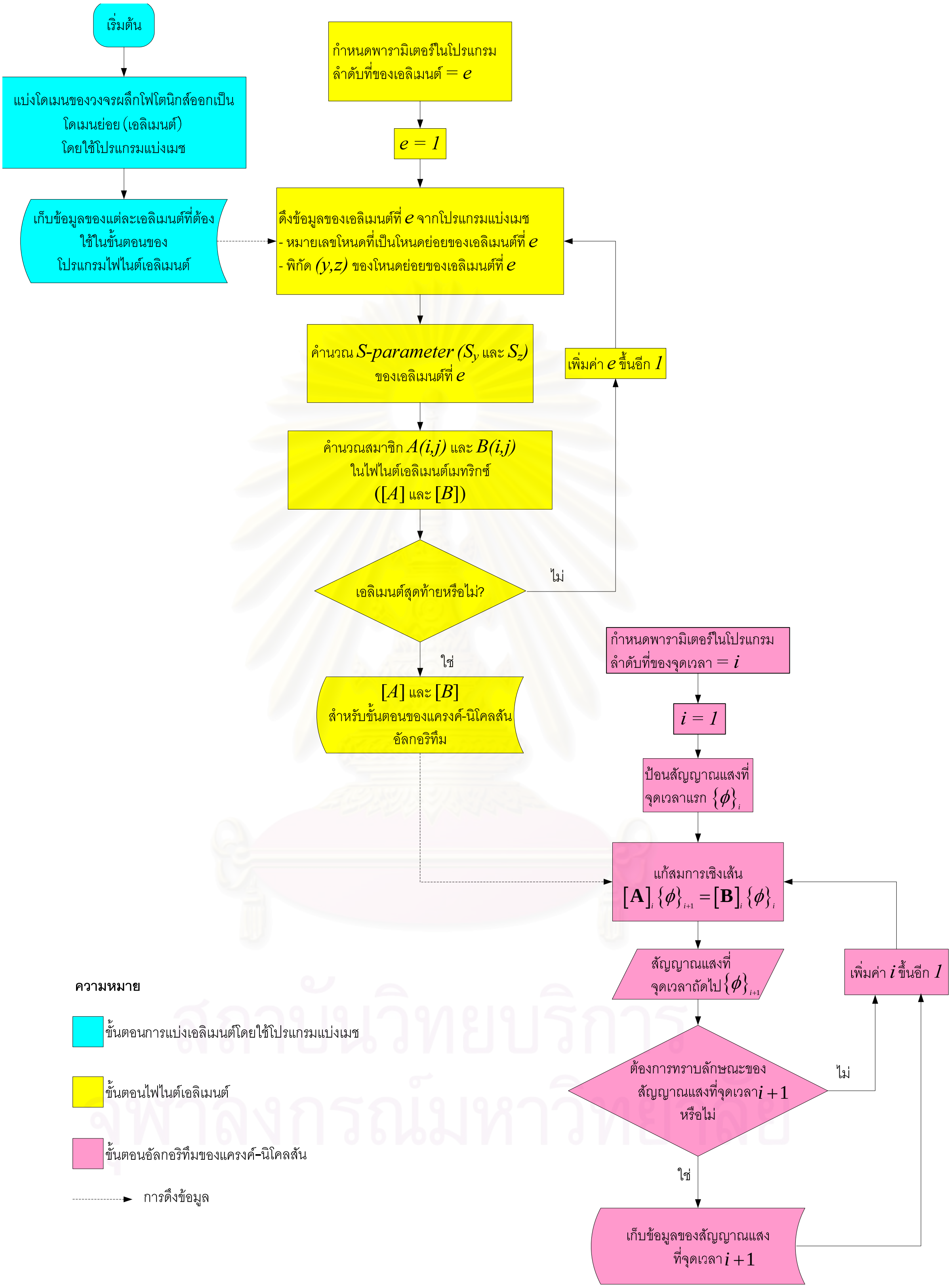
1. เพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ในการขั้นตอนของการแบ่งเอลิเมนต์

2. ใช้ฟังก์ชันรูปร่างที่เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับสูงขึ้น

ในกรณีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐานนั้น การเพิ่มสมรรถนะด้านความแม่นยำโดยใช้สองวิธีดังกล่าวข้างต้น จะส่งผลให้จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นในขั้นตอนของไฟไนต์เอลิเมนต์มีมากขึ้น มีผลทำให้ระบบสมการเชิงเส้นสำหรับคำนวณมีขนาดใหญ่ขึ้น ส่งผลให้การวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลานั้นใช้เวลานานขึ้นตามไปด้วยในที่สุด กล่าวได้ว่าเมื่อเพิ่มสมรรถนะในด้านความแม่นยำก็จะส่งผลให้สมรรถนะในเรื่องของระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นต่ำลง



รูปที่ 2.5 กระบวนการตามขั้นตอนของอัลกอริทึมของแครงค์-นิโคลสัน



รูปที่ 2.6 กระบวนทั้งหมดของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

2.8 ปัญหาที่พบจากงานวิจัยในอดีต

จากทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกดังที่กล่าวไปจะเห็นได้ว่า ลักษณะของการคำนวณคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลาจะเป็นการแก้สมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ โดยที่ขนาดของสมการเชิงเส้นนั้นจะมีค่าเท่ากับจำนวนโหนด (Nodal point) ที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และไม่ว่าจะแก้สมการเชิงเส้นที่เกิดขึ้นนั้นด้วยวิธีใด ระยะเวลาที่ใช้ในการแก้สมการนั้นก็จะขึ้นอยู่กับขนาดของสมการเชิงเส้นนั่นเอง เพราะฉะนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์คือปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อสมรรถนะในเชิงระยะเวลาที่ใช้คำนวณ (Computation time) ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะแก้ปัญหาสนามที่ตำแหน่งต่างๆ (Space) ได้ดี แต่ก็มีข้อจำกัดที่พบอยู่บางประการที่ทำให้ระเบียบวิธีนี้ใช้ระยะเวลานานในการคำนวณโดยไม่จำเป็น

1. เมื่อนำระเบียบวิธีนี้ไปวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกที่มีขนาดค่อนข้างใหญ่ จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ก็จะมีมาก ส่งผลให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณของระเบียบวิธีนี้สูงตามไปด้วย

2. การแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีนี้โดยทั่วไปแล้วใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด เมื่อแก้ปัญหาสนามในบริเวณที่เป็นวงกลมที่ส่วนแคลดดิ้งของท่อนำคลื่นแสง แม้ว่าจะไม่ต้องการทราบลักษณะของสัญญาณแสงอย่างละเอียดมากนักในบริเวณนั้น แต่ก็จำเป็นต้องแบ่งเอลิเมนต์ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวนมากพอสมควรเพื่อที่จะประกอบกันเป็นรูปวงกลม มีผลทำให้จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นมีมากเกินความจำเป็น

จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะมีข้อเสียในเรื่องของระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณอันเนื่องมาจากข้อจำกัดในการแบ่งเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมในกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์นั่นเอง ในงานวิทยานิพนธ์นี้จึงคิดวิธีการแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบใหม่คือรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal element) เพื่อพัฒนาสมรรถนะของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาให้ใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยลง ซึ่งหลักการนั้นจะกล่าวในบทที่ 3 ต่อไป

บทที่ 3
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมและฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการคำนวณ

3.1 ความนำ

จากข้อจำกัดของการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งกล่าวไปในบทที่ 2 กล่าวโดยสรุปก็คือ จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นโดยไม่จำเป็นจากการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมนั้นส่งผลต่อระยะเวลาในการคำนวณของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำเสนอการแบ่งเอลิเมนต์แบบใหม่ซึ่งก็คือ เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (polygonal element) เพื่อที่จะลดจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ และส่งผลให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีสมรรถนะในเรื่องของระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณดีขึ้นในที่สุด

เนื้อหาในบทที่ 3 นี้จะกล่าวถึงหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยม โดยจะอธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงขั้นตอนในโปรแกรมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจากทฤษฎีพื้นฐาน และกล่าวถึงฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (Wachspress's shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยม ตลอดจนกล่าวถึงวิธีการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างดังกล่าวโดยใช้เทคนิคการประมาณของซิมป์สันซึ่งถูกนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้

3.2 การเปลี่ยนแปลงในอัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาของงานวิทยานิพนธ์นี้

ในงานวิทยานิพนธ์นี้มีการเปลี่ยนแปลงบางส่วนของกระบวนการของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาคือ

1. เปลี่ยนแปลงการแบ่งเอลิเมนต์จากเดิมคือรูปสามเหลี่ยม (Triangular elements) ซึ่งเป็นมาตรฐานที่ใช้กันในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็น รูปหลายเหลี่ยม (Polygonal elements)

2. เปลี่ยนแปลงฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้ในการคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ $[\mathbf{A}]$ และ $[\mathbf{B}]$ จากเดิมคือ ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับหนึ่งหรือสอง (linear or quadratic shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

มาตรฐาน แต่เนื่องจากในวิทยานิพนธ์นี้ใช้การแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยม จึงใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบใหม่ คือ ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (Wachspress's shape function) ซึ่งจะได้กล่าวในรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

กระบวนการของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงในวิทยานิพนธ์นี้สรุปได้ดังรูปที่ 3.1

3.3 ฟังก์ชันรูปร่าง

ปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อสมรรถนะในการคำนวณของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั่นก็คือ การเลือกใช้ฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการคำนวณ คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันรูปร่าง [7, 8] คือ มีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์ในทุกตำแหน่งของภายในเอลิเมนต์ และ ฟังก์ชันรูปร่างตัวที่ i , N_i^e จะต้องมีค่าเท่ากับ 1 ในโหนดย่อยของเอลิเมนต์ที่ i และมีค่าเท่ากับ 0 ที่โหนดย่อยอื่นๆของเอลิเมนต์

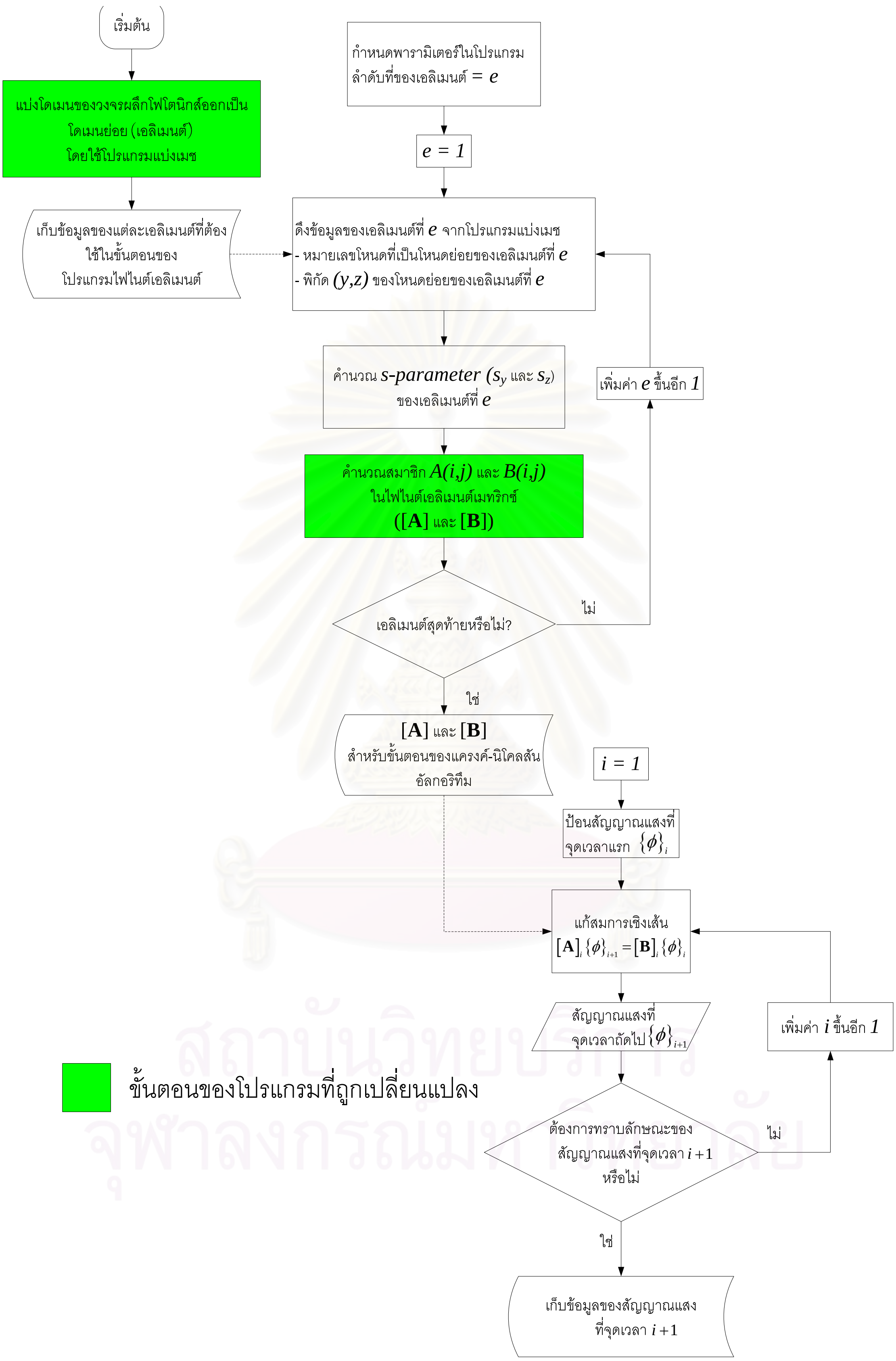
ในหัวข้อนี้จะเปรียบเทียบความแตกต่างของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐานกับฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมซึ่งเป็นสิ่งที่งานวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอ

3.3.1 ฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

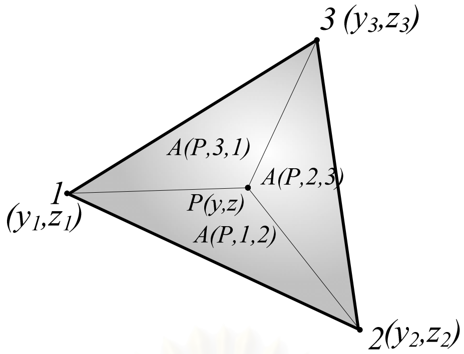
ฟังก์ชันรูปร่างที่นิยมนำมาใช้สำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมคือ ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับหนึ่ง โดยที่การแบ่งเอลิเมนต์ขนาดเท่ากันฟังก์ชันรูปร่างโพลิโนเมียลที่มีอันดับสูงกว่าจะให้ความแม่นยำในการคำนวณที่ดีกว่า ซึ่งที่มาของฟังก์ชันรูปร่างนั้นมาจากหลักการของ พิกัดพื้นที่ (Area Coordinate) [10, 11]

นิยามของพิกัดพื้นที่ คือ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเล็กที่ประกอบไปด้วยจุด $P(y,z)$ และ อีก 2 โหนดที่อยู่ตำแหน่งมุมของเอลิเมนต์ กับพื้นที่สามเหลี่ยมทั้งหมดของเอลิเมนต์ แสดงได้ดังรูปที่ 3.2

เมื่อกำหนดให้ $A(l,m,n)$ คือพื้นที่สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยโหนด l,m และ n โดยที่ทั้งสามโหนดนั้นเรียงตัวกันแบบทวนเข็มนาฬิกา พื้นที่ของสามเหลี่ยมเล็กสามารถหาได้จากสมการที่ 3.1ก – 3.1ค และพื้นที่ของสามเหลี่ยมทั้งหมดสามารถหาได้จากสมการที่ 3.1ง



รูปที่ 3.1 การเปลี่ยนแปลงในกระบวนการของโปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและพื้นที่ของสามเหลี่ยมเล็กสำหรับคำนวณพิกัดพื้นที่

$$A(P,1,2)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \qquad 3.1(\text{ก})$$

$$A(P,2,3)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 3.1(\text{ข})$$

$$A(P,3,1)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix} \qquad 3.1(\text{ค})$$

$$A(1,2,3)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 3.1(\text{ง})$$

พื้นที่พิกัด, $\left(L_1^e, L_2^3, L_3^e\right)$ สำหรับบอกตำแหน่งของจุด $P(y,z)$ ซึ่งอยู่ภายในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมนั้นสามารถหาได้จากสมการที่ 3.2ก – 3.2ค

$$L_1^e=\frac{A(P,2,3)}{A(1,2,3)} \qquad 3.2(\text{ก})$$

$$L_2^e=\frac{A(P,1,3)}{A(1,2,3)} \qquad 3.2(\text{ข})$$

$$L_3^e=\frac{A(P,1,2)}{A(1,2,3)} \qquad 3.2(\text{ค})$$

ในกรณีฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับหนึ่ง จำนวนโหนดย่อยของเอลิเมนต์จะมี 3 โหนด ซึ่งก็คือโหนดที่มุมทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม จำนวนฟังก์ชันรูปร่างจะเท่ากับ 3 ฟังก์ชัน คือ $N_1^e(y,z), N_2^e(y,z)$ และ $N_3^e(y,z)$ ซึ่งสามารถหาได้จากสมการที่ 3.3ก – 3.3ค

$$N_1^e(y,z) = L_1^e = \frac{A(P,2,3)}{A(1,2,3)}$$

$$= \frac{\left[\left(y_2 z_3 - y_3 z_2\right) + \left(z_2 - z_3\right) y + \left(y_3 - y_2\right) z\right]}{2A} \qquad 3.3(ก)$$

$$N_2^e(y,z) = L_2^e = \frac{A(P,1,3)}{A(1,2,3)}$$

$$= \frac{\left[\left(y_1 z_3 - y_3 z_1\right) + \left(z_1 - z_3\right) y + \left(y_3 - y_1\right) z\right]}{2A} \qquad 3.3(ข)$$

$$N_3^e(y,z) = L_3^e = \frac{A(P,1,2)}{A(1,2,3)}$$

$$= \frac{\left[\left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right) + \left(z_1 - z_2\right) y + \left(y_2 - y_1\right) z\right]}{2A} \qquad 3.3(ค)$$

3.3.2 **ฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม**

ฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้สำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมทั่วไป เรียกว่า ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (Wachspress's shape function) ซึ่งถูกนำเสนอในงานวิจัยของ N. Sukumar และ E.A. Malsch เมื่อปี 2006 [8] โดยฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสจะถูกเขียนให้อยู่ในเทอมของพิกัดแบริเซ็นทริก (barycentric coordinates) ดังสมการที่ (3.4)

$$N_i^e(y,z) = \frac{w_i^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^e(y,z)} \qquad (3.4)$$

โดย $w_j^e(y,z)$ คือ พิกัดแบริเซ็นทริกของโหนดที่ j ของเอลิเมนต์ e พิกัดแบริเซ็นทริกมีจำนวนเท่ากับจำนวนเหลี่ยมของเอลิเมนต์ n ตัว ซึ่งพิกัดแบริเซ็นทริกที่จุด $p(y,z)$ สามารถคำนวณได้จากพื้นที่สามเหลี่ยม 3 รูปดังสมการที่ (3.5)

$$w_j^e(y,z) = \frac{A(j-1, j, j+1)}{A(p, j-1, j)A(p, j, j+1)} \tag{3.5}$$

โดย

$A(j-1, j, j+1)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมประกอบด้วยโหนดที่ $j-1, j, j+1$ ตามลำดับ
$A(p, j-1, j)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมประกอบด้วยโหนดที่ $j-1, j$ และจุด $p(y,z)$
$A(p, j, j+1)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมประกอบด้วยโหนดที่ $j, j+1$ และจุด $p(y,z)$

ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสามารถนำไปใช้กับการแบ่งเอลิเมนต์ที่มีจำนวนเหลี่ยมตั้งแต่ 3 เหลี่ยมขึ้นไปได้ โดยในหัวข้อที่ 3.3.2.1 จะเป็นการหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม และ ในหัวข้อที่ 3.3.2.2 จะเป็นการหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

3.3.2.1 **ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม**

สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม $n=3$;

พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเท่ากับ A

จำนวนฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้จึงมี $=3$ ตัว คือ $N_1^e(y,z)$, $N_2^e(y,z)$ และ $N_3^e(y,z)$

จำนวนพิกัดแบริเซ็นทริก $=3$ ตัว คือ $w_1^e(y,z)$, $w_2^e(y,z)$ และ $w_3^e(y,z)$

เมื่อใช้สมการที่ 3.5 จะได้ว่า

$$w_1^e(y,z) = \frac{A(0,1,2)}{A(p,0,1)A(p,1,2)} = \frac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)}$$

$$w_2^e(y,z) = \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)}$$

$$w_3^e(y,z) = \frac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} = \frac{A(2,3,1)}{A(p,2,3)A(p,3,1)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z) = \frac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)} + \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \frac{A(2,3,1)}{A(p,2,3)A(p,3,1)}$$

$$= \frac{A(3,1,2)A(p,2,3) + A(1,2,3)A(p,3,1) + A(2,3,1)A(p,1,2)}{A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,1)}$$

$$= \frac{A(3,1,2)\left[A(p,2,3) + A(p,3,1) + A(p,1,2)\right]}{A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,1)}$$

จากสมการของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (สมการที่ 3.4) จะได้ว่า

$$N_1^e(y,z) = \frac{w_1^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z)} = \frac{\dfrac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)}}{\dfrac{A(3,1,2)\left[A(p,2,3) + A(p,3,1) + A(p,1,2)\right]}{A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,1)}}$$

$$= \frac{A(p,2,3)}{\left[A(p,2,3) + A(p,3,1) + A(p,1,2)\right]}$$

$$= \frac{A(p,2,3)}{A}$$

$$= \frac{\left[(y_2 z_3 - y_3 z_2) + (z_2 - z_3)y + (y_3 - y_2)z\right]}{2A}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าของ $N_2^e(y,z)$ และ $N_3^e(y,z)$ จะได้ว่า

$$N_2^e(y,z) = \frac{w_2^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z)} = \frac{A(p,1,3)}{A}$$

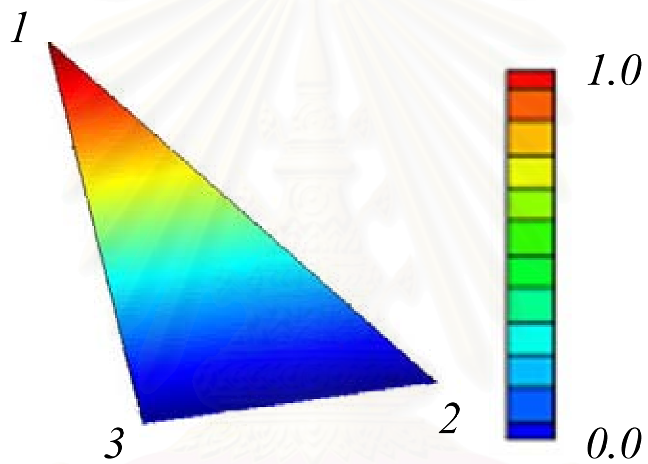
$$= \frac{\left[(y_1 z_3 - y_3 z_1) + (z_1 - z_3)y + (y_3 - y_1)z\right]}{2A}$$

$$N_3^e(y,z) = \frac{w_3^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z)} = \frac{A(p,1,2)}{A}$$

$$= \frac{\left[(y_1 z_2 - y_2 z_1) + (z_1 - z_2)y + (y_2 - y_1)z\right]}{2A}$$

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมจะเป็น ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับหนึ่ง (Linear shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเดียวกับฟังก์ชันรูปร่างมาตรฐานแบบโพลีโนเมียลอันดับหนึ่งสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งหาจากสมการที่ 3.2ก – 3.2ค หรือสามารถกล่าวได้อีกอย่างว่า ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับหนึ่งสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมคือสับเซตของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส

ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม จะเป็นไปตามคุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการคำนวณในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งถูกกล่าวไว้ในงานวิจัยของ N. Sukumar เมื่อปี 2006 โดยรูปที่ 3.3 คือ รูปตัวอย่างของฟังก์ชันรูปร่างตัวที่ 1, $N_1(y,z)$ ของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันรูปร่าง $N_1(y,z)$ สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

3.3.2.2 **ตัวอย่างการหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม**

ในหัวข้อ 3.3.1 ได้อธิบายเกี่ยวกับฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม ในหัวข้อนี้เป็นตัวอย่างการหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส สำหรับเอลิเมนต์ที่มีจำนวนเหลี่ยมมากกว่าสามเหลี่ยม โดยจะยกตัวอย่างในกรณีที่เอลิเมนต์เป็นรูปห้าเหลี่ยม

สำหรับเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยม $n=5$;

จำนวนฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้จึงมี $=5$ ตัว คือ $N_1^e(y,z)$, $N_2^e(y,z)$, $N_3^e(y,z)$, $N_4^e(y,z)$ และ $N_5^e(y,z)$

จำนวนพิกัดแบริเซ็นทริก $= 5$ ตัว คือ $w_1^e(y,z)$, $w_2^e(y,z)$, $w_3^e(y,z)$, $w_4^e(y,z)$ และ $w_5^e(y,z)$

โดย

$$w_1^e(y,z) = \frac{A(0,1,2)}{A(p,0,1)A(p,1,2)} = \frac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)}$$

$$w_2^e(y,z) = \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)}$$

$$w_3^e(y,z) = \frac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)}$$

$$w_4^e(y,z) = \frac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)}$$

$$w_5^e(y,z) = \frac{A(4,5,6)}{A(p,4,5)A(p,5,6)} = \frac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)}$$

$$\sum_{j=1}^{5} w_j^e(y,z) = \frac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)} + \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \frac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} + \frac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)} + \frac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)}$$

จากสมการของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (สมการที่ 3.4 และ 3.5) จะได้ว่า

$$N_1^e(y,z) = \frac{w_1^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{5} w_j^e(y,z)}$$

$$= \frac{\dfrac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)}}{\left[\dfrac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)} + \dfrac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \dfrac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} + \dfrac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)} + \dfrac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)}\right]}$$

$$N_2^e(y,z) = \frac{w_2^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{5} w_j^e(y,z)}$$

$$= \frac{\dfrac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)}}{\left[\begin{array}{l}\dfrac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)} + \dfrac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \dfrac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} \\ + \dfrac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)} + \dfrac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)}\end{array}\right]}$$

$$N_3^e(y,z) = \frac{w_3^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{5} w_j^e(y,z)}$$

$$= \frac{\dfrac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)}}{\left[\begin{array}{l}\dfrac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)} + \dfrac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \dfrac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} \\ + \dfrac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)} + \dfrac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)}\end{array}\right]}$$

$$N_4^e(y,z) = \frac{w_4^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{5} w_j^e(y,z)}$$

$$= \frac{\dfrac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)}}{\left[\begin{array}{l}\dfrac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)} + \dfrac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \dfrac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} \\ + \dfrac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)} + \dfrac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)}\end{array}\right]}$$

$$N_5^e(y,z) = \frac{w_5^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{5} w_j^e(y,z)}$$

$$= \frac{\dfrac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)}}{\left[\begin{array}{l} \dfrac{A(5,1,2)}{A(p,5,1)A(p,1,2)} + \dfrac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \dfrac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} \\ + \dfrac{A(3,4,5)}{A(p,3,4)A(p,4,5)} + \dfrac{A(4,5,1)}{A(p,4,5)A(p,5,1)} \end{array}\right]}$$

ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยมสามารถสรุปได้ตามตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 สรุปฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยม

ฟังก์ชันรูปร่าง	ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่าง
$N_1^e(y,z)$	$\dfrac{A(5,1,2)A(p,2,3)A(p,3,4)A(p,4,5)}{K(y,z)}$
$N_2^e(y,z)$	$\dfrac{A(1,2,3)A(p,5,1)A(p,3,4)A(p,4,5)}{K(y,z)}$
$N_3^e(y,z)$	$\dfrac{A(2,3,4)A(p,5,1)A(p,1,2)A(p,4,5)}{K(y,z)}$
$N_4^e(y,z)$	$\dfrac{A(3,4,5)A(p,5,1)A(p,1,2)A(p,2,3)}{K(y,z)}$
$N_5^e(y,z)$	$\dfrac{A(4,5,1)A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,4)}{K(y,z)}$

โดย

$$K(y,z) = \left[\begin{array}{l} A(5,1,2)A(p,2,3)A(p,3,4)A(p,4,5) + A(1,2,3)A(p,5,1)A(p,3,4)A(p,4,5) \\ +A(2,3,4)A(p,5,1)A(p,1,2)A(p,4,5) + A(3,4,5)A(p,5,1)A(p,1,2)A(p,2,3) \\ +A(4,5,1)A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,4) \end{array}\right]$$

เนื่องจาก $A(p,a,b)$, $a,b=1,2,3,4,5$ คือพื้นที่สามเหลี่ยมที่ประกอบไปด้วยจุด $p(y,z)$, a และ b ซึ่งเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับหนึ่งของ y และ z เมื่อพิจารณาฟังก์ชันรูปร่างในตารางที่ 3.1 แล้วจะเห็นได้ว่าตัวเศษของฟังก์ชันรูปร่างทั้ง 5 ฟังก์ชันนั้นจะอยู่ในรูปของการคูณกันของฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับหนึ่ง 3 พจน์ จึงสามารถกล่าวได้ว่า ตัวเศษของฟังก์ชันรูปร่างคือฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสามของ y และ z ในขณะที่ตัวส่วนของฟังก์ชันรูปร่างทั้ง 5 ฟังก์ชัน หรือ $K(y,z)$ ก็คือผลบวกของฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสามของ y และ z จำนวน 5 พจน์นั่นเอง จึงกล่าวได้ว่า ตัวส่วนของฟังก์ชันรูปร่างคือฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสามของ y และ z

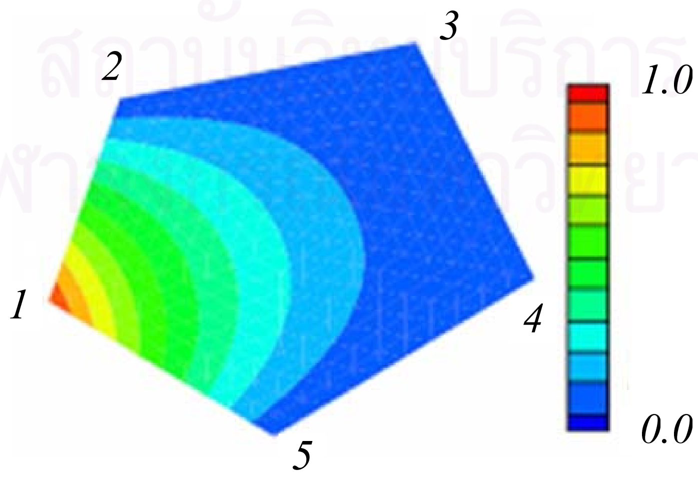
เพราะฉะนั้นฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยมคือ อัตราส่วนของฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสามของ y และ z หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ว่า

$$N_i^e(y,z)=\frac{a_{1i}+a_{2i}y+a_{3i}z+a_{4i}yz+a_{5i}y^2+a_{6i}z^2+a_{7i}y^2z+a_{8i}yz^2+a_{9i}y^3+a_{10i}z^3}{b_{1i}+b_{2i}y+b_{3i}z+b_{4i}yz+b_{5i}y^2+b_{6i}z^2+b_{7i}y^2z+b_{8i}yz^2+b_{9i}y^3+b_{10i}z^3}$$

โดย $i=1,2,3,4,5$

$a_{1i},a_{2i},...,a_{9i},a_{10i}$ และ $b_{1i},b_{2i},...,b_{9i},b_{10i}$ คือสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า

ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม จะเป็นไปตามคุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการคำนวณในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งถูกกล่าวไว้ในงานวิจัยของ N. Sukumar เมื่อปี 2006 โดยรูปที่ 3.4 คือ รูปตัวอย่างของฟังก์ชันรูปร่างตัวที่ 1 ของเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยม ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ 3.4 และ 3.5



รูปที่ 3.4 ฟังก์ชันรูปร่าง $N_1(y,z)$ สำหรับเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยม

ในกรณีเอลิเมนต์จำนวน n เหลี่ยม โดยที่ $n > 3$ ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปนั้น การหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสก็จะมีลักษณะทำนองเดียวกันกับตัวอย่างของเอลิเมนต์รูปห้าเหลี่ยม โดยฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสที่ได้นั้นจะอยู่ในรูปของอัตราส่วนของฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ $n-2$ ของ y และ z ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูป 10 เหลี่ยม ($n=10$) ก็คืออัตราส่วนของฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ 8 ของ y และ z

3.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส

จากทฤษฎีของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา จะพบว่าในขั้นตอนของไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการหาอนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างเพื่อคำนวณสมาชิกของไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ตามสมการที่ 2.18 และ 2.19

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส จะต้องคำนึงถึงความเหมาะสมสำหรับการเขียนโปรแกรมด้วย ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส โดยมองว่าฟังก์ชันนี้เป็นเศษส่วนของฟังก์ชันโพลีโนเมียลดังสมการที่ (3.6) และใช้หลักการหาอนุพันธ์ของเศษส่วนของฟังก์ชัน

$$N_i^e(y,z) = \frac{w_j^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^e(y,z)} = \frac{f_1(y,z)}{f_2(y,z)} \tag{3.6}$$

อนุพันธ์เทียบกับ y และ z ของฟังก์ชันรูปร่างในสมการที่ (3.6) คือ

$$\frac{dN_i^e}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 \frac{df_1}{dy} - f_1 \frac{df_2}{dy}}{(f_2)^2} \tag{3.7}$$

$$\frac{dN_i^e}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 \frac{df_1}{dz} - f_1 \frac{df_2}{dz}}{(f_2)^2} \tag{3.8}$$

หลังจากนั้นทำการหา $\frac{df_1}{dy}, \frac{df_1}{dz}, \frac{df_2}{dy}$ และ $\frac{df_2}{dz}$ ได้ว่า

$$\frac{df_1}{dy}=\frac{dw_j^e}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{3.9}$$

$$\frac{df_1}{dz}=\frac{dw_j^e}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{3.10}$$

$$\frac{df_2}{dy}=\frac{d\left(\sum_{j=1}^{n}w_j^e\right)}{dy}=\sum_{j=1}^{n}\frac{d\left(w_j^e\right)}{dy}=\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{3.11}$$

$$\frac{df_2}{dz}=\frac{d\left(\sum_{j=1}^{n}w_j^e\right)}{dz}=\sum_{j=1}^{n}\frac{d\left(w_j^e\right)}{dz}=\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{3.12}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \text{ และ } \frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right)$$

ในสมการที่ (3.9)-(3.12) จะสามารถหาได้โดยใช้การหาอนุพันธ์ของเศษส่วนของฟังก์ชันดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $A(j-1,j,j+1)=A_{edge}$, $A(p,j-1,j)=A_1$ และ $A(p,j,j+1)=A_2$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) &= \frac{d}{dy}\left(\frac{A_{edge}}{A_1A_2}\right)\\ &= -\frac{A_{edge}}{\left(A_1A_2\right)^2}\left(A_1\frac{dA_2}{dy}+A_2\frac{dA_1}{dy}\right)\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{A_{edge}}{A_1A_2}\right)\\ &= -\frac{A_{edge}}{\left(A_1A_2\right)^2}\left(A_1\frac{dA_2}{dz}+A_2\frac{dA_1}{dz}\right)\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างและอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมทั่วไป

จากสมการที่ (2.18) และ (2.19) สมาชิกแถวที่ i และหลักที่ j ใน $\left[\mathbf{K^e}\right]$ และ $\left[\mathbf{M^e}\right]$ สามารถหาได้ตามสมการที่ (3.15) และ (3.16) ตามลำดับ

$$K_{ij}^{e} = \iint_{e} \left[-p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} - p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z} \right] dydz \quad (3.15)$$

$$M_{ij}^{e} = \iint_{e} \left[s_y s_z q N_i N_j \right] dydz \quad (3.16)$$

ในการคำนวณค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ $\left[\mathbf{K}^{\mathrm{e}}\right]$ และ $\left[\mathbf{M}^{\mathrm{e}}\right]$ ของแต่ละเอลิเมนต์ตามสมการที่ (3.15) และ (3.16) จะเห็นว่าต้องทำการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างเพื่อคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ $\left[\mathbf{M}^{\mathrm{e}}\right]$ และอินทิเกรตอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเพื่อคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ $\left[\mathbf{K}^{\mathrm{e}}\right]$

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างและอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างด้วยเทคนิคการประมาณของซิมป์สัน (Simpson's rule) ในการคำนวณสมาชิกของ $\left[\mathbf{K}^{\mathrm{e}}\right]$ และ $\left[\mathbf{M}^{\mathrm{e}}\right]$ ในสมการที่ (3.15) และ (3.16) จะแทนเคอร์เนลของการอินทิเกรตด้วย $k(y,z)$ และ $m(y,z)$ ตามลำดับ โดย

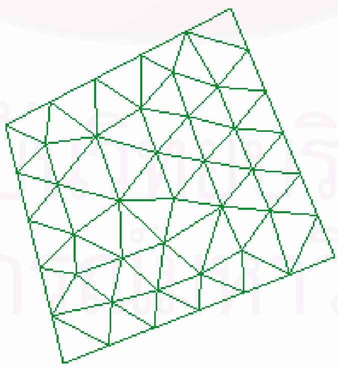
$$k(y,z) = -p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} - p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z} \quad (3.17)$$

$$m(y,z) = s_y s_z q N_i N_j \quad (3.18)$$

สมการที่ (3.15) และ (3.16) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$K_{ij}^{e} = \iint_{e} k(y,z) dydz \quad (3.19)$$

$$M_{ij}^{e} = \iint_{e} m(y,z) dydz \quad (3.20)$$



รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม 1 เอลิเมนต์ ถูกแบ่งให้เป็นรูปสามเหลี่ยมย่อย เพื่อการประมาณค่าของการอินทิเกรตโดยใช้ Simpson's rule

เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมจะถูกแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมย่อยดังรูปที่ 3.5 โดยจำนวนสามเหลี่ยมที่แบ่ง $= m$ และใช้เทคนิคการประมาณตามกฎของซิมป์สัน กับสมการที่ (3.19) และ (3.20) จะได้ว่า

$$K_{ij}^{e} = \sum_{i=1}^{m} k(y_i, z_i) A_i \tag{3.21}$$

$$M_{ij}^{e} = \sum_{i=1}^{m} m(y_i, z_i) A_i \tag{3.22}$$

โดย

$k(y_i, z_i)$ และ $m(y_i, z_i)$ คือ ค่าของ $k(y,z)$ และ $m(y,z)$ ที่จุดเซนทรอยด์ (centroid) ของสามเหลี่ยมย่อยลำดับที่ i

A_i คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยมย่อยลำดับที่ i

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก

4.1 ความนำ

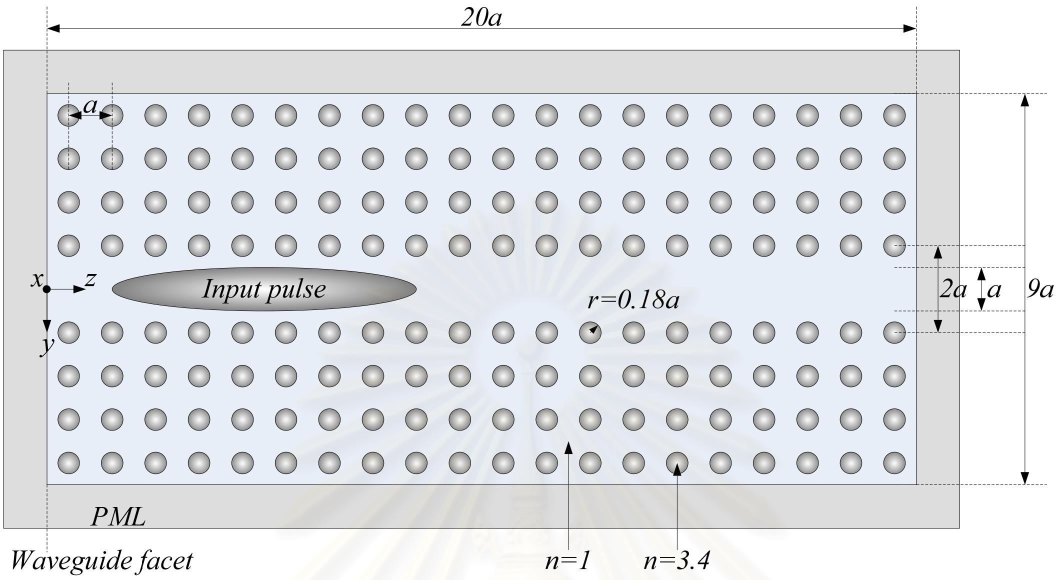
เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึง ผลการคำนวณวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกตัวอย่างที่ถูกออกแบบให้มีรูปร่างลักษณะต่างๆ เช่น แบบท่อตรง (Waveguide) ข้องอรูปตัวแอล (90° bend) และ บีมสปลิทเตอร์ เป็นต้น โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้เทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมซึ่งถูกนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ โดยผลการวิเคราะห์ที่ได้และสมรรถนะในเรื่องระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐานซึ่งถูกนำเสนอโดยงานวิจัยของ M.Koshiba เมื่อปี 2000 และ A.Mekis เมื่อปี 1996

4.2 การตรวจสอบความถูกต้องและสมรรถนะในเรื่องระยะเวลาการคำนวณเบื้องต้นของระเบียบวิธีที่นำเสนอ

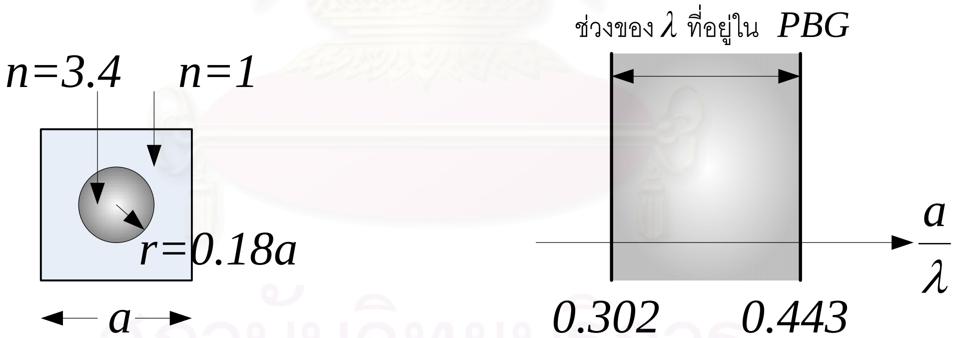
ในงานวิทยานิพนธ์ได้ตรวจสอบความถูกต้องและสมรรถนะในการคำนวณเบื้องต้นของระเบียบวิธีที่นำเสนอโดยการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง (Photonic crystal Waveguide) ดังรูปที่ 4.1 ผลึกโฟโตนิกที่นำมาพิจารณาประกอบไปด้วยแท่งไดอิเล็กทริก (Dielectric Rod) ที่มีดัชนีหักเห $n = 3.4$ ในตัวกลางที่เป็นอากาศมีดัชนีหักเห $n = 1$ ซึ่งมีค่าคงตัวแลตทิซ (Lattice constant) $, a = 0.58\ \mu m$ และรัศมีของแท่งไดอิเล็กทริก $, r = 0.18a$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.2(ก) ผลึกโฟโตนิกดังที่กล่าวมานี้มีแถบช่องความถี่ของคลื่นโมด TE คือ $a/\lambda = 0.302$ ถึง $a/\lambda = 0.443$ [2] ดังรูปที่ 4.2(ข)

สนามไฟฟ้าอินพุท$,\phi(y,z,t=0)$ ในรูปที่ 4.1 มีลักษณะเป็นรูปเกาส์เซียน (Gaussian pulse) ที่มีขนาดมากที่สุด $= A$ ที่จุด(y_0, z_0), ขนาดจุด (spot size) ตามแนวแกน y และ z $= W_y$ และ W_z ตามลำดับและ มีค่าคงตัวการแพร่กระจาย (propagation constant) β แสดงได้ดังสมการที่ (4.1) ความยาวคลื่นของคลื่นพาห์ที่ใช้นำสัญญาณแสงที่งานวิจัยนี้ใช้, $\lambda = 1.5 \mu m$ ซึ่งอยู่ในแถบช่องความถี่ของโมด TE Mode ของผลึกโฟโตนิกของวงจร

$$\phi(y,z,t=0) = A\exp\left[-\left(\frac{y-y_0}{W_y}\right)^2 - \left(\frac{z-z_0}{W_z}\right)^2\right] \times \exp\left[-j\beta(z-z_0)\right] \qquad (4.1)$$



รูปที่ 4.1 วงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง (Photonic Crystal Waveguide) ล้อมรอบด้วย PML

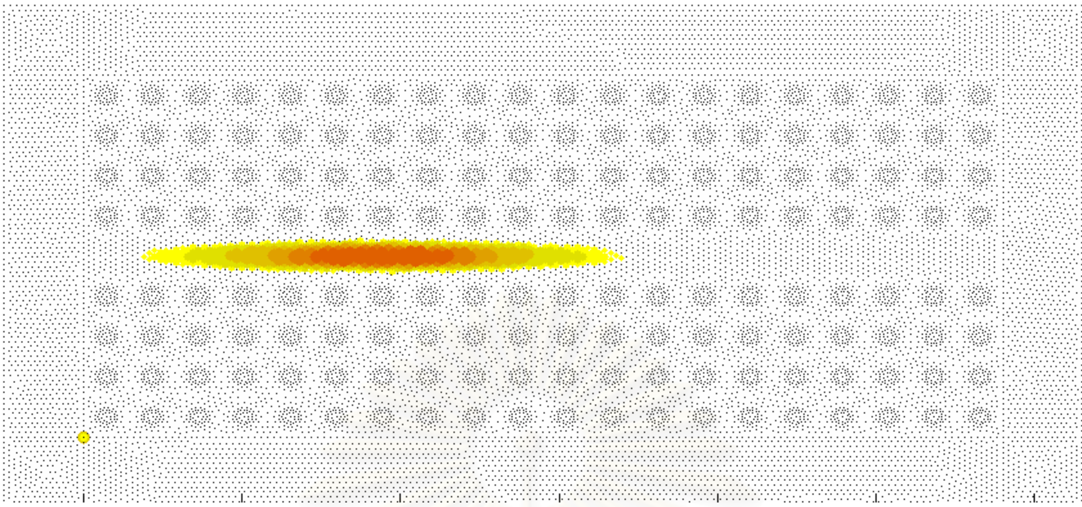


(ก) (ข)

รูปที่ 4.2 (ก) ผลึกโฟโตนิกที่เป็นส่วนแคลดดิ้งของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง

(ข) แถบช่องความถี่โฟโตนิก (Photonic band gap, PBG) ของผลึกโฟโตนิกในรูป (ก)

รูปของสนามไฟฟ้าอินพุทในสมการที่ 4.1 สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง

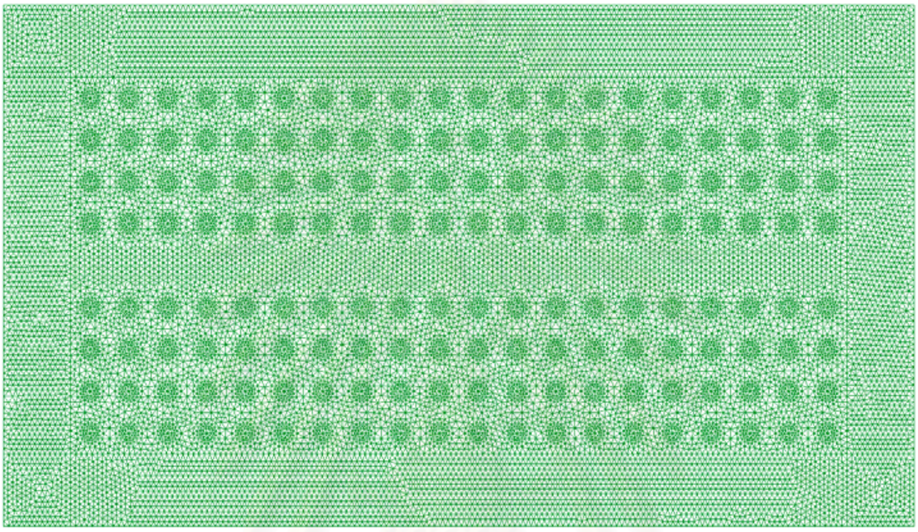
ช่วงระยะเวลาระหว่างจุดเวลา (Time step size), Δt ที่งานวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้คือ 1.0 fs และ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขการแบ่งระยะระหว่างจุดเวลาเพื่อให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีเสถียรภาพในการคำนวณ ของคูแรนท์-เฟดริช-เลวี (Courant-Friedrich-Levy condition) [13]

ในขั้นตอนต่อไป คือการแบ่งโดเมนของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงในรูปที่ 4.1 ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย โดยผู้ทำวิทยานิพนธ์ได้แบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 2 แบบ คือ แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด ดังรูปที่ 4.4 ซึ่งเป็นการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา และ แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ดังรูปที่ 4.5 ซึ่งเป็นการแบ่งเอลิเมนต์แบบที่งานวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอ โดยในการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสมนั้น ผู้ทำวิทยานิพนธ์ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมทั่วไป ในโดเมนที่เป็นอากาศ (air region, $n=1$) และ แบ่งเอลิเมนต์รูป 16 เหลี่ยม (16-gon element) ในโดเมนที่เป็นแท่งไดอิเล็กทริก (dielectric rod, $n=3.4$)

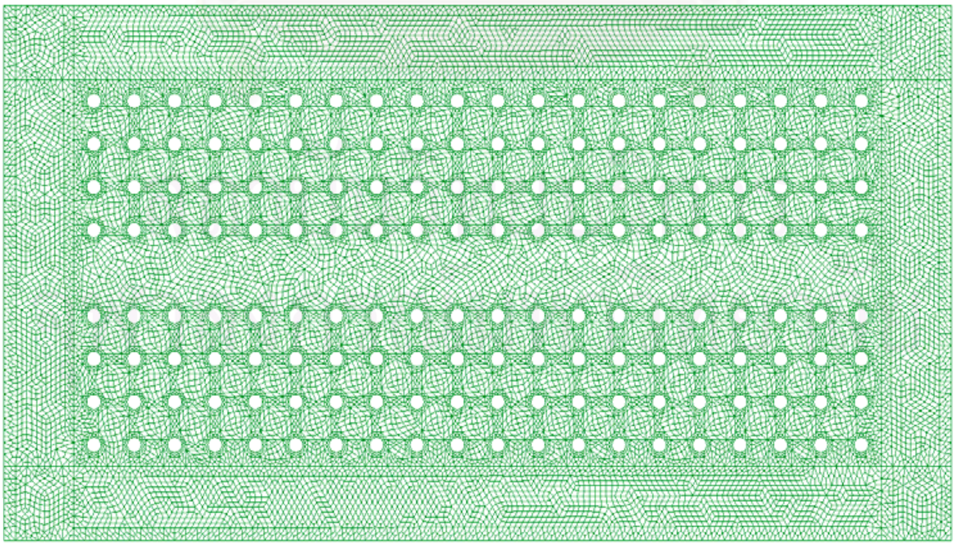
จำนวนโหนด (Nodal point) ที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบแสดงในตารางที่ 4.1 โดยจะเห็นได้ว่า จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในรูปแบบหลายเหลี่ยมผสมที่งานวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอ มีน้อยกว่า การแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบสามเหลี่ยมทั้งหมดมาตรฐาน

ตารางที่ 4.1 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง

การแบ่งเอลิเมนต์	จำนวนโหนด	จำนวนเอลิเมนต์
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.4)	13,464	20,394
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.5)	10,328	10,280

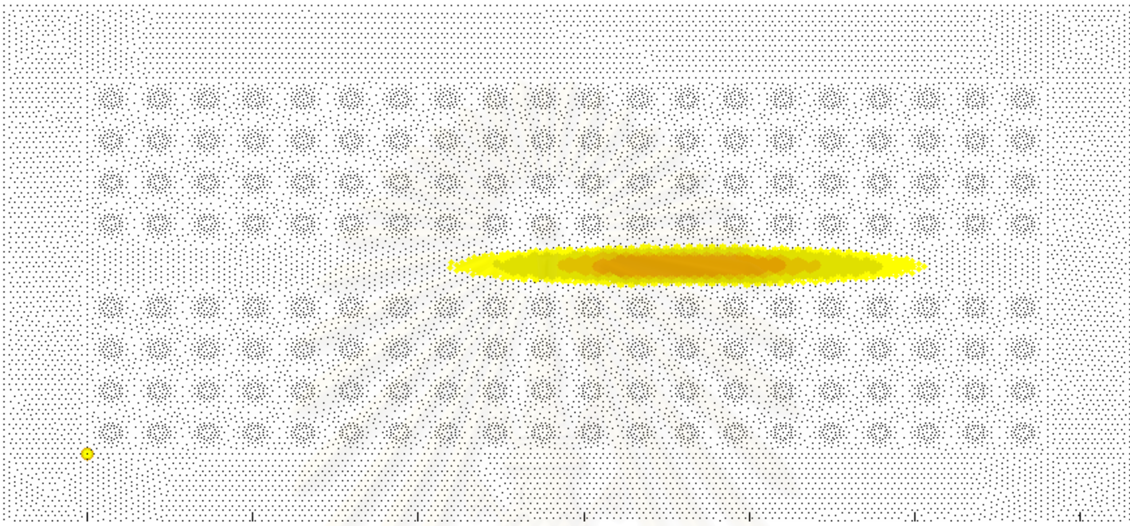


รูปที่ 4.4 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง

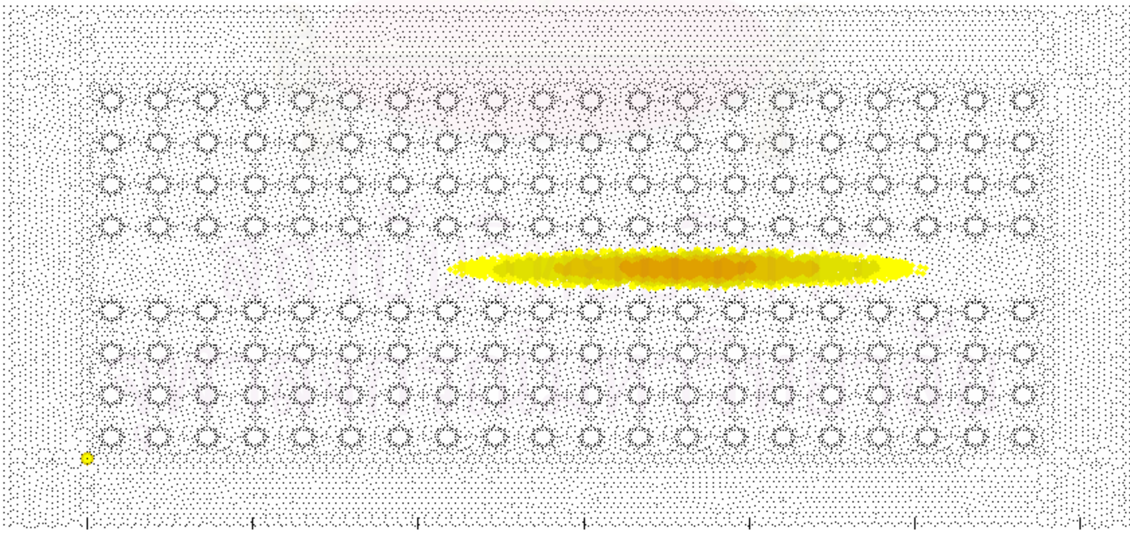


รูปที่ 4.5 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง

รูปที่ 4.6 และ 4.7 แสดงผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าที่เวลาผ่านไป 10 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน (รูปที่ 4.4) และ แบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปที่ 4.5) ซึ่งจะพบว่าผลการวิเคราะห์นั้นมีความใกล้เคียงกัน



รูปที่ 4.6 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน



รูปที่ 4.7 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม

ในตารางที่ 4.2 แสดงระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลาที่ลดลง จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน ซึ่งจะเห็นได้ว่า การวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสมใช้ระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลาน้อยกว่าการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน เนื่องมาจากจำนวนโหนดที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์น้อยกว่าและมีผลทำให้ขนาดของสมการเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลานั้นเล็กกว่า

ตารางที่ 4.2 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐาน ของ ระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง

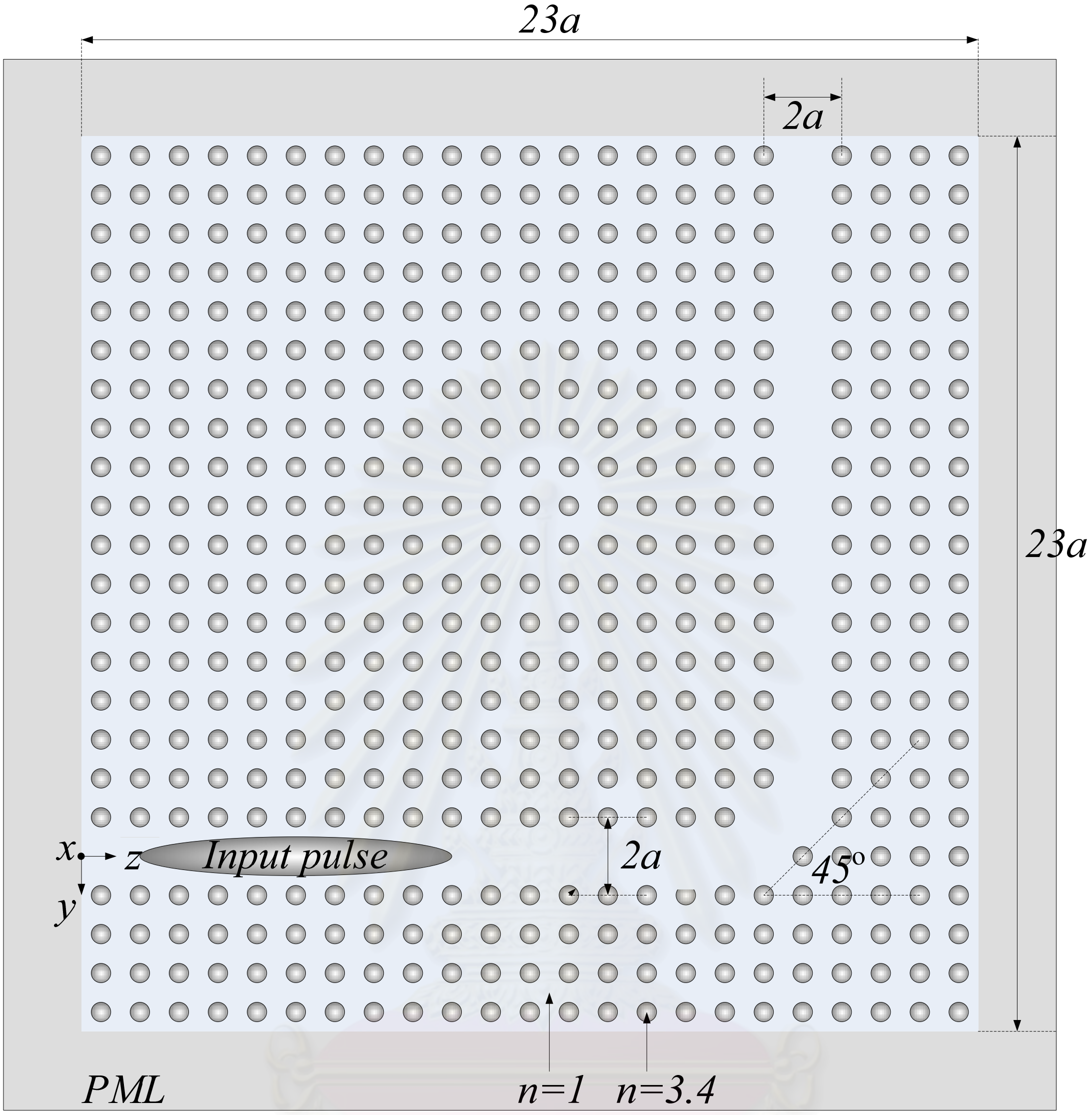
การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**	**ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลง**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.4)	13,464	
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.5)	10,328	38.73%

4.3 การตรวจสอบความถูกต้องและสมรรถนะในเรื่องระยะเวลาในการคำนวณของการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปแบบต่าง ๆ ของระเบียบวิธีที่นำเสนอ

4.3.1 **วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา** (90° curved bend photonic crystal circuit)

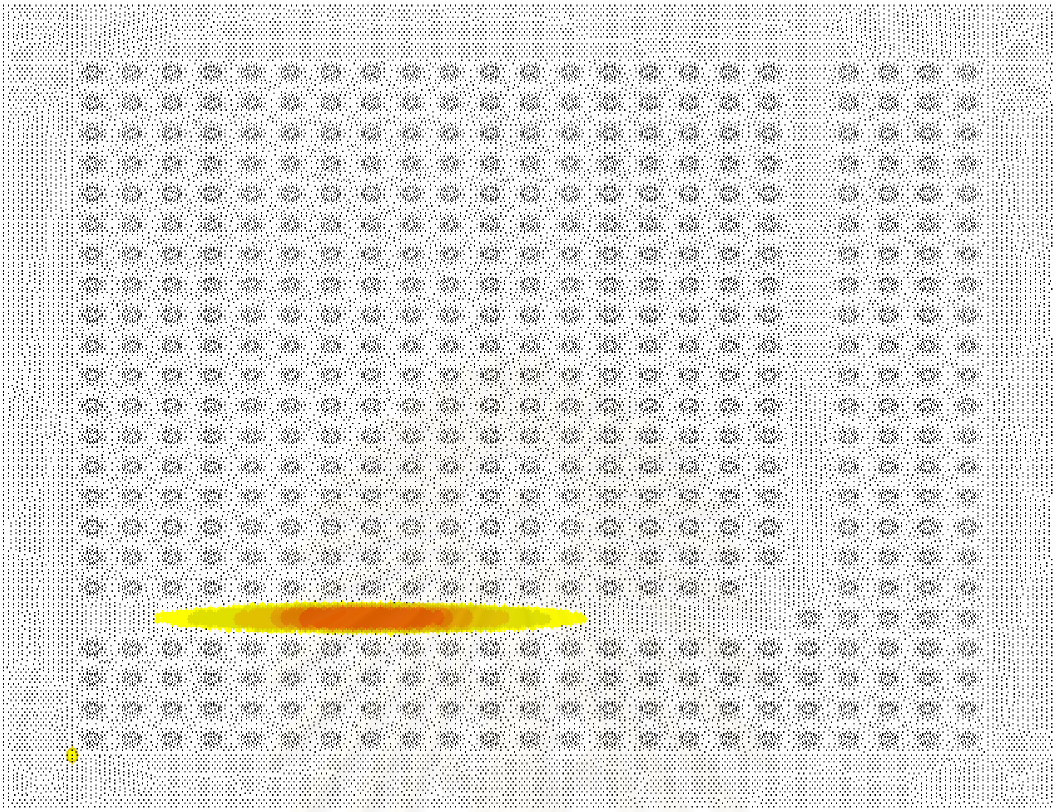
ตัวอย่างของวงจรผลึกโฟโตนิกที่นำมาพิจารณาในหัวข้อนี้ คือ วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา หรือ รูปตัวแอล ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 4.8 โดยทำจากผลึกโฟโตนิกที่เป็นวัสดุเดียวกันกับวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง

วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา ได้ถูกนำเสนอขึ้นในงานวิจัยของ A. Mekis เมื่อปี 1996 [2] โดยที่จุดประสงค์ของวงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา คือ การเลี้ยวเบนคลื่นแสงไปจากแนวเดิม (อินพุทพอร์ท) 90 องศา



รูปที่ 4.8 วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา (90° Curved bend photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML

เงื่อนไขต่างๆที่ใช้ในการคำนวณเช่น สนามไฟฟ้าอินพุท $\phi(y,z,t=0)$ ในรูปที่ 4.8 จะเป็นรูปเกาส์เซียนเหมือนกับสนามไฟฟ้าอินพุทของการคำนวณในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงตามสมการที่ 4.1 เพียงแต่เปลี่ยนตำแหน่งจุด (y_0, z_0) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่สนามไฟฟ้าอินพุทมีขนาดมากที่สุด นอกจากนี้แล้วกำหนดให้ระยะระหว่างจุดเวลาที่ใช้ $\Delta t = 1\ \mathrm{fs}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขการแบ่งระยะระหว่างจุดเวลา เพื่อให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีเสถียรภาพในการคำนวณ ของคูแรนท์-เฟดริช-เลวี และจะใช้เงื่อนไขนี้ตลอดในการคำนวณในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบอื่นๆด้วย สนามไฟฟ้าอินพุทสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.9

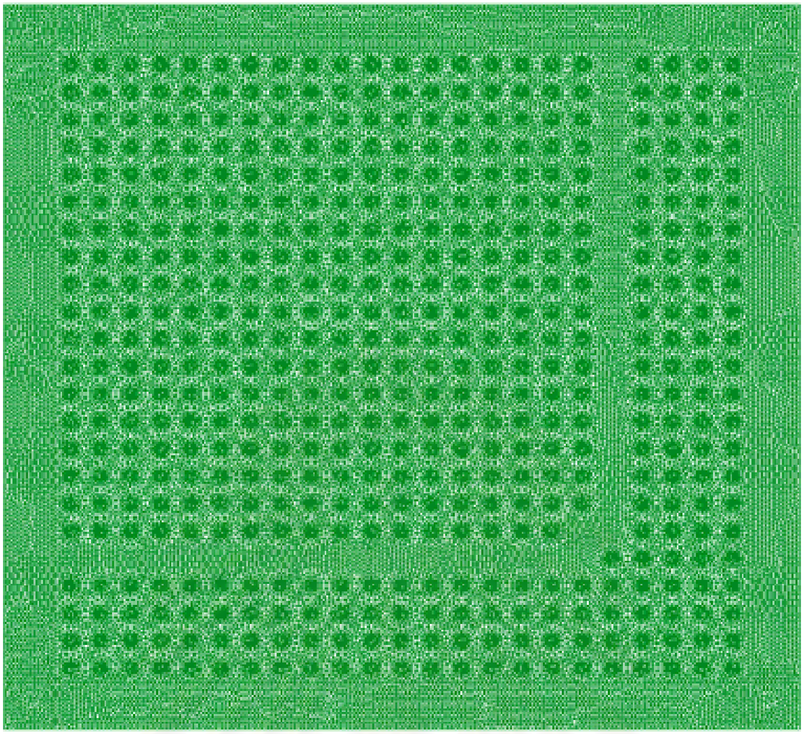


รูปที่ 4.9 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา

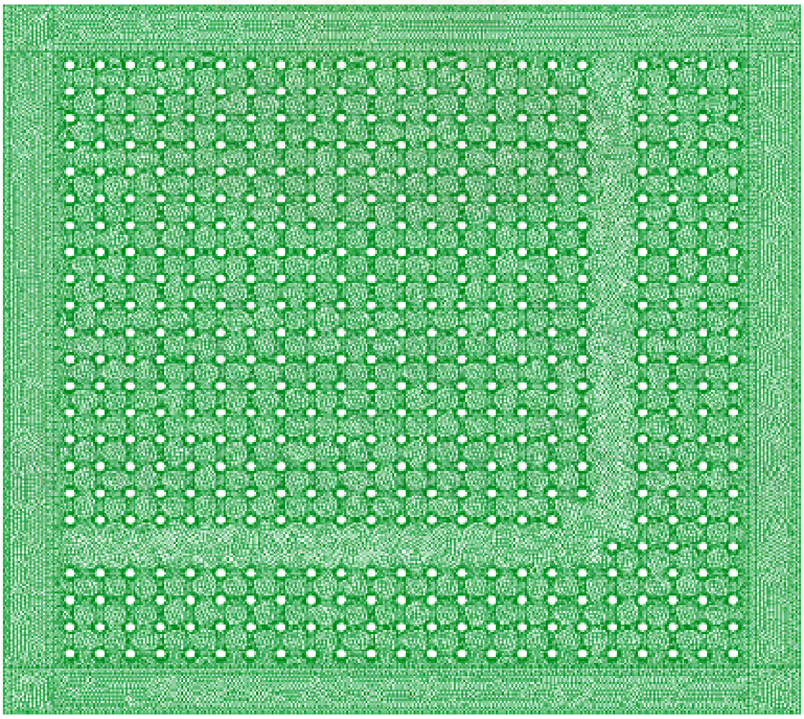
ในทำนองเดียวกับการวิเคราะห์การแพร่กระจายในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง ผู้ทำวิทยานิพนธ์ได้แบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 2 แบบ คือ แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด ดังรูปที่ 4.10 ซึ่งเป็นการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา และ แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ดังรูปที่ 4.11 โดยจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นแสดงได้ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา

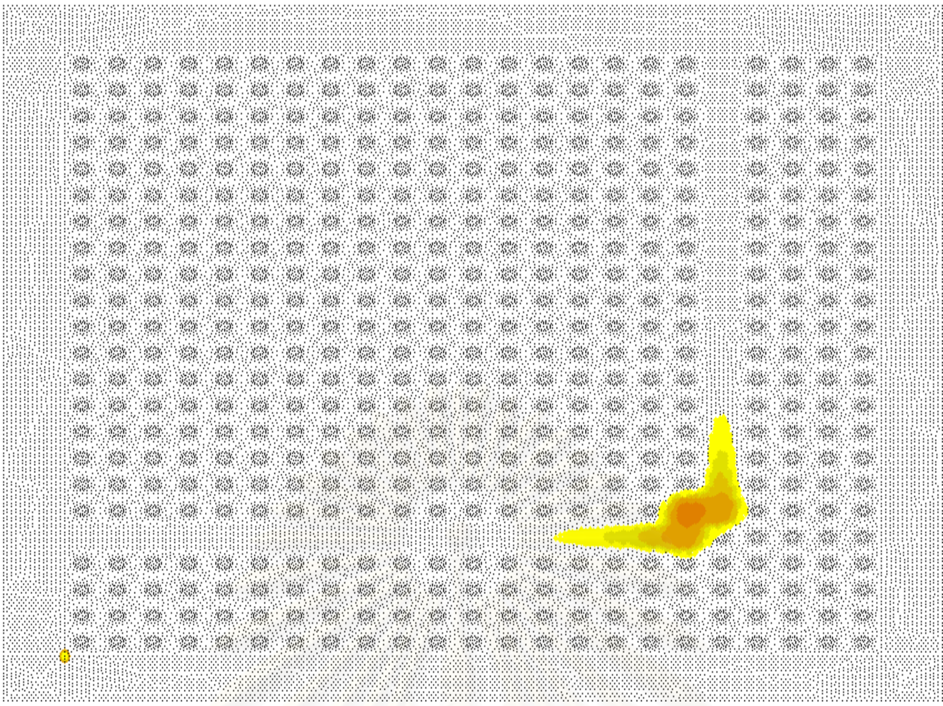
การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**	**จำนวนเอลิเมนต์**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.10)	32,187	50,904
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.11)	25,642	25,400



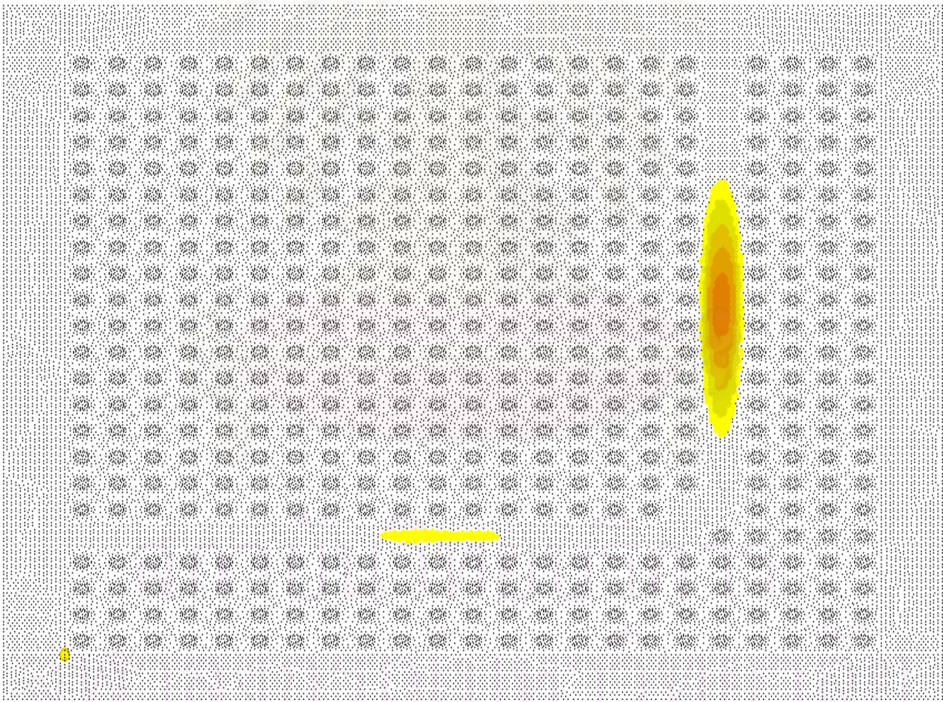
รูปที่ 4.10 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา



รูปที่ 4.11 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา

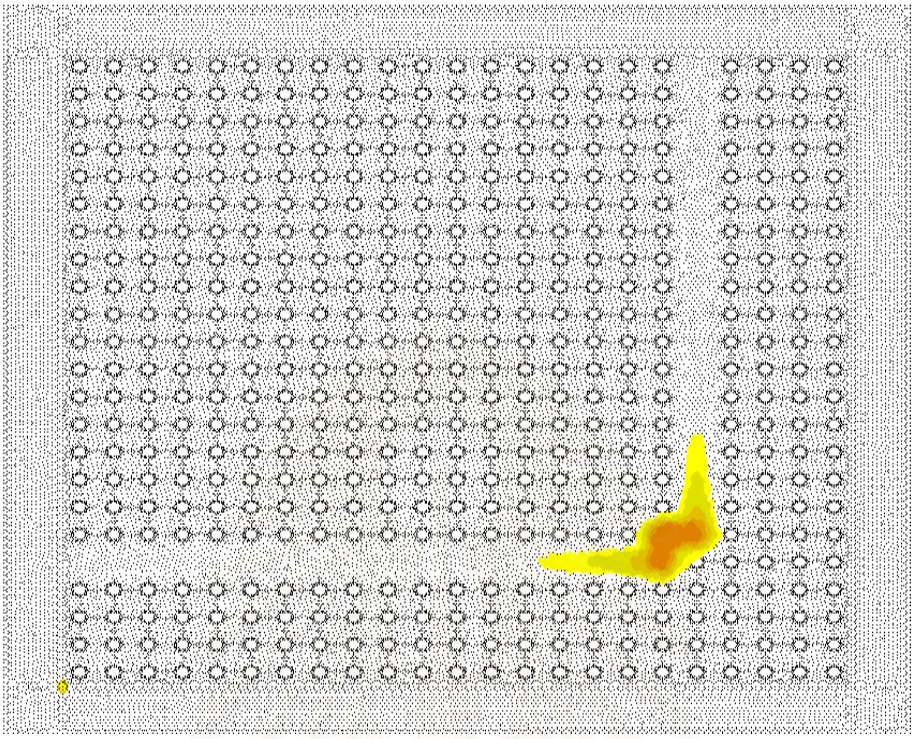


(ก)

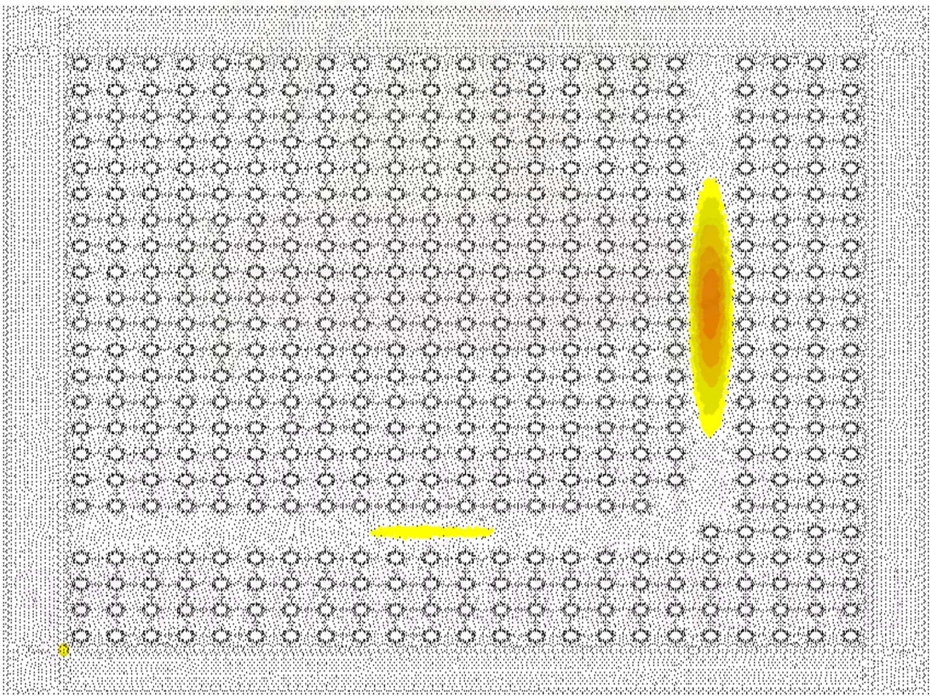


(ข)

รูปที่ 4.12 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs (ก) และ 60 fs (ข)นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน



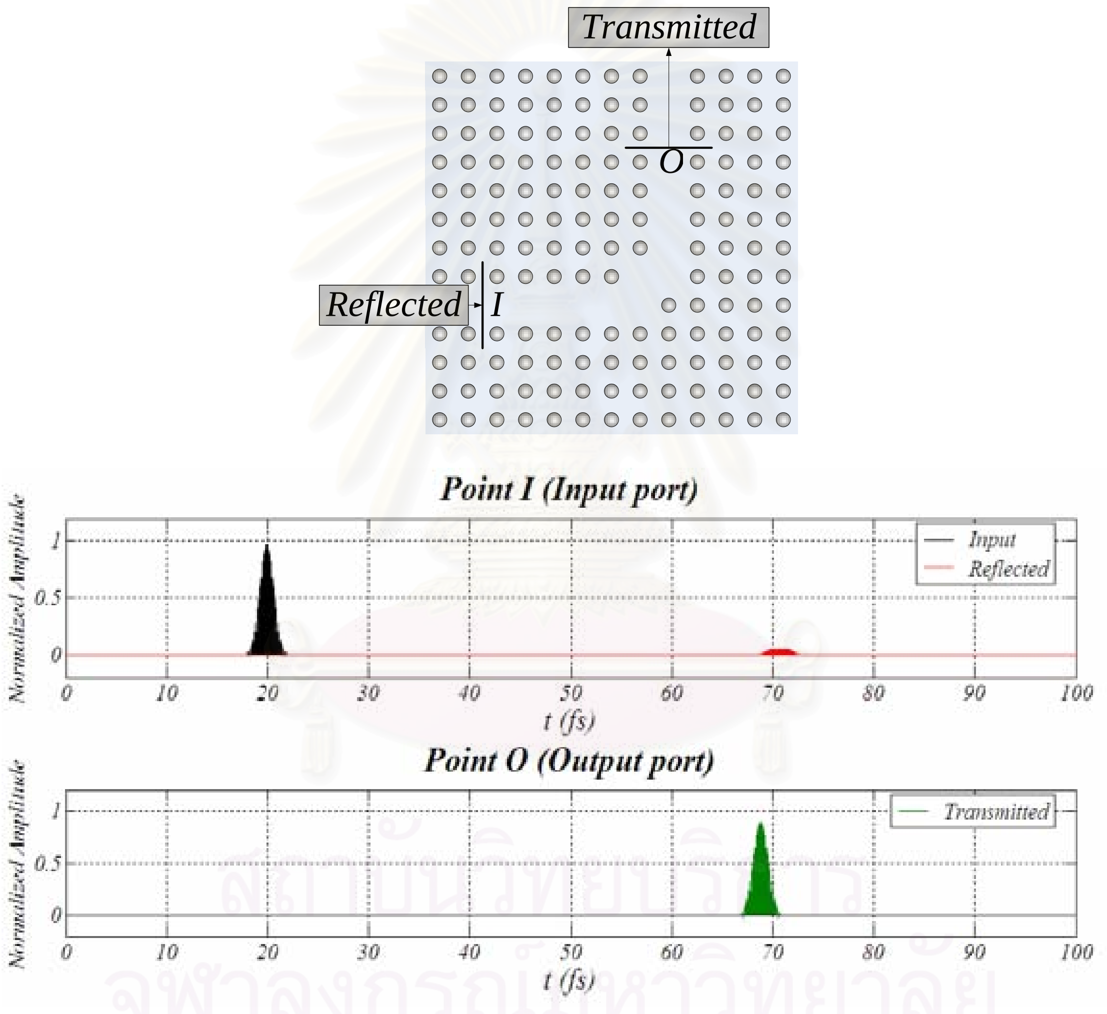
(ก)



(ข)

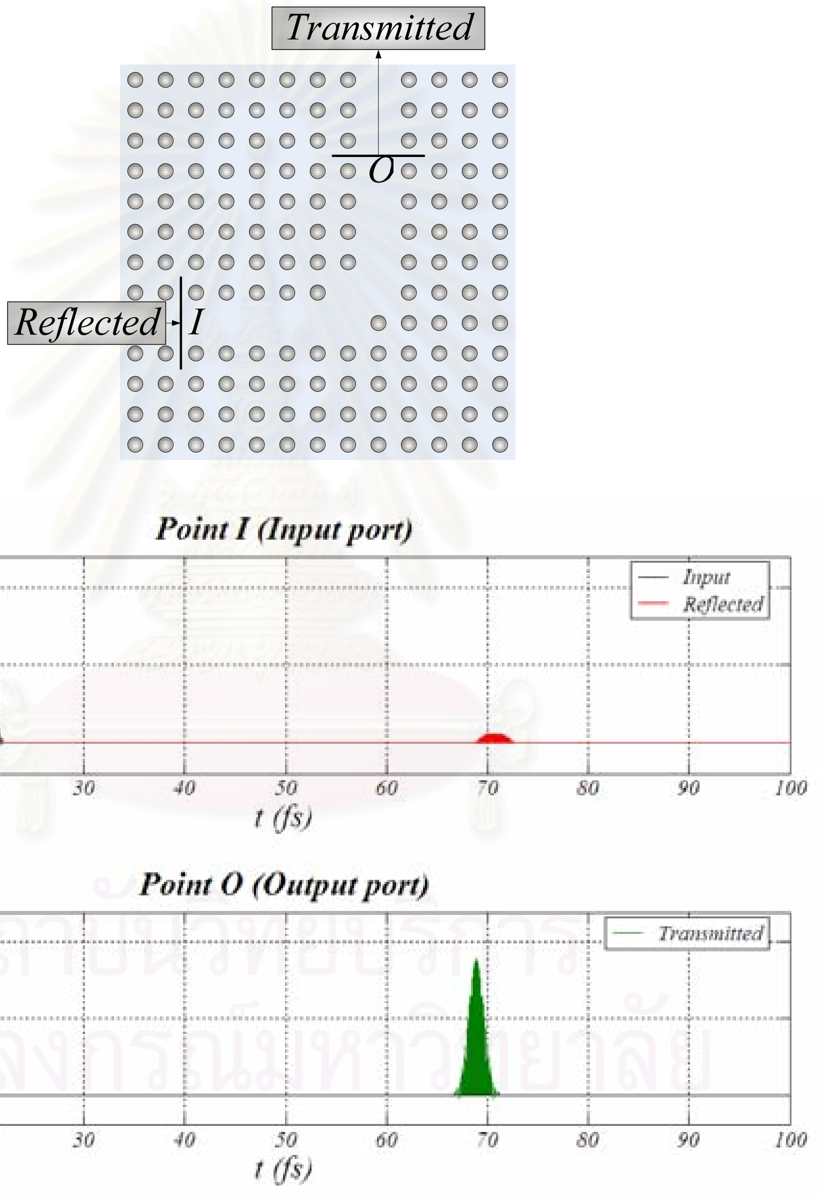
รูปที่ 4.13 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs (ก) และ 60 fs (ข) นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม

รูปที่ 4.12(ก) และ 4.12(ข) แสดงผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าที่เวลาผ่านไป 30 fs และ 60 fs ตามลำดับ นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน (รูปที่ 4.10) ในขณะที่ รูปที่ 4.13(ก) และ 4.13(ข) แสดงผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าที่เวลาผ่านไป 30 fs และ 60 fs ตามลำดับ นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปที่ 4.11) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ ซึ่งจะพบว่าผลการวิเคราะห์นั้นมีความใกล้เคียงกัน



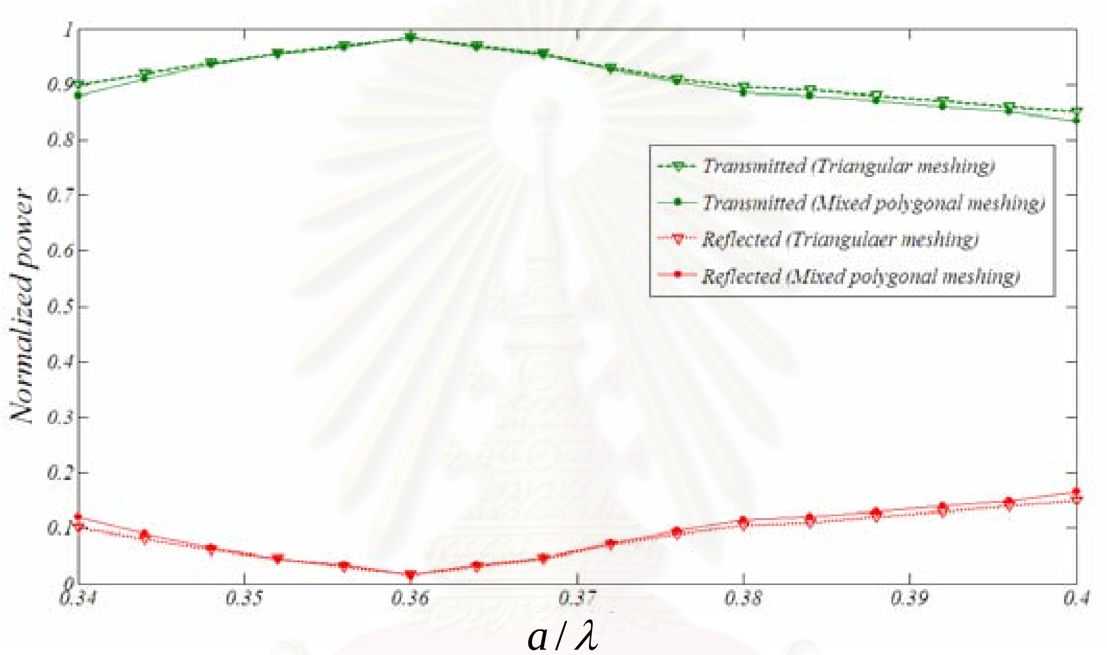
รูปที่ 4.14 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ท ของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

รูปที่ 4.14 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของค่าคงตัวแลตทิช (lattice constant)จากหน้าท่อนำคลื่น (waveguide facet) จุด I ในรูป 4.15 และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของค่าคงตัวแลตทิช จากหน้าท่อนำคลื่น, จุด O ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ และ คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน



รูปที่ 4.15 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ท ของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม

รูปที่ 4.15 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น waveguide facet , จุด I ในรูป) และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของหน้าท่อนำคลื่น จากหน้าท่อนำคลื่น waveguide facet, จุด O ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ และ คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม



รูปที่ 4.16 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ

รูปที่ 4.16 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านไปยังเอาท์พุทพอร์ท (Transmitted) และกำลังของสัญญาณแสงที่สะท้อนกลับมายังอินพุทพอร์ท (Reflected) ของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ โดยพิจารณาความถี่ตั้งแต่ช่วง $a/\lambda = 0.34 - 0.40$ ซึ่งจะพบว่า ในตลอดช่วงความถี่ที่พิจารณา วงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา สามารถส่งผ่านสัญญาณแสงได้ดี มี Return loss กลับมายังอินพุทพอร์ทน้อย และที่ความถี่ $a/\lambda = 0.36$ จะมี Return loss น้อยที่สุด ซึ่งผลการคำนวณสอดคล้องกับงานวิจัยของ A. Mekis เมื่อปี 1996 [2] และ M. Koshiba เมื่อปี 2000 [5]

เมื่อพิจารณาจากผลการคำนวณต่างๆในรูปที่ 4.12-4.16 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม มีความใกล้เคียงกับการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

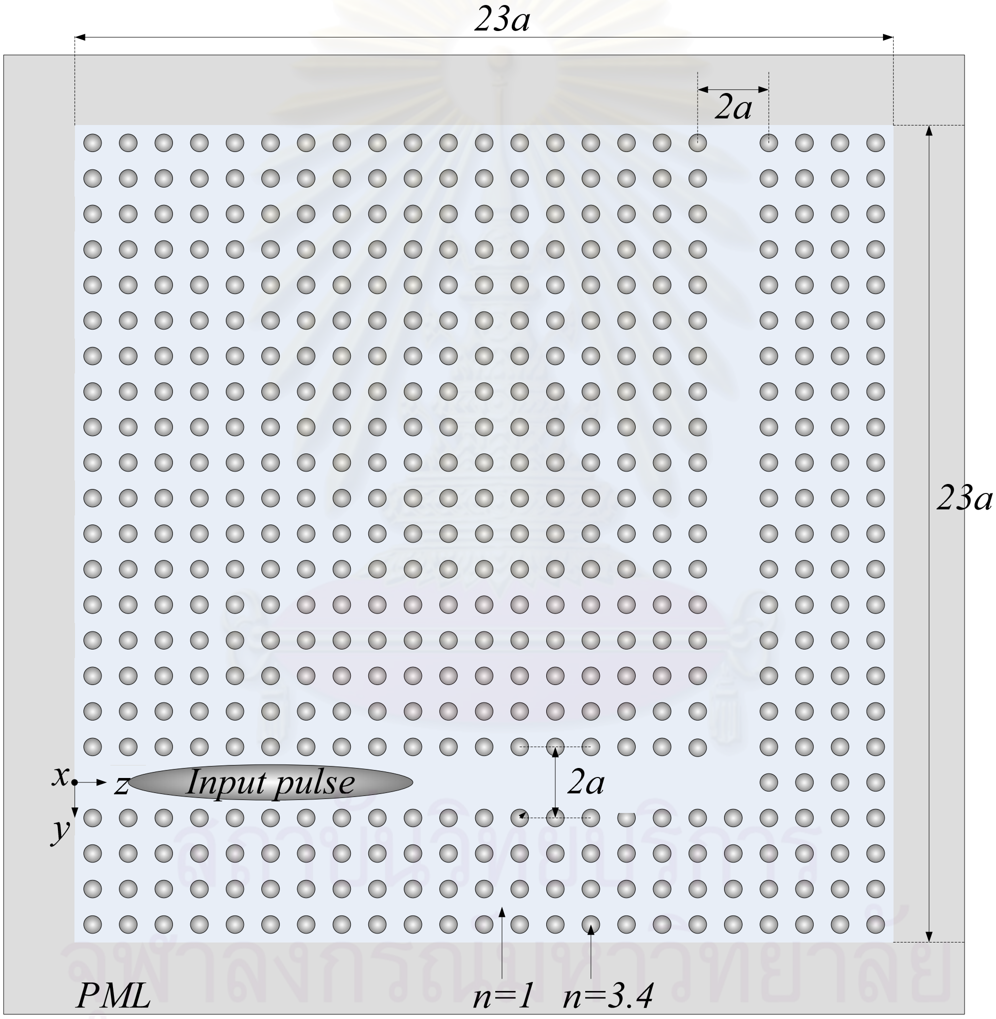
ในตารางที่ 4.4 แสดงระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา ในแต่ละจุดเวลาที่ลดลง จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน ซึ่งจะเห็นได้ว่า การวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสมใช้ระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลาน้อยกว่าการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน เนื่องมาจากจำนวนโหนดที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์น้อยกว่าและมีผลทำให้ขนาดของสมการเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลานั้นเล็กกว่า

ตารางที่ 4.4 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐาน ของ ระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา

การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**	**ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลง**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.10)	32,187	
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.11)	25,642	36.01%

4.3.2 **วงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา** (Zero_curvature 90° bend photonic crystal circuit)

ตัวอย่างของวงจรผลึกโฟโตนิกที่นำมาพิจารณาในหัวข้อนี้ คือ วงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 4.17 โดยทำจากผลึกโฟโตนิกที่เป็นวัสดุเดียวกันกับ วงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง จุดประสงค์ของวงผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา คือ การเลี้ยวเบนคลื่นแสงไปจากแนวเดิม (อินพุทพอร์ท) 90 องศา เช่นเดียวกับ วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา แต่สามารถสร้างวงจรได้ง่ายกว่า

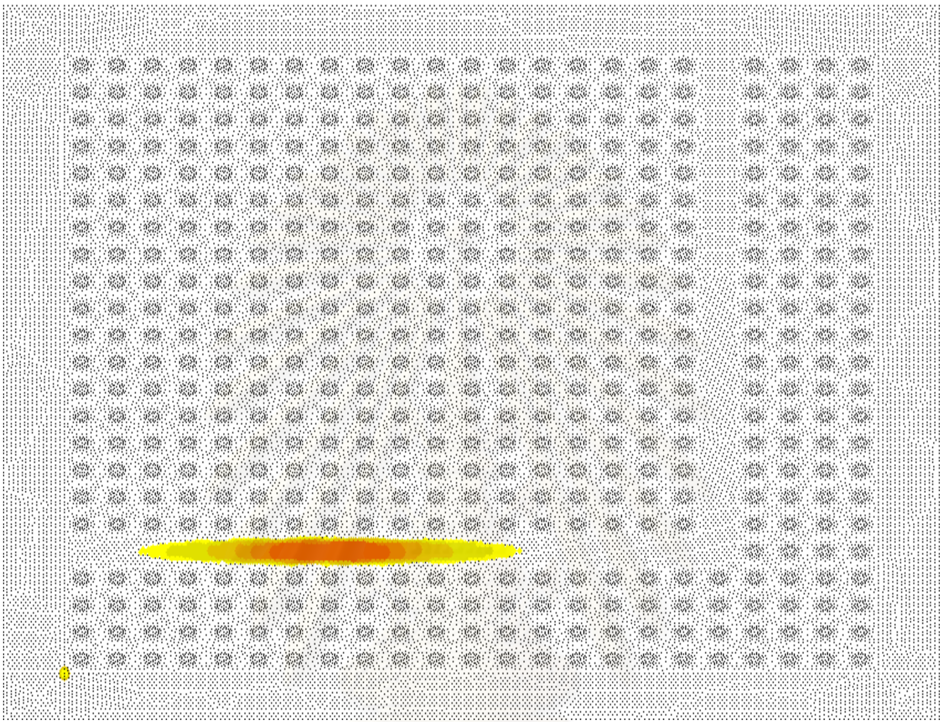


รูปที่ 4.17 วงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา (Zero Curvature 90° bend photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML

เงื่อนไขต่างๆที่ใช้ในการคำนวณเช่น สนามไฟฟ้าอินพุท $\phi(y,z,t=0)$ ในรูปที่ 4.8 จะเป็นรูปเกาส์เซียนเหมือนกับสนามไฟฟ้าอินพุทของการคำนวณในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงตามสมการที่ 4.1 เพียงแต่เปลี่ยนตำแหน่งจุด (y_0,z_0) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่สนามไฟฟ้าอินพุทมีขนาด

มากที่สุด นอกจากนี้แล้วกำหนดให้ระยะระหว่างจุดเวลาที่ใช้ $\Delta t = 1 \text{ fs}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขการแบ่งระยะระหว่างจุดเวลาเพื่อให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีเสถียรภาพในการคำนวณ ของคูแรนท์-เฟดริช-เลวี

สนามไฟฟ้าอินพุทสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.18

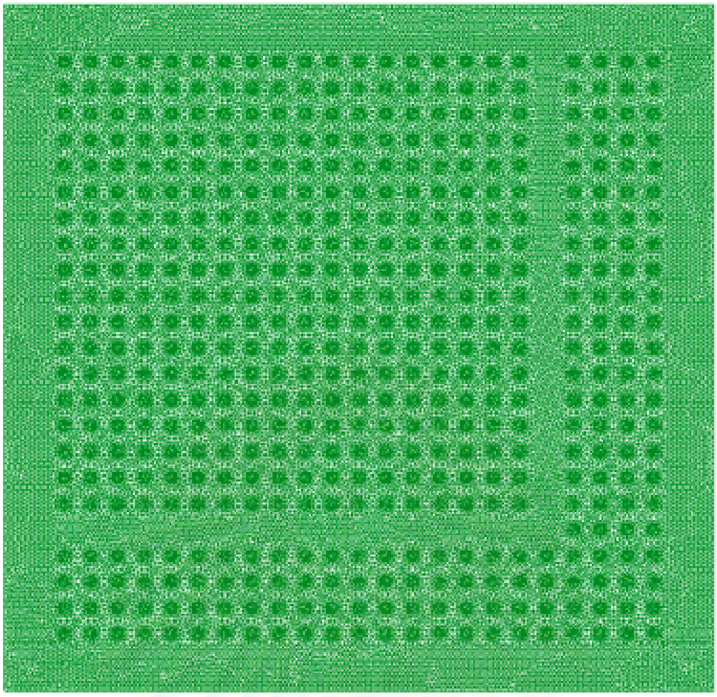


รูปที่ 4.18 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิก แบบ โค้งงอ 90 องศา

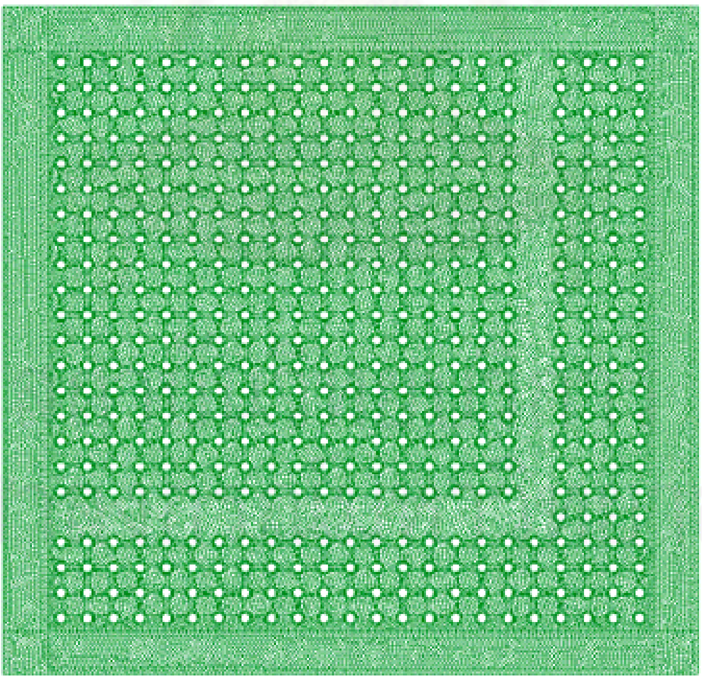
ผู้ทำวิทยานิพนธ์ได้แบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 2 แบบ คือ แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด ดังรูปที่ 4.19 ซึ่งเป็นการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา และแบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ดังรูปที่ 4.20 โดยจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นแสดงได้ดังตารางที่ 4.5

ตารางที่ 4.5 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา

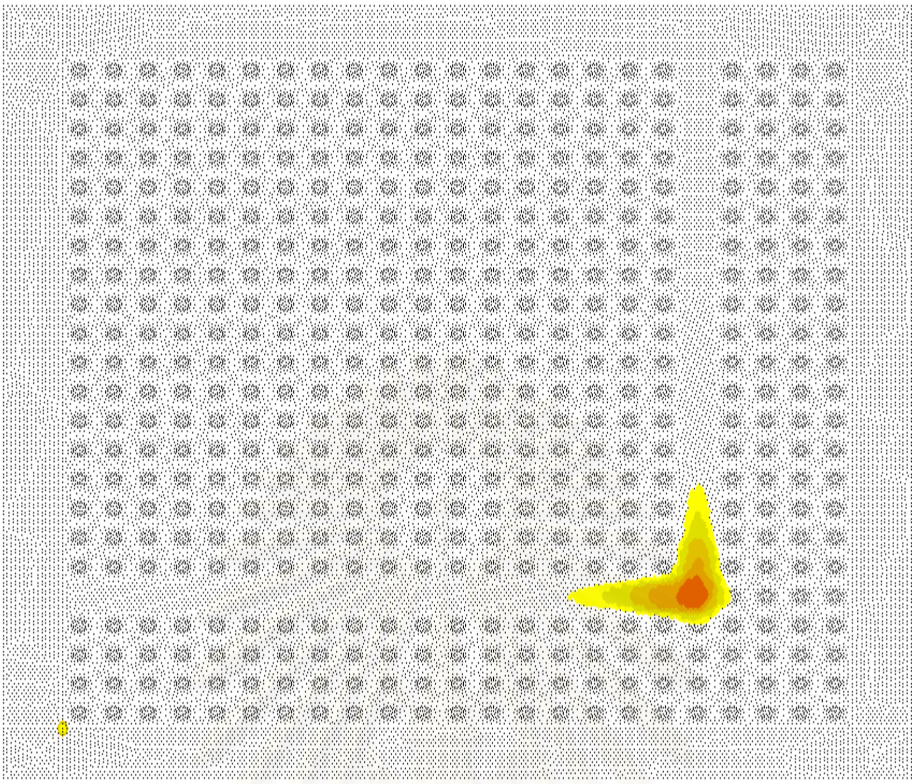
การแบ่งเอลิเมนต์	จำนวนโหนด	จำนวนเอลิเมนต์
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.19)	32,204	50,904
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.20)	25,656	25,418



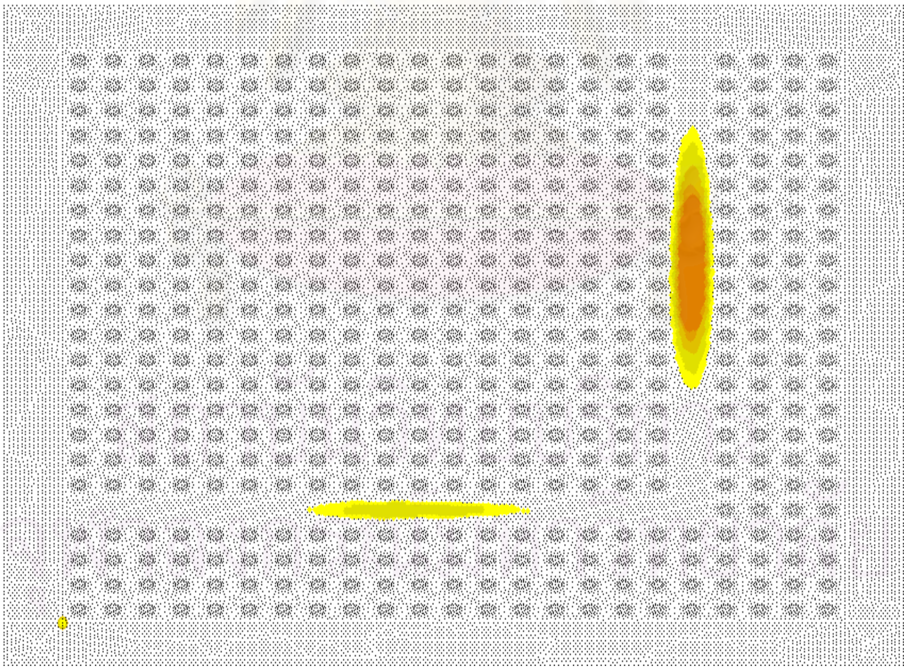
รูปที่ 4.19 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา



รูปที่ 4.20 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา

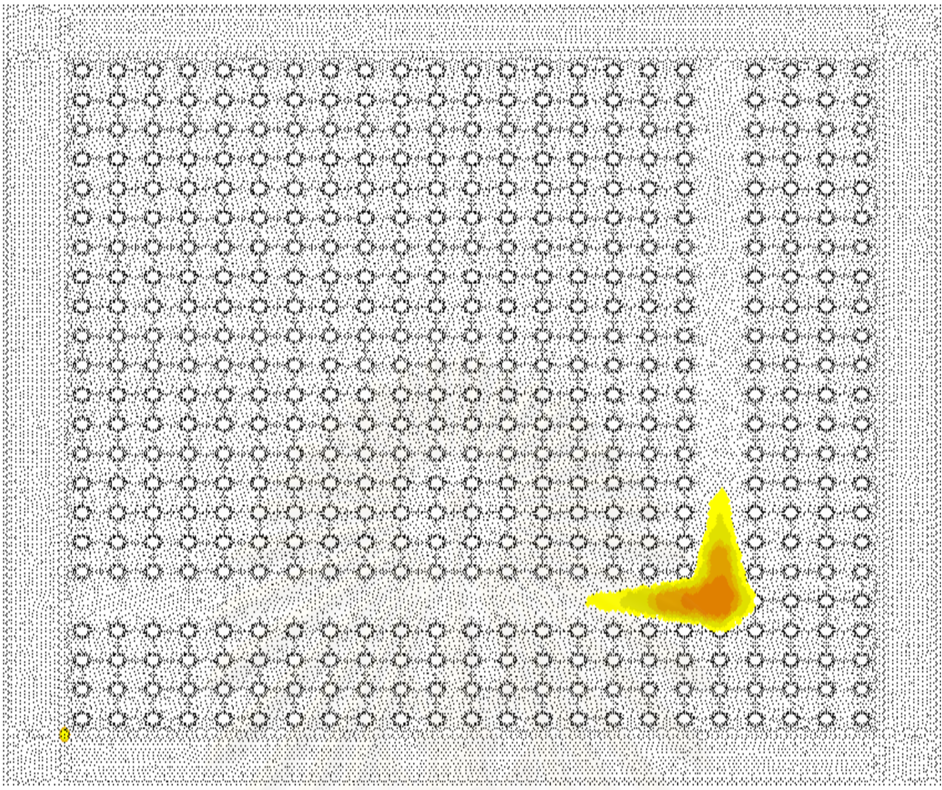


(ก)

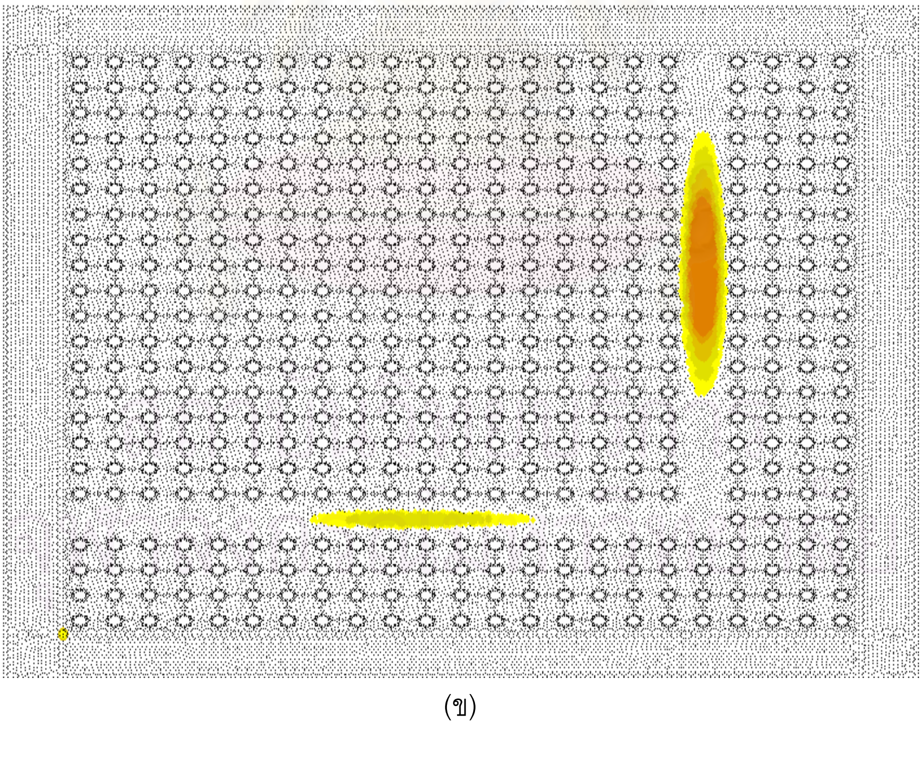


(ข)

รูปที่ 4.21 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs (ก) และ 60 fs(ข) นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม



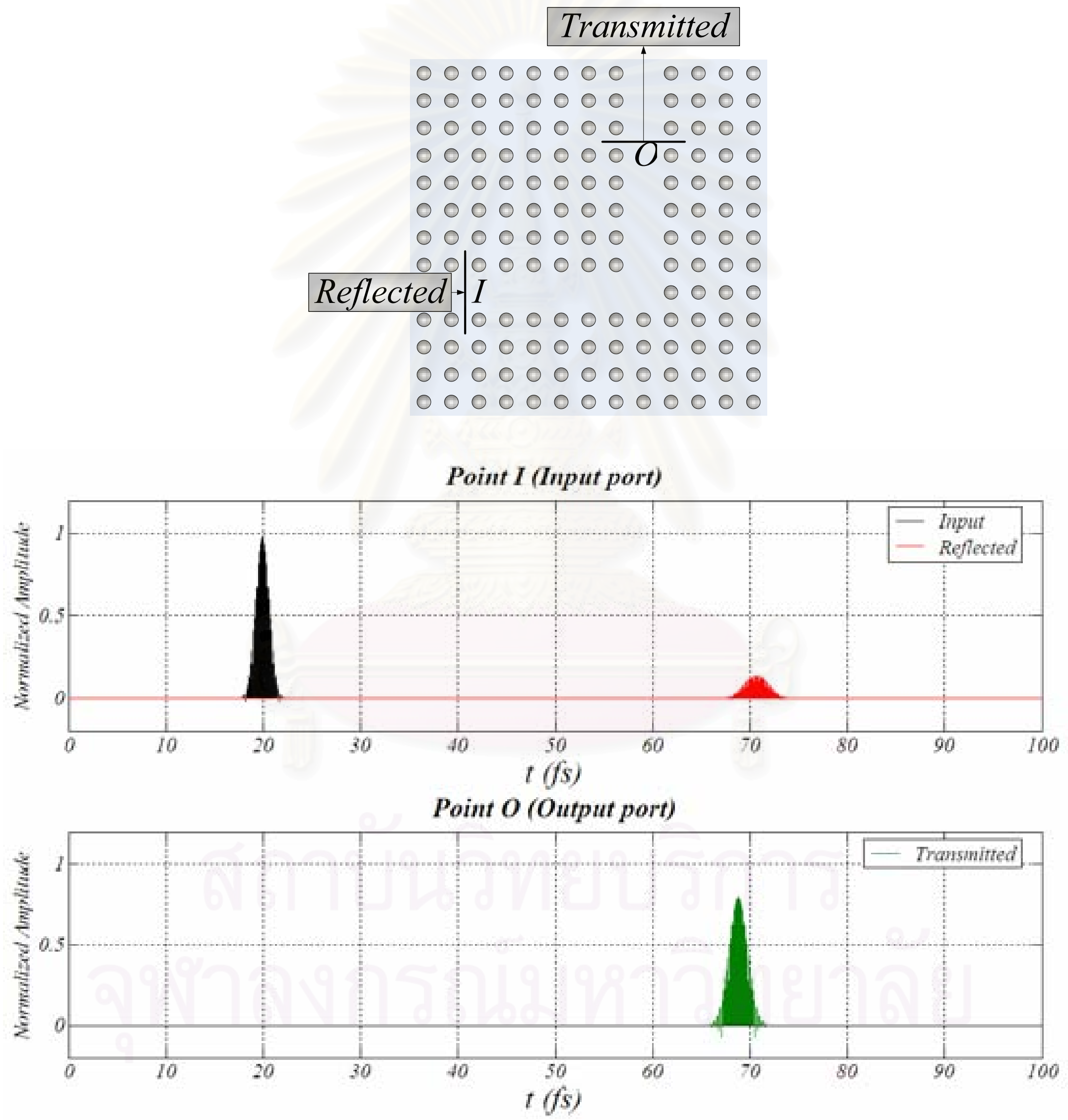
(ก)



(ข)

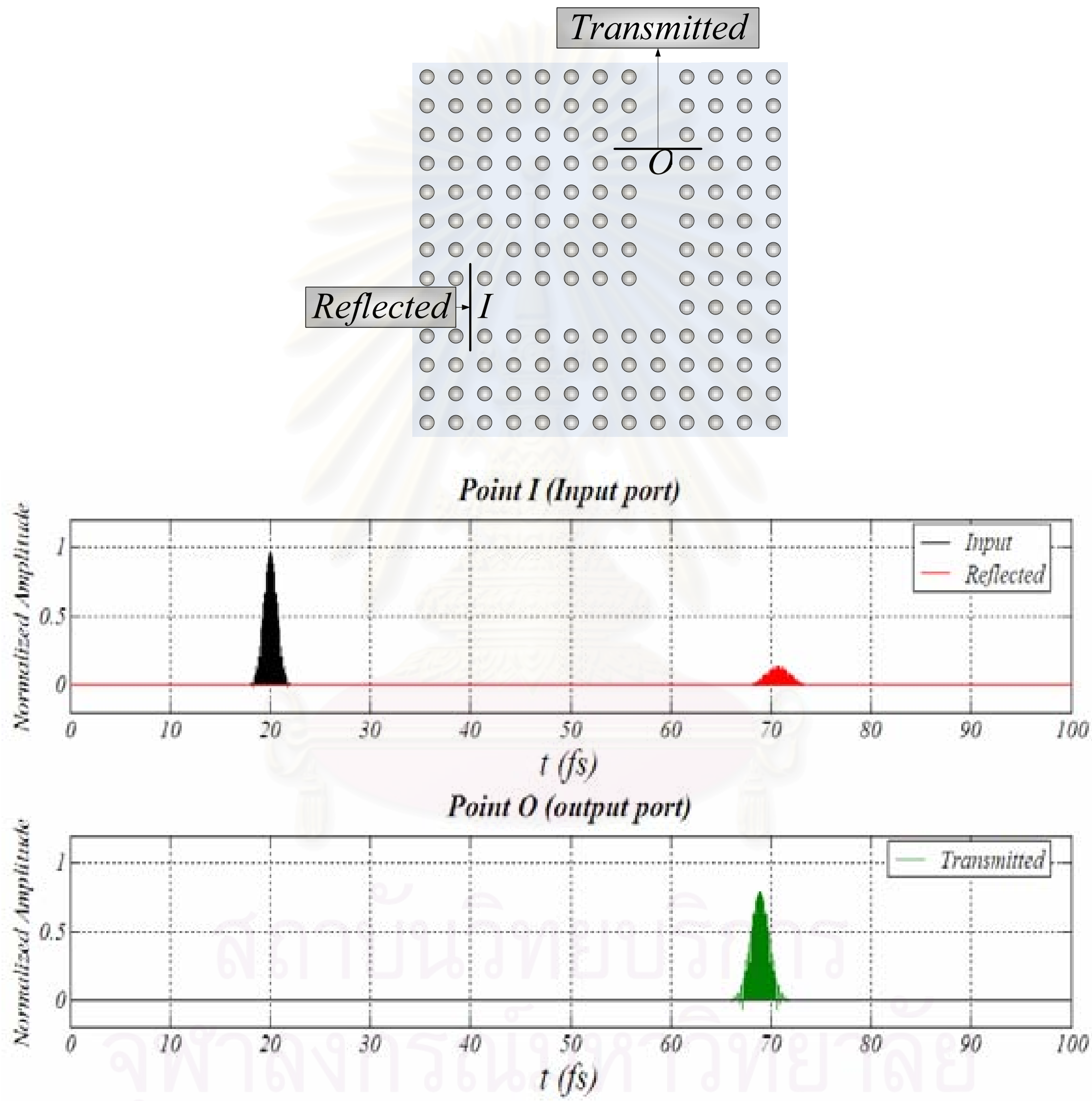
รูปที่ 4.22 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ระยะเวลา 30 fs (ก) และ 60 fs(ข) นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม

รูปที่ 4.21(ก) และ 4.21(ข) แสดงผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าที่เวลาผ่านไป 30 fs และ 60 fs ตามลำดับ นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน (รูปที่ 4.19) ในขณะที่ รูปที่ 4.22(ก) และ 4.22(ข) แสดงผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าที่เวลาผ่านไป 30 fs และ 60 fs ตามลำดับ นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปที่ 4.20) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ ซึ่งจะพบว่าผลการวิเคราะห์นั้นมีความใกล้เคียงกัน



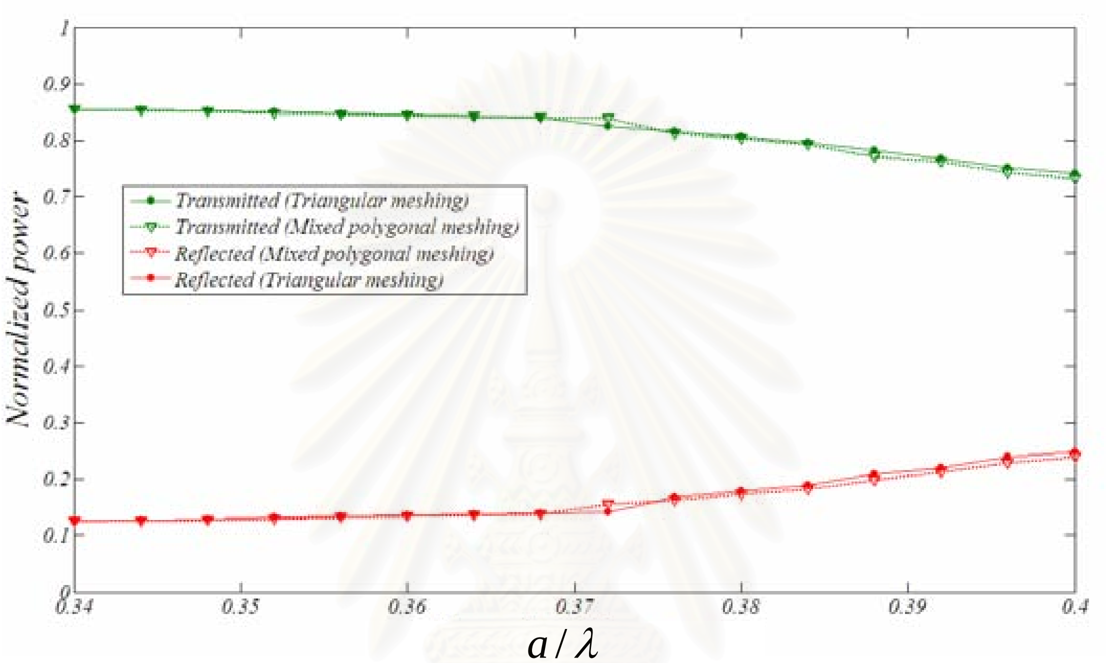
รูปที่ 4.23 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

รูปที่ 4.23 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น, จุด I ในรูป) และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น, จุด O ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ และคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน



รูปที่ 4.24 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม

รูปที่ 4.24 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 100 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น, จุด I ในรูป) และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จาก หน้าท่อนำคลื่น, จุด O ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ และ คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม



รูปที่ 4.25 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ

รูปที่ 4.25 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านไปยังเอาท์พุทพอร์ท (Transmitted) และกำลังของสัญญาณแสงที่สะท้อนกลับมายังอินพุทพอร์ท (Reflected) ของวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ โดยพิจารณาแต่ช่วงความถี่ $a/\lambda = 0.34 - 0.40$ ซึ่งจะพบว่า ภายในช่วงความถี่ที่พิจารณานั้น วงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา จะมี Return loss ที่สูงกว่า วงจรผลึกโฟโตนิกรูปโค้งงอ 90 องศา และ จะเห็นได้ว่าที่ความถี่สูงขึ้น Return loss กลับมายังอินพุทพอร์ทก็จะสูงขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ M.Koshiba เมื่อปี 2000 [5]

เมื่อพิจารณาจากผลการคำนวณต่างๆ ในรูปที่ 4.21-4.25 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม มีความใกล้เคียงกับการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

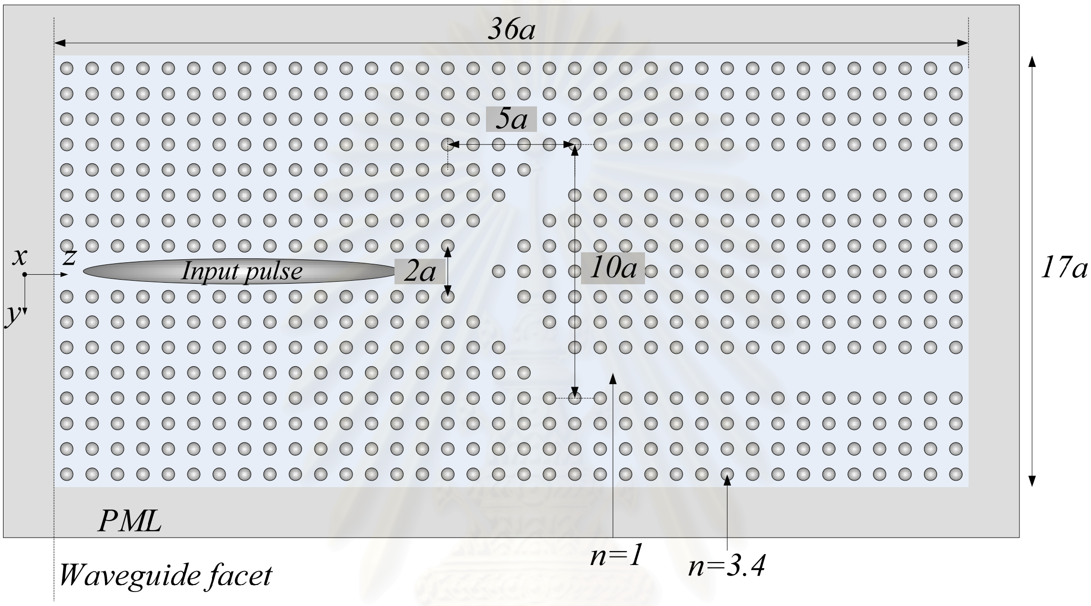
ในตารางที่ 4.6 แสดงระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา ในแต่ละจุดเวลาที่ลดลง จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน ซึ่งจะเห็นได้ว่า การวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสมใช้ระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลาน้อยกว่าการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน เนื่องมาจากจำนวนโหนดที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์น้อยกว่าและมีผลทำให้ขนาดของสมการเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลานั้นเล็กกว่า

ตารางที่ 4.6 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐาน ของ ระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกรูปหักงอ 90 องศา

การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**	**ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลง**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.19)	32,204	
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.20)	25,656	36.424%

4.3.3 **วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว** Y (Y-Branch photonic crystal circuit)

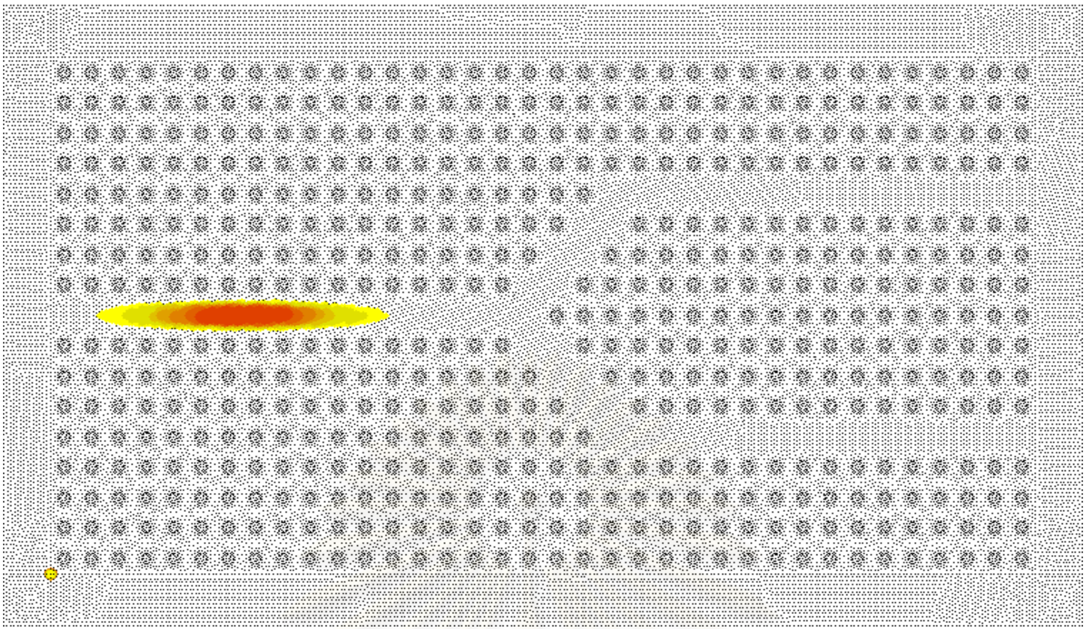
ตัวอย่างของวงจรผลึกโฟโตนิกที่นำมาพิจารณาในหัวข้อนี้ คือ วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัววาย ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 4.26 โดยทำจากผลึกโฟโตนิกที่เป็นวัสดุเดียวกันกับ วงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง จุดประสงค์ของวงผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y คือ การแบ่งกำลังของสัญญาณแสงออกเป็น 2 ส่วน ทางเอาท์พุทพอร์ททั้งสอง



รูปที่ 4.26 วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y (Y-Branch Photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML

เงื่อนไขต่างๆที่ใช้ในการคำนวณเช่น สนามไฟฟ้าอินพุท $\phi(y,z,t=0)$ ในรูปที่ 4.26 จะเป็นรูปเกาส์เซียนเหมือนกับสนามไฟฟ้าอินพุทของการคำนวณในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง ตามสมการที่ 4.1 เพียงแต่เปลี่ยนตำแหน่งจุด (y_0, z_0) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่สนามไฟฟ้าอินพุทมีขนาดมากที่สุด นอกจากนี้แล้วกำหนดให้ระยะระหว่างจุดเวลาที่ใช้ $\Delta t = 1\ \mathrm{fs}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขการแบ่งระยะระหว่างจุดเวลาเพื่อให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีเสถียรภาพในการคำนวณ ของคูแรนท์-เฟดริช-เลวี

สนามไฟฟ้าอินพุทสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.27

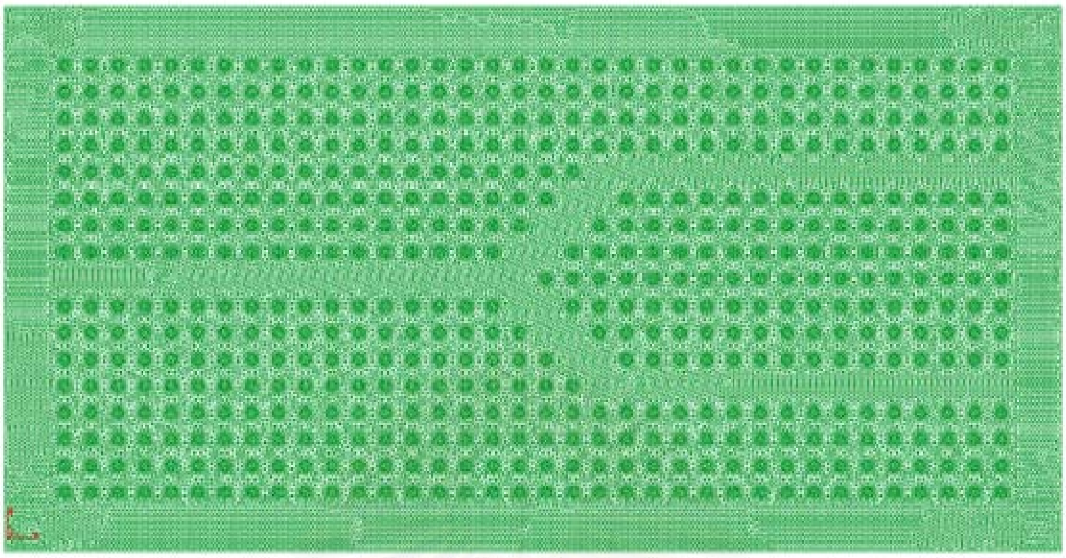


รูปที่ 4.27 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y

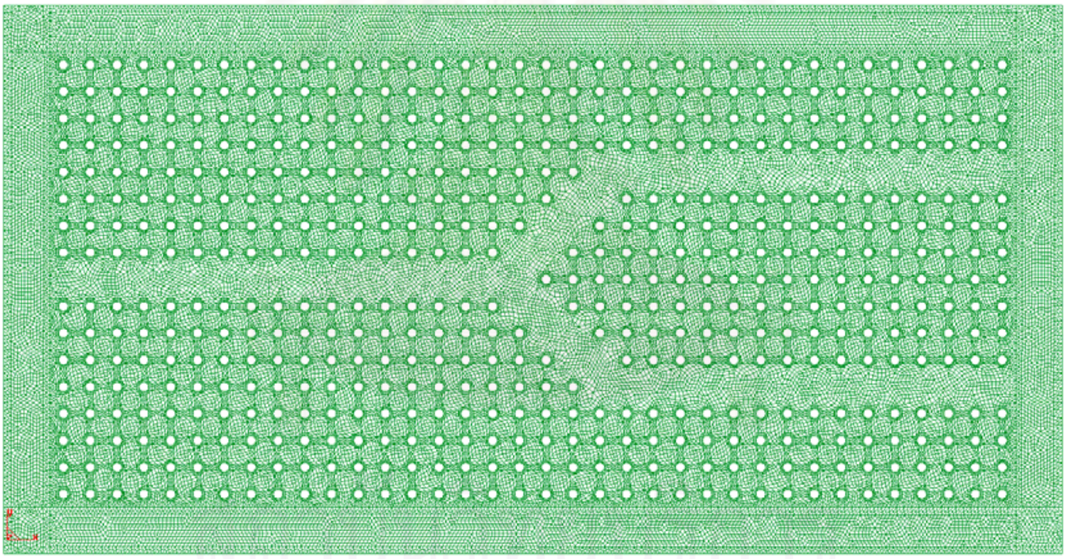
ผู้ทำวิทยานิพนธ์ได้แบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 2 แบบ คือ แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด ดังรูปที่ 4.28 ซึ่งเป็นการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา และแบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ดังรูปที่ 4.29 โดยจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นแสดงได้ดังตารางที่ 4.7

ตารางที่ 4.7 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y

การแบ่งเอลิเมนต์	จำนวนโหนด	จำนวนเอลิเมนต์
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.28)	38,822	58,333
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.29)	29,357	29,283

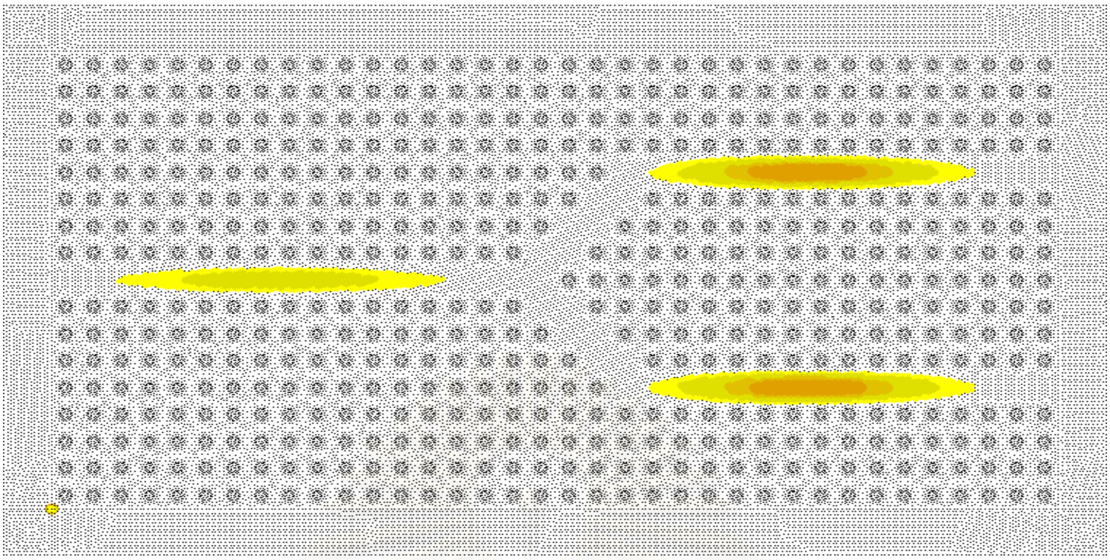


รูปที่ 4.28 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y

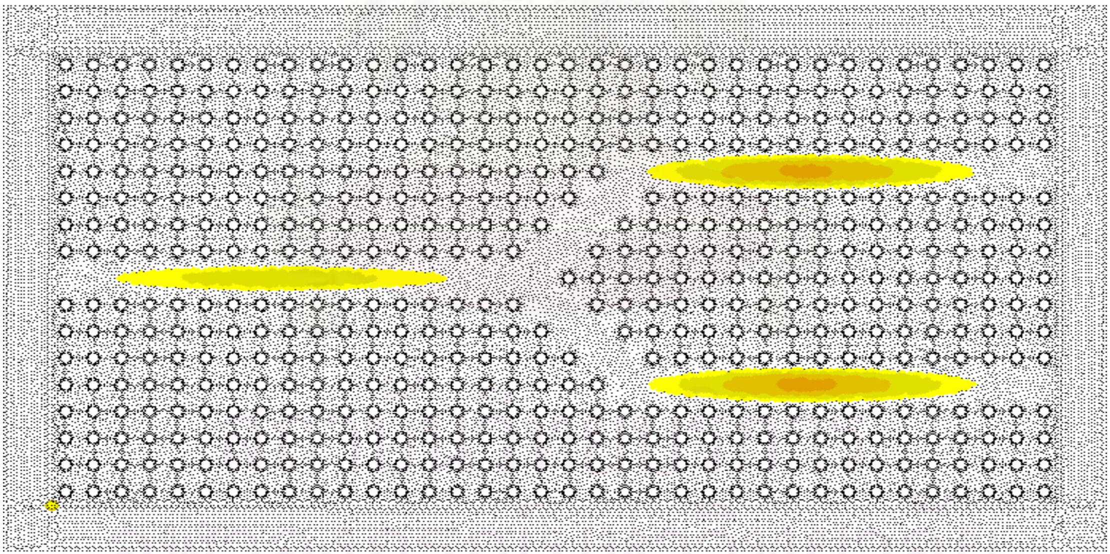


รูปที่ 4.29 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y

รูปที่ 4.30 และ 4.31 แสดงผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าที่เวลาผ่านไป 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน (รูปที่ 4.28) และ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปที่ 4.29) ตามลำดับ โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ ซึ่งจะพบว่าผลการวิเคราะห์นั้นมีความใกล้เคียงกัน



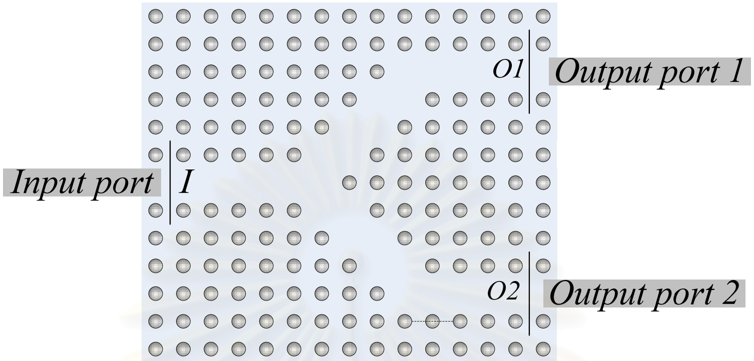
รูปที่ 4.30 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

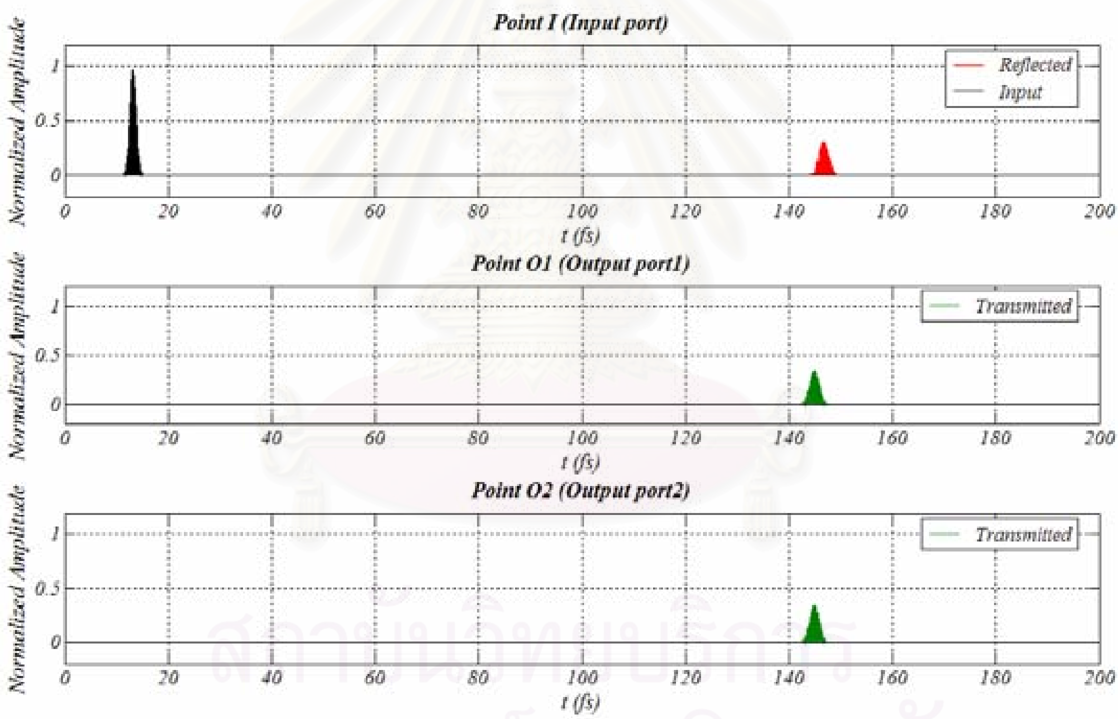


รูปที่ 4.31 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม

รูปที่ 4.32 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของ ค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่นด้านอินพุทพอร์ท, จุด I ในรูป), ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 10 เท่าของค่าคงตัวแลต

ทิช จากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ททที่ 1, จุด O1 ในรูป) และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 10 เท่าของค่าคงตัวแลตทิช จากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ททที่ 2, จุด O2 ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

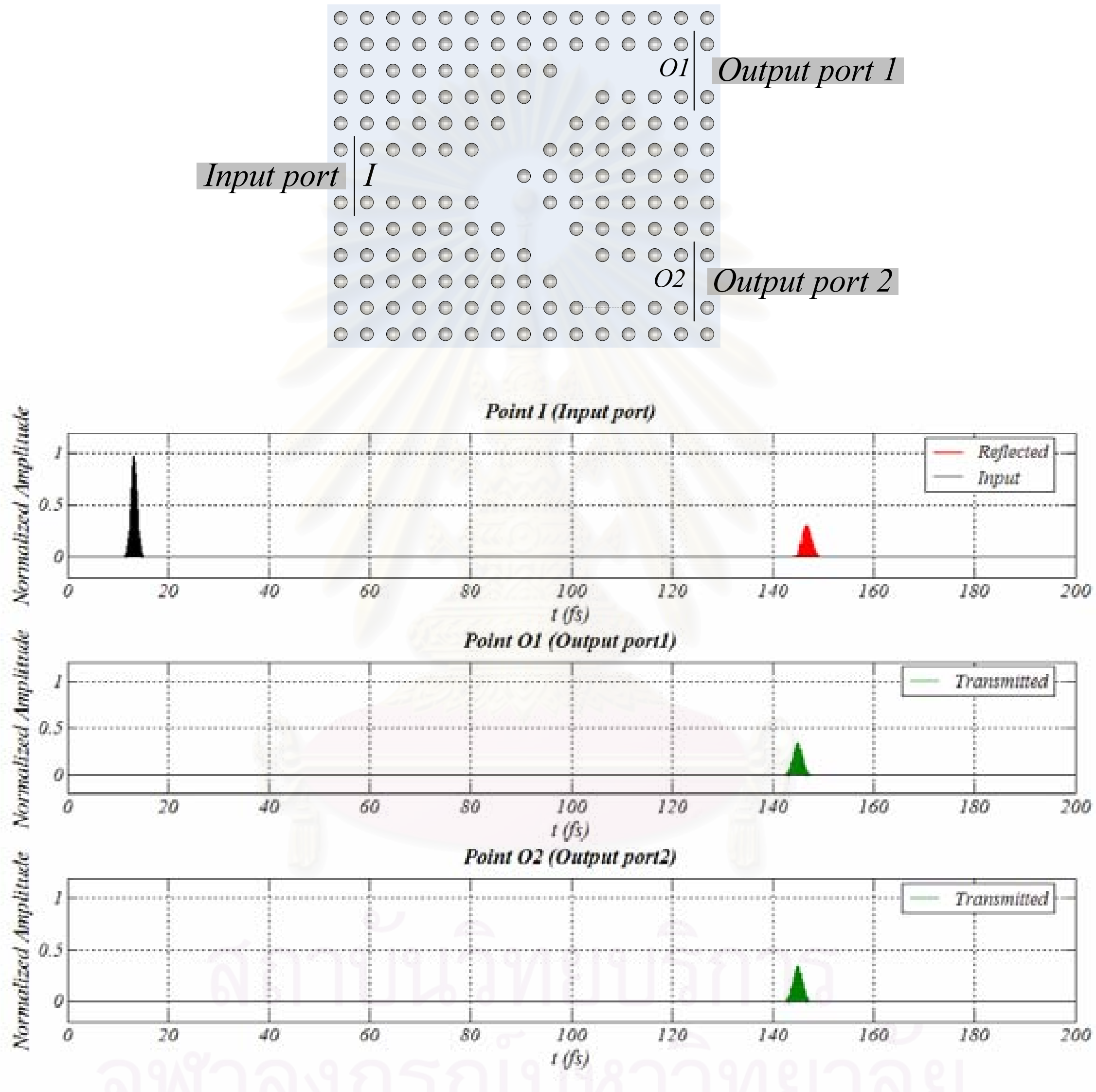




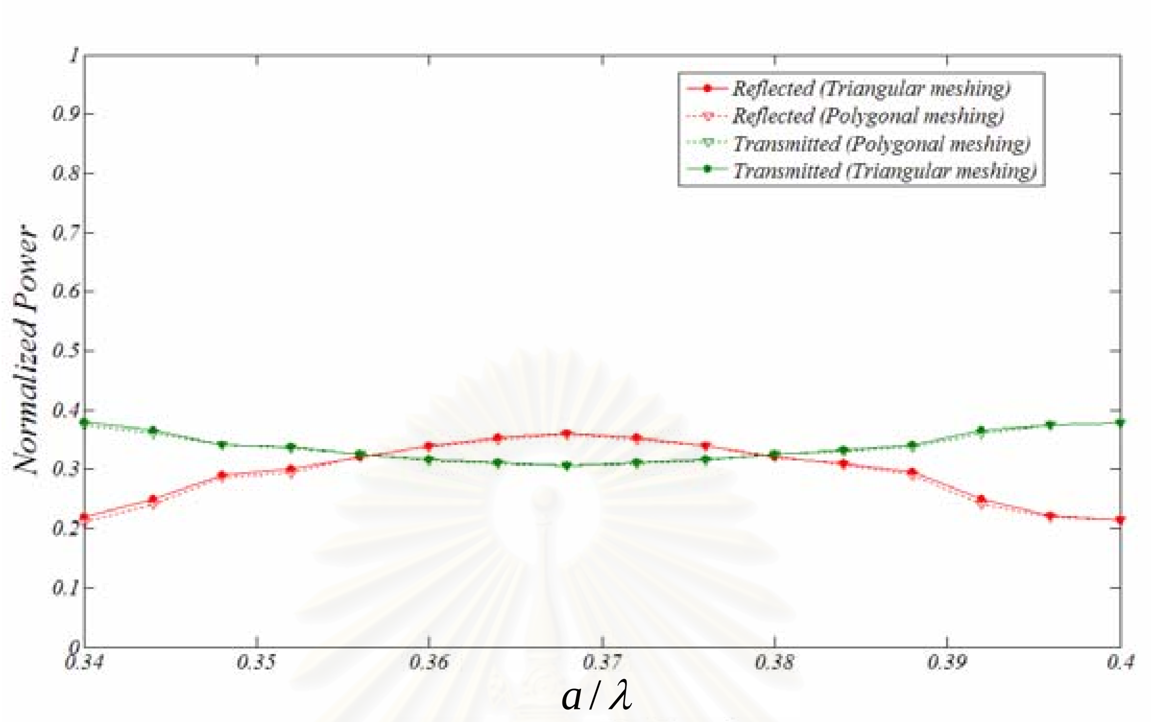
รูปที่ 4.32 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกเตอร์บีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

รูปที่ 4.33 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 13 เท่าของค่าคัวตัวแลตทิช จากหน้าท่อนำคลื่น

ด้านอินพุทพอร์ท, จุด I ในรูป), ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 10 เท่าของค่าคัวตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ทที่ 1, จุด O1 ในรูป) และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 10 เท่าของค่าคัวตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ทที่ 2, จุด O2 ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ และคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม



รูปที่ 4.33 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกเตอร์บีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม



รูปที่ 4.34 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับของวงจรผลึกโฟโตนิกเตอร์บีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ

รูปที่ 4.34 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านไปยังเอาท์พุทพอร์ท (Transmitted) และกำลังของสัญญาณแสงที่สะท้อนกลับมายังอินพุทพอร์ท (Reflected) ของวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ โดยพิจารณาแต่ช่วงความถี่ $a/\lambda = 0.34 - 0.40$ ซึ่งจะพบว่าตลอดช่วงความถี่ที่พิจารณาวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์ที่ออกแบบเป็นรูปตัว Y นั้นมี Return loss กลับมายังอินพุทพอร์ทค่อนข้างสูง โดยผลการคำนวณนั้นมีความสอดคล้องกับกับผลการวิจัยของ M. Koshiba เมื่อปี 2000 [5]

จากผลการคำนวณต่างๆในรูปที่ 4.30-4.34 แสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม มีความใกล้เคียงกับการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

ในตารางที่ 4.8 แสดงระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y ในแต่ละจุดเวลาที่ลดลง จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน ซึ่งจะเห็นได้ว่า การวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสมใช้ระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลาน้อยกว่าการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูป

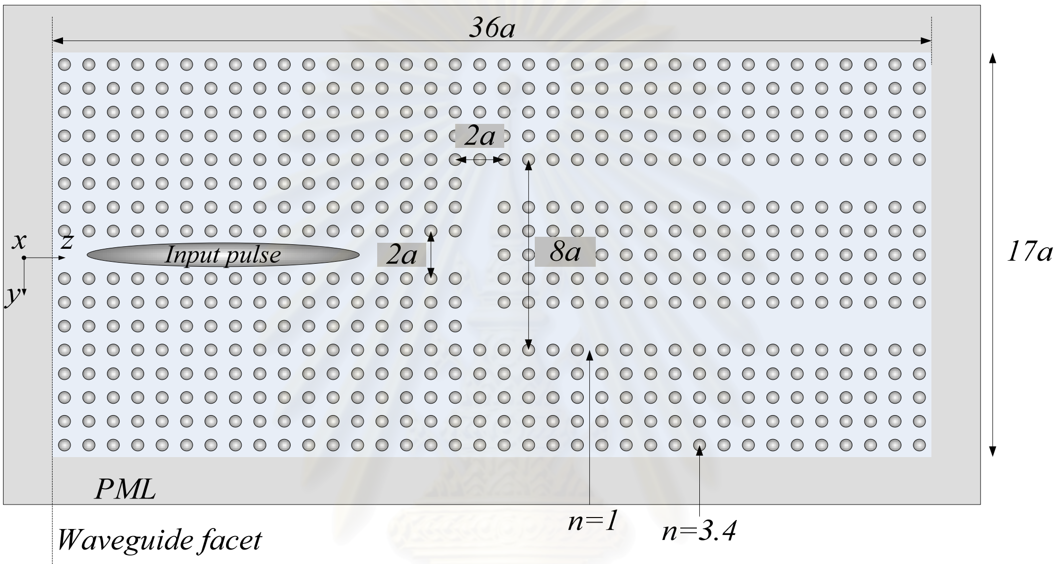
สามเหลี่ยมมาตรฐาน เนื่องมาจากจำนวนโหนดที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์น้อยกว่าและมีผลทำให้ขนาดของสมการเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลานั้นเล็กกว่า

ตารางที่ 4.8 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐาน ของ ระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว Y

การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**	**ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลง**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.28)	38,822	
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.29)	29,357	42.87%

4.3.4 **วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว** T (T-Branch photonic crystal circuit)

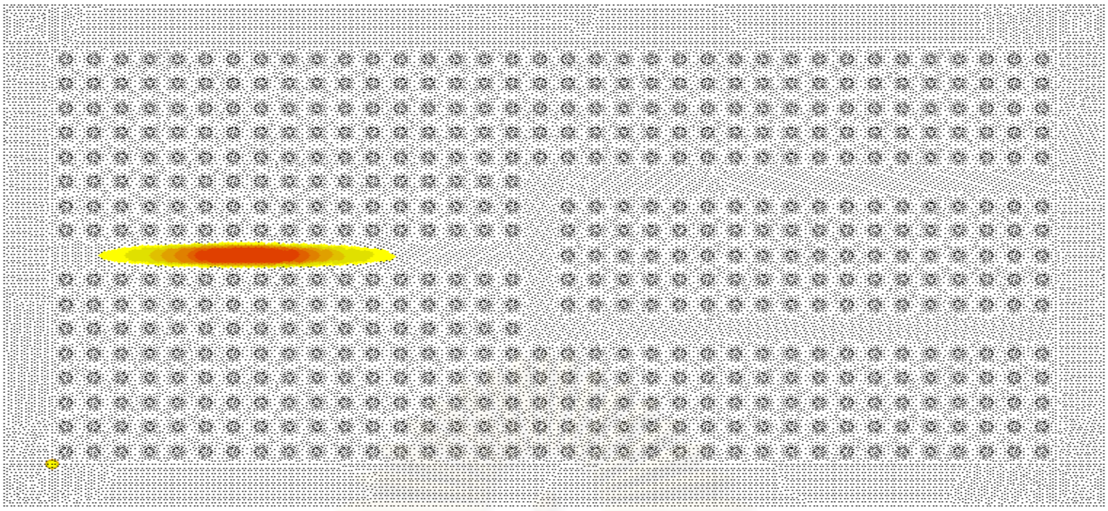
ตัวอย่างของวงจรผลึกโฟโตนิกที่นำมาพิจารณาในหัวข้อนี้ คือ วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัวที ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 4.35 โดยทำจากผลึกโฟโตนิกที่เป็นวัสดุเดียวกันกับ วงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรง จุดประสงค์ของวงผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัวที คือ การแบ่งกำลังของสัญญาณแสงออกเป็น 2 ส่วน ทางเอาท์พุทพอร์ททั้งสอง เช่นเดียวกับวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัววาย



รูปที่ 4.35 วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T (T-Branch Photonic crystal circuit) ล้อมรอบด้วย PML

เงื่อนไขต่างๆที่ใช้ในการคำนวณเช่น สนามไฟฟ้าอินพุท $\phi(y,z,t=0)$ ในรูปที่ 4.35 จะเป็นรูปเกาส์เซียนเหมือนกับสนามไฟฟ้าอินพุทของการคำนวณในวงจรผลึกโฟโตนิกแบบท่อตรงตามสมการที่ 4.1 เพียงแต่เปลี่ยนตำแหน่งจุด (y_0, z_0) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่สนามไฟฟ้าอินพุทมีขนาดมากที่สุด นอกจากนี้แล้วกำหนดให้ระยะระหว่างจุดเวลาที่ใช้ $\Delta t = 1\ \mathrm{fs}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขการแบ่งระยะระหว่างจุดเวลาเพื่อให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีเสถียรภาพในการคำนวณ ของคูแรนด์-เฟดริช-เลวี

สนามไฟฟ้าอินพุทสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.36

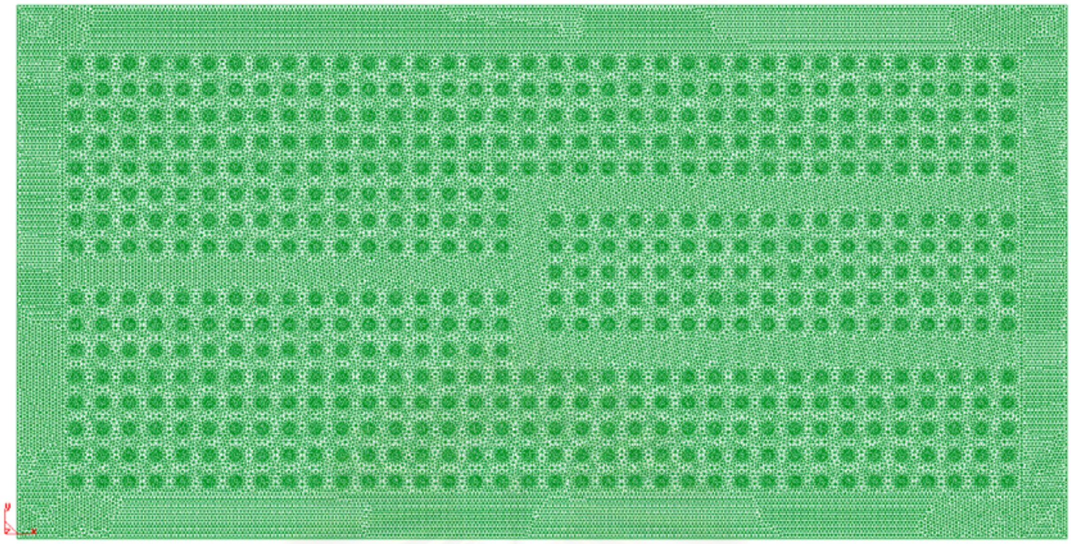


รูปที่ 4.36 สนามไฟฟ้าอินพุทสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T

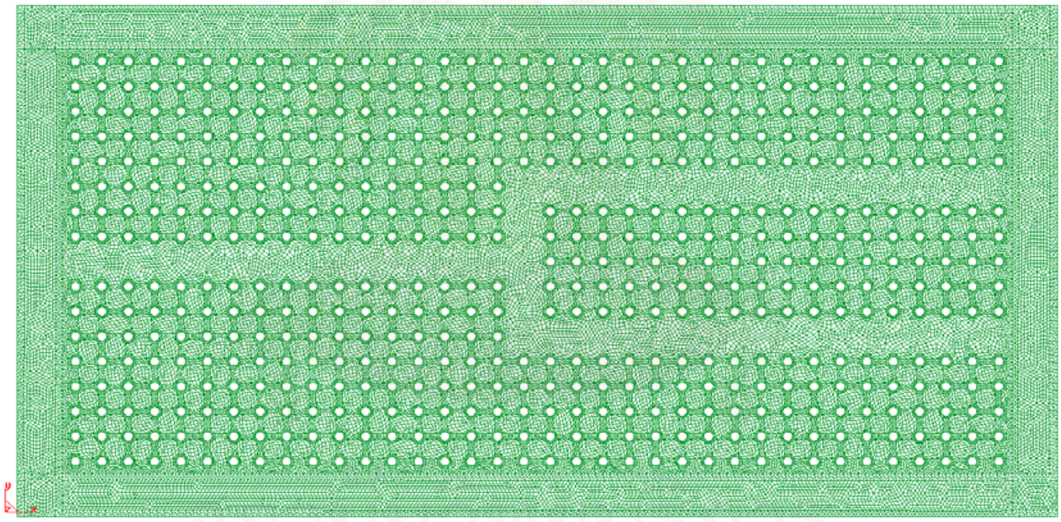
ผู้ทำวิทยานิพนธ์ได้แบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 2 แบบ คือ แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด ดังรูปที่ 4.37 ซึ่งเป็นการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา และแบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ดังรูปที่ 4.38 โดยจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นแสดงได้ดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.9 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสง ในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T

การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**	**จำนวนเอลิเมนต์**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.37)	38,855	58,333
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.38)	29,385	29,296

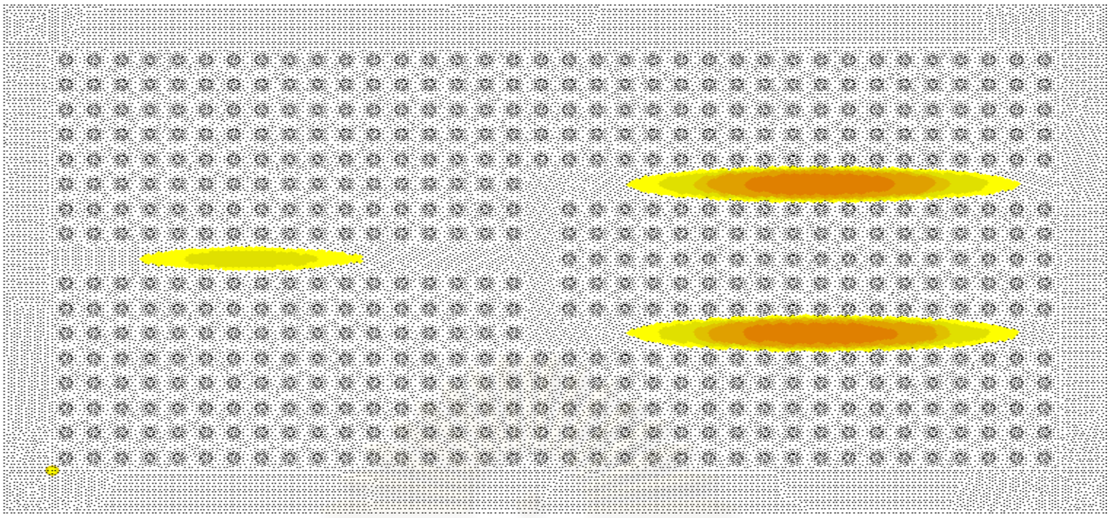


รูปที่ 4.37 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T

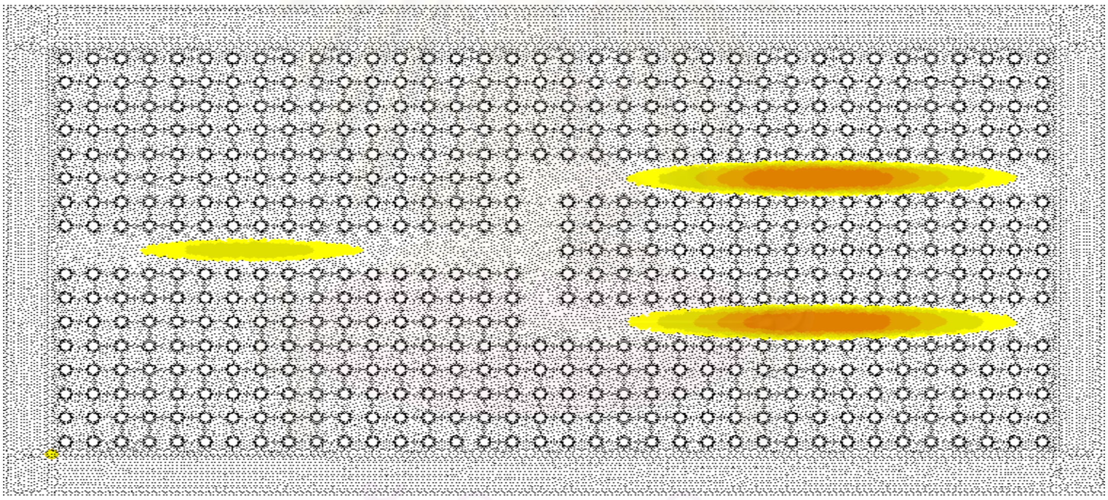


รูปที่ 4.38 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม) สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T

รูปที่ 4.39 และ 4.40 แสดงผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าที่เวลาผ่านไป 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน (รูปที่ 4.37) และ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม (รูปที่ 4.38) ตามลำดับ โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ ซึ่งจะพบว่าผลการวิเคราะห์นั้นมีความใกล้เคียงกัน



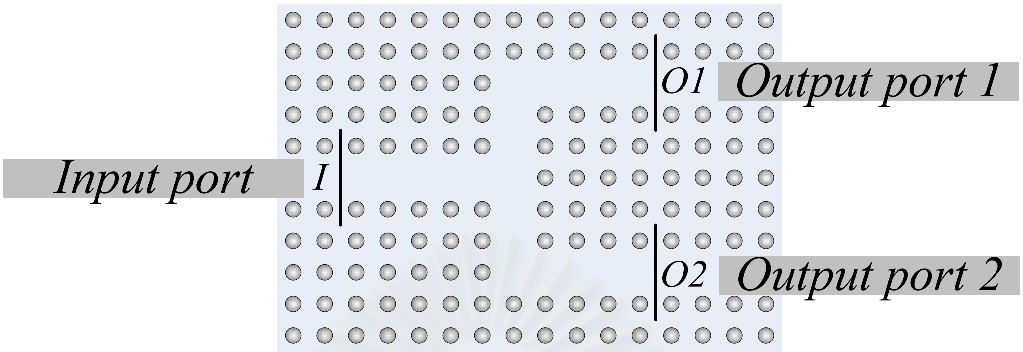
รูปที่ 4.39 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

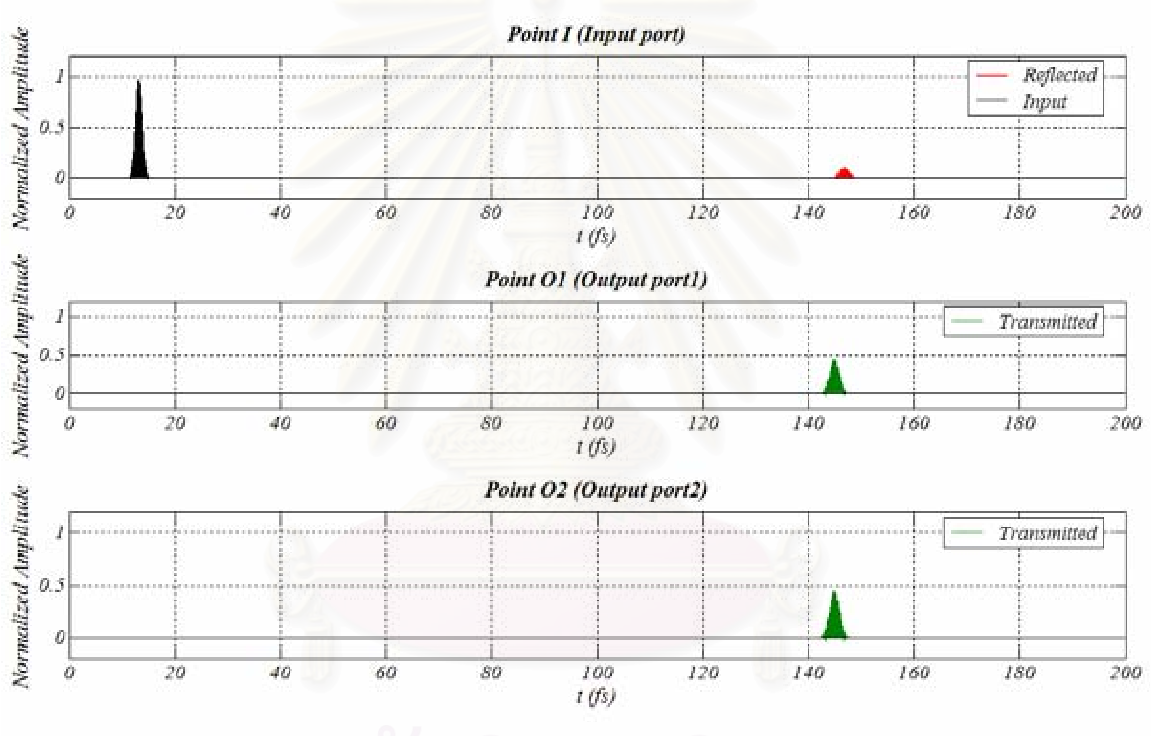


รูปที่ 4.40 ผลการวิเคราะห์การแพร่กระจายของสนามไฟฟ้าในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T ที่ระยะเวลา 110 fs นับจากป้อนสนามไฟฟ้าอินพุท โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม

รูปที่ 4.41 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 12 เท่าของค่าคัวตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่นด้านอินพุทพอร์ท, จุด I ในรูป) ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 10 เท่าของค่าคัวตัวแลตทิซจากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ทที่ 1, จุด O1 ในรูป) และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 14 เท่าของค่าคัวตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ทที่ 2, จุด

O2 ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

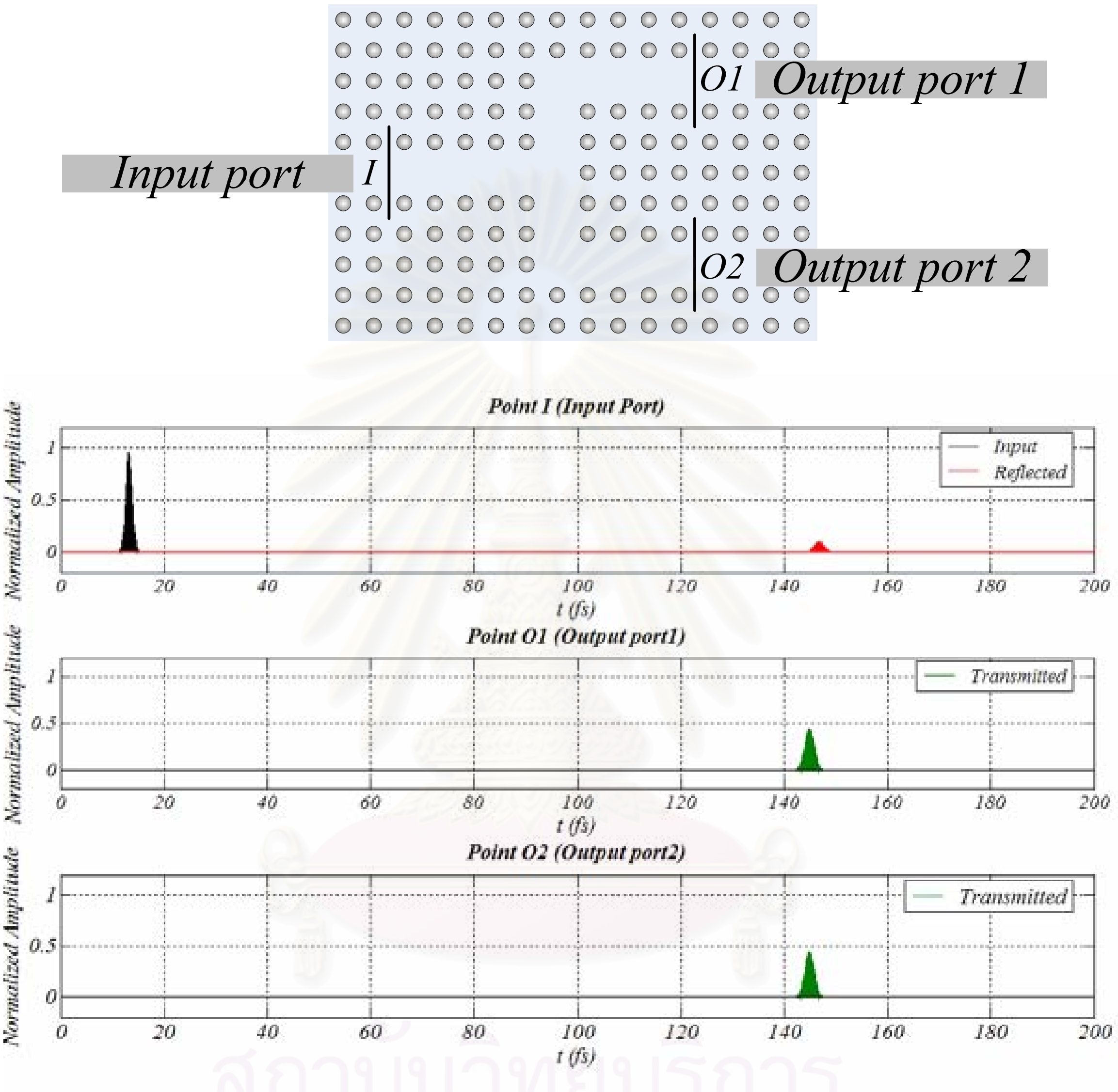




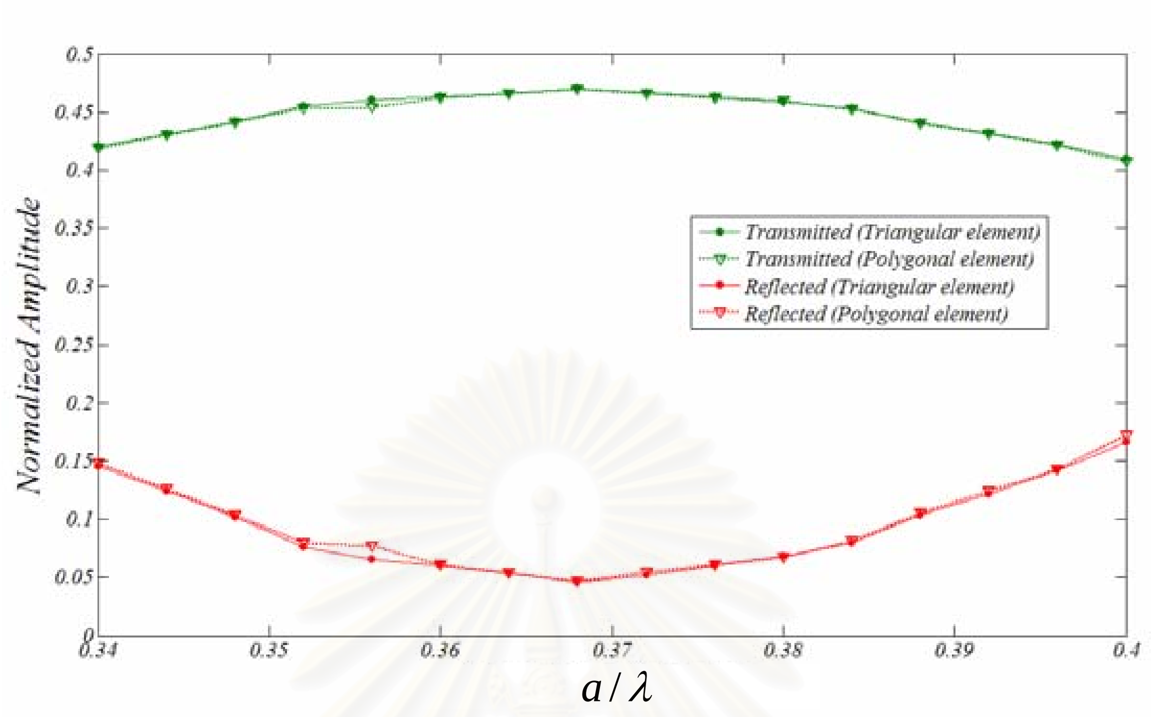
รูปที่ 4.41 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

รูปที่ 4.42 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ที่อินพุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 12 เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่นด้านอินพุทพอร์ท, จุด I ในรูป), ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด reference ที่ระยะ 10 เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ทที่ 1, จุด O1 ในรูป) และ ที่เอาท์พุทพอร์ท (จุด

reference ที่ระยะ 14 เท่าของค่าคงตัวแลตทิซ จากหน้าท่อนำคลื่น ด้านเอาท์พุทพอร์ทที่ 2, จุด O2 ในรูป) โดยความยาวของคลื่นพาห์ที่ใช้คือ $1.5\ \mu m$ คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม



รูปที่ 4.42 การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้านอร์มอลไลซ์ที่เวลาต่างๆ ตั้งแต่ 0 fs ถึง 200 fs ณ ตำแหน่ง อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ทของวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาแบบแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผสม



รูปที่ 4.43 กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ

รูปที่ 4.43 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านไปยังเอาท์พุทพอร์ท (Transmitted) และกำลังของสัญญาณแสงที่สะท้อนกลับมายังอินพุทพอร์ท (Reflected) ของวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัวที ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ โดยพิจารณาแต่ช่วงความถี่ $a/\lambda = 0.34 - 0.40$ ซึ่งจะพบว่าตลอดช่วงความถี่ที่พิจารณา วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์ที่ออกแบบเป็นรูปตัวทีนั้นมี Return loss น้อยกว่ารูปตัววาย และที่ $a/\lambda = 0.368$ จะมี Return loss น้อยที่สุด โดยผลการคำนวณมีความสอดคล้องกับผลการวิจัยของ M. Koshiba เมื่อปี 2000 [5]

ในตารางที่ 4.10 แสดงระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T ในแต่ละจุดเวลาที่ลดลง จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน ซึ่งจะเห็นได้ว่า การวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสมใช้ระยะเวลาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลาน้อยกว่าการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน เนื่องมาจากจำนวนโหนดที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์น้อยกว่าและมีผลทำให้ขนาดของสมการเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในแต่ละจุดเวลานั้นเล็กกว่า

ตารางที่ 4.10 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐาน ของ ระเบียบวิธีไฟต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมผสม ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์รูปตัว T

การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**	**ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลง**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.37)	38,855	
รูปหลายเหลี่ยมผสม(รูปที่ 4.38)	29,385	42.89%

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกซึ่งถูกนำเสนอในงานวิจัยของ M. Koshiba เมื่อปี 2000 มาพัฒนาให้มีสมรรถนะในเรื่องของระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณดีขึ้น โดยนำวิธีการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยมทั่วไปมาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนของการแบ่งเอลิเมนต์ เพื่อลดจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นและลดขนาดของสมการเชิงเส้นสำหรับคำนวณลักษณะของคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลาลง ซึ่งมีผลโดยตรงทำให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณลักษณะของคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลาลดลง

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในแต่ละตัวอย่างของวงจรผลึกโฟโตนิกที่นำมาศึกษานั้น ผู้ทำวิทยานิพนธ์ได้พิจารณาผลการคำนวณในมุมมองต่างๆ ได้แก่ การแพร่กระจายของคลื่นแสง (Optical pulse pattern) ในวงจรผลึกโฟโตนิกที่จุดเวลาต่างๆ, การเปลี่ยนแปลงของคลื่นแสงที่เวลาต่างๆ ณ จุด Reference ที่อินพุทพอร์ทและเอาท์พุทพอร์ท, กำลังของสัญญาณแสงที่ส่งผ่านไปยังเอาท์พุทพอร์ท และ กำลังของสัญญาณแสงที่สะท้อนกลับมายังอินพุทพอร์ท (Return loss) ที่ความยาวคลื่นพาห์ค่าต่างๆ โดยใช้ระเบียบวิธีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ และ เปรียบเทียบผลการคำนวณกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม และ พิจารณาระยะเวลาในการคำนวณที่สามารถลดได้

เมื่อพิจารณาวงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา และ หักงอ 90 องศา ซึ่งมีจุดประสงค์เดียวกันคือเลี้ยวเบนสัญญาณแสงไปจากเดิม (อินพุทพอร์ท) 90 องศา ผู้ทำวิทยานิพนธ์พบว่าตลอดช่วงความถี่ของคลื่นพาห์ที่พิจารณา คือ ตั้งแต่ $a/\lambda = 0.34$ ถึง $a/\lambda = 0.40$ วงจรผลึกโฟโตนิกแบบโค้งงอ 90 องศา จะสามารถส่งผ่านสัญญาณแสงไปยังเอาท์พุทพอร์ทได้ดีกว่าวงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา โดยที่ ณ ความถี่ $a/\lambda = 0.36$ จะส่งผ่านสัญญาณแสงได้ดีที่สุด ในขณะที่วงจรผลึกโฟโตนิกแบบหักงอ 90 องศา จะมี Return loss สูงขึ้นเมื่อส่งสัญญาณแสงที่มีความถี่ของคลื่นพาห์น้อยลง

เมื่อพิจารณาวงจรโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์ที่ออกแบบให้เป็นรูปตัว Y และตัว T ซึ่งมีจุดประสงค์เหมือนกันคือ แบ่งกำลังของสัญญาณแสงออกเป็น 2 ส่วน ทางเอาท์พุทพอร์ททั้งสอง ผู้ทำวิทยานิพนธ์พบว่า ตลอดช่วงความถี่ของคลื่นพาห์ที่พิจารณาคือตั้งแต่ $a/\lambda = 0.34$ ถึง $a/\lambda = 0.40$ วงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์ที่ออกแบบให้เป็นรูปตัว T จะสามารถส่งผ่าน

สัญญาณแสงไปยังเอาท์พุทพอร์ททั้งสองได้ดีกว่าวงจรผลึกโฟโตนิกบีมสปลิทเตอร์ที่ออกแบบให้เป็นรูปตัว Y และที่ ณ ความถี่ $a/\lambda = 0.368$ จะมีส่งผ่านและแบ่งกำลังของสัญญาณแสงได้ดีที่สุด เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ พบว่า ระเบียบวิธีที่นำเสนอให้ผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนไปจากผลการวิจัยของ A. Mekis เมื่อปี 1996 ซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนซ์ในโดเมนเวลา และ M. Koshiba เมื่อปี 2000 ซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานแต่ใช้เงื่อนไข PML ที่แตกต่างกับงานวิจัยนี้ เนื่องมาจากการกำหนดตำแหน่งที่แตกต่างกันของ จุด Reference ที่อินพุทและเอาท์พุทพอร์ท สำหรับการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของคลื่นแสงและวิเคราะห์หากำลังของสัญญาณที่สะท้อนกลับมายังอินพุทพอร์ทและส่งผ่านไปยังเอาท์พุทพอร์ทที่แต่ละจุดเวลา แต่อย่างไรก็ตามแนวโน้มของผลการคำนวณยังมีความสอดคล้องกับผลการวิจัยของ A. Mekis เมื่อปี 1996 และ M. Koshiba เมื่อปี 2000 จึงยังสามารถนำวิธีการที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ไปใช้กับกรณีตัวอย่างแบบต่างๆได้

เมื่อพิจารณาในเรื่องของระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณลักษณะของคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลาพบว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมซึ่งถูกนำเสนอในงานวิทยานิพนธ์นี้ สามารถลดระยะเวลาในการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยมได้ โดยระยะเวลาที่ลดได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมว่าลดลงจากการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมไปเพียงใด

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้นจะมีความแม่นยำในการคำนวณมากขึ้นเมื่อเปลี่ยนวิธีการคำนวณสมาชิกในไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ให้มีความแม่นยำมากขึ้น ในปัจจุบันนี้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมยังไม่มีวิธีการอินทิเกรตเพื่อคำนวณสมาชิกในไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์จากฟังก์ชันรูปร่างที่เป็นมาตรฐานตายตัวเหมือนการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม ซึ่งในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้วิธีการอินทิเกรตโดยการประมาณตามกฎของซิมป์สันเพื่อการคำนวณสมาชิกในไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ แต่อย่างไรก็ตามก็อาจยังมีวิธีการอินทิเกรตโดยใช้เทคนิคการประมาณแบบอื่นๆที่ให้ผลการคำนวณแม่นยำมากกว่าวิธีที่เลือกใช้ในวิทยาพนธ์ ซึ่งในงานวิจัยต่อไปหากต้องการเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณมากขึ้นก็สามารถเปลี่ยนเทคนิคการอินทิเกรตโดยการประมาณเป็นแบบอื่นได้

รายการอ้างอิง

[1] Knight, J.C., Birks, T.A., Russell, P.St.J., and Atkin, D.M. All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding. Optics Letters 21, 19 (October 1996): 1547-1549.

[2] Bennett, P.J., Monro, T.M., and Richardson, D.J. Toward practical holey fiber technology: fabrication, splicing, modeling, and characterization. Optics Letters 24, 17 (October 1999): 1203-1205.

[3] Birks, T.A., Mogilevtsev, D., Knight, J.C., and Russell, P.St.J. Dispersion compensation using single-material fiber. IEEE Photonic technology letters 11, 6 (June 1999): 674-676.

[4] Kubota, H., Suzuki, K., Kawanishi, S. Nakazawa, M., Tanaka, M., and Fujita, M. Low-loss 2-km long photonic crystal fiber with zero GVD in the near IR suitable for picosecond pulse propagation at the 800 nm band. In Proc. Cof. Laser Electrooptics, Baltimore,MD (2001): Postdeadline paper CPD3-1.

[5] Shumpert, J.D. Modeling of periodic structures (Electromagnetic crystals) A dissertion submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Phylosophy (Electrical Engineering). The University of Michigan, 2001.

[6] Yang, X.L., Cai, L.Z., and Liu, Q. Theoretical bandgap modeling of two-dimensional triangular photonic crystals formed by interference technique of three noncoplanar beams. OPTICS EXPRESS 11, 9 (May 2003): 1050-1055.

[7] Mekis, A., Chen, J.C., Kurland, I., Fan, S., Villeneuve, P.R., Joanopoulos, J.D. High transmission through sharped bends photonic crystal waveguides. Physical Reviews Letters 77, 18 (October 1996): 3787-3890.

[8] Koshiba, M., Tsuji, T., and Hikari, M. Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits. Journal of lightwave technology 18, 1 (January 2000): 102-110.

[9] Koshiba, M., Tsuji, T., and Sasaki, S. High-performance absorbing boundary conditions for photonic crystal waveguide simulations. IEEE Microwave wireless compon. Letter 11 (April 2001): 152-154.

[10] Fujisawa, T., and Koshiba, M. Time-domain beam propagation method for nonlinear optical propagation analysis and its application to photonic crystal circuits. Journal of lightwave technology 22, 2 (Feb 2004): 684-690.

[11] Hadley, G.R. Wide-angle beam propagation using padé approximant operators. Optical Letters 17 (Oct 1992): 1426-1428.

[12] Davidson, D.B. Computational electromagnetics for RF and microwave engineering. Cambridge University Press, 2005.

[13] Obayya, S.S.A., Rahman, B.M.A., El-Mikati, H.A. New full-vectorial numerically efficient propagation algorithm based on the finite element method. Journal of lightwave technology 18, 3 (March 2000): 409-415.

[14] Sukumar, N., Malsch, E.A. Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants. Arhcives of Computational Methods in Engineering 13, 1 (2006): 129-163.

[15] Meyer, M., et.al. Generalized barycentric coordinates on irregular polygons. Journal of Graphic Tool 7, 1 (Jan 2002): 13-22.

[16] Jianming, J. The finite element method in electromagnetics, John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[17] K. Kawano and T.Kitoh, Introduction to optical waveguide analysis: solving maxwell's equations and the schrodinger equation, John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[18] A. Taflove, Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method, Artech House, 1995.

ภาคผนวก

บทความทางวิชาการที่ได้รับการเผยแพร่

1. Thiwan Chowanadisai and Tuptim Angkaew. Analysis of Photonic Crystal Waveguides in Time-Domain by Finite-Element Beam Propagation Method with Polygonal Elements. 30th Electrical Engineering Conference (EECON-30, Kanchanaburi Thailand), 25 – 26 October 2007

2. Thiwan Chowanadisai and Tuptim Angkaew. Time-Domain Finite-Element Beam Propagation Method with Generalized Polygonal Elements for Photonic Crystal Waveguides Analysis. 2007 Asia-Pacific Microwave Conference (APMC2007, Bangkok Thailand), 11 – 14 December 2007

Analysis of Photonic Crystal Waveguides in Time-Domain by Finite-Element Beam Propagation Method with Polygonal Elements

Thiwan Chowanadisai[1] and Tuptim Angkaew[2]
Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University,
254 Phayathai Rd., Pathumwan, Bangkok, 10330
Phone +662-215-0871-3 Fax +662-215-4804, E-mail: [1]thiwanly99@hotmail.com and [2]tuptim.a@chula.ac.th

Abstract

In this paper, Time-Domain Finite-Element Beam Propagation Method (TD-FE-BPM) with using the polygonal elements is presented for the analysis of 2D photonic crystal waveguides in order to improve the computation time. The performance of the proposed method is compared with the TD-FE-BPM using all the triangular elements. The computation results of the pulse propagation along straight photonic crystal waveguide demonstrate the improvement in computation time by using the proposed method.

Keywords: Time-Domain finite-element beam propagation method, polygonal finite element, Photonic crystal circuits

1. Introduction

The beam propagation method (BPM) has been considered as one of the most widely used method for the simulation of the light wave propagation in various photonic devices and there are many versions of BPM [1] proposed in the last two decades. However, most of the BPM can treat only forward wave propagation. Hence, it is difficult to take into account backward reflecting waves.

The finite difference time domain method is the one method that is powerful, and is employed to analyze optical waveguide. A research has been proposed to improve the efficiency of the FDTD in analyzing optical waveguide by introducing new algorithm that is called the finite difference time domain - beam propagation method (FDTD-BPM) [2]. Although FDTD-BPM programming is simple, but it still suffers from the limitation of the finite difference method in treating curved boundary.

The BPM based on the finite element method (TD-FE-BPM) is the one of powerful numerical methods [3]-[5]. For analyzing the optical waveguides which are photonic crystal circuits, the TD-FE-BPM is the suitable method because it can effectively discretize the domain into standard triangular element. Recently, the TD-FE-BPM using quadratic triangular elements for analyzing photonic crystal waveguides in time domain have been proposed [4],[5]. The disadvantage of this technique is the use of enormous numbers of triangular element and nodal point in the structure of photonic crystal. Thus, the size of linear system of equations is too large for computing successively each time step.

This paper has an aim to propose the new numerical treatment in order to reduce the computation time in TD-FE-BPM by reducing the size of the system equation that depended on the number of nodal point. We propose the use of the convex polygonal elements in the finite element scheme. The interpolation functions for the polygonal element are Wachspress shape function [6] which is higher-order function. The linear triangular element is a subset of polygonal element which has 3 nodes. A large number of triangular elements can be replaced by one polygonal element. Thus, the number of elements can be reduced.

The paper is organized into 5 sections. The statement of the photonic crystal waveguide problems in 2D is described in Section 2. The formulation of time domain finite element beam propagation method is described in Section 3. The interpolation on polygonal element by using Wachspress shape function is described in Section 4. The validation of the proposed method is demonstrated in a numerical example as described in Section 5.

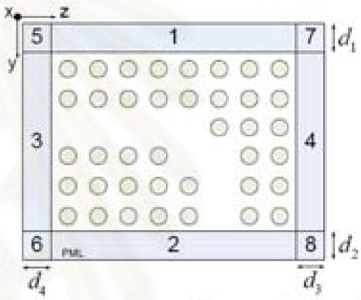


Figure 1 Photonic crystal waveguide surrounded by perfectly matched layer (PML) regions 1 to 8

2. The equations of 2D photonic crystal waveguide

We consider a 2D photonic crystal waveguide as shown in figure 1 (an example of PC bend), surrounded by PML regions 1-8 with thickness $(d_j = 1,2,3,4)$ where the transverse and propagation directions are assumed to be y and z, respectively. Assume that there is no variation in the x direction. With these assumptions and the anisotropic PML [7], from the Maxwell's equation in time domain, the governing equations for TE and TM waves are as follows.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)-\frac{s_y s_z q}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

$$\Phi = E_x,\ p = 1, q = n^2 \qquad (2)$$

$$\Phi = H_x,\ p = 1/n^2, q = 1 \qquad (3)$$

Here E_x and H_x are the x components of the electric and magnetic fields, c is the speed of light in vacuum, n is the refractive index distribution and t is the time.

The PML parameter s_y and s_z are summarized in (Table 1). Here we assume parabolic profiles of complex value s_i in Table 1 as

$$s_i = 1 - j\left(\frac{\rho}{d_i}\right)^2 \tan\delta_i \tag{4}$$

where ρ is the distance inside the PML region from the beginning of PML and δ_i corresponds to loss angle at the end of PML [7].

Table 1 PML Parameters

PML Parameter	PML Region							
	1	2	3	4	5	6	7	8
s_y	s_1	s_2	1	1	s_1	s_2	s_1	s_2
s_z	1	1	s_3	s_4	s_3	s_4	s_3	s_4

3. The time-domain finite-element beam propagation formulation

Assume that the time-varying field Φ can be expresses as a product of the slow varying amplitude and a high-frequency carrier wave as

$$\Phi(y,z,t) = \phi(y,z,t)\exp(j\omega_0 t) \tag{5}$$

Here ω_0 is the carrier center angular frequency. According to the finite element method, the computation domain is discretized into a finite number of elements. The field ϕ is interpolated in terms of shape functions and unknown parameters at nodes. By applying (5) and then formulating the finite element formulation of (1) based on Galerkin's weak-form, we get the finite element system matrix equation.

$$-\frac{1}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d^2\{\phi\}}{dt^2} - 2j\frac{\omega_0}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial t} + \left([\mathbf{K}] + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\} = \{0\} \tag{6}$$

where $\{\phi\}$ is vector containing unknown parameter at nodes. $\{0\}$ is null vector. The finite-element matrices are given by

$$[\mathbf{K}] = \sum_e \iint_e \begin{bmatrix} -p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} \\ -p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z} \end{bmatrix} dydz \tag{7}$$

$$[\mathbf{M}] = \sum_e \iint_e \left[s_y s_z q\{N\}\{N\}^T\right] dydz \tag{8}$$

Here $\{N\}$ is shape function vector, ^{T} denotes a transpose and $\sum_e$ is the extending over all different element in the finite-element method.

To reduce the order of time derivative, we use Padé recurrence relation [8], which gives the following ordinary differential equation (ODE) in time domain as

$$-2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial t} + \left([\mathbf{K}] + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\} = \{0\} \tag{9}$$

$$\left[\tilde{\mathbf{M}}\right] = [\mathbf{M}] - \frac{c}{4\omega_0^2}\left([\mathbf{K}] + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right) \tag{10}$$

Next, applying the Clank-Nicholson algorithm to render the ODE in (9) into the form algebraic system of equation, we obtain the equation for calculating in each time step as

$$[\mathbf{A}]_i\{\phi\}_{i+1} = [\mathbf{B}]_i\{\phi\}_i \tag{11}$$

$$[\mathbf{A}]_i = -2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i + \theta\Delta t\left([\mathbf{K}]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \tag{12}$$

$$[\mathbf{B}]_i = -2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i - (1-\theta)\Delta t\left([\mathbf{K}]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \tag{13}$$

Here Δt is the time step size. The integer i denotes the time step index. θ is introduced to control the stability of the method. The value of θ was appropriately chosen within the range of 0.5-0.8 [5].

As (13) is an explicit time-domain formulation, there is a stability limit that governs the size of time step and the size of space discretization by the Courant-Friedrich-Levy condition (CFL) [9]. The time step size Δt should satisfy the following condition to obtain the stable solutions.

$$\Delta t < \frac{\min(l)}{c} \tag{14}$$

where $\min(l)$ is the smallest length of the edge of element in the whole mesh.

4. Interpolation in polygonal element

Assume the domain is subdivided into a finite number of polygon or n-gon element as shown in figure 2. The field in a n-gon element can be interpolated by using shape functions $N_i^e(y,z)$ for $(i = 1,2,\ldots,n)$ and unknown parameters at nodes ϕ_i^e as

$$\phi^e(y,z) = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(y,z)\phi_i^e \tag{15}$$

Figure 2 A typical 8-gon element

The Wachspress shape function $N_i^e(y,z)$ for node i can be expressed in terms of barycentric coordinates called weight function as [6],[10],[11]

$$N_i^e(y,z) = \frac{w_i^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^e(y,z)} \tag{16}$$

where the $w_j^e(y,z)$ is a barycentric coordinate for n-gon called a weight function for node j [11]. The weight function at point $p(y,z)$ in n-gon can be calculated from three triangular areas as follows.

$$w_j^e(y,z) = \frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)} \tag{17}$$

Here $A(j-1,j,j+1)$ is area of triangle for which vertices located at nodes $j-1, j, j+1$. $A(p,j-1,j)$ is area of triangle for which vertices located at nodes $p, j-1, j$, and $A(p,j,j+1)$ is area of triangle for which vertices located at nodes $p, j, j+1$.

To calculate matrix [**K**] and [**M**] in each n-gon element, the numerical integration must be performed. For the n-gon element with the Wachspress shape function, we proposed the integration technique by using Simpson's rule. Let the kernel in the integration be $f(y,z)$, the n-gon element is subdivided into m sub-triangular area. According to Simpson's rule, the integration can be calculates as

$$\iint_e f(y,z)dydz = \sum_{i=1}^{m} f(y_i,z_i)A_i \tag{18}$$

where $f(y_i,z_i)$ and A_i are a sampling value at the centroid and the area of the i^{th} sub-triangle, respectively.

5. Numerical example and discussion

In order to show the validity of the proposed method, we carried out a numerical example of a 2D photonic crystal waveguide which the structure is comprised of dielectric rods ($n = 3.4$) located in air on a square array with lattice constant $a = 0.58\ \mu m$. This photonic crystal has photonic band gap (PBG) for TE modes in the frequency range from $\omega = 0.302 \times 2\pi c/a$ to $\omega = 0.443 \times 2\pi c/a$ [4].

The input signal at initial time step is given as a Gaussian profiles in both the transverse (y-axis) and longitudinal (z-axis) directions propagating in a waveguide as

$$\phi(y,z,t=0) = A\exp\left[-\left(\frac{y-y_0}{W_y}\right)^2 - \left(\frac{z-z_0}{W_z}\right)^2\right] \times \exp[-j\beta(z-z_0)] \tag{19}$$

Here β is the propagation constant, A is the amplitude, the center position of the input pulse is (y_0, z_0), W_y and W_z are the y-axis and z-axis spot size, respectively. The wavelength of the high frequency carrier wave is $\lambda = 1.5\ \mu m$. The initial TE pulse in (19) will be confined in the core region as the given wavelength is in the band gap. In order to satisfy the stability CFL condition, we choose time step size, $\Delta t = 1.0$ fs.

In the straight photonic crystal waveguide (Figure 3), the 2D structure is discretized into 2 meshes. The first mesh is all triangular elements as shown in figure 4a, while the second mesh is all polygonal (4-gon) elements as shown in figure 4b.

The number of nodal points and elements after discretization into 2 meshes are compared in Table 2.

Table 2 Number of nodal points and elements

Discretization	Nodal points	Elements
All triangular mesh (Figure 4a)	4586	8512
All polygonal mesh (Figure 4b)	3953	4077

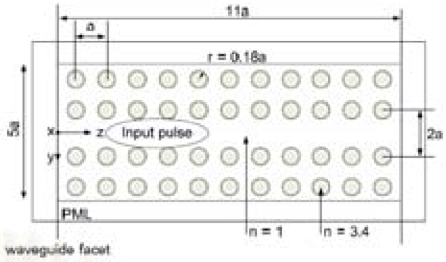
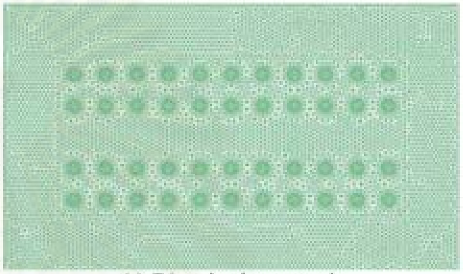
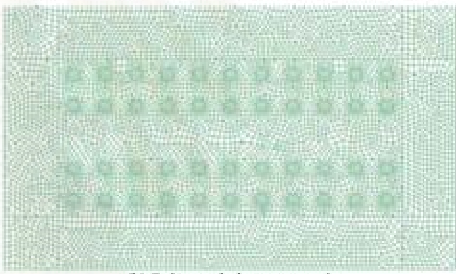


Figure 3 A straight photonic crystal waveguide



(a) Triangular elements mesh

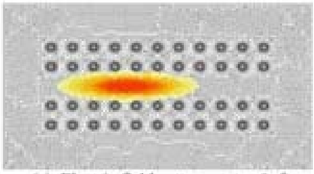


(b) Polygonal elements mesh

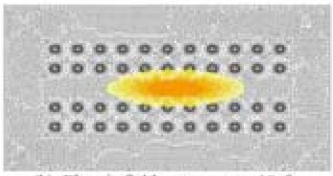
Figure 4 Meshes for straight photonic crystal waveguides

Figure 5 and 6 show the computation results of the pulse propagation along straight photonic crystal waveguide. The agreement of the electric field pattern results computed by the TD-FE-BPM using all triangular elements in figure 5b and the TD-FE-BPM using all polygonal elements in figure 6b is good.

Figure 7 shows the transverse field distributions for TE polarizations in $t = 10$ fs at distance of $6a$ from the waveguide facet computed by the TD-FE-BPM using all triangular elements and mixed polygonal elements. All the data are normalized with maximum amplitude of initial pulse.

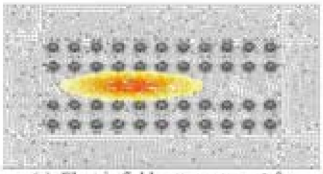


(a) Electric field pattern at $t = 0$ fs.

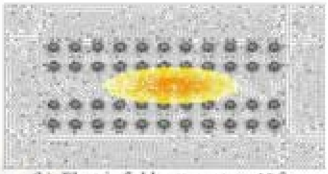


(b) Electric field pattern at $t = 10$ fs.

Figure 5 The initial pulse at $t = 0$ fs. (a) and the pulse propagation at $t = 10$ fs. with using triangular elements mesh (b)



(a) Electric field pattern at $t = 0$ fs.



(b) Electric field pattern at $t = 10$ fs.

Figure 6 The initial pulse at $t = 0$ fs. (a) and the pulse propagation at $t = 10$ fs. with using polygonal elements mesh (b)

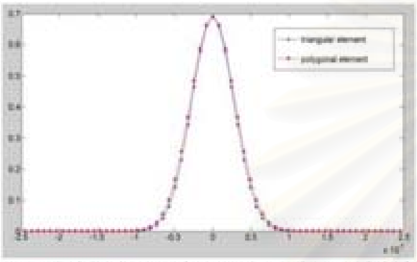


Figure 7 Field distributions for TE pulse at distance of $6a$ from the waveguide facet

The average execution time of TE pulse each time step by using TD-FE-BPM with polygonal elements is less than by using triangular elements about 27% due to smaller size of the linear system.

6. Conclusion

TD-FE-BPM with polygonal elements has been presented in this paper. The number of nodal points in domain discretization (FEM scheme) can be reduced. To validate the proposed method, numerical results are shown for analyzing the pulse propagation in photonic crystal waveguide and are compared with the TD-FE-BPM with using triangular elements. We observed that the TD-FE-BPM with using the proposed method has the good improvement in the computation time of the field propagation along the photonic crystal waveguide. The reduction of computation time is beneficial for computation successively in time. The application of the proposed TD-FE-BPM in various examples such as PC bend and directional coupler will be next investigated.

7. Acknowledgment

The authors wish to acknowledge partial support in funding from the Cooperation Project between Department of Electrical Engineering and Private Sector for Research and Development.

References

[1] H.-P. Nolthing and R. März, "Results of benchmark tests for different numerical BPM algorithms", *J. Lightwave Technol.*, vol. 13, pp. 216-224, Feb. 1995.

[2] R. Y. Chan and J. M. Liu, "Time-domain wave propagation in optical structures", *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 6, pp. 1001–1003, Aug. 1994.

[3] S. S. A. Obayya, "Efficient finite-element-based time-domain beam propagation analysis of optical integrated circuits", *IEEE Journal of quantum electronics.*, vol. 40,pp 591-595, May. 2004

[4] M. Koshiba, Y. Tsuji, and M. Hikari, "Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits", *J. Lightwave Technol.*, vol. 18, pp. 102–110, Jan. 2000.

[5] T. Fujisawa and M. Koshiba, "Time-domain beam propagation method for nonlinear optical propagation analysis and its application to photonic crystal circuits", *J. Lightwave Technol.*, vol. 22, pp. 684-690, Feb. 2004.

[6] N. Sukumar and E.A. Malsch, "Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants", *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 129-163, 2006

[7] M. Koshiba, Y. Tsuji, and S. Sasaki, "High-performance absorbing boundary conditions for photonic crystal waveguide simulations", *IEEE microwave wireless compon. lett.*, vol. 11, pp. 152-154, April 2001.

[8] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using padé approximant operators", *Opt.lett.*, vol. 17, pp.1426 -1428, Oct. 1992.

[9] A. Taflove, Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method, Artech House, 1995.

[10] M. Meyer, et.al., "Generalized barycentric coordinates on irregular polygons", *Journal of Graphic Tools*, Vol. 7, No. 1, page 13-22, 2002.

[11] J. Warren, et.al., "Barycentric coordinates for convex sets", Advances in Computational and Applied Mathematics, 2005.

Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference 2007

Time-Domain Finite-Element Beam Propagation Method with Generalized Polygonal Elements for Photonic Crystal Waveguides Analysis

Thiwan Chowanadisai[1], and Tuptim Angkaew[2]
Electrical Engineering Department, Chulalongkorn University, Thailand
[1]thiwanlv99@hotmail.com, and [2]tuptim.a@eng.chula.ac.th

Abstract-**In this paper, Time-Domain Finite-Element Beam Propagation Method (TD-FE-BPM) using polygonal elements is presented for the analysis of 2D photonic crystal waveguides in order to reduce the unknown in system equations. The performance of the proposed method is compared with the TD-FE-BPM using all the triangular elements. The computation results of the pulse propagation along straight photonic crystal waveguide demonstrate the improvement in computation time by using the proposed method.**

Index Terms- Time-domain finite-element beam propagation method; Polygonal finite element; Photonic crystal circuits

I. INTRODUCTION

The beam propagation method (BPM) has been considered as one of the most widely used method for the simulation of the light wave propagation in various photonic devices [1],[2] and there are so many versions of BPM [3] proposed in the last two decades. However, most of the BPM can treat only forward wave propagation. Hence, it is difficult to take into account backward reflecting waves.

The finite difference time domain method is the one method that is powerful for analyzing optical waveguides. The FDTD-BPM has been proposed to improve the efficiency of the FDTD in analyzing optical waveguides[2]. Although FDTD-BPM programming is simple, but it still suffers from the limitation of the finite difference method in treating curved boundary.

The BPM based on the finite element method (TD-FE-BPM) is the one of powerful numerical methods [3]-[5]. For analyzing the optical waveguides which are photonic crystal circuits, the TD-FE-BPM is the suitable method because it can effectively discretize the domain into standard triangular element. Recently, the TD-FE-BPM using quadratic triangular elements for analyzing photonic crystal waveguides in time domain have been proposed [4],[5]. The disadvantage of this technique is the use of enormous numbers of triangular element and nodal point in the structure of photonic crystal. Thus, the size of linear system of equations is too large for computing successively each time step.

This paper has an aim to propose the new numerical treatment in order to reduce the computation time in TD-FE-BPM by reducing the size of the system equation that depended on the number of nodal point. We propose the use of the convex polygonal elements in the finite element scheme. The interpolation functions for the polygonal element are Wachspress shape function [6] which is higher-order function. The linear triangular element is a subset of polygonal element which has 3 nodes. A large number of triangular elements can be replaced by one polygonal element. Thus, the number of elements can be reduced. The paper is organized into 5 sections. The statement of the photonic crystal waveguide problems in 2D is described in Section II. Then the formulation of time domain finite element beam propagation method is described in Section III. The interpolation on polygonal element by using Wachspress shape function is described in Section IV. The validation of the proposed method is demonstrated in a numerical example as described in Section V.

II. THE EQUATIONS OF 2D PHOTONIC CRYSTAL WAVEGUIDES

We consider a 2D photonic crystal circuit as shown in Figure 1 (an example of PC bend), surrounded by PML regions 1-8 with thickness ($d_j = 1,2,3,4$) where the transverse and propagation directions are assumed to be y and z, respectively. Assume that there is no variation in the x direction. With these assumptions and the anisotropic PML [7], can be desired from the Maxwell's equation in linear isotropic medium and can be expressed as, the governing equations for TE and TM waves.

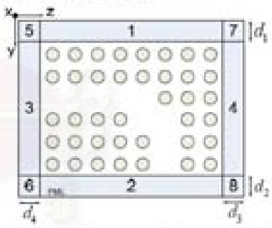


Figure 1 Photonic crystal waveguide surrounded by perfectly matched layer (PML) regions 1 to 8

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{s_y s_z q}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$

$$\Phi = E_x, p = 1, q = n^2 \quad (2)$$

$$\Phi = H_x, p = 1/n^2, q = 1 \quad (3)$$

Here E_x and H_x are the x components of the electric and magnetic fields, c is the speed of light in vacuum, n is the refractive index distribution and t is the time.

The PML parameter s_y and s_z are summarized in (Table 1). Here we assume parabolic profiles of complex value s_i in Table 1 as

$$s_i = 1 - j\left(\frac{\rho}{d_i}\right)^2 \tan\delta_i \qquad (4)$$

where ρ is the distance inside the PML region from the beginning of PML and δ_i corresponds to loss angle at the end of PML [7].

Table 1 PML Parameters

PML Parameter	PML Region							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
s_y	s_1	s_2	1	1	s_1	s_2	s_1	s_2
s_z	1	1	s_3	s_4	s_3	s_4	s_3	s_4

III. The Time-domain Finite Element Beam Propagation Formulation

Assume that the time-varying field Φ can be expresses as a product of the slow varying amplitude and a high-frequency carrier wave as

$$\Phi(y,z,t) = \phi(y,z,t)\exp(j\omega_0 t) \qquad (5)$$

Here ω_0 is the carrier center angular frequency. According to the finite element method, the computation domain is discretized into a finite number of elements. The field ϕ is interpolated in terms of shape functions and unknown parameters at nodes. By applying (5) and then formulating the finite element formulation of (1) based on Galerkin's weak-form, we get the finite element system matrix equation.

$$-\frac{1}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d^2\{\phi\}}{dt^2} - 2j\frac{\omega_0}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial t} + \left([\mathbf{K}] + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\} = \{0\} \qquad (6)$$

where $\{\phi\}$ is vector containing unknown parameter at nodes. $\{0\}$ is null vector. The finite-element matrices are given by

$$[\mathbf{K}] = \sum_e \iint_e \begin{bmatrix} -p\dfrac{s_z}{s_y}\dfrac{\partial\{N\}}{\partial y}\dfrac{\partial\{N\}^T}{\partial y} \\ -p\dfrac{s_y}{s_z}\dfrac{\partial\{N\}}{\partial z}\dfrac{\partial\{N\}^T}{\partial z} \end{bmatrix} dydz \qquad (7)$$

$$[\mathbf{M}] = \sum_e \iint_e \left[s_y s_z q\{N\}\{N\}^T\right] dydz \qquad (8)$$

Here $\{N\}$ is shape function vector, T denotes a transpose and $\sum_e$ is summation over all different elements in the finite-element mesh.

To reduce the order of time derivative, we use Padé recurrence relation [8], which gives the following ordinary differential equation (ODE) in time domain as

$$-2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial t} + \left([\mathbf{K}] + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\} = \{0\} \qquad (9)$$

$$\left[\tilde{\mathbf{M}}\right] = [\mathbf{M}] - \frac{c}{4\omega_0^2}\left([\mathbf{K}] + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right) \qquad (10)$$

Next, applying the Clank-Nicholson algorithm to render the ODE in (9) into the form algebraic system of equation, we obtain the equation for calculating in each time step as

$$[\mathbf{A}]_i\{\phi\}_{i+1} = [\mathbf{B}]_i\{\phi\}_i \qquad (11)$$

$$[\mathbf{A}]_i = -2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i + \theta\Delta t\left([\mathbf{K}]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \qquad (12)$$

$$[\mathbf{B}]_i = -2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i - (1-\theta)\Delta t\left([\mathbf{K}]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \qquad (13)$$

Here Δt is the time step size. The integer i denotes the time step index. θ is introduced to control the stability of the method. The value of θ was appropriately chosen within the range of 0.5-0.8 [5].

As (13) is an explicit time-domain formulation, there is a stability limit that governs the size of time step and the size of space discretization by the Courant-Friedrich-Levy condition (CFL) [9]. The time step size Δt should satisfy the following condition to obtain the stable solutions.

$$\Delta t < \frac{\min(l)}{c} \qquad (14)$$

where $\min(l)$ is the smallest length of the edge of element in the whole mesh.

IV. Interpolation on Polygonal Element

Assume the domain is subdivided into a finite number of polygon or n-gon element as shown in Figure 2. The field in a n-gon element can be interpolated by using shape functions $N_i^e(y,z)$ for $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and unknown parameters at nodes ϕ_i^e as

$$\phi^e(y,z) = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(y,z)\phi_i^e \qquad (15)$$

Figure 2 A typical 8-gon element

The Wachspress shape function $N_i^e(y,z)$ for node i can be expressed in terms of barycentric coordinates called weight function as [6],[10],[11]

$$N_i^e(y,z) = \frac{w_i^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^e(y,z)} \qquad (16)$$

where the $w_j^e(y,z)$ is a barycentric coordinate for n-gon called a weight function for node j [11]. The weight function at point $p(y,z)$ in n-gon can be calculated from three triangular areas as follows.

$$w_j^e(y,z) = \frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)} \qquad (17)$$

Here $A(j-1,j,j+1)$ is area of triangle for which vertices located at nodes $j-1,j,j+1$, $A(p,j-1,j)$ is area of triangle for which vertices located at nodes $p,j-1,j$, and $A(p,j,j+1)$ is area of triangle for which vertices located at nodes $p,j,j+1$.

To calculate matrix **[K]** and **[M]** in each n-gon element, the numerical integration must be performed. For the n-gon element with the Wachspress shape function, we proposed the integration technique by using Simpson's rule. Let the kernel in the integration be $f(y,z)$, the n-gon element is subdivided into m sub-triangular area. According to Simpson's rule, the integration can be calculates as

$$\iint_e f(y,z)dydz = \sum_{i=1}^{m} f(y_i,z_i)A_i \qquad (18)$$

where $f(y_i,z_i)$ and A_i are a sampling value at the centroid and the area of the i^{th} sub-triangle, respectively

V. Numerical Example and discussion

In order to show the validity of the proposed method, we carried out a numerical example of a 2D photonic crystal waveguide which the structure is comprised of dielectric rods ($n = 3.4$) located in air on a square array with lattice constant $a = 0.58\ \mu m$. This photonic crystal has photonic band gap (PBG) for TE modes in the frequency range from $\omega = 0.302\times 2\pi c/a$ to $\omega = 0.443\times 2\pi c/a$ [4].

The input signal at initial time step is given as a Gaussian profiles in both the transverse (y-axis) and longitudinal (z-axis) directions propagating in a waveguide as

$$\phi(y,z,t=0) = A\exp\left[-\left(\frac{y-y_0}{W_y}\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{W_z}\right)^2\right]\times\exp[-j\beta(z-z_0)] \qquad (19)$$

Here β is the propagation constant, A is the amplitude, the center position of the input pulse is (y_0,z_0), W_y and W_z are the y-axis and z-axis spot size, respectively. The wavelength of the high frequency carrier wave is $\lambda = 1.5\ \mu m$ .The initial TE pulse in (19) will be confined in the core region as the given wavelength is in the band gap. In order to satisfy the stability CFL condition, we choose time step size, Δt =1.0 fs.

In the straight photonic crystal waveguide (Figure 3), the 2D structure is discretized into 3 meshes. The first mesh is all triangular elements, the second is triangular elements in air region and one-16 gons for each circular dielectric rod regions (mixed polygonal elements) and the third mesh is all polygonal (4-gon) elements as shown in Figure 4a, 4b and 4c respectively.The number of nodal points and elements after discretization into 3 meshes are compared in Table 2.

Table 2 Number of nodal points and elements

Discretization	Nodal points	Elements
All triangular mesh (Figure 3a)	4586	8512
Mixed polygonal mesh (Figure 3b)	4190	6224
All polygonal(4-gon) mesh (Figure 3c)	3953	4077

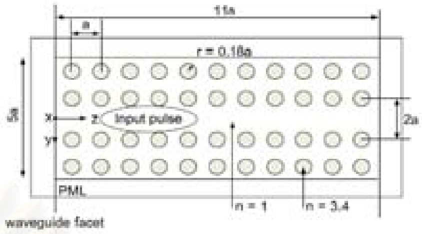
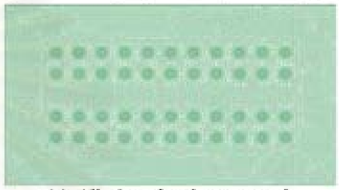
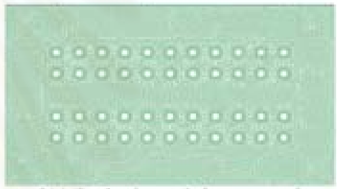


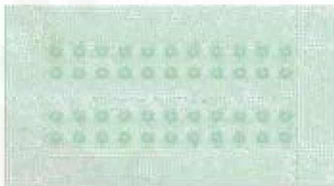
Figure 3 A straight photonic crystal waveguide



(a) All triangular elements mesh



(b) Mixed polygonal elements mesh

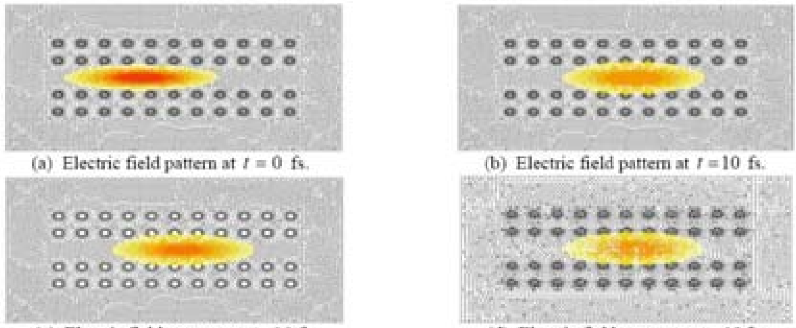


(c) All polygonal (4-gon) elements mesh

Figure 4 Meshes for straight photonic crystal waveguides

Figure 5b-5d shows the computation results of the pulse propagation along straight photonic crystal waveguide. The agreement of the electric field pattern results computed by the TD-FE-BPM that using 3 meshes in Figure 4a-4c is good.

Figure 6 shows the transverse field distributions for TE polarizations in $t = 10$ fs at distance of $6a$ from the waveguide facet computed by the TD-FE-BPM using triangular elements, mixed polygonal elements and polygonal elements. All the data are normalized with maximum amplitude of initial pulse.



(a) Electric field pattern at $t = 0$ fs.

(b) Electric field pattern at $t = 10$ fs.

(c) Electric field pattern at $t = 10$ fs.

(d) Electric field pattern at $t = 10$ fs.

Figure 5 (a) The initial pulse at $t = 0$ fs.
(b) The pulse propagation at $t = 10$ fs. (using all triangular mesh)
(c) The pulse propagation at $t = 10$ fs. (using mixed polygonal mesh)
(d) The pulse propagation at $t = 10$ fs. (using all 4-gon mesh)

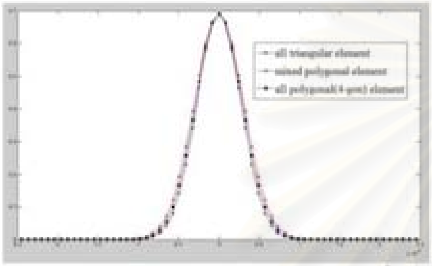


Figure 6 Field distributions for TE pulse at distance of $6a$ from the waveguide facet

The average execution time of TE pulse each time step by using TD-FE-BPM with mixed polygonal and all polygonal (4-gon) elements is less than by using all triangular elements about 18% and 27% ,respectively due to smaller size of the linear system.

VI. Conclusion

TD-FE-BPM with polygonal elements has been presented in this paper. The number of nodal points in domain discretization (FEM scheme) can be reduced. To validate the proposed method, numerical results are shown for analyzing the pulse propagation in photonic crystal waveguide and are compared with the TD-FE-BPM with using triangular elements. We observed that the TD-FE-BPM with using the proposed method has the good improvement in the computation time of the field propagation along the photonic crystal waveguide. The reduction of computation time is beneficial for computation successively in time. The application of the proposed TD-FE-BPM in various examples such as PC bend and directional coupler will be next investigated.

VII. Acknowledgement

The authors wish to acknowledge partial support in funding from the Cooperation Project between Department of Electrical Engineering and Private Sector for Research and Development

VIII. References

[1] H.-P. Nolthing and R. März, "Results of benchmark tests for different numerical BPM algorithms" *J. Lightwave Technol.*, vol. 13, pp. 216-224, Feb. 1995.

[2] R. Y. Chan and J. M. Liu, "Time-domain wave propagation in optical structures", *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 6, pp. 1001–1003, Aug. 1994.

[3] S. S. A. Obayya, "Efficient finite-element-based time-domain beam propagation analysis of optical integrated circuits", *IEEE Journal of quantum electronics.*, vol. 40,pp 591-595, May. 2004

[4] M. Koshiba, Y. Tsuji, and M. Hikari, "Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits", *J. Lightwave Technol.*, vol. 18, pp. 102–110, Jan. 2000.

[5] T. Fujisawa and M. Koshiba, "Time-domain beam propagation method for nonlinear optical propagation analysis and its application to photonic crystal circuits", *J. Lightwave Technol.*, vol. 22, pp. 684-690, Feb. 2004.

[6] N. Sukumar and E.A. Malsch, "Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants", *Arhcives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 129-163, 2006

[7] M. Koshiba, Y. Tsuji, and S. Sasaki, "High-performance absorbing boundary conditions for photonic crystal waveguide simulations", *IEEE microwave wireless compon. lett.*, vol. 11, pp. 152-154, April 2001.

[8] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using padé approximant operators", *Opt.lett.*, vol. 17, pp.1426 -1428, Oct. 1992.

[9] A. Taflove, Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method, Artech House, 1995.

[10] M. Meyer, et.al., "Generalized barycentric coordinates on irregular polygons", *Journal of Graphic Tools*, Vol. 7, No. 1, page 13-22, 2002.

[11] J. Warren, et.al., "Barycentric coordinates for convex sets", Advances in Computational and Applied Mathematics, 2005.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายธิวรรณ์ เชาวนาดิศัย เกิดเมื่อวันที่ 11 สิงหาคม พ.ศ. 2527 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปีการศึกษา 2548 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2549