

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบันวัสดุคอมโพสิตถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในงานทางวิศวกรรม ไม่ว่าจะเป็นงานทางวิศวกรรมเครื่องกล วิศวกรรมโยธา และวิศวกรรมอากาศยาน เนื่องจากวัสดุคอมโพสิตมีคุณสมบัติทางกลที่ได้เปรียบกว่าโลหะที่ใช้ในอดีต กล่าวคือวัสดุคอมโพสิตมีความแข็งแรงสูงและมีน้ำหนักเบา อีกทั้งยังสามารถออกแบบการรับแรงให้เหมาะสมต่องานที่มีลักษณะเฉพาะได้ดี โครงสร้างในงานวิศวกรรมที่ทำจากวัสดุคอมโพสิตอาจอยู่ในรูปโครงสร้างแผ่นบาง (plate) คาน (beam) หรือ เปลือก (shell) ในการออกแบบชิ้นงานของโครงสร้างแต่ละชนิด จะต้องคำนึงถึงภาระที่กระทำกับชิ้นงาน และความเค้นที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนชิ้นงาน โดยความเค้นที่เกิดขึ้นจะต้องมีค่าไม่เกินความแข็งแรงของวัสดุเพื่อป้องกันมิให้โครงสร้างเกิดการแตกหักหรือฉีกขาด ความเสียหายอีกประเภทหนึ่งที่ต้องคำนึงถึงในการออกแบบคือความเสียหายจากการโก่งงอ (buckling) เนื่องจากการรับภาระกดเกินกว่าที่โครงสร้างจะรับได้ จนทำให้โครงสร้างเกิดการโก่งขึ้น ภาระที่ทำให้วัสดุเกิดการโก่งงอ เรียกว่า ภาระการโก่งงอ (buckling load) และรูปร่างการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางเมื่อได้รับภาระเท่ากับภาระการโก่งงอเรียกว่ารูปร่างการโก่งงอ (buckling mode)

นอกจากปัญหาการโก่งงอแล้ว พฤติกรรมอีกประเภทหนึ่งที่ต้องคำนึงในการออกแบบคือการสั่นสะเทือน เมื่อโครงสร้างแผ่นบางถูกกระตุ้น (excite) ด้วยความถี่หนึ่ง ๆ แล้วทำให้โครงสร้างเกิดการสั่นสะเทือนอย่างรุนแรง แสดงว่าค่าความถี่นั้นตรงกับค่าความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโครงสร้างแผ่นบาง ทำให้โครงสร้างเกิดการสั่นในรูปร่างของโหมดการสั่นสะเทือน (mode shape) ดังนั้นในการออกแบบโครงสร้างแผ่นบางเพื่อใช้งานในทางวิศวกรรมจะต้องคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง เพื่อจะสามารถทราบถึงช่วงความถี่ที่เหมาะสมในการใช้งานได้

ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้นทำให้มีการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางอย่างแพร่หลาย การหาภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิตบาง สามารถทำได้โดยวิธีการวิเคราะห์ (analytical method) วิธีการเชิงตัวเลข (numerical method) และวิธีการทดลอง (experimental method) วิธีแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบและข้อจำกัดแตกต่างกันไป วิธีการวิเคราะห์สามารถหาภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติที่เป็น

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR) เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository(CUIR) are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

ผลเฉลยแม่นยำตรงได้ (exact solution) แต่ชิ้นงานนั้นต้องเป็นแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตร (symmetric laminates) ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0 องศาและ 90 องศาและมีการจับยึดแบบง่าย (simple support, S) ทั้งสี่ด้านเท่านั้น สำหรับแผ่นบางที่การวางตัวในมุมใด ๆ (angle-ply) หรือมีการจับยึดแบบจับแน่น (clamped support, C) หรือแบบปลายอิสระ (Free edge support, F) ไม่สามารถหาภาวะการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีการวิเคราะห์ได้ ส่วนข้อได้เปรียบของการหาคำตอบโดยการทดลองคือทำให้ได้คำตอบที่เป็นจริงหรือคำตอบที่เกิดขึ้นจริง ซึ่งอาจจะรวมผลของตัวแปรต่าง ๆ ที่ไม่ได้มีในการวิเคราะห์หรือการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข อย่างไรก็ตามวิธีการทดลองต้องใช้ค่าใช้จ่ายสูงและการเตรียมการทดลองทำได้ยาก นอกจากนี้การสร้างเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานยังทำได้ยาก

ด้วยเหตุนี้วิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการแก้ปัญหาภาวะการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติ เนื่องมาจากสามารถแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนที่ไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรงได้ แต่ข้อจำกัดของวิธีเชิงตัวเลขคือ วิธีเชิงตัวเลขใช้เวลาและทรัพยากรในการคำนวณมาก บางวิธีไม่สามารถใช้ได้กับปัญหาทุกประเภท นอกจากนี้วิธีเชิงตัวเลขนั้นไม่สามารถจำลองพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนได้อย่างสมบูรณ์

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงศึกษาปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ที่มีขอบเขตการจับยึดทั้งสามประเภทคือ การจับยึดแบบง่าย การจับยึดแบบจับแน่น และการจับยึดแบบปลายอิสระ ด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช (Kantorovich Method) ซึ่งเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพเนื่องจากสามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญหรือสมการครอบคลุม (governing equation) และเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ทำให้การแก้สมการง่ายขึ้น ในการแก้สมการจะใช้วิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง ซึ่งเป็นวิธีที่มีความรวดเร็วและได้ผลเฉลยที่ถูกต้อง เพื่อประยุกต์ใช้ในการออกแบบโครงสร้างแผ่นคอมโพสิทบางก่อนนำไปใช้งานให้เกิดความปลอดภัยและประสิทธิภาพสูงสุด

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

เพื่อนำเทคนิคการแก้สมการโดยแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งมาใช้ในการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบาง ซึ่งจะเป็นทางเลือกในการแก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางอีกวิธีหนึ่ง

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาการแก้ปัญหาการโค้งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรโดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และแก้ปัญหาสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้วยระเบียบวิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยโดยมีมุมใด ๆ แบบสมมาตรและมีการจับยึดทั้งสามประเภท คือ การจับยึดแบบง่าย การจับยึดแบบจับแน่น และการจับยึดแบบปลายอิสระ ในการศึกษาจะสมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบของคำตอบตั้งแต่ 1 พจน์ขึ้นไป และเปรียบเทียบผลของการคำนวณกับงานวิจัยในอดีตและผลการศึกษาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อเป็นการสอบทวนระเบียบวิธีที่น่าเสนอ

1.4 เนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยเนื้อหา 7 บทและภาคผนวก 1 บท โดยมีลำดับเนื้อหาและรายละเอียดดังนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงที่มาและความสำคัญของปัญหา ขอบเขตของวิทยานิพนธ์และวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์รวมทั้งเนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับการทบทวนวรรณกรรม ซึ่งกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อการศึกษาของวิทยานิพนธ์ โดยแบ่งกลุ่มของงานวิจัยเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาภาวะการโค้งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และส่วนที่สองเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยงานวิจัยที่กล่าวถึงทั้งสองส่วนจะเน้นงานวิจัยที่ทำการศึกษาดังด้วยวิธีเชิงตัวเลข

บทที่ 3 กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานและสมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่น รวมถึงใช้หลักการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุดและระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเพื่อหาสมการครอบคลุมที่อยู่ในรูปผลเฉลยแน่นอนตรง (closed form solution) สำหรับปัญหาการโค้งงอและปัญหาสั่นสะเทือน อีกส่วนหนึ่งกล่าวถึงขั้นตอนการแก้สมการอนุพันธ์โดยการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งโดยละเอียด พร้อมยกตัวอย่างการแก้ปัญหาการโค้งงอด้วยการคำนวณโดยใช้วิธีที่น่าเสนอ

บทที่ 4 แสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนขึ้นเพื่อใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ รวมทั้งขั้นตอนการวิเคราะห์การโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง รวมทั้งแสดงการคำนวณซ้ำกับพฤติกรรมของคำตอบที่ลู่ออกเข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง

บทที่ 5 กล่าวถึงการสอบทวนความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และ angle-ply โดยมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดรูปแบบต่าง ๆ โดยเปรียบเทียบผลการศึกษากับงานวิจัยในอดีตซึ่งใช้ระเบียบวิธีรีทซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกจากนี้ยังศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่สมมุติขึ้นโดยในการศึกษานี้จะใช้ฟังก์ชันจำนวน 1 พจน์และ 2 พจน์ ในส่วนท้ายของบทได้แสดงผลของมุมการเรียงตัวของเส้นใยต่อภาวะการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอจากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น

บทที่ 6 ประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการโก่งงอมาใช้กับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบาง จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนกับงานวิจัยในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อีกส่วนหนึ่งได้ศึกษาผลของขนาดสัดส่วนและมุมการเรียงตัวของเส้นใยต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน

บทที่ 7 นำเสนอข้อสรุปของวิทยานิพนธ์ ประโยชน์ของวิทยานิพนธ์และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในส่วนสุดท้ายของวิทยานิพนธ์เป็นส่วนของภาคผนวกซึ่งจะได้แสดงถึงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับใช้ในการคำนวณสำหรับปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือน

บทที่ 2

ทบทวนวรรณกรรม

วิทยานิพนธ์นี้เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบาง โดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหา ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จึงแสดงผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์โดยแบ่งงานวิจัยออกเป็นสองกลุ่มตามลักษณะของปัญหา โดยเน้นไปที่งานวิจัยที่ใช้วิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาเป็นหลัก

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง

วัสดุคอมโพสิตถูกนำมาใช้ในงานวิศวกรรมอย่างกว้างขวางตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน จึงมีการศึกษาพฤติกรรมของการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางอย่างแพร่หลาย เนื่องจากพฤติกรรมการโก่งงอเป็นพารามิเตอร์สำคัญตัวหนึ่งในการออกแบบของโครงสร้าง ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางค่อนข้างซับซ้อนกว่าวัสดุไอโซทรอปิกซึ่งมีคุณสมบัติทางกลที่มีค่าคงที่ในทิศทางใด ๆ การหาภาวะการโก่งงออาจทำได้โดยวิธีการวิเคราะห์ วิธีการเชิงตัวเลข และวิธีการทดลอง ตัวอย่างการวิเคราะห์เพื่อหาภาวะการโก่งงอมีดังนี้ Iyengar [1] สามารถหาภาวะการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางในรูปผลเฉลยแม่นยำตรงได้ โดยชิ้นงานต้องเป็นแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใย (stacking sequence) แบบ 0° หรือ 90° ที่มีการจับยึดแบบง่าย ทั้งสี่ด้านเท่านั้น Reddy [2] วิเคราะห์แผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตไม่สมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยมุมใด ๆ แบบ antisymmetric angle-ply และหาผลเฉลยแม่นยำตรงที่มีข้อจำกัดการจับยึดแบบ SCSC หรือการจับยึดแบบ SSCC เท่านั้น สำหรับโครงสร้างที่มีการจับยึดรูปแบบอื่นและการวางตัวของเส้นใยแบบมุมใด ๆ นั้น ยังไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ ในปัจจุบันจึงมีการนำวิธีการเชิงตัวเลขต่าง ๆ มาช่วยในการวิเคราะห์หาภาวะการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง

Chai [3] หาภาวะการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีลำดับชั้นในการวางตัวของเส้นใยแบบต่าง ๆ และมีความหนาแตกต่างกันโดยระเบียบวิธีริทซ์ ชิ้นงานที่ศึกษามีขอบเขตการจับยึดสามแบบ คือ แบบ SSSS CCCC และ CSCS โดยใช้ฟังก์ชันไซน์ (sine function) เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ (out-of-plane displacement) ชิ้นงานที่ศึกษารับภาระในแกนเดียว (axial

load) และในสองแกน (biaxial load) ผลที่ได้จากการศึกษาเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน ระเบียบวิธีวิธีที่จำเป็นต้องสมมุติสมการการเคลื่อนที่ขึ้นมาก่อน แล้วนำคำตอบที่สมมุติไปแทนลงในสมการ โดยความถูกต้องและความแม่นยำขึ้นกับจำนวนพจน์ของคำตอบและรูปแบบของฟังก์ชันที่สมมุติขึ้น ข้อเสียของระเบียบวิธีวิธีคือจำเป็นต้องใช้พจน์ของคำตอบมากกว่า 140 พจน์ขึ้นไป ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำ อีกทั้งบางปัญหายังไม่มีรูปแบบของฟังก์ชันที่ใกล้เคียงกับคำตอบ ระเบียบวิธีวิธีจึงมีความยุ่งยากและต้องใช้ทรัพยากรในการคำนวณมาก

Darvizeh และคณะ [4] ทหาการการโค้งงอด้วยวิธี Generalized Differential Quadrature Rule (GDQR) โดยแบ่งการศึกษาออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกหาการการโค้งงอของแผ่นคอมโพสิตบางแบบไม่สมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่าย ทั้งสี่ด้าน ที่มีภาระกดในแนวระนาบทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ส่วนที่สองหาการการโค้งงอของแผ่นคอมโพสิตบางแบบไม่สมมาตรที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบแน่นทั้งสี่ด้านและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ที่มีภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว เมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้กับระเบียบวิธีวิธีและจากผลเฉลยแม่นยำ พบว่าค่าที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้ในวิธีที่สองวิธี GDQR ต่างจากระเบียบวิธีวิธีของการแปลงอนุพันธ์ของตัวแปรให้อยู่รูปของอนุกรมของตัวแปรนั้น ๆ ความแม่นยำของคำตอบที่ได้ขึ้นกับจำนวนพจน์ที่ใช้ในการแก้สมการเช่นเดียวกับระเบียบวิธีวิธีของวิธีวิธีและต้องใช้จำนวนพจน์ที่มากเช่นเดียวกันด้วย

นอกจากวิธีที่กล่าวถึงไปแล้วข้างต้นนั้นยังมีวิธีเชิงตัวเลขอีกหลายวิธีที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์หาการการโค้งงอ เช่น ระเบียบวิธี finite strip method [5,6], ระเบียบวิธี element-free Galerkin method [7] และ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [8] วิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหา เนื่องจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถทำให้สมการครอบคลุมลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ระเบียบวิธีนี้ถือได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่ง่ายการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การแก้สมการต้องอาศัยการคำนวณซ้ำ (iterative procedure) จึงอาจกล่าวได้ว่าผลเฉลยจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นผลเฉลยแม่นยำเนื่องจากผลเฉลยได้จากการแก้สมการครอบคลุมโดยตรง โดยสรุปแล้วหลักการของระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

คือการสมมติคำตอบในรูปของอนุกรมของผลคูณของฟังก์ชันของคำตอบในทิศทาง x กับฟังก์ชันของคำตอบในทิศ y ในการแก้สมการจะสมมติฟังก์ชันในทิศทางใดทิศทางหนึ่งเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า แล้วจึงหาฟังก์ชันอีกทิศทางได้ ทำซ้ำไปซ้ำมาจนกระทั่งคำตอบเข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง การหาผลเฉลยโดยกระบวนการทำซ้ำทำให้ฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมติให้ทราบค่าไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของชิ้นงาน

Kerr [9] เป็นคนแรกที่ประสบความสำเร็จในการนำแคนโทโรวิชมาวิเคราะห์ปัญหาการดัดและปัญหาการโก่งงอของแผ่นวัสดุบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นประเภทไอโซโทรปิก ซึ่งได้ผลของคำตอบที่มีค่าสูงเข้าหลังจากการคำนวณซ้ำ วิธีแคนโทโรวิชถูกนำมาเป็นระเบียบวิธีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของแผ่นสี่เหลี่ยมมุมฉากอย่างแพร่หลายในงานวิจัยหลาย ๆ ชิ้น เช่น Eisenberger และ Alexandrow [10] นำวิธีแคนโทโรวิชมาประยุกต์กับปัญหาการโก่งงอของแผ่นที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นประเภทไอโซโทรปิก ที่มีความหนาไม่เท่ากันของแต่ละแผ่น, Shufrin และ Eisenberger [11] นำวิธีแคนโทโรวิชวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นหนาทั้งที่ความหนาคงที่และไม่คงที่โดยใช้ทฤษฎี shear deformation เป็นต้น

ในเบื้องต้นระเบียบวิธีแคนโทโรวิชถูกนำไปวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นวัสดุที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นประเภทไอโซโทรปิกแต่เพียงอย่างเดียว ต่อมาระเบียบวิธีแคนโทโรวิชถูกนำมาวิเคราะห์กับวัสดุคอมโพสิตที่เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมุมฉากบางด้วย Ungbhakorn และ Singhatanagid [12] นำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาวิเคราะห์กับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° ภายใต้ขอบเขตการจับยึดของชิ้นงานทั้งหมดเจ็ดแบบ คือ SSSF, SCSF, SCSC, CCCC, CCCF, CSSC และ CSCS โดยใช้จำนวนพจน์ของคำตอบเท่ากับ 1 พจน์ เมื่อเปรียบเทียบผลคำตอบกับคำตอบโดยระเบียบวิธีของริทซ์ได้ค่าแตกต่างกันในช่วง 0.55 ถึง 0.60 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งถือได้ว่าผลที่ได้มีความถูกต้องและแม่นยำค่อนข้างดี แต่ข้อจำกัดของงานวิจัยชิ้นนี้คือการสมมติพจน์ของคำตอบเท่ากับ 1 พจน์ไม่สามารถแก้ปัญหาการโก่งงอได้ครอบคลุมทุกปัญหา เช่น ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวแบบ angle ply ทั้งแบบลามิเนตสมมาตรและไม่สมมาตร การสมมติคำตอบเพียง

หนึ่งพจน์ไม่สามารถแสดงรูปร่างการโค้งงอของปัญหาได้อย่างเหมาะสมสำหรับชิ้นงานที่มีการเรียงตัวของเส้นใยในทิศทางอื่น ๆ

งานวิจัยของ Yuan และ Jin [13] เป็นตัวอย่างเบื้องต้นที่นำระเบียบแบบแผนโทโรวิชแบบใช้จำนวนพจน์ของคำตอบหลายพจน์ในการแก้ปัญหาค่าพจน์ของแผ่นวัสดุบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นประเภทไอโซโทรปิก แบ่งเป็นสองส่วนคือ แบบรับภาระในแกนเดียวและรับภาระในสองแกน ที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้งหมด 7 แบบ คือ SSSS, SFSS, SCSF, SCSC, SFSF, CCCC และ CCCF เมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าภาระการโค้งงอจะมีค่าลู่เข้าผลที่นำมาเปรียบเทียบเมื่อมีการใช้พจน์ของคำตอบตั้งแต่ 2 พจน์ขึ้นไป และส่วนที่สองคือชิ้นงานรับภาระเฉือนที่มีเงื่อนไขการจับยึดสองแบบคือ SSSS และ CCCC ผลเฉลยที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่าภาระการโค้งงอที่ได้จะมีค่าลู่เข้าผลที่นำมาเปรียบเทียบเมื่อมีการใช้พจน์ของคำตอบตั้งแต่ 3 พจน์ขึ้นไป จะเห็นได้ว่าการสมมติคำตอบโดยใช้จำนวนพจน์ของคำตอบเพียงพจน์เดียวไม่เพียงพอที่จะทำให้คำตอบลู่เข้าสู่ผลเฉลย ต่อมาในปี 2008 Shufrin และ คณะ [14] จึงนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแบบใช้การสมมุติคำตอบมากกว่าหนึ่งพจน์ไปวิเคราะห์กับปัญหาแผ่นคอมโพสิตบาง การศึกษานั้นแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาการหาภาระการโค้งงอของแผ่นคอมโพสิตบางแบบสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° ที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC และ CCCF ที่มีภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว โดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 2 และ 3 พจน์ เมื่อเปรียบเทียบภาระการโค้งงอที่ได้กับผลการศึกษาของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [14] พบว่า ภาระการโค้งงอจากการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 2 และ 3 พจน์ ของทั้งสองเงื่อนไขมีค่าใกล้เคียงกัน และเมื่อนำภาระการโค้งงอที่ได้จากการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 3 พจน์ เปรียบเทียบกับภาระการโค้งงอที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่ากรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC มีค่าความแตกต่างอยู่ในช่วง -0.08 ถึง $+0.18$ เปอร์เซ็นต์ สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF คำตอบที่ได้มีค่าความแตกต่างอยู่ในช่วง -0.19 ถึง $+0.33$ เปอร์เซ็นต์ ส่วนที่สองศึกษาผลของจำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชต่อภาระการโค้งงอของโครงสร้างแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ โดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 8 พจน์ พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสองแบบ คือ การจับยึดแบบ SSSS ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 30° และการจับยึดแบบ SSSS ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 45° เมื่อนำภาระการโค้งงอของเงื่อนไขการจับยึดแบบ SSSS และการจับยึดแบบ CCCC มาเปรียบเทียบกับภาระการโค้งงอที่ได้จากระเบียบวิธี Finite Strip Method

พบว่าที่การสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ ภาวะการโก่งงอมีค่าแตกต่างกันถึง 48.672 และ 74.924 เปอร์เซนต์ ตามลำดับ แต่เมื่อเปรียบเทียบที่การสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 5 พจน์ พบว่า ภาวะการโก่งงอมีค่าแตกต่างกันน้อยลงมากคือ 0.155 และ -0.015 เปอร์เซนต์ ตามลำดับ งานวิจัยนี้มีข้อจำกัดคือเมื่อใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและขอบเขตเงื่อนไขการจับยึดแล้ว สมมุติค่าตอบของสมการในรูปของอนุกรมกำลัง ซึ่งคำตอบที่ได้นั้นมีข้อเสียเช่นเดียวกับระเบียบวิธีของริทซ์คือต้องใช้จำนวนพจน์มากพอสมควรที่จะทำให้คำตอบเข้าสู่ผลเฉลยที่ถูกต้อง จึงทำให้ต้องใช้ทรัพยากรในการคำนวณมาก

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวไปทั้งหมดเป็นที่มาของวิทยานิพนธ์นี้ ในการวิเคราะห์ปัญหาภาวะการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช เนื่องจากระเบียบวิธีนี้สามารถลดรูปสมการจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญพร้อมเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด อีกทั้งคำตอบที่สมมุติขึ้นไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของชิ้นงานด้วย จึงทำให้ระเบียบวิธี แคนโทโรวิชได้เปรียบเรื่องของระยะเวลาและความซับซ้อนเมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีของริทซ์และระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมา อย่างไรก็ตามงานวิจัยที่ผ่านมา หลังจากที่ใช้วิธีแคนโทโรวิชวิเคราะห์ปัญหาเบื้องต้นแล้ว ยังจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญลำดับที่สี่ซึ่งเป็นสมการครอบคลุมด้วยการสมมุติคำตอบในรูปของอนุกรมกำลัง คำตอบของสมการจะมีความถูกต้อง เมื่อจำนวนพจน์ของคำตอบในรูปของอนุกรมกำลังมีจำนวนมากพอ และจากผลงานวิจัยที่ผ่านมา จำเป็นต้องใช้จำนวนพจน์มากคำตอบจึงจะลู่เข้า การใช้จำนวนพจน์มากทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรในการคำนวณ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงจะแก้สมการครอบคลุมที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สี่ ด้วยระเบียบวิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง (Converting to System of First-Order Differential Equation) ซึ่งเป็นวิธีที่รวดเร็วและได้คำตอบที่มีความถูกต้องสูง ดังรายละเอียดที่จะอธิบายในบทถัดไป

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบาง

การวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นสะเทือนมีพารามิเตอร์ที่สำคัญอยู่ 2 ตัวคือ ค่าความถี่ธรรมชาติ (ω) และรูปร่างการสั่นสะเทือน (mode shape) ของแผ่นคอมโพสิตบาง ซึ่งเกี่ยวข้องกับงานวิจัยดังต่อไปนี้

Leissa [15] ได้รวบรวมการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนโดยวิธีวิเคราะห์โครงสร้างลักษณะต่างๆ เช่น รูปร่างวงกลม สี่เหลี่ยมและสามเหลี่ยม โดยมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในรูปแบบต่างๆ เช่น เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบปลายอิสระ การจับยึดแบบงายและการจับยึดแบบจับแน่น หนึ่งในวิธีการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนคือการแก้ปัญหาด้วยวิธีการวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิก (classical plate) แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิกและมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบงาย สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการควบคุมซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ได้โดยการสมมุติให้คำตอบอยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ทำให้สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางได้อย่างถูกต้อง แต่หากโครงสร้างมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่แตกต่างออกไปจากที่กล่าวข้างต้นจะไม่สามารถหาคำตอบที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงได้ ต่อมา Blevin [16] ได้นำระเบียบวิธีของริทซ์มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิกและมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดรูปแบบต่างๆ นอกจากการจับยึดแบบงายเพียงอย่างเดียว ผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีของริทซ์จะมีความถูกต้องและแม่นยำขึ้นอยู่กับรูปแบบของคำตอบที่สมมุติขึ้นว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของปัญหานั้นหรือไม่ และจำนวนพจน์ของคำตอบมากพอที่จะทำให้คำตอบลู่เข้าหรือไม่

นอกจากนี้ยังมีการนำเสนอระเบียบวิธีต่างๆ เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบาง เช่น Gorman [17] วิเคราะห์สมการควบคุมโดยใช้หลักการ superposition ศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิกภายใต้สมมุติฐานทฤษฎีแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบจุด (point support) ได้ผลเฉลยในรูปค่าเจาะจงและมีจำนวนหลายค่า ต่อมาใน Ramkumar และคณะ [18] นำเสนอวิธี Lagrangian multiplier technique สำหรับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน

แบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิกที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับแบบจับแน่น Yu และ Cleghorn [19] นำเสนอวิธี superposition และ transformation methods สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิก ที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดผสมระหว่างการจับยึดแบบจับแน่นและการจับยึดแบบง่าย เป็นต้น

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตโดย Aydogdo และ Timarci [20] ซึ่งศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตไม่สมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ตั้งแต่ 0° ถึง 90° สำหรับแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดกรณีที่สองด้านคู่ติดกันจับยึดแบบปลายอิสระ ส่วนด้านที่เหลือผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบจับแน่น หรือแบบปลายอิสระ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่ศึกษาทั้งหมดหกประเภทคือ CCFF, SSFF, FFFF, CSFF, SFFF และ CFFF การศึกษานี้หาค่าความถี่ธรรมชาติจากวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีรีทซ์โดยใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 108 พจน์ แบ่งการศึกษาออกเป็นสามส่วนคือ หาค่าพารามิเตอร์ความถี่ (frequency parameter) ของแผ่นทดลองที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบอิสระทั้งสี่ด้าน จำนวนชั้นลามิเนตเท่ากับ 2 และ 10 ชั้น มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta]$ และ $[\theta/-\theta]_5$ ตามลำดับ โดย θ เท่ากับ 0° 15° 30° และ 45° เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลการทดลองของ Messina และ Soldatos [21] พบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่มีค่าเท่ากัน ส่วนที่สองศึกษาค่าความถี่ของจำนวนชั้นลามิเนตที่การวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ โดยศึกษาการสั่นสะเทือนโหมดแรกของแผ่นทดลองจำนวนชั้นลามิเนตเท่ากับ 4 และ 10 ชั้น มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta]_2$ และ $[\theta/-\theta]_5$ ตามลำดับ โดยเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCFF, SSFF และ FFFF ศึกษาโดย θ เท่ากับ 0° 15° 30° และ 45° ส่วนการจับยึดแบบ CSFF, SFFF และ CFFF ศึกษาโดย θ เท่ากับ 0° ถึง 90° โดยเพิ่มมุมทีละ 15° จากการศึกษาพบว่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดเกิดขึ้นที่มุม 45° สำหรับทุกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดยกเว้นเงื่อนไขการจับยึดแบบ CSFF ซึ่งค่าพารามิเตอร์ความถี่มีค่าสูงสุดที่มุม 30° และเงื่อนไขการจับยึดแบบ CFFF มีค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดที่มุม 0° โดยการเพิ่มจำนวนชั้นลามิเนตของทุกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดจะไม่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ที่มุม 0° และ 90° แต่ที่มุมใด ๆ ค่าพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่ามากขึ้นตามจำนวนชั้นที่เพิ่มขึ้น ส่วนสุดท้ายศึกษาค่าพารามิเตอร์ความถี่ของการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ ของการสั่นสะเทือนโหมดแรก โดยใช้จำนวนชั้นลามิเนตเท่ากับ 2 ชั้น การวางตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta]$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดและมุมที่ศึกษาเหมือนกับในส่วนที่สอง จากการศึกษาพบว่าสำหรับโหมดการสั่นสะเทือนสูง ๆ ค่าพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่าสูงสุดที่มุมการวางตัวของเส้นใยในมุมใด

ๆ และการสันสะเทือนในโหมดสี่ ค่าพารามิเตอร์ความถี่มีค่าสูงสุดที่มุม 45° ทุกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ยกเว้นเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CFFF จะมีค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดที่มุม 15° งานวิจัยนี้มีข้อจำกัดคือระเบียบวิธีของวิธีคอนข้างซับซ้อนในการแก้สมการเพราะไม่สามารถลดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ อีกทั้งยังต้องสมมุติคำตอบของสมการให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตและใช้จำนวนพจน์ของคำตอบให้มากพอ ผลเฉลยที่ได้จึงจะถูกต้องและแม่นยำ

การแก้ปัญหาการสันสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเริ่มใน Bercin [22] ศึกษาการสันสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นประเภทอไอทรอปิก โดยหาค่าเจาะจงด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์โดยขึ้นงานมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบจับแน่นทั้งสี่ด้าน แบ่งการศึกษาออกเป็นสองส่วนคือ ศึกษาจำนวนรอบการทำซ้ำในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ทำให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่ออกโดยพิจารณารูปร่างโหมดแรกของการสันสะเทือน พบว่าค่าเจาะจงจะเริ่มลู่ออกในการคำนวณซ้ำครั้งที่สาม และเมื่อนำค่าเจาะจงที่ลู่ออกดังกล่าวไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Gorman พบว่ามีความแตกต่างกันเท่ากับ 0.03 เปอร์เซ็นต์ ในส่วนที่สองหาค่าเจาะจงของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดสัดส่วนของชั้นงานเป็น 1.5 และ 2.0 นำผลการศึกษาที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการทดลองในอดีตของ Gorman และ Marangoni [23] พบว่า ที่ขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1.5 ค่าเจาะจงที่ได้จากการศึกษามีค่าเท่ากับผลการทดลองทั้งสองในอดีต ส่วนที่ขนาดสัดส่วนเท่ากับ 2.0 ค่าเจาะจงที่ได้จากการศึกษามีค่าเท่ากับผลการทดลองของ Marangoni แต่แตกต่างกับผลการทดลองของ Gorman โดยมีความแตกต่างเท่ากับ 0.48 เปอร์เซ็นต์ งานวิจัยชิ้นนี้ใช้การสมมุติพจน์คำตอบเท่ากับ 1 พจน์และได้คำตอบใกล้เคียงกับงานวิจัยก่อนหน้านี้เนื่องจากวิเคราะห์วัสดุที่เป็นประเภทอไอทรอปิก และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน แต่ถ้าเป็นแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยในมุมต่างๆ และที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในประเภทต่างๆ การสมมุติพจน์ของคำตอบเพียงพจน์เดียวอาจทำให้คำตอบมีความคลาดเคลื่อนได้ ต่อมา Der-Chen Chang และคณะ [24] ศึกษาการสันสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีคุณสมบัติเป็นไอโซทรอปิกภายใต้การรับภาระในแนวระนาบ ในการศึกษาจะหาค่าความถี่ธรรมชาติ 6 โหมดแรกด้วยวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์สำหรับชั้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสามประเภทคือ จับยึดแบบจับแน่นทั้งสี่ด้าน (CCCC) จับยึดแบบจับแน่นสามด้านร่วมกับแบบปลายอิสระอีกหนึ่งด้าน (CCCF) และจับยึดแบบจับแน่นสองด้านคู่ตรงกันข้ามร่วมกับแบบปลายอิสระอีกสองด้าน (CFCF) โดยนำผลการศึกษาที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมนาสแทรน (NASTRAN) และผลการศึกษาในอดีตของ Farag

และ Pan [25] พบว่า สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC มีผลเฉลยแตกต่างกันมากที่สุดเท่ากับ 1.6 และ 4.6 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ ส่วนในกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCF มีผลเฉลยที่แตกต่างมากที่สุดเท่ากับ 3-9 และ 8.4 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ กรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CFCF เป็นเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่มีค่าความถี่ธรรมชาติแตกต่างกับผลที่ใช้เปรียบเทียบมากที่สุดคือ มีค่าความแตกต่างมากที่สุดเท่ากับ 4.5 และ 12.0 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ โดยคณะวิจัยคาดว่าผลกระทบของรูปร่างการสันสะท้อนในกรณีที่มีการจับยึดแบบปลายอิสระทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น

ธนาวุฒิ [26] นำเสนอระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแก้ปัญหาการสันสะท้อนของแผ่นคอมโพสิตบาง และใช้วิธีอนุกรมกำลังแก้สมการครอบคลุม โดยที่แผ่นคอมโพสิตบางมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_3[30/-30/30][45/-45/45]$ และ $[0/90/0]$ มีการจับยึดแบบ SSSS ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีความแม่นยำสูงเพราะค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนกับผลเฉลยจากระเบียบวิธี Galerkin เพียง 0.53 – 1.95 เปอร์เซ็นต์ แต่วิธีอนุกรมกำลังนั้นจำเป็นต้องใช้จำนวนเทอมของอนุกรมและพจน์เริ่มต้นของคำตอบให้สูงพอที่คำตอบจะลู่เข้าโดยเฉพาะที่โหมดการสันสะท้อนสูงๆ จึงทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรในการคำนวณมาก

เนื่องจากปัญหาการสันสะท้อนมีสมการที่ใช้ในการคำนวณหาความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสันสะท้อนคล้ายคลึงกับสมการของปัญหาการโก่งงอ วิชยานิพนธ์นี้จึงประยุกต์วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งแก้สมการครอบคลุมของปัญหาการสันสะท้อน ซึ่งสมการครอบคลุมของปัญหาสันสะท้อนถูกลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช จากงานวิจัยที่ผ่านมาการหาผลเฉลยจากสมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการสันสะท้อนของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ สามารถแก้ได้โดยวิธีอนุกรมกำลัง โดยการสมมติคำตอบให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังแล้วแทนลงในสมการครอบคลุมเพื่อแก้สมการหาความถี่ธรรมชาติได้ คำตอบที่ได้จะมีค่าลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมของอนุกรมและจำนวนพจน์ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่สมมติขึ้น การใช้จำนวนพจน์ที่มากทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรในการคำนวณ ดังนั้นวิธีที่จะนำเสนอนี้ได้เปรียบเรื่องของจำนวนพจน์ของคำตอบ เนื่องจากจะแก้สมการครอบคลุมของปัญหาการสันสะท้อนโดยตรง คำตอบที่ได้จึงเป็นผลเฉลยแม่นยำและจำนวนพจน์ของคำตอบขึ้นกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดและจำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่เริ่มต้นเท่านั้น วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูป

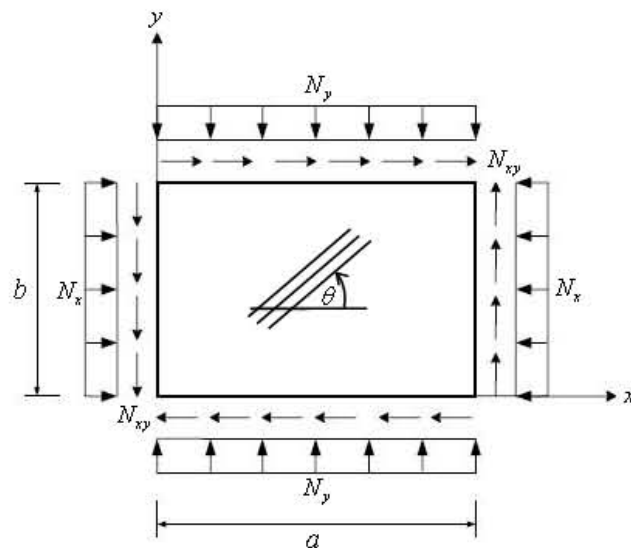
สมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งจึงเป็นวิธีที่รวดเร็วและได้คำตอบที่มีความถูกต้องแม่นยำ
รายละเอียดการแก้สมการครอบคลุมของปัญหาการสั้นสะเทือนจากวิธีที่นำเสนอ จะกล่าวโดย
ละเอียดในบทถัดไป

บทที่ 3

ทฤษฎีพื้นฐาน

3.1 การหาภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางด้วยวิธีการวิเคราะห์

เมื่อแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระกดหรือภาระเฉือนในแนวระนาบตามภาพที่ 3-1 รับภาระสูงถึงค่าค่าหนึ่งซึ่งเรียกว่าภาระการโก่งงอ แผ่นบางจะเกิดการโก่งขึ้น ซึ่งโดยปกติแล้วภาระการโก่งงอจะมีค่าน้อยกว่าค่าภาระที่ทำให้วัสดุเกิดความเสียหายสำหรับโครงสร้างแผ่นบาง ดังนั้นในการนำแผ่นคอมโพสิตบางไปใช้งาน จำเป็นต้องคำนึงถึงภาระการโก่งงอของชิ้นส่วนนั้น ๆ ด้วย เพื่อที่จะสามารถป้องกันความเสียหายที่จะเกิดขึ้นได้



ภาพที่ 3-1 การรับภาระในแนวระนาบและลักษณะของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

การวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง จะคำนึงถึงแรงกระทำต่าง ๆ ตามภาพที่ 3-2 ซึ่งประกอบด้วยแรงตั้งฉากคัลท์ โมเมนต์คัลท์และแรงเฉือนคัลท์ จากกฎข้อที่สองของนิวตันจะได้ผลรวมของแรงตามแนวแกนต่าง ๆ ดังนี้

แรงดัดพจน์ในแนวแกน x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3-1)$$

แรงดัดพจน์ในแนวแกน y

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3-2)$$

แรงดัดพจน์ในแนวแกน z

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (3-3)$$

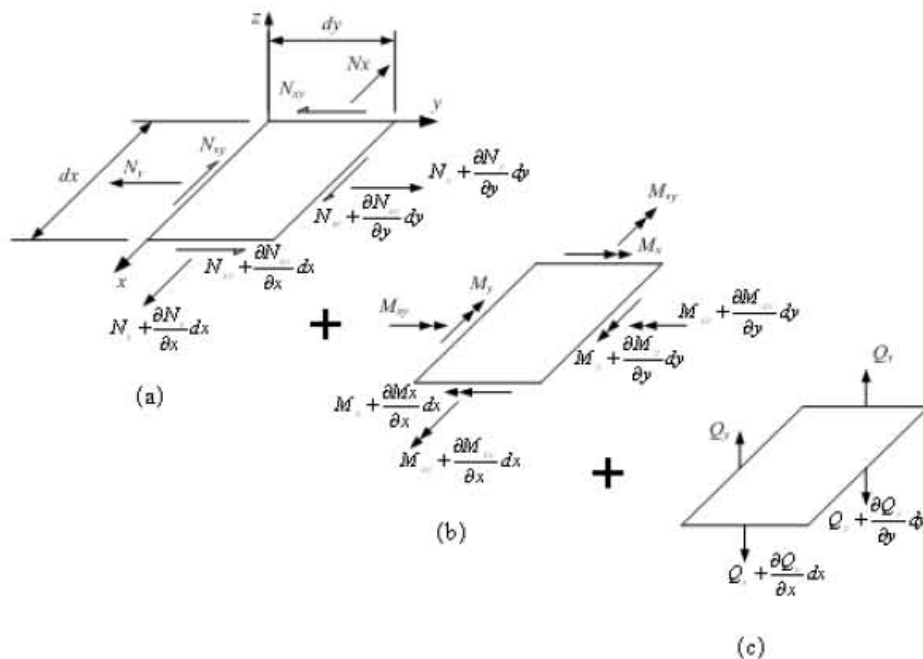
ผลรวมของโมเมนต์รอบแกน x และ y ให้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (3-5)$$

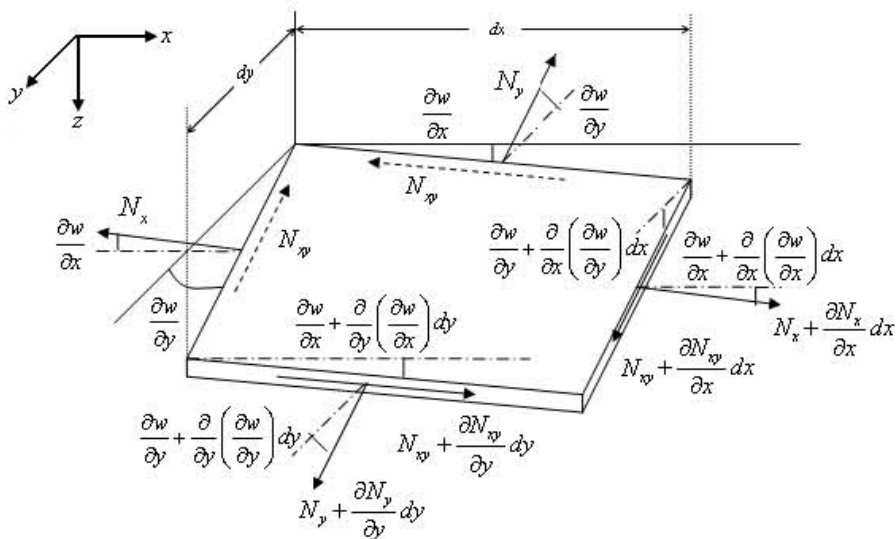
แทนสมการ (3-4) และ (3-5) ลงในสมการ (3-3) จะได้

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0 \quad (3-6)$$



ภาพที่ 3-2 ความเค้นลึฟท์และภาวะภายนอกที่กระทำต่อเอเลเมนต์ของแผ่นคอมโพสิต

ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของของแผ่นคอมโพสิตบาง จะต้องคำนึงถึงการโก่งของแผ่นในทิศทางนอกระนาบด้วย (out-of-plane displacement) ซึ่งจะทำให้แรงที่กระทำในระนาบเฉียงตามแผ่นคอมโพสิตบางและมีส่วนประกอบของแรงในระนาบบางส่วนมีทิศในแนวนอกระนาบดังแสดงในภาพที่ 3-3



ภาพที่ 3-3 แรงในแนวระนาบที่กระทำต่อแผ่นคอมโพสิตบางขณะโก่งตัว

ดังนั้นจะได้ผลรวมของแรงในแนวแกน z คือ

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3-7)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับความเครียดและความโค้งของแผ่นคอมโพสิตซึ่งเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-8)$$

โดยที่ $\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}$, $\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y}$, $\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}$

และ $\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

สมการ (3-7) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ & + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u^0}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3-9)$$

เมื่อพิจารณาแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ specially orthotropic plate และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ภายใต้ภาระกดในแนวระนาบแบบแกนเดียว ($N_x = -N$) จึงทำให้ค่า $D_{16} = D_{26} = 0$ และค่า $B_{ij} = 0$ ดังนั้นสมการ (3-9) จะลดรูปเป็น

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3-10)$$

เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสำหรับชิ้นงานที่มีการรองรับแบบง่ายทั้งสองด้าน คือ

$$\text{ที่ } w(0, y) = 0 \text{ และ } w(a, y) = 0 \text{ มี } M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{ที่ } w(x, 0) = 0 \text{ และ } w(x, b) = 0 \text{ มี } M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

สมการ (3-10) สามารถแก้ได้โดยสมมุติสมการการเคลื่อนที่นอกกระนาบในรูป

$$w(x, y) = w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3-11)$$

โดย w_{mn} คือ แอมพลิจูดของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบ

m, n คือ เป็นจำนวนคลื่นรูปไซน์ครึ่งลูก (half-sine wave) ของระยะเคลื่อนที่นอกกระนาบในแกน x และ y ตามลำดับ (โดย m, n เป็นจำนวนเต็มบวก)

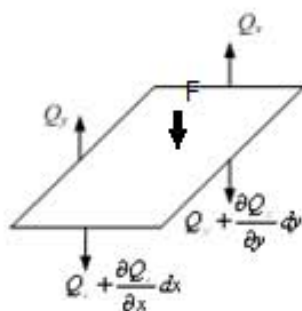
เมื่อแทนค่า $w(x, y)$ จากสมการที่ (3-11) ลงในสมการที่ (3-10) จะได้ผลเฉลยสำหรับปัญหาการโก่งงออยู่ในรูปของผลเฉลยแม่นยำตรงเป็น

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{a^2 m^2} \left[\left(D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(mnR)^2 + D_{22} (nR)^4 \right) \right] \quad (3-12)$$

โดย R เป็นขนาดสัดส่วน (aspect ratio) ของชิ้นงานซึ่งหาได้จาก $R = a/b$

3.2 การหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิตบางด้วยวิธีการวิเคราะห์

การวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติจากการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบาง ทำได้โดยการพิจารณาการเคลื่อนที่ของแผ่นคอมโพสิตบางในขณะที่มีการสั่นสะเทือน ซึ่งจะเกิดแรงเฉื่อย ($F = \rho_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}$) เพิ่มขึ้นจากแรงที่แสดงในภาพที่ 3-1 ตามภาพที่ 3-4 สมการผลรวมของแรงในแนวแกนต่าง ๆ เป็นดังนี้



ภาพที่ 3-4 แรงเฉื่อยที่เกิดขึ้นบนแผ่นบาง

แกน x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \quad (3-13)$$

แกน y

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} \quad (3-14)$$

แกน z

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-15)$$

โดย ρ_0 คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ซึ่งมีค่าเท่ากับ ρh

ρ คือ ความหนาแน่นของแผ่น (มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร)

h คือ ความหนาของแผ่น

u^0, v^0 คือ การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ x และ y ตามลำดับ สำหรับปัญหาการ

สันสะท้อนจะเป็นฟังก์ชันของระยะในแกน x ระยะในแกน y และเวลา

w คือ ระยะเคลื่อนที่ในทิศ z และสำหรับปัญหาการสันสะท้อนจะเป็นฟังก์ชันของ

ระยะในแกน x ระยะในแกน y และเวลา

พิจารณาผลรวมของโมเมนต์รอบแกน x และ y จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (3-16)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (3-17)$$

เมื่อแทนสมการ (3-16) และ (3-17) ลงในสมการ (3-15) จะได้

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-18)$$

สมการ (3-7) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ & + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u^0}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y) \end{aligned} \quad (3-19)$$

เมื่อพิจารณาแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ specially orthotropic plate และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสองด้าน จึงทำให้ค่า $D_{16}=D_{26}=0$ และค่า $B_{ij}=0$ ดังนั้นสมการ (3-19) จะลดรูปเป็น

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3-20)$$

ผลเฉลยของสมการ (3-20) สามารถหาได้โดยวิธีแยกตัวแปร (separation of variable) โดยกำหนด $w(x, y, t)$ อยู่ในรูปฟังก์ชันของตำแหน่งและฟังก์ชันของเวลาดังนี้

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (3-21)$$

แทนคำตอบของสมการ (3-20) ด้วยสมการ (3-21) จะได้

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \rho_0 \omega^2 W = 0 \quad (3-22)$$

เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสำหรับชิ้นงานที่มีการรองรับแบบง่ายทั้งสองด้าน คือ

$$\text{ที่ } W(0, y) = 0 \text{ และ } W(a, y) = 0 \text{ มี } M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{ที่ } W(x, 0) = 0 \text{ และ } W(x, b) = 0 \text{ มี } M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

สมการ (3-22) สามารถแก้ได้โดยสมมุติสมการการเคลื่อนที่ในอกระนาบในรูป

$$W(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3-23)$$

โดย A_{mn} คือ แอมพลิจูดของการสั่น

m, n คือ เป็นจำนวนคลื่นรูปไซน์ครึ่งลูก (half-sine wave) แสดงรูปร่างโหมดของการสั่น

ที่เกิดขึ้นในแกน x และ y ตามลำดับ (โดย m, n เป็นจำนวนเต็มบวก)

เมื่อแทนค่า $W(x, y)$ จากสมการ (3-23) ลงในสมการ (3-22) จะได้ผลเฉลยสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนอยู่ในรูปของผลเฉลยแม่นยำคือ

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\rho_0 a^4} \left[\left(D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(mnR)^2 + D_{22} (nR)^4 \right) \right] \quad (3-24)$$

โดย R เป็นขนาดสัดส่วนของชิ้นงานซึ่งหาได้จาก $R = a/b$

ω_{mn} คือ ค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับโหมด (m, n)

สมการ (3-24) และสมการ (3-12) เป็นผลเฉลยแม่นยำที่อยู่ในรูป closed form สำหรับปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตร ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านเท่านั้น สำหรับชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในแบบอื่น ๆ หรือมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ นอกเหนือจาก 0° หรือ 90° จะไม่สามารถหาการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานในรูปของผลเฉลยแม่นยำที่อยู่ในรูป closed form ได้ ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางที่มีการจับยึดในแบบต่าง ๆ และการเรียงตัวของเส้นใยด้วยมุมต่าง ๆ กัน ในวิทยานิพนธ์นี้จะวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

3.3 การวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นวิธีกึ่งเชิงวิเคราะห์กึ่งเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่สามารถประมาณค่าการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบาง โดยอาศัยหลักการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแปลงสมการครอบคลุมที่เป็นเงื่อนไขของพลังงานศักย์รวมจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด พลังงานศักย์รวมของแผ่นคอมโพสิตบางประกอบด้วยพลังงานศักย์ที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุหรือพลังงานความเครียด (Strain energy, U) และพลังงานศักย์ที่เกิดเนื่องจากภาวะในแนวระนาบ (Potential energy from in-plane loads, V) โดยพลังงานศักย์รวมของแผ่นคอมโพสิตบางหาได้ดังนี้

1. พลังงานความเครียด [27]

พลังงานความเครียดของโครงสร้างแผ่นบางที่รับภาวะในแนวระนาบ คือ

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \quad (3-25)$$

จากสมมติฐานเบื้องต้นที่ใช้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของโครงสร้างแผ่นบาง ที่ว่า $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นลามิनाชั้นที่ k พลังงานความเครียดสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_x^2 + \bar{Q}_{22}^{(k)} \varepsilon_y^2 + \bar{Q}_{66}^{(k)} \gamma_{xy}^2 + 2\bar{Q}_{12}^{(k)} \varepsilon_x \varepsilon_y + 2\bar{Q}_{16}^{(k)} \varepsilon_x \gamma_{xy} + 2\bar{Q}_{26}^{(k)} \varepsilon_y \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (3-26)$$

เมื่อแทนค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดลงในสมการ (3-26) แล้วอินทิเกรตในทิศ z จะได้พลังงานความเครียดของแผ่นคอมโพสิตในรูป

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\
+ A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2B_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
- 2B_{16} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - 2B_{26} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\
- 4B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\
\left. + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{3-27}$$

2. พลังงานศักย์จากภาวะในแนวระนาบ [27]

สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่รับภาวะในแนวระนาบ พลังงานศักย์ที่เกิดจากภาวะในแนวระนาบเขียนได้เป็น

$$V = \frac{1}{2} \iint N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \tag{3-28}$$

สำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตร ซึ่งมีค่า $B_{ij} = 0$ นอกจากนี้ การเคลื่อนที่ในแนวระนาบ u, v มีค่าเท่ากับศูนย์และไม่มีผลกับการหาภาวะการโก่งงอ ทำให้พจน์ที่มี A_{ij} ในสมการ (3-27) มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นคือ

$$\Pi = U + V$$

แทนค่า U และ V สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\
\left. + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy
\end{aligned} \tag{3-29}$$

โดย w คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด

การแก้ปัญหาคงการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชทำได้โดยสมมุติให้ผลเฉลยของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x, y)$ อยู่ในรูป

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^N X_i(x)Y_i(y) = \{X\}^T \{Y\} \tag{3-30}$$

โดย $w(x, y)$ คือ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ

N คือ จำนวนพจน์ในสมการการเคลื่อนที่

$X_i(x)$ คือ ฟังก์ชันของ x อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$

$Y_i(y)$ คือ ฟังก์ชันของ y อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$

การหาการโก่งงอและการเคลื่อนที่นอกระนาบที่อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ ทำได้โดยสมมุติให้ฟังก์ชันในทิศ y หรือ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า เพื่อหาค่าฟังก์ชัน $X_i(x)$ หรือสมมุติค่าฟังก์ชันในทิศ x หรือ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเพื่อหาค่าฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ก็ได้เช่นกัน เมื่อแทนค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบตามสมการที่ (3-30) ลงในสมการที่ (3-29) สมการพลังงานรวมที่มีการสมมุติค่า $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^a (D_{11} \{X_{,xx}\}^T [S_1] \{X_{,xx}\} + 2D_{12} \{X_{,xx}\}^T [S_2] \{X\} + D_{22} \{X\}^T [S_4] \{X\} \\ & + 4D_{66} \{X_{,x}\}^T [S_6] \{X_{,x}\} + 4D_{16} \{X_{,xx}\}^T [S_3] \{X_{,x}\} + 4D_{26} \{X\}^T [S_5] \{X_{,x}\} \\ & - N_x \{X_{,x}\}^T [S_1] \{X_{,x}\} - N_y \{X\}^T [S_6] \{X\} - 2N_{xy} \{X_{,x}\}^T [S_3] \{X\}) dx \end{aligned} \tag{3-31}$$

$$\begin{aligned}
[S_1] &= \int_0^b \{Y\} \{Y\}^T dy & [S_4] &= \int_0^b \{Y_{,yy}\} \{Y_{,yy}\}^T dy \\
\text{โดย } [S_2] &= \int_0^b \{Y\} \{Y_{,yy}\}^T dy & [S_5] &= \int_0^b \{Y_{,yy}\} \{Y_{,y}\}^T dy \\
[S_3] &= \int_0^b \{Y\} \{Y_{,y}\}^T dy & [S_6] &= \int_0^b \{Y_{,y}\} \{Y_{,y}\}^T dy
\end{aligned} \tag{3-32}$$

เมื่อใช้หลักการค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมโดยการแปรผันของพลังงานศักย์รวม หรือ $\delta\Pi = 0$ จากวิทยานิพนธ์ของ ธนาวุฒิ เวชภูยานนท์ [26] จะได้สมการครอบคลุมจากการพิจารณาพิกัดไร้มิติ

($\xi = \frac{x}{a}$) คือ

$$\begin{aligned}
\{X_{,zzzz}\} + [A_1]\{X_{,zzz}\} + [A_2]\{X_{,zz}\} + [A_3]\{X_{,z}\} + [A_4]\{X\} \\
- \lambda_x [A_5]\{X_{,zz}\} - \lambda_{xy} [A_6]\{X_{,z}\} - \lambda_y [A_7]\{X\} = \{0\}
\end{aligned} \tag{3-39}$$

$$[A_1] = \frac{2D_{16}}{D_{11}} a [S_1]^{-1} ([S_3] - [S_3]^T)$$

$$[A_2] = \frac{a^2}{D_{11}} [S_1]^{-1} (D_{12} ([S_2] + [S_2]^T) - 4D_{66} [S_6]^T)$$

$$[A_3] = \frac{2D_{26} a^3}{D_{11}} [S_1]^{-1} ([S_5] - [S_5]^T)$$

$$\text{โดย } [A_4] = \frac{D_{22} a^4}{D_{11}} [S_1]^{-1} [S_4]^T \tag{3-40}$$

$$[A_5] = -[I]$$

$$[A_6] = -[S_1]^{-1} ([S_3] - [S_3]^T) a$$

$$[A_7] = [S_1]^{-1} [S_6]^T a^2$$

และ λ_x, λ_y และ λ_{xy} เป็นค่าภาระในแนวระนาบไร้มิติ (normalized in-plane forces) นิยามไว้ดังนี้

$$\lambda_x = \frac{N_x a^2}{D_{11}} \quad \lambda_y = \frac{N_y a^2}{D_{11}} \quad \lambda_{xy} = \frac{N_{xy} a^2}{D_{11}} \tag{3-41}$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องของในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\xi = 0$ และ $\xi = 1$ ดังนี้

$$([A_8]\{X_{,zz}\} + [A_9]\{X_{,z}\} + [A_{10}]\{X\}) \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{3-42}$$

หรือ

$$\{X_{,\xi}\}_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \quad (3-43)$$

และ

$$\begin{aligned} & ([A_{11}]\{X_{,\xi\xi\xi}\} + [A_{12}]\{X_{,\xi\xi}\} + ([A_{13}] - \lambda_x [A_{14}])\{X_{,\xi}\} \\ & + ([A_{15}] - \lambda_{xy} [A_{16}])\{X\})_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \end{aligned} \quad (3-44)$$

หรือ

$$\{X\}_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \quad (3-45)$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-42) และ (3-45)

กรณีการจับยึดแบบจับแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-43) และ (3-45)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-42) และ (3-44)

โดย

$$\begin{aligned} [A_8] &= \frac{D_{11}[S_1]}{a^2} & [A_{13}] &= \frac{4D_{66}[S_6]^T - D_{12}[S_2]}{a} \\ [A_9] &= \frac{2D_{16}[S_3]}{a} & [A_{14}] &= \frac{D_{11}[S_1]}{a^3} \\ [A_{10}] &= D_{12}[S_2] & [A_{15}] &= 2D_{26}[S_5]^T \\ [A_{11}] &= \frac{-D_{11}[S_1]}{a^3} & [A_{16}] &= \frac{D_{11}[S_3]}{a^2} \\ [A_{12}] &= \frac{-2D_{16}([S_3] - [S_3]^T)}{a^2} \end{aligned} \quad (3-46)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าสมมุติค่า $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าและแทนภาวะการโก่งงอตามสมการที่

(3-30) ลงในสมการที่ (3-29) จะได้สมการครอบคลุมโดยพิจารณาในพิกัดไร้มิติ ($\eta = \frac{y}{b}$) เป็น

$$\begin{aligned} & \{Y_{,mmn}\} + [B_1]\{Y_{,mn}\} + [B_2]\{Y_{,m}\} + [B_3]\{Y_{,n}\} + [B_4]\{Y\} \\ & - \alpha_y [B_5]\{Y_{,m}\} - \alpha_{xy} [B_6]\{Y_{,n}\} - \alpha_x [B_7]\{Y\} = \{0\} \end{aligned} \quad (3-48)$$

โดย

$$\begin{aligned}
[B_1] &= \frac{2D_{26}}{D_{22}} b [R_1]^{-1} ([R_3] - [R_3]^T) \\
[B_2] &= \frac{b^2}{D_{22}} [R_1]^{-1} (D_{12} ([R_2] + [R_2]^T) - 4D_{66} [R_6]^T) \\
[B_3] &= \frac{2D_{16}b^3}{D_{22}} [R_1]^{-1} ([R_5] - [R_5]^T) \\
[B_4] &= \frac{D_{11}b^4}{D_{22}} [R_1]^{-1} [R_4]^T \\
[B_5] &= -[I] \\
[B_6] &= -[R_1]^{-1} ([R_3] - [R_3]^T) b \\
[B_7] &= [R_1]^{-1} [R_6]^T b^2
\end{aligned} \tag{3-49}$$

และ α_x, α_y และ α_{xy} นิยามไว้ดังนี้

$$\alpha_x = \frac{N_x b^2}{D_{22}} \quad \alpha_y = \frac{N_y b^2}{D_{22}} \quad \alpha_{xy} = \frac{N_{xy} b^2}{D_{22}} \tag{3-50}$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\eta = 0$ และ $\eta = 1$ ดังนี้

$$([B_8] \{Y_{,mm}\} + [B_9] \{Y_{,n}\} + [B_{10}] \{Y\}) \Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{3-51}$$

หรือ

$$\{Y_{,n}\} \Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{3-52}$$

และ

$$\begin{aligned}
&([B_{11}] \{Y_{,mmm}\} + [B_{12}] \{Y_{,mn}\} + ([B_{13}] - \alpha_y [B_{14}]) \{Y_{,n}\} \\
&+ ([B_{15}] - \alpha_{xy} [B_{16}]) \{Y\}) \Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\}
\end{aligned} \tag{3-53}$$

หรือ

$$\{Y\} \Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{3-54}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-51) และ (3-54)

กรณีการจับยึดแบบจับแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-52) และ (3-54)

กรณีที่ชอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-51) และ (3-53)

$$\begin{aligned}
 [B_8] &= \frac{D_{22} [R_1]}{b^2} & [B_{13}] &= \frac{4D_{66} [R_6]^T - D_{12} [R_2]}{b} \\
 [B_9] &= \frac{2D_{26} [R_3]}{b} & [B_{14}] &= \frac{D_{22} [R_1]}{b^3} \\
 \text{โดย} \quad [B_{10}] &= D_{12} [R_2] & [B_{15}] &= 2D_{16} [R_5]^T & (3-55) \\
 [B_{11}] &= \frac{-D_{22} [R_1]}{b^3} & [B_{16}] &= \frac{D_{22} [R_3]}{b^2} \\
 [B_{12}] &= \frac{-2D_{26} ([R_3] - [R_3]^T)}{b^2}
 \end{aligned}$$

สมการ (3-39) และ (3-48) เป็นสมการอนุพันธ์ลำดับที่สี่ซึ่งไม่สามารถหาคำตอบที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงได้ วิทยานิพนธ์ของ ธนาวุฒิ [26] นำวิธีอนุกรมกำลังมาแก้สมการอนุพันธ์ลำดับที่สี่ แต่การแก้ปัญหาด้วยวิธีอนุกรมกำลัง คำตอบของสมการจะมีความถูกต้องเมื่อจำนวนพจน์ของคำตอบในรูปของอนุกรมกำลังมีค่าสูงพอ และการใช้จำนวนพจน์มากทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรในการคำนวณ ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งซึ่งจะอธิบายไว้ในหัวข้อถัดไป

3.4 การวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

การแก้ปัญหการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางสามารถทำได้โดยวิเคราะห์พลังงานศักย์รวมเช่นเดียวกับปัญหาการโก่งงอ โดยพลังงานศักย์รวมสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนประกอบด้วยพลังงานศักย์ที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุหรือพลังงานความเครียด ตามสมการ (3-25) และพลังงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง (Kinetic energy, T) [27] ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (3-56)$$

เมื่อเป็นโครงสร้างแผ่นบางการเคลื่อนที่ในแนวระนาบ นั่นคือ u, v จะไม่มีผลต่อการสั่นสะเทือน และระยะการเคลื่อนที่นอกกระนาบ w แสดงในรูปฟังก์ชันของเวลาคือ

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{i\omega t} \tag{3-57}$$

สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตร ค่า $B_{ij} = 0$ เมื่อแทนสมการ (3-57) ลงในสมการ (3-56) จะได้พลังงานศักย์รวม ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned} \Pi &= U + T \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [D_{11}w_{,xx}^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}w_{,yy}^2 + 4D_{66}w_{,xy}^2 \\ &\quad + 4(D_{16}w_{,xx} + D_{26}w_{,yy})w_{,xy} - \rho h\omega^2 w^2] dx dy \end{aligned} \tag{3-58}$$

โดย w คือ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบ

ρ คือ ความหนาแน่นของแผ่น (มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร)

h คือ ความหนาของแผ่น

ω คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ

การแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช จะมีลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา เช่นเดียวกับการแก้ปัญหาการโก่งงอ กล่าวคือ ทำได้โดยสมมุติให้ฟังก์ชันในทิศ y หรือ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า เพื่อหาค่าฟังก์ชัน $X_i(x)$ ในทำนองเดียวกัน สมมุติค่าฟังก์ชันในทิศ x หรือ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเพื่อหาค่าฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ได้เช่นกัน สมการครอบคลุมสำหรับการสมมุติฟังก์ชันที่ทราบค่าทั้งสองกรณีเป็นดังนี้

กรณีสมมุติ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า คือ

$$\{X_{,\xi\xi\xi\xi}\} + [A_1]\{X_{,\xi\xi\xi}\} + [A_2]\{X_{,\xi\xi}\} + [A_3]\{X_{,\xi}\} + ([A_4] - \omega^2[A_5])\{X\} = \{0\} \tag{3-59}$$

โดย $\xi = \frac{x}{a}$ (พิจารณาในพิภดไร้มิติ)

$$\begin{aligned}
[A_1] &= \frac{2D_{16}}{D_{11}} a [S_1]^{-1} ([S_3] - [S_3]^T) \\
[A_2] &= \frac{a^2}{D_{11}} [S_1]^{-1} (D_{12} ([S_2] + [S_2]^T) - 4D_{66} [S_6]^T) \\
[A_3] &= \frac{2D_{26} a^3}{D_{11}} [S_1]^{-1} ([S_5] - [S_5]^T) \\
[A_4] &= \frac{D_{22} a^4}{D_{11}} [S_1]^{-1} [S_4]^T \\
[A_5] &= \frac{\rho h a^4}{D_{11}} [I]
\end{aligned} \tag{3-60}$$

เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\xi = 0$ และ $\xi = 1$ เป็นดังนี้

$$([A_6] \{X_{,\xi\xi}\} + [A_7] \{X_{,\xi}\} + [A_8] \{X\}) \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{3-61}$$

หรือ

$$\{X_{,\xi}\} \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{3-62}$$

และ

$$([A_9] \{X_{,\xi\xi\xi}\} + [A_{10}] \{X_{,\xi\xi}\} + [A_{11}] \{X_{,\xi}\} + [A_{12}] \{X\}) \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{3-63}$$

หรือ

$$\{X\} \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \{0\} \tag{3-64}$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-61) และ (3-64)

กรณีการจับยึดแบบจับแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-62) และ (3-64)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-61) และ (3-63)

$$\begin{aligned}
[A_6] &= \frac{D_{11}[S_1]}{a^2} & [A_{10}] &= \frac{-2D_{16}([S_3]-[S_3]^T)}{a^2} \\
[A_7] &= \frac{2D_{16}[S_3]}{a} & [A_{11}] &= \frac{4D_{66}[S_6]^T - D_{12}[S_2]}{a} \\
[A_8] &= D_{12}[S_2] & [A_{12}] &= 2D_{26}[S_5]^T \\
[A_9] &= \frac{-D_{11}[S_1]}{a^3} & &
\end{aligned} \tag{3-65}$$

กรณีสมมุติ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าสมการครอบคลุม คือ

$$\{Y_{,mm}\} + [B_1]\{Y_{,mm}\} + [B_2]\{Y_{,m\eta}\} + [B_3]\{Y_{,\eta}\} + ([B_4] - \omega^2[B_5])\{Y\} = \{0\} \tag{3-66}$$

โดย $\eta = \frac{y}{b}$ (พิจารณาในพิกัดไร้มิติ)

$$\begin{aligned}
[B_1] &= \frac{2D_{26}}{D_{22}} b [R_1]^{-1} ([R_3] - [R_3]^T) \\
[B_2] &= \frac{b^2}{D_{22}} [R_1]^{-1} (D_{12}([R_2] + [R_2]^T) - 4D_{66}[R_6]^T) \\
[B_3] &= \frac{2D_{16}b^3}{D_{22}} [R_1]^{-1} ([R_5] - [R_5]^T) \\
[B_4] &= \frac{D_{11}b^4}{D_{22}} [R_1]^{-1} [R_4]^T \\
[B_5] &= \frac{\rho h b^4}{D_{22}} [I]
\end{aligned} \tag{3-67}$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องของในพิกัดไร้มิติที่ตำแหน่ง $\eta = 0$ และ $\eta = 1$ ดังนี้

$$([B_6]\{Y_{,m\eta}\} + [B_7]\{Y_{,\eta}\} + [B_8]\{Y\})\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{3-68}$$

หรือ

$$\{Y_{,\eta}\}\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{3-69}$$

และ

$$([B_9]\{Y_{,mm}\} + [B_{10}]\{Y_{,m\eta}\} + [B_{11}]\{Y_{,\eta}\} + [B_{12}]\{Y\})\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \tag{3-70}$$

หรือ

$$\{Y\}_{\eta=0}^{\eta=1} = \{0\} \quad (3-71)$$

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-68) และ (3-71)

กรณีการจับยึดแบบจับแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-69) และ (3-71)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้คือ (3-68) และ (3-70)

$$\begin{aligned} \text{โดย} \quad [B_6] &= \frac{D_{22} [R_1]}{b^2} & [B_{10}] &= \frac{-2D_{26} ([R_3] - [R_3]^T)}{b^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \\ [B_7] &= \frac{2D_{26} [R_3]}{b} & [B_{11}] &= \frac{4D_{66} [R_6]^T - D_{12} [R_2]}{b} \\ [B_8] &= D_{12} [R_2] & [B_{12}] &= 2D_{16} [R_5]^T \\ [B_9] &= \frac{-D_{22} [R_1]}{b^3} \end{aligned} \quad (3-72)$$

ในทำนองเดียวกันกับปัญหาการโก่งอสมการ (3-59) และ (3-66) เป็นสมการอนุพันธ์ลำดับที่สี่ซึ่งไม่สามารถหาคำตอบที่เป็นผลเฉลยแน่นอนตรงได้ ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขในการแก้ระบบสมการซึ่งจะใช้วิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.5 วิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง[28]

ในการแก้ปัญหาการโก่งอและการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ลักษณะของสมการครอบคลุมที่ได้จะอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สี่ดังสมการที่ (3-39), (3-48), (3-59) และ (3-66) เทคนิคการแก้สมการอนุพันธ์ลำดับที่สี่เทคนิคหนึ่งคือการแปลงระบบสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง ซึ่งจะเป็นวิธีที่นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้

การแปลงระบบสมการอนุพันธ์ลำดับสูง ๆ ให้เป็นอนุพันธ์ลำดับหนึ่งทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างการคำนวณที่ 3-1 พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สามจำนวนสามสมการที่มีฟังก์ชันที่ต้องการหาค่า 3 ฟังก์ชันคือ $x_1(t)$, $x_2(t)$ และ $x_3(t)$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{d^3 x_1}{dt^3} + 4x_2 &= x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \frac{dx_3}{dt} &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

การแก้ระบบสมการข้างต้นโดยวิธีการแปลงให้เป็นสมการอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งทำได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 จากระบบสมการ x_1 อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่สาม x_2 อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง และ x_3 อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่สอง จึงกำหนดตัวแปรเพื่อแทนค่าอนุพันธ์ลำดับต่าง ๆ ดังนี้

$$K_1 = x_1, K_2 = \frac{dx_1}{dt}, K_3 = \frac{d^2 x_1}{dt^2}, K_4 = x_2, K_5 = x_3, K_6 = \frac{dx_3}{dt}$$

เนื่องจากอนุพันธ์ลำดับสูงสุดของ x_1 ในสมการข้างต้นคืออันดับสาม ดังนั้นจะต้องกำหนดค่า K_i ต่ำลงมาหนึ่งอันดับคืออันดับสอง ในทำนองเดียวกันกับการกำหนดค่า K_i ของ x_2 และ x_3 ต้องกำหนดให้ลดลงมาหนึ่งอันดับเช่นเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 2 นำตัวแปร K_i ที่กำหนดแทนลงในระบบสมการทั้งสามแล้วเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งดังนี้

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ \vdots \\ K_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ \vdots \\ K_n \end{Bmatrix} \quad (3-73)$$

หรือ $\dot{K} = AK$ (A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์)

จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สามข้างต้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการที่ (3-73) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} K_2 \\ K_3 \\ K_5 - 4K_4 \\ K_1 \\ K_6 \\ K_1 + K_4 - K_6 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 3 สมมติคำตอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งให้อยู่ในรูปของค่าเจาะจง

(eigenvalue, λ) และ เวกเตอร์เจาะจง (eigenvector, \hat{K}) ดังนี้

$$K(t) = \hat{K}e^{\lambda t} \quad (3-74)$$

เขียนคำตอบเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$K(t) = \begin{Bmatrix} K_1(t) \\ K_2(t) \\ \vdots \\ K_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{K}_1 \\ \hat{K}_2 \\ \vdots \\ \hat{K}_n \end{Bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{Bmatrix} \hat{K}_1 e^{\lambda t} \\ \hat{K}_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \hat{K}_n e^{\lambda t} \end{Bmatrix}$$

และหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\dot{K}(t) = \left\{ \hat{K} \right\} \lambda e^{\lambda t}$$

ขั้นตอนที่ 4 นำสมการและอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการ (3-74) แทนลงในสมการ (3-73) ดังนี้

$$\lambda \begin{Bmatrix} \hat{K}_1 e^{\lambda t} \\ \hat{K}_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \hat{K}_n e^{\lambda t} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \hat{K}_1 e^{\lambda t} \\ \hat{K}_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \hat{K}_n e^{\lambda t} \end{Bmatrix}$$

เขียนให้อยู่ในรูปผลคูณเอกลักษณ์เมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{K}_1 e^{\lambda t} \\ \hat{K}_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \hat{K}_n e^{\lambda t} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \hat{K}_1 e^{\lambda t} \\ \hat{K}_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \hat{K}_n e^{\lambda t} \end{Bmatrix} \quad (3-75)$$

พจน์ $e^{\lambda t}$ ปรากฏอยู่ที่ทั้งสองข้างของสมการ สามารถตัดกันออกไปได้ (cancel out) สมการ (3-75)

จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$(A - \lambda I) \hat{K} = 0 \quad (3-76)$$

จากสมการ(3-76)เป็นสมการพีชคณิตเชิงเส้น ดังนั้นสามารถหาค่าเจาะจง (eigenvalue, λ) และค่าเวกเตอร์เจาะจง (eigenvector, \hat{K}) ได้จากสมการ

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3-77)$$

ค่าเจาะจง λ เป็นรากคำตอบของสมการที่(3-77) จำนวนของค่าเจาะจง λ ขึ้นอยู่กับขนาดของเมทริกซ์ A ถ้าเมทริกซ์ A มีขนาดเท่ากับ $n \times n$ ค่าเจาะจง λ จะมีจำนวนเท่ากับ n ตัว จากนั้นนำค่าเจาะจง λ แต่ละตัวมาหาค่าเวกเตอร์เจาะจง \hat{K} นำค่าทั้งสองแทนลงในสมการ (3-74) จะได้คำตอบของสมการ คือ

$$\{K_n(t)\} = C_1 \left\{ \hat{K}_1 \right\} e^{\lambda_1 t} + C_2 \left\{ \hat{K}_2 \right\} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \left\{ \hat{K}_n \right\} e^{\lambda_n t} \quad (3-78)$$

การหาค่าสัมประสิทธิ์ C_n ทำได้โดยนำคำตอบของสมการแทนลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต

จากตัวอย่างโจทย์ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สาม สามารถหาค่าเจาะจง (eigenvalue, λ) และค่าเวกเตอร์เจาะจง (eigenvector, \hat{K}) ได้ดังนี้

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0.93287 - 1.00627i, \quad \lambda_3 = -1.057750 - 1.00384i$$

$$\lambda_4 = -1.05775 + 1.00384i, \quad \lambda_5 = 0.93287 + 1.00627i, \quad \lambda_6 = 0.24976$$

และ

$$\begin{aligned} \{\hat{K}_1\} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \{\hat{K}_2\} = \begin{bmatrix} 0.93287 - 1.00627i \\ -0.14233 - 1.87744i \\ -2.02199 - 1.06819i \\ 1 \\ 0.49546 + 0.53445i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{\hat{K}_3\} = \begin{bmatrix} -1.05775 - 1.00384i \\ 0.11114 + 2.12362i \\ 2.01421 - 2.35783i \\ 1 \\ -0.49741 + 0.47206i \\ 1 \end{bmatrix} \\ \{\hat{K}_4\} &= \begin{bmatrix} -1.05775 + 1.00384i \\ 0.11114 - 2.12362i \\ 2.01421 + 2.35783i \\ 1 \\ -0.49741 - 0.47206i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{\hat{K}_5\} = \begin{bmatrix} 0.93287 + 1.00627i \\ -0.14233 - 1.87744i \\ -2.02199 + 1.06819i \\ 1 \\ 0.49546 - 0.53445i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{\hat{K}_6\} = \begin{bmatrix} 0.24976 \\ 0.06238 \\ 0.01558 \\ 1 \\ 4.00389 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นำค่าเฉพาะจาง (λ) และค่าเวกเตอร์เฉพาะจาง (\hat{K}) ที่ได้ แทนลงในสมการที่ 3-78 ซึ่งตัวแปรที่ต้องการหาค่าคือ $x_1(t)$, $x_2(t)$ และ $x_3(t)$ จากขั้นตอนที่ 1 ได้กำหนดตัวแปรให้ $K_1 = x_1$, $K_4 = x_2$, $K_5 = x_3$ เมื่อแทนค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} K_1 = x_1(t) &= -C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot (0.93287 - 1.00627i) \cdot e^{(0.93287 - 1.00627i)t} \\ &+ C_3 \cdot (-1.05775 - 1.00384i) \cdot e^{(-1.05775 - 1.00384i)t} \\ &+ C_4 \cdot (-1.05775 + 1.00384i) \cdot e^{(-1.05775 + 1.00384i)t} \\ &+ C_5 \cdot (0.93287 + 1.00627i) \cdot e^{(0.93287 + 1.00627i)t} + C_6 \cdot (0.24976) \cdot e^{(0.24976)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4 = x_2(t) &= C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{(0.93287 - 1.00627i)t} + C_3 \cdot e^{(-1.05775 - 1.00384i)t} \\ &+ C_4 \cdot e^{(-1.05775 + 1.00384i)t} + C_5 \cdot e^{(0.93287 + 1.00627i)t} + C_6 \cdot e^{(0.24976)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_5 = x_3(t) &= C_1 \cdot (5) \cdot e^{-t} + C_2 \cdot (0.49546 + 0.53445i) \cdot e^{(0.93287 - 1.00627i)t} \\ &+ C_3 \cdot (-0.49741 + 0.47206i) \cdot e^{(-1.05775 - 1.00384i)t} \\ &+ C_4 \cdot (-0.49741 - 0.47206i) \cdot e^{(-1.05775 + 1.00384i)t} \\ &+ C_5 \cdot (0.49546 - 0.53445i) \cdot e^{(0.93287 + 1.00627i)t} + C_6 \cdot (4.00389) \cdot e^{(0.24976)t} \end{aligned}$$

จากนั้น นำคำตอบที่ได้แทนลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตเพื่อหาค่า C_1 ถึง C_6 ได้

3.6 การประยุกต์วิธีการแปลงระบบสมการกับปัญหาการโก่งงอ

สำหรับปัญหาการโก่งงอเนื่องจากแรงกระทำในแกน x เพียงแกนเดียวบนแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{5s}$ และมีการจับยึดแบบ CSCS โดยที่แผ่นคอมโพสิตบางมีคุณสมบัติของวัสดุเป็นดังนี้ $E_1 = 31.18$ Msi $E_2 = 3.42$ Msi $G_{12} = 0.754$ Msi และ $\nu_{12} = 0.28$ มีขนาด $a = b = 10$ นิ้ว ความหนา $t = 0.091$ นิ้ว พิจารณาให้จำนวนพจน์เริ่มต้นของคำตอบมีเพียงพจน์เดียวดังนี้

$$w(\xi, \eta) = X(\xi)Y(\eta)$$

กำหนดให้ฟังก์ชัน $Y(\eta)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าซึ่งมีค่าเท่ากับ $(b^2\eta^2)$ จะได้สมการครอบคลุมเป็น

$$\frac{d^4 X}{d\xi^4} + A_1 \frac{d^3 X}{d\xi^3} + A_2 \frac{d^2 X}{d\xi^2} + A_3 \frac{dX}{d\xi} + A_4 X - \lambda_x A_5 \frac{d^2 X}{d\xi^2} = 0$$

$$\text{โดย } \lambda_x = \frac{N_x a^2}{D_{11}}$$

จากโจทย์ ต้องการหาค่า λ_x และค่า X ในรูปของฟังก์ชัน ξ ซึ่งสามารถหาได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้ K_i แทนอนุพันธ์ของตัวแปร X เพื่อจะแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง จากสมการครอบคลุมมีค่าอนุพันธ์สูงสุดเท่ากับ 4 การกำหนดตัวแปร K_i จะต้องกำหนดลดลงหนึ่งอันดับคือเท่ากับ 3 ดังนี้

$$K_1 = X, K_2 = \frac{dX}{d\xi}, K_3 = \frac{d^2 X}{d\xi^2}, K_4 = \frac{d^3 X}{d\xi^3}$$

ขั้นตอนที่ 2 เขียนค่า K_i ให้อยู่ในระบบสมการอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตามสมการ(3-74) โดยใช้ความสัมพันธ์จากสมการครอบคลุม จะได้ความสัมพันธ์ในรูป

$$\frac{d}{d\xi} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ -A_1 K_4 + (\lambda_x A_5 - A_2) K_3 - A_3 K_2 - A_4 K_1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -A_4 & -A_3 & \lambda_x A_5 - A_2 & -A_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{Bmatrix}$$

ได้เมทริกซ์ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ดังนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -A_4 & -A_3 & \lambda_x A_5 - A_2 & -A_1 \end{bmatrix}$$

เมื่อแทนค่า A_i จากสมการที่ (3-40) ได้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ดังนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -393.1457 & 0 & -0.08145\lambda_x + 3.0965 & 0 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาค่าเจาะจง(eigenvalue, λ) และค่าเวกเตอร์เจาะจง(eigenvector, \hat{K}) จากสมการ

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

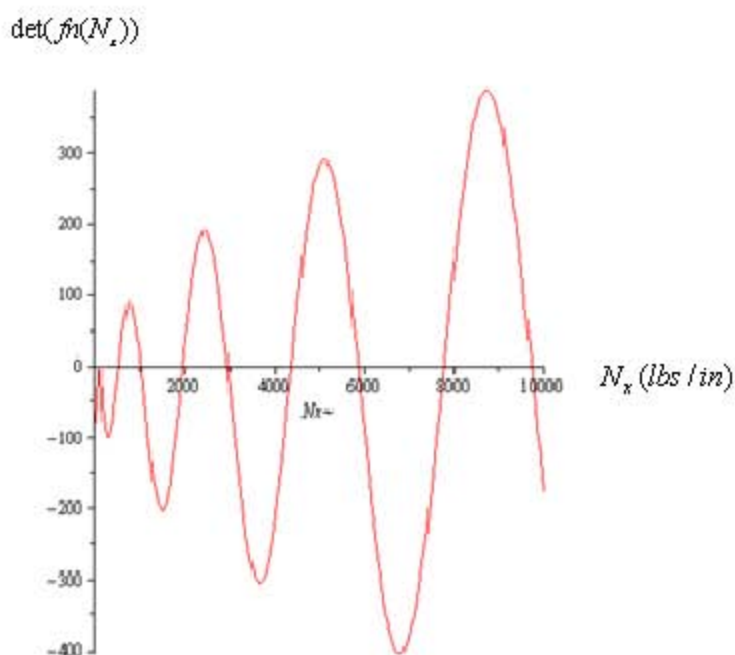
ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$\begin{aligned}
X(\xi) = & C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}(-0.16291N_x + 1.39818 - 2(((-0.08145N_x + 0.69909)^2 - 62.81292)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})\xi} \\
& + C_2 \cdot e^{\frac{1}{2}(-0.16291N_x + 1.39818 - 2(((-0.08145N_x + 0.69909)^2 - 62.81292)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})\xi} \\
& + C_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}(-0.16291N_x + 1.39818 + 2(((-0.08145N_x + 0.69909)^2 - 62.81292)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})\xi} \\
& + C_4 \cdot e^{\frac{1}{2}(-0.16291N_x + 1.39818 + 2(((-0.08145N_x + 0.69909)^2 - 62.81292)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})\xi}
\end{aligned}$$

โดยที่ค่าเจาะจง(eigenvalue)และค่าเวกเตอร์เจาะจง(eigenvector)เป็นฟังก์ชันของ N_x ดังนั้นเมื่อแทนคำตอบที่ได้ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSCS ทั้งสี่ด้านตามสมการที่ (3-43) และ (3-45) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} f_1(N_x) & f_2(N_x) & f_3(N_x) & f_4(N_x) \\ f_5(N_x) & f_6(N_x) & f_7(N_x) & f_8(N_x) \\ f_9(N_x) & f_{10}(N_x) & f_{11}(N_x) & f_{12}(N_x) \\ f_{13}(N_x) & f_{14}(N_x) & f_{15}(N_x) & f_{16}(N_x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-79)$$

สมการ(3-79) จะให้คำตอบที่มีความหมาย (non-trivial solution) เมื่อ $\det(f_n(N_x)) = 0$ ดังนั้นจึงสามารถแก้สมการหาค่าแรงโก่งงอ N_x ได้ รูป 3-5 แสดงกราฟ $\det(f_n(N_x))$ สำหรับค่า N_x ต่าง ๆ จะเห็นว่ามีความ N_x จำนวนอนันต์ค่าที่ทำให้ $\det(f_n(N_x))$ มีค่าเป็นศูนย์ สำหรับปัญหาการโก่งงอจะพิจารณาค่าต่ำสุดเป็นภาวะการโก่งงอ เนื่องจากเป็นภาวะต่ำสุดที่ทำให้เกิดการโก่งงอ จากรูปที่ 3-5 พบว่า N_x ต่ำสุดที่ค่า $\det(f_n(N_x))$ มีค่าเป็นศูนย์ คือ 507.89 lbs/in



ภาพที่ 3-5 แสดงกราฟดีเทอร์มิแนนต์ของสมการที่ (3-7)

จากนั้นนำภาวะการโก่งงอแทนลงในสมการ (3-79) ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้คือ $C_1 = 1$ $C_2 = -1$

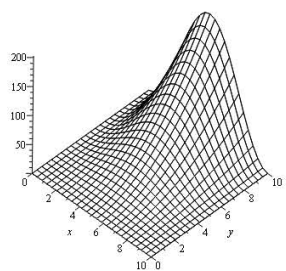
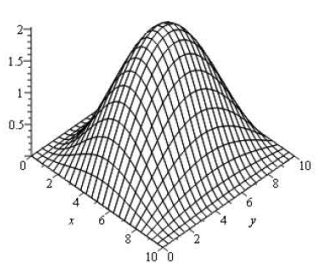
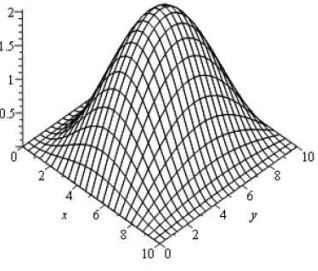
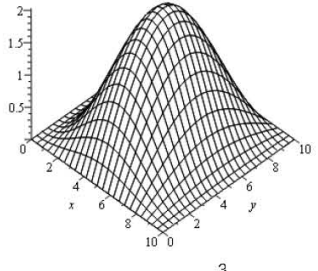
$C_3 = 0.32274$ และ $C_4 = -0.03175$ จึงได้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ในแนวแกน x คือ

$$X(\xi) = \cos(0.62438 \xi) - \cos(0.63467 \xi) + 0.32274 \sin(0.62438 \xi) - 0.03175 \sin(0.63467 \xi)$$

เมื่อได้คำตอบ $X(\xi)$ และ N_x สำหรับการคำนวณครั้งแรก จากนั้นนำคำตอบที่ได้ไปคำนวณหา $Y(\eta)$ ในการคำนวณครั้งที่สอง ตารางที่ 3-1 แสดงผลการคำนวณกลับไปกลับมา 4 ครั้งแรก สองคอลัมน์แรกของตารางแสดงผลการคำนวณภาวะการโก่งงอและ $X(\xi)$ สองคอลัมน์ถัดมาแสดงผลการคำนวณภาวะการโก่งงอและ $Y(\eta)$ การคำนวณครั้งที่หนึ่งเริ่มต้นโดยการสมมุติฟังก์ชัน $Y(\eta)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าซึ่งมีค่าเท่ากับ y^2 หรือ $b^2 \eta^2$ เพื่อหาค่าของฟังก์ชัน $X(\xi)$ และภาวะการโก่งงอ จากการคำนวณครั้งที่หนึ่งได้ภาวะการโก่งงอเท่ากับ 5.82987×10^3 lbs/in และฟังก์ชันการเคลื่อนที่ในแนวแกน x เท่ากับ $X_1(\xi)$ ทำนองเดียวกันในการคำนวณครั้งที่สองเริ่มต้นโดยการสมมุติฟังก์ชัน $X(\xi)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าซึ่งมีค่าเท่ากับ $X_1(\xi)$ ได้ค่าภาวะในการโก่งงอครั้งที่

สองเท่ากับ 6.50049×10^3 lbs/in และฟังก์ชันการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ครั้งที่สองเท่ากับ $Y_1(\eta)$ ทำกลับไปกลับมาจนกระทั่งคำตอบของภาวะการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอเข้าสู่ จะเห็นได้ว่า คำตอบเข้าสู่อย่างรวดเร็วจากการคำนวณกลับไปกลับมาเพียงสี่ครั้ง ได้ภาวะการโก่งงอจากการคำนวณครั้งที่สามและครั้งที่สี่เท่ากันคือ $N_x = 6.49876 \times 10^3$ lbs/in แสดงว่าผลของคำตอบที่ได้เข้าสู่ค่า ๆ หนึ่งและจะไม่เปลี่ยนแปลงแม้จะเพิ่มจำนวนครั้งในการคำนวณขึ้น ผลของคำตอบที่ได้ จึงมีความถูกต้องและแม่นยำเนื่องจากผลของวิธีการคำนวณกลับไปกลับมา อีกทั้งการสมมุติ ฟังก์ชันเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าไม่จำเป็นต้องสมมุติฟังก์ชันให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต ของปัญหาเพราะการคำนวณแบบกลับไปกลับมาจะทำให้คำตอบเข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องเอง จึง เป็นข้อได้เปรียบสำหรับปัญหาที่ไม่สามารถคาดเดาคำตอบล่วงหน้าได้

ตารางที่ 3-1 การคำนวณแบบทำซ้ำสำหรับปัญหาการโก่งงอ

Iteration number	Buckling mode	Iteration number	Buckling mode
1. $\{Y\} = y^2$ $= b^2 \eta^2$	 $N_x = 5.82987 \times 10^3$ lbs/in $\{X\} = \{X_1\}$	2. $\{X\} = \{X_1\}$	 $N_x = 6.50049 \times 10^3$ lbs/in $\{Y\} = \{Y_1\}$
3- $\{Y\} = \{Y_1\}$	 $N_x = 6.49876 \times 10^3$ lbs/in $\{X\} = \{X_2\}$	4. $\{X\} = \{X_2\}$	 $N_x = 6.4987 \times 10^3$ lbs/in $\{Y\} = \{Y_2\}$

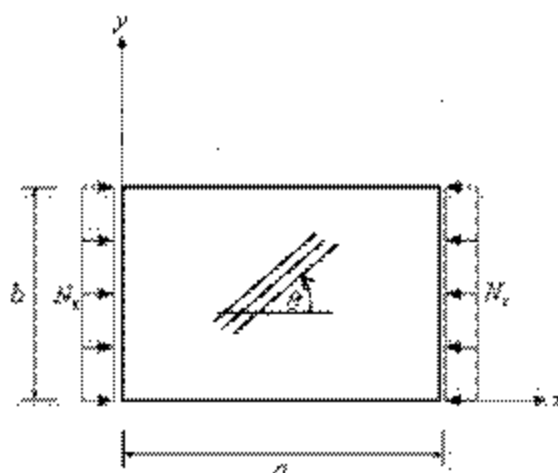
บทที่ 4

การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

จากขั้นตอนการตั้งสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการโค้งงอและการสั่นสะเทือนที่แสดงมาในบทก่อนหน้านี้รวมถึงแนวคิดในการแก้สมการด้วยหลักการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และวิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง พบว่ามีจำนวนตัวแปรและสมการที่เกี่ยวข้องจำนวนมาก และแต่ละสมการก็มีความซับซ้อน การแก้ปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำไปรวมคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการแก้สมการเพื่อความรวดเร็วในการคำนวณ เนื้อหาในบทนี้จะแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาคงอและการสั่นสะเทือนด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นอย่างละเอียด เนื่องจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในการแก้ปัญหานี้ทั้งสองมีลำดับขั้นตอนการดำเนินการที่คล้ายคลึงกัน ดังนั้นจึงจะอธิบายขั้นตอนการแก้ปัญหานี้ทั้งสองไปพร้อม ๆ กัน

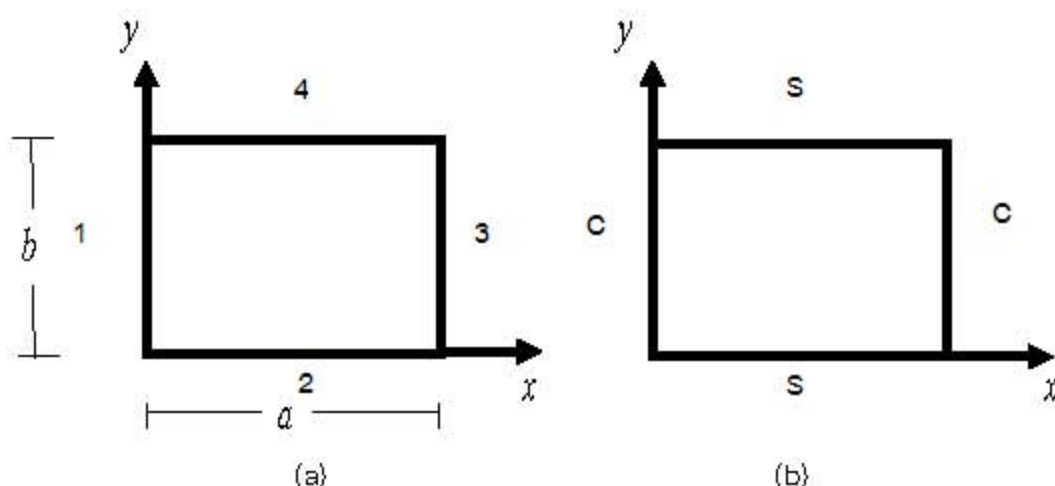
4.1 ลักษณะของปัญหาการโค้งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบาง

ในการคำนวณหาการโก่งงอหรือความถี่ธรรมชาติมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องหลายตัว แผ่นคอมโพสิตบางที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้วางตัวในแนวแกน x และแกน y โดยมีมิติของชิ้นงานในแนวแกน x มีขนาดเท่ากับ a หน่วย ในขณะที่มิติในแนวแกน y มีขนาดเท่ากับ b หน่วย ตามภาพที่ 4.1 สำหรับปัญหาการโค้งงอกำหนดให้ชิ้นงานรับแรงมีค่าเท่ากับ N_x ในแนวแกน x เพียงทิศเดียว ส่วนปัญหาการสั่นสะเทือนจะคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติจากค่าคุณสมบัติวัสดุของแผ่นคอมโพสิตบางโดยที่ไม่มีแรงใด ๆ มากระทำกับชิ้นงาน แผ่นคอมโพสิตบางมีการเรียงตัวของเส้นใยแต่ละชั้นทำมุมขนาด θ องศา กับแกน x



ภาพที่ 4.1 ลักษณะการวางตัวของแผ่นคอมโพสิตบาง

ดังที่กล่าวมาแล้วว่าโครงสร้างที่ศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่าย แบบจับแน่น หรือแบบปลายอิสระ ภาพที่ 4.2 แสดงอักขระย่อที่ใช้แสดงลักษณะการจับยึดและที่ขอบต่างๆของชิ้นงาน การแสดงเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดจะเรียงด้านตามลำดับของตัวเลข 1234 ในภาพที่ 4.1 (a) กล่าวคือลำดับที่ 1 คือขอบของแผ่นบางด้าน $(0, y)$ ลำดับที่ 2 คือขอบของแผ่นบางด้าน $(x, 0)$ ลำดับที่ 3 คือขอบของแผ่นบางด้าน (a, y) และลำดับที่ 4 คือขอบของแผ่นบางด้าน (x, b) ตัวอย่างเช่น แผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSCS หมายถึงชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตด้าน $(0, y)$ หรือด้านที่ 1 และด้าน (a, y) หรือด้านที่ 3 เป็นแบบจับยึดแน่น (C) และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่าย (S) บนด้าน $(x, 0)$ หรือด้านที่ 2 และด้าน (x, b) หรือด้านที่ 4 ตามรูปที่ 4.2 (b) หลังจากทราบวิธีการเรียงลำดับเงื่อนไขขอบเขตตามอักขระย่อแล้วในหัวข้อถัดไปจะอธิบายรายละเอียดของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นตามที่แสดงในภาคผนวก โดยค่าที่ต้องใส่ลงไปโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นก่อนการคำนวณคือค่าคุณสมบัติของแผ่นบางได้แก่ E_{11} E_{22} ν_{12} และ G_{12} ขนาดและความหนาของชิ้นงานได้แก่ a b และ t จำนวนลามีเนตและมุมการเรียงตัวของเส้นใยได้แก่ N และ θ ตามลำดับ



ภาพที่ 4.2 ลำดับการเรียงเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด

4.2 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการโค้งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางสามารถแบ่งได้เป็นสองกรณีคือ กรณีที่กำหนดให้ฟังก์ชัน $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าและกรณีที่กำหนดฟังก์ชัน $Y_j(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า ทั้งสองกรณีมีลำดับขั้นตอนการคำนวณที่เหมือนกัน ต่างกันเพียงฟังก์ชันที่ทราบค่าเริ่มต้นเป็นฟังก์ชัน $X_i(x)$ หรือฟังก์ชัน $Y_j(y)$ เท่านั้น ขั้นตอนการคำนวณตามโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถแบ่งได้เป็น 4 ส่วนใหญ่ๆ ดังแสดงในภาพที่ 4.3

ส่วนที่ 1 หลังจากการคำนวณหาเมทริกซ์ $[ABD]$ ที่ได้จากคุณสมบัติวัสดุและลักษณะการวางตัวของเส้นใยชั้นต่าง ๆ กำหนดให้ฟังก์ชัน $Y_j(y)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อคำนวณหาค่าเมทริกซ์ $[S_i] \& [A_i]$ ตามสมการที่ (3-32) และ (3-40) สำหรับปัญหาการโค้งงอและสมการที่ (3-50) และ (3-58) สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือน

ส่วนที่ 2 เป็นส่วนที่พิจารณาสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการโค้งงอหรือปัญหาการสั่นสะเทือน ในส่วนนี้จะเป็นส่วนที่แก้สมการครอบคลุมเพื่อหาค่าฟังก์ชัน $X_i(x)$ ด้วยวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง รายละเอียดวิธีการคำนวณได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3-6 แล้ว

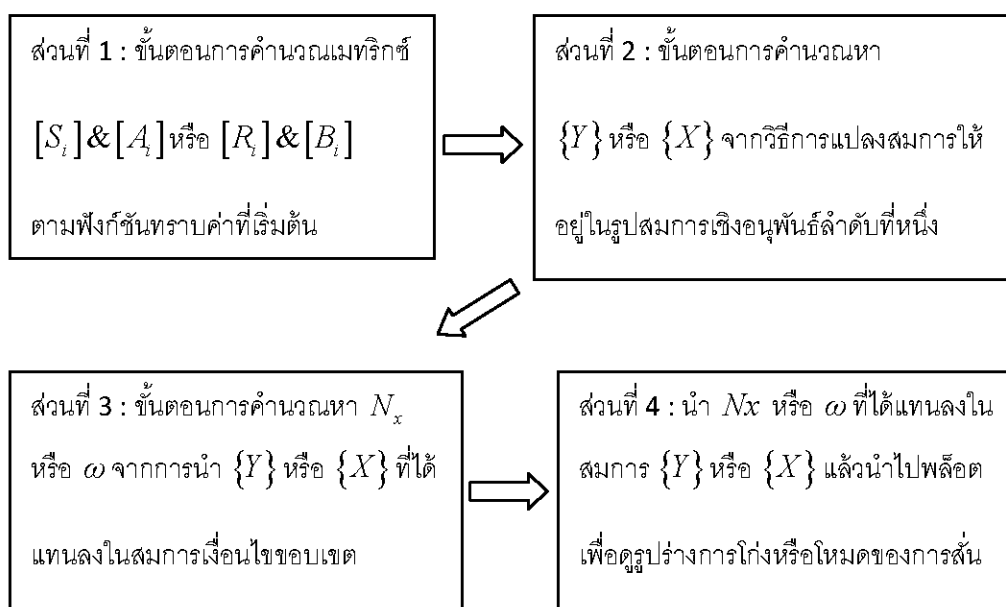
ส่วนที่ 3 เมื่อทราบค่า $\{X\}$ จากขั้นตอนโปรแกรมในภาคผนวกส่วนที่ 2 แล้ว นำคำตอบที่ได้แทนลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่พิจารณาเพื่อหาภาวะการโก่งงอ (N_x) หรือ ค่าความถี่ธรรมชาติ (ω) โดยที่ปัญหาการโก่งงอจะพิจารณาค่าภาวะที่น้อยที่สุดที่จากกราฟตามภาพที่ 4.4 ส่วนปัญหาการสั่นสะเทือนพิจารณาตามรูปร่างโหมดการสั่นที่สนใจ เช่น โหมดที่ 1 พิจารณาที่จุดตัดที่น้อยที่สุดหรือจุดตัดแรกเป็นค่าความถี่ธรรมชาติ โหมดที่ 2 พิจารณาจุดตัดลำดับถัดมาหรือจุดที่สองเป็นค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับโหมดที่ 2 ตามภาพที่ 4.5 สำหรับโหมดที่สูงขึ้นก็พิจารณา ค่าความถี่ธรรมชาติเป็นลำดับ ๆ ไป

ส่วนที่ 4 เมื่อทราบค่าภาวะการโก่งหรือค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับรูปร่างโหมดที่สนใจแล้ว นำคำตอบที่ได้แทนลงในสมการ $\{X\}$ เพื่อนำไปพล็อตดูรูปร่างการโก่งหรือโหมดของการสั่นสะเทือน

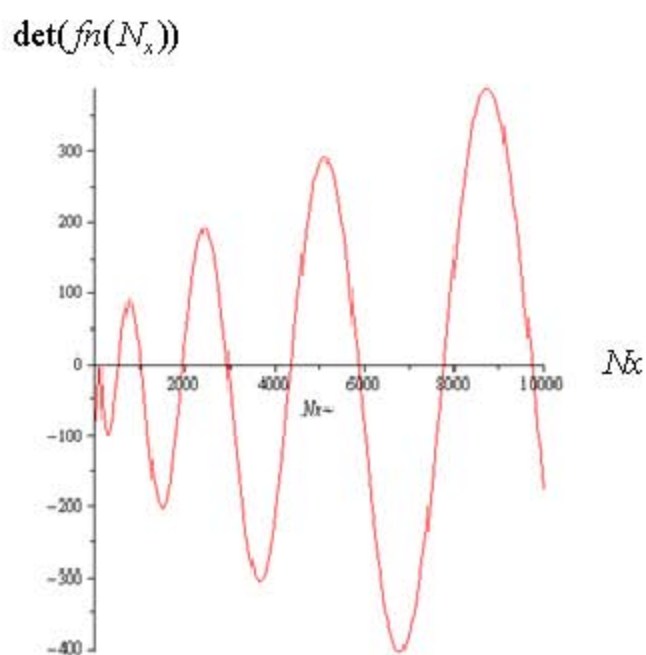
ในการทำงานเดียวกันถ้าสมมุติให้ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้น การคำนวณหาค่าเมทริกซ์ $[S_i] \& [A_i]$ ก็เปลี่ยนเป็นการคำนวณหาค่า $[R_i] \& [B_i]$ แทนตามสมการที่ (3-42) และ (3-46) สำหรับปัญหาการโก่งงอ และสมการที่ (3-56) และ (3-64) สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือน ขั้นตอนในการคำนวณจึงมีลักษณะดังแสดงในภาพที่ 4.4 เหมือนกับการสมมุติฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ทุกประการ ผลเฉลยที่ได้จากการกำหนดให้ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่าคือสมการการเคลื่อนที่นอกกระนาบ $\{Y\}$ จากสมการการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่สมมุติและที่ได้สามารถนำไปพล็อตดูรูปร่างการโก่งหรือโหมดการสั่นสะเทือนได้

หลังจากคำนวณตามโปรแกรมตามลำดับ นำฟังก์ชันที่ได้มาเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าในการคำนวณครั้งต่อไป ทำการคำนวณซ้ำไปซ้ำมาจนภาวะการโก่งงอหรือค่าความถี่ธรรมชาติเข้าสู่ค่า ๆ หนึ่งจนไม่เปลี่ยนแปลง คำตอบนั้นจึงจะเป็นคำตอบที่ถูกต้อง ปัญหาการโก่งงอจะกำหนดฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ หรือ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเพียงหนึ่งค่าเพื่อหาภาวะการโก่งงอในหนึ่งปัญหา แต่สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนเนื่องจากค่าความถี่ธรรมชาติที่ต้องการหามีหลายค่า และมีโหมดของการสั่นสะเทือนหลายโหมด การกำหนดฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ หรือ $Y_i(y)$ ในแต่ละครั้งจะสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดของการสั่นสะเทือนได้เพียงบางค่าที่สนใจเท่านั้น การจะหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดของการสั่นสะเทือนอื่น จำเป็นจะต้องเริ่มทำการคำนวณใหม่ตั้งแต่ต้นอีกครั้งหนึ่ง จนได้ค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดของการสั่นสะเทือนครบทุกโหมดที่สนใจ

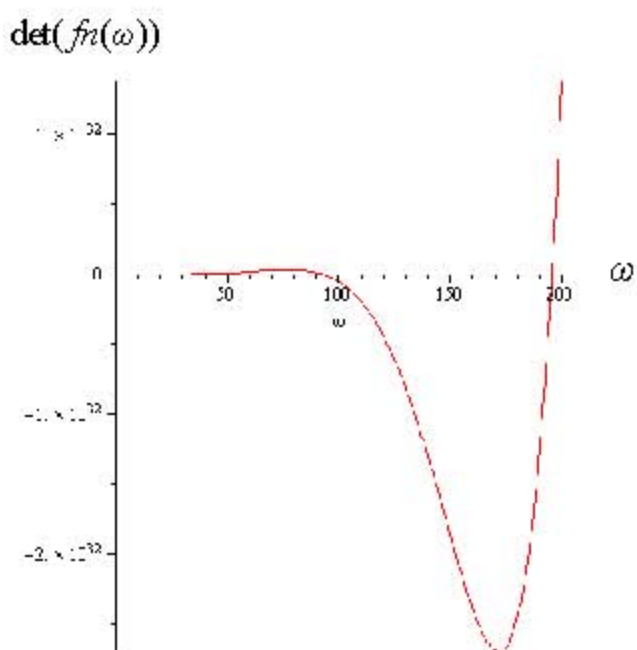
หรือในบางกรณีการกำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้นหนึ่งค่าอาจไม่สามารถคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติได้ครบทุกโหมดการสั่นสะเทือนที่ต้องการเนื่องจากการค่าฟังก์ชันที่สมมุติขึ้นไม่สามารถแสดงรูปร่างได้ครอบคลุมทั้งหมด จำเป็นต้องสมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นที่แตกต่างกันออกไป เพื่อให้สามารถหาค่าตอบได้ครบทุกโหมดการสั่นสะเทือน ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้ในการคำนวณแต่ละครั้งจะต้องนำมาเรียงลำดับจากน้อยไปหามากก่อนที่จะสามารถระบุได้ว่าค่าความถี่ธรรมชาติใดเป็นการสั่นสะเทือนโหมดที่เท่าไร



ภาพที่ 4-3 ขั้นตอนการคำนวณหาการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติตามภาคผนวก



ภาพที่ 4.4 แสดงกราฟดีเทอร์มิแนนต์ในการพิจารณาทหาระการโค้งงอ



ภาพที่ 4-5 แสดงกราฟดีเทอร์มิแนนต์ในการพิจารณาค่าความถี่ธรรมชาติ

4.3 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบาง

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางเนื่องจากแรงกระทำในแกน x เพียงแกนเดียวตามภาพที่ 4-1 กำหนดให้แผ่นบางมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{ss}$ และมีการจับยึดแบบ CSCS โดยที่วัสดุคอมโพสิทมีคุณสมบัติเชิงกลดังนี้ $E_1 = 31.18$ Msi $E_2 = 3.42$ Msi $G_{12} = 0.754$ Msi และ $\nu_{12} = 0.28$ มีขนาด $a = b = 10$ นิ้ว ความหนา $t = 0.091$ นิ้ว

จากตารางที่ 4-1 การคำนวณครั้งที่หนึ่งเริ่มต้นโดยการสมมติฟังก์ชัน $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าใส่ลงไปในโปรแกรมสำหรับการหาการโก่งงอโดยการให้ฟังก์ชัน $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในภาคผนวกซึ่งมีค่าเท่ากับ y^2 เพื่อหาค่าของฟังก์ชัน $X(x)$ และการโก่งงอ จากการคำนวณครั้งที่หนึ่งได้การโก่งงอเท่ากับ 5.82987×10^3 lbs/in และระยะโก่งในแนวแกน x เท่ากับ $X_1(x)$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$X_1(x) = C_1 \left\{ \hat{K}_1 \right\} e^{\lambda_1 x} + C_2 \left\{ \hat{K}_2 \right\} e^{\lambda_2 x} + C_3 \left\{ \hat{K}_3 \right\} e^{\lambda_3 x} + C_4 \left\{ \hat{K}_4 \right\} e^{\lambda_4 x}$$

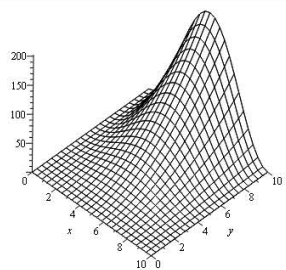
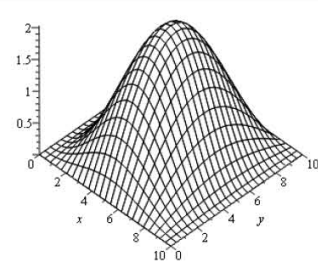
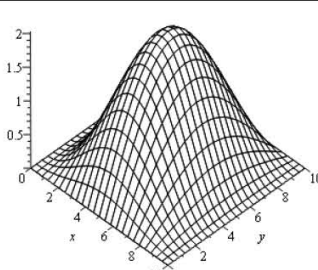
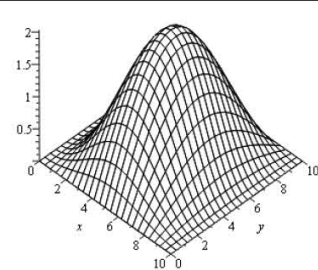
โดยที่ค่า C_n , \hat{K}_n และ λ_n เป็นตัวแปรที่หาได้จากโปรแกรมที่เขียนขึ้น จะเห็นได้ว่ารูปร่างการโก่งงอจากการคำนวณครั้งที่หนึ่งไม่ถูกต้องเพราะค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่สมมุติขึ้นไม่ถูกต้องตามเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด การคำนวณครั้งที่สองเริ่มต้นโดยการสมมติฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าซึ่งมีค่าเท่ากับ $X_1(x)$ โดยใช้โปรแกรมสำหรับการหาการโก่งงอโดยการให้ฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในภาคผนวก ได้ค่าการโก่งงอครั้งที่สองเท่ากับ 6.50049×10^3 lbs/in และระยะโก่งในแนวแกน y จากการคำนวณครั้งที่สองเท่ากับ $Y_1(y)$ อยู่ในรูปสมการ

$$Y_1(y) = C_1 \left\{ \hat{K}_1 \right\} e^{\lambda_1 y} + C_2 \left\{ \hat{K}_2 \right\} e^{\lambda_2 y} + C_3 \left\{ \hat{K}_3 \right\} e^{\lambda_3 y} + C_4 \left\{ \hat{K}_4 \right\} e^{\lambda_4 y}$$

โดยที่ค่า C_n , \hat{K}_n และ λ_n เป็นค่าที่ได้จากการคำนวณครั้งที่สอง ซึ่งมักจะมีค่าไม่เท่ากับค่าที่ได้จากการคำนวณครั้งแรก จะเห็นว่ารูปร่างการโก่งงอถูกต้องตามเงื่อนไขขอบเขตเพราะว่าค่าฟังก์ชันในแนวแกน x และแกน y ถูกต้องตามเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด เมื่อคำนวณกลับไปกลับมา

จนกระทั่งคำตอบของภาวะการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอเข้าสู่ค่าค่าหนึ่ง จะเห็นได้ว่าในตัวอย่างนี้คำตอบเข้าสู่อย่างรวดเร็วจากการคำนวณกลับไปกลับมาเพียงสี่ครั้ง ได้ภาวะการโก่งงอจากการคำนวณครั้งที่สามและครั้งที่สี่เท่ากันคือ $N_x = 6.49876 \times 10^3 \text{ lbs/in}$ แสดงว่าผลของคำตอบที่ได้เข้าสู่ค่า ๆ หนึ่งและจะไม่เปลี่ยนแปลงแม้จะเพิ่มจำนวนครั้งในการคำนวณขึ้น การสมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าไม่จำเป็นต้องสมมุติฟังก์ชันให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเพราะการคำนวณแบบกลับไปกลับมาจะทำให้คำตอบเข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องเอง

ตารางที่ 4-1 การคำนวณแบบทำซ้ำสำหรับปัญหาการโก่งงอ

Iteration number	Buckling mode	Iteration number	Buckling mode
1. $\{Y\} = y^2$ $= b^2 \eta^2$	 $N_x = 5.82987 \times 10^3 \text{ lbs/in}$ $\{X\} = \{X_1\}$	2. $\{X\} = \{X_1\}$	 $N_x = 6.50049 \times 10^3 \text{ lbs/in}$ $\{Y\} = \{Y_1\}$
3- $\{Y\} = \{Y_1\}$	 $N_x = 6.49876 \times 10^3 \text{ lbs/in}$ $\{X\} = \{X_2\}$	4. $\{X\} = \{X_2\}$	 $N_x = 6.4987 \times 10^3 \text{ lbs/in}$ $\{Y\} = \{Y_2\}$

4.4 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบาง

การแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนมีขั้นตอนคล้ายกับการแก้ปัญหาการโก่งงอซึ่งแสดงไว้ดังแผนผังในภาพที่ 4-3 ตัวอย่างที่ใช้แสดงขั้นตอนการหาค่าความถี่ธรรมชาติในหัวข้อนี้เป็นแผ่นคอมโพสิตที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ [0/90/0] ที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS โดยคุณสมบัติของวัสดุมีค่าดังนี้

$$E_1 = 131 \text{ GPa} \quad E_2 = 53.47 \text{ GPa} \quad G_{12} = 25.67 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.23$$

$$a = b = 10 \text{ m} \quad t = 0.06 \text{ m} \quad \rho = 8000 \text{ kg/m}^3$$

ตารางที่ 4-2 แสดงการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดที่หนึ่ง ซึ่งเริ่มต้นโดยการสมมุติฟังก์ชัน $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าและมีค่าเท่ากับ y^3 ไล่ลงในโปรแกรมสำหรับการหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยการให้ฟังก์ชัน $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในภาคผนวกเพื่อหาค่าของฟังก์ชัน $X(x)$ และค่าความถี่ธรรมชาติ จากการคำนวณครั้งที่หนึ่งได้ค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 30.89194 rad/s และระยะเวลาการเคลื่อนตัวแนวแกน x เท่ากับ $X_1(x)$ อยู่ในรูป

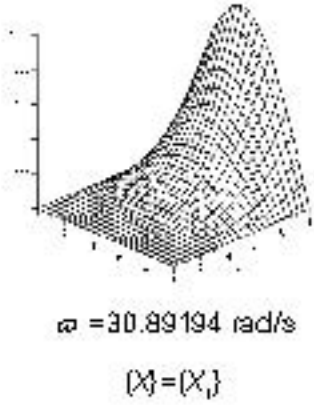
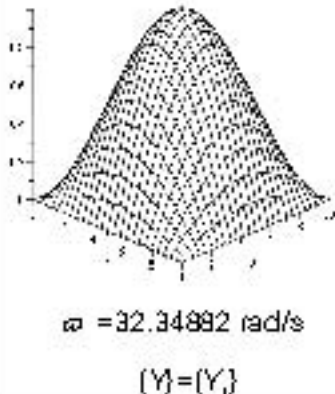
$$X_1(x) = C_1 \left\{ \hat{K}_1 \right\} e^{\lambda_1 x} + C_2 \left\{ \hat{K}_2 \right\} e^{\lambda_2 x} + C_3 \left\{ \hat{K}_3 \right\} e^{\lambda_3 x} + C_4 \left\{ \hat{K}_4 \right\} e^{\lambda_4 x}$$

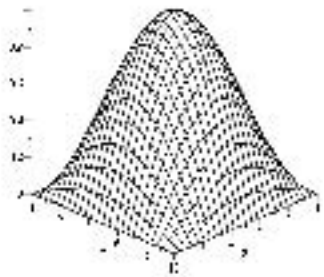
โดยที่ค่า C_n, K_n และ λ_n เป็นค่าคงที่ที่ทราบค่า จากการคำนวณจะได้รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนตามที่แสดงในคอลัมน์ที่สาม จะเห็นได้ว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนในการคำนวณครั้งแรกไม่ถูกต้องเพราะค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่สมมุติขึ้นยังไม่ถูกต้องตามเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด การคำนวณครั้งที่สองเริ่มต้นโดยการสมมุติฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าซึ่งมีค่าเท่ากับ $X_1(x)$ โดยใช้โปรแกรมสำหรับการหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยการให้ฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในภาคผนวก จะได้ค่าความถี่ธรรมชาติครั้งที่สองเท่ากับ 32.34822 rad/s และระยะเวลาการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ครั้งที่สองเท่ากับ $Y_1(y)$ อยู่ในรูป

$$Y_1(y) = C_1 \left\{ \hat{K}_1 \right\} e^{\lambda_1 y} + C_2 \left\{ \hat{K}_2 \right\} e^{\lambda_2 y} + C_3 \left\{ \hat{K}_3 \right\} e^{\lambda_3 y} + C_4 \left\{ \hat{K}_4 \right\} e^{\lambda_4 y}$$

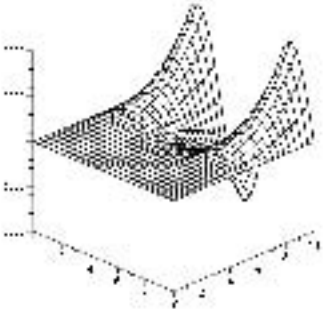
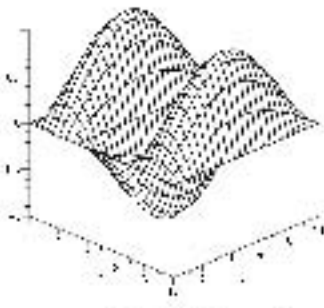
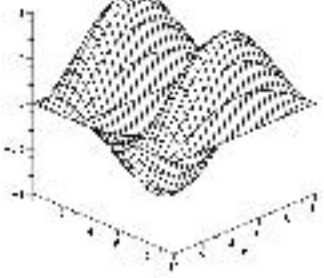
จากการคำนวณครั้งที่สองค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอก ระยะเวลาทั้งในแนวแกน x และในแนวแกน y ถูกแทนลงในเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดครบแล้ว เมื่อคำนวณกลับไปกลับมาจนกระทั่งค่าความถี่ธรรมชาติเข้าสู่ค่าค่าหนึ่ง จะเห็นได้ว่าในตัวอย่างนี้ค่าตอบสนองเข้าสู่อย่างรวดเร็วจากการคำนวณกลับไปกลับมาเพียงสามครั้ง ได้ค่าความถี่ธรรมชาติจากการคำนวณครั้งที่สองและครั้งที่สาม เท่ากันคือ 32.34822 rad/s แสดงว่าผลของค่าตอบที่ได้เข้าสู่ค่า ๆ หนึ่งและจะไม่เปลี่ยนแปลงแม้จะเพิ่มจำนวนครั้งในการคำนวณขึ้น รูปปร่างโหมดการสั่นสะเทือนก็จะไม่เปลี่ยนแปลงด้วย ทำนองเดียวกันถ้าต้องการค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นในโหมดอื่น ๆ เริ่มการคำนวณใหม่ตั้งแต่ต้นอีกครั้งโดยที่จะใช้ฟังก์ชันที่ทราบค่า $Y(y)$ มีค่าเท่าเดิมหรือเปลี่ยนแปลงไปได้โดยการพิจารณาในโหมดที่สนใจได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 4.2 ตัวอย่างสำหรับในกรณีโหมดที่ห้าเลือกใช้จุดตัดที่ $\omega = 201.35735 \text{ rad/s}$ ของกราฟตามภาพที่ 4-5 ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติตามตารางที่ 4-3 เมื่อคำนวณกลับไปกลับมาจนค่าความถี่ธรรมชาติเข้าสู่ค่า ๆ หนึ่งคือ 197.08685 rad/s ผลลัพธ์ที่ได้เกิดจากการคำนวณกลับไปกลับมาเพียง 3 ครั้ง และได้รูปปร่างโหมดการสั่นสะเทือนถูกต้องตั้งแต่การคำนวณครั้งที่สองแล้ว

ตารางที่ 4-2 การคำนวณแบบทำซ้ำสำหรับการสั่นสะเทือนสำหรับโหมดที่หนึ่ง

Iteration number	Mode shape	Iteration number	Mode shape
1. $(Z) = \{z\}$	 <p>$\omega = 30.89194 \text{ rad/s}$ $(Z) = \{Z_1\}$</p>	2. $(X) = \{X_1\}$	 <p>$\omega = 32.34892 \text{ rad/s}$ $(Y) = \{Y_1\}$</p>

<p>3-</p> <p>$\{Y\}=\{Y_3\}$</p>	 <p>$\omega = 32.34882 \text{ rad/s}$</p>		
---	---	--	--

ตารางที่ 4-3 การคำนวณแบบทำซ้ำสำหรับการสั่นสะเทือนสำหรับโหมดที่ห้า

Iteration number	Mode shape	Iteration number	Mode shape
<p>1.</p> <p>$\{Z\}=\{Z_1\}$</p>	 <p>$\omega = 201.35735 \text{ rad/s}$</p> <p>$\{X\}=\{X_1\}$</p>	<p>2.</p> <p>$\{X\}=\{X_2\}$</p>	 <p>$\omega = 197.08695 \text{ rad/s}$</p> <p>$\{Y\}=\{Y_2\}$</p>
<p>3-</p> <p>$\{Y\}=\{Y_3\}$</p>	 <p>$\omega = 197.08695 \text{ rad/s}$</p>		

ปัญหาการสั่นสะเทือนมีความซับซ้อนในการคำนวณมากกว่าปัญหาการโก่งงอเนื่องจากการหาค่าความถี่ธรรมชาติในแต่ละโหมดจะต้องมีการทำซ้ำหลายรอบเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติในแต่ละครั้ง อีกทั้งในบางกรณีการสมมุติฟังก์ชัน $Y(y)$ หรือ $X(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเริ่มต้นไม่สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติให้ครบทุกโหมดได้ ต้องสมมุติฟังก์ชันทราบค่าเริ่มต้นค่าใหม่เพื่อจะสามารถคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติค่าที่เหลือได้

จากการศึกษาพบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้หลักการของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชและการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งสามารถหาการโก่งงอ รูปร่างของการโก่ง ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้ ดังนั้นในบทถัดไปจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ไปศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางพร้อมทั้งสอบทวนความถูกต้องของผลที่ได้กับงานวิจัยในอดีต ระเบียบวิธีรีวิธ และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

บทที่ 5

การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง

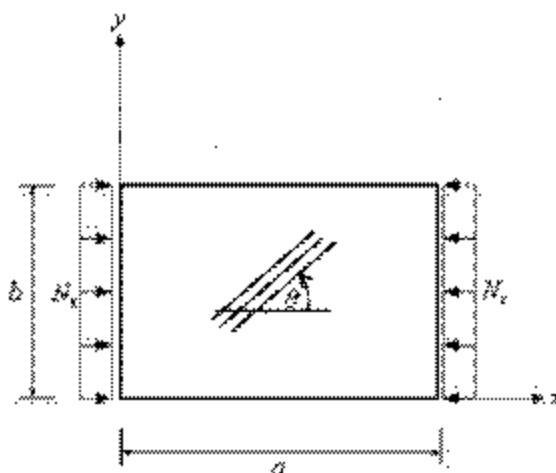
เนื้อหาในบทนี้จะเป็นการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางด้วยวิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง การคำนวณใช้จำนวนพจน์ของค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 และ 2 พจน์ตามลำดับ เนื้อหาในบทนี้แบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกตรวจสอบความถูกต้องของ ภาชนะการโก่งงอและรูปร่างของการโก่งงอของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นกับงานวิจัยในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ส่วนที่สองเป็นการนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นศึกษาผลของการเรียงตัวของเส้นใยในแผ่นคอมโพสิตบางกับภาชนะการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอ นอกจากความถูกต้องและแม่นยำของคำตอบการตรวจสอบยังแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างต่าง ๆ ที่สำคัญที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของภาชนะการโก่งงอเช่น รูปแบบการจับยึด การเรียงตัวของเส้นใย รวมถึงจำนวนพจน์ที่ใช้สมมติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นด้วย

5.1 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การสอบทวนความถูกต้องของระเบียบวิธีที่เสนอทำโดยหาภาชนะการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตด้วยวิธีการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง โดยการสมมติค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 พจน์และ 2 พจน์ แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้กับระเบียบวิธีวิธีที่และผลจากเอกสารอ้างอิง [14] ดังแสดงในตารางที่ 5-1 แผ่นคอมโพสิตบางรับภาระตามแกนเดียวดังภาพที่ 5-1 พิจารณาชิ้นงานที่มีความหนาต่างกัน 3 ค่า คือ 0.115, 0.102 และ 0.091 นิ้ว และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสองประเภท คือ CCCC และ CSCS แผ่นคอมโพสิตบางมีคุณสมบัติของวัสดุดังนี้ $E_1 = 31.18$ Msi $E_2 = 3.42$ Msi $G_{12} = 0.754$ Msi และ $\nu_{12} = 0.28$ มีขนาด $a = b = 10$ นิ้ว พิจารณาชิ้นงานที่มีการเรียงตัวการเรียงตัวของเส้นใย 2 ประเภทคือ $[0/90]_{5s}$ และ $[90/0]_{5s}$ สามคอลัมน์แรกของตารางที่ 5-1 แสดงลักษณะเงื่อนไขขอบเขต มุมการเรียงตัวของเส้นใยและความหนาของชิ้นงาน สามคอลัมน์ถัดมาแสดงผลที่ได้จากการคำนวณของแต่ละวิธี และสองคอลัมน์สุดท้ายแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของภาชนะการโก่งงอจากวิธีที่

นำเสนอเปรียบเทียบกับทั้งสองวิธีข้างต้น จากตารางที่ 5-1 จะเห็นได้ว่าเปอร์เซ็นต์ความเคลื่อนเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีของวิธีที่อยู่ในช่วง 0.53 - 0.58 % และเมื่อเปรียบเทียบกับผลจากเอกสารอ้างอิง [14] ซึ่งใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่มีการแก้สมการครอบคลุมออกมาในรูปแบบผลเฉลยแม่นยำ พบว่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนมีค่าประมาณ 0 - 0.02 % ตารางที่ 5-2 และ ตารางที่ 5-3 แสดงโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีการจับยึดแบบ CCCC และ CSCS ตามลำดับ โดยใช้วิธีการพล็อตแบบพื้นผิวและการพล็อตแบบคอนทัวร์ รูปร่างโหมดการโก่งงอสำหรับการจับยึดแบบ CCCC มีความชันเท่ากับศูนย์ที่ขอบทั้งในแนวแกน x และแกน y ส่วนการจับยึดแบบ CSCS รูปร่างของกราฟมีความชันเท่ากับศูนย์ในแนวแกน y เท่านั้น จากตารางที่ 5-2 ยังแสดงให้เห็นได้ว่าแผ่นคอมโพสิตที่มีความหนาแตกต่างกันมีรูปร่างการโก่งงอคล้ายกัน

ในการศึกษานี้ใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่มีจำนวนพจน์เท่ากับ 1 พจน์และ 2 พจน์ตามลำดับ จากการศึกษาพบว่าผลเฉลยที่ได้จากการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 หรือ 2 พจน์มีค่าเท่ากันสำหรับชิ้นงานที่ใช้ในกรณีศึกษานี้ เนื่องจากในการคำนวณด้วยการสมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์คือ X_1 และ X_2 (กรณีที่สมมุติ $X_1(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า) เพื่อหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ Y_1 และ Y_2 พบว่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณมีค่าฟังก์ชัน Y_2 เท่ากับศูนย์ ดังนั้นการคำนวณซ้ำในครั้งต่อไปจึงเริ่มด้วยฟังก์ชัน Y_1 และฟังก์ชัน $Y_2 = 0$ ซึ่งทำให้การคำนวณมีลักษณะเหมือนกับการคำนวณที่สมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ การหาค่าภาวะการโก่งงอของแผ่นบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยด้วยมุม 0 องศาหรือ 90 องศา โดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจำนวน 1 พจน์ให้คำตอบในรูปแบบภาวะการโก่งงอและรูปร่างของการโก่งที่มีความถูกต้อง การใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจำนวน 2 พจน์ก็ให้คำตอบเท่ากับการคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่จำนวน 1 พจน์ จึงสรุปได้ว่าการแก้ปัญหาสำหรับการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply การคำนวณด้วยการสมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์เพียงพอกับการแก้ปัญหาแล้ว

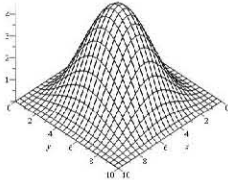
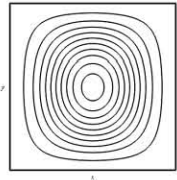
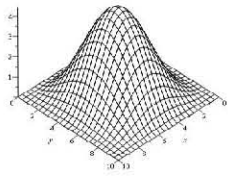
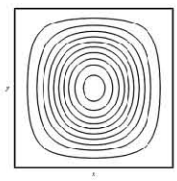
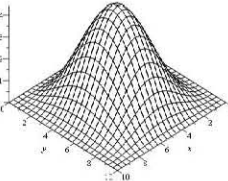
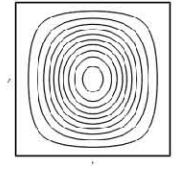
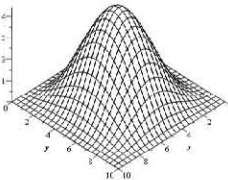
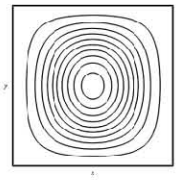


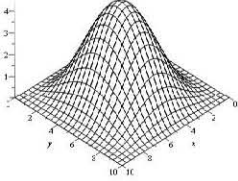
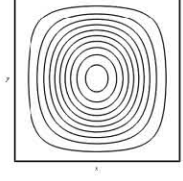
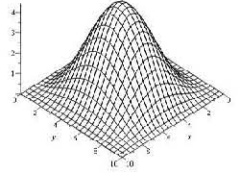
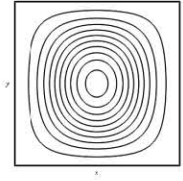
ภาพที่ 5-1 ลักษณะการรับแรงของแผ่นบางแบบแกนเดียว

ตารางที่ 5-1 ภาวะการโก่งงอของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเปรียบเทียบกับผลจากระเบียบวิธีริทซ์และ เอกสารอ้างอิง [12]

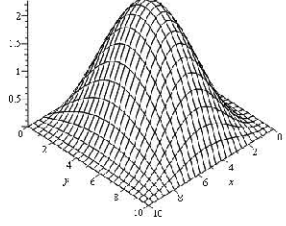
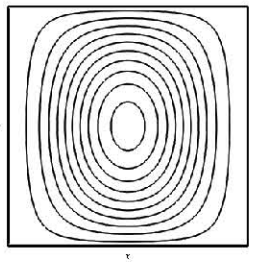
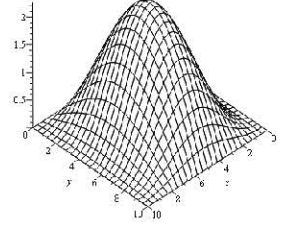
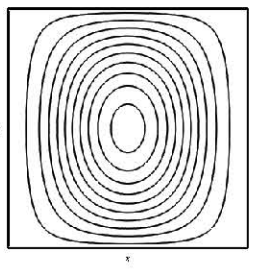
Boundary Condition	Stacking sequence	Thickness (in.)	Ritz (10^3 lbs)	Ref. [12] (10^3 lbs)	Kantoro vich1&2 terms (10^3 lbs)	% with Ritz	% With Ref.[12]
CCCC	[0/90] _{ss}	0.115	17.55	17.65	17.65	0.55	0
		0.102	12.25	12.32	12.31	0.55	0.02
		0.091	8.70	8.75	8.75	0.55	0
	[90/0] _{ss}	0.115	17.09	17.19	17.18	0.53	0.02
		0.102	11.93	11.99	11.99	0.53	0
		0.091	8.47	8.52	8.51	0.53	0.02
CSCS	[0/90] _{ss}	0.115	11.76	11.83	11.83	0.58	0
		0.102	8.21	8.26	8.26	0.58	0
		0.091	5.83	5.86	5.86	0.58	0
	[90/0] _{ss}	0.115	10.05	10.11	10.11	0.58	0
		0.102	7.02	7.06	7.06	0.58	0
		0.091	4.98	5.01	5.01	0.58	0

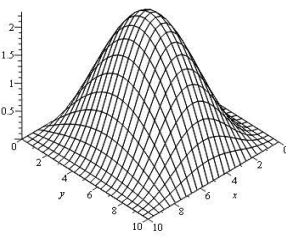
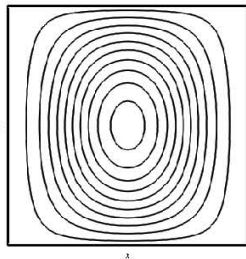
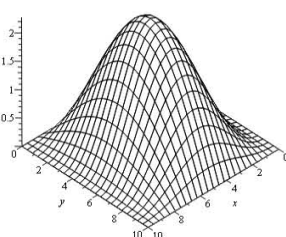
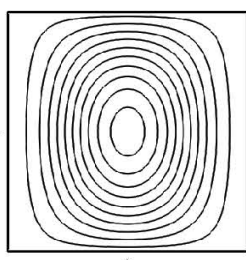
ตารางที่ 5-2 รูปร่างการโก่งของแผ่นคอมโพสิตที่มีการจับยึดแบบ CCCC ที่มีการวางตัวของเส้นใยและความหนาต่าง ๆ กัน

Stacking sequence	Thickness (in.)	Surface	contour
$[0/90]_{5S}$	0.115		
	0.102		
	0.091		
$[90/0]_{5S}$	0.115		

	0.102		
	0.091		

ตารางที่ 5-3 รูปร่างการโก่งของแผ่นคอมโพสิตที่มีการจับยึดแบบ CSCS
ที่มีการวางตัวของเส้นใยและความหนาต่าง ๆ กัน

Stacking sequence	Thickness (in.)	Surface	contour
$[0/90]_{5S}$	0.115		
	0.102		

	0.091		
$[90/0]_{6s}$	0.115		

การศึกษาในส่วนต่อมาจะแสดงให้เห็นถึงการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจำนวน 1 พจน์และ 2 พจน์มีผลต่อการแก้ปัญหาการโก่งของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ angle-ply หรือไม่ รวมทั้งการศึกษาว่าคำตอบของภาวะการโก่งและรูปร่างการโก่งระหว่างการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจำนวน 1 พจน์และ 2 พจน์แตกต่างกันอย่างไร โดยที่แผ่นคอมโพสิตมีการเรียงตัวแบบ $[30/-30/30]$ ที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS CCCC SCSC และ SCCS ภาวะการโก่งที่เปรียบเทียบในตาราง 5-4 แสดงในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย (K_{cr}) โดยหาได้จาก

$$K_{cr} = \frac{N_x b^2}{D_0} \quad \text{โดย} \quad D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (5-1)$$

คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ศึกษาคือ

$$\frac{E_1}{E_2} = 2.45 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.48 \quad \nu_{12} = 0.23$$

ภาระการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์นำมาเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Shufrin[16] และ Liu [9] โดยคอลัมน์แรกของตารางที่ 5-4 แสดงเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด คอลัมน์ถัดมา แสดงผลการศึกษาของ Shufrin โดยใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 6 พจน์ คอลัมน์ที่สามคือผลการศึกษาของ Liu สองคอลัมน์ถัดมาคือผลที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยการสมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 และ 2 พจน์ตามลำดับ การศึกษาจะศึกษาเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างจากการเปรียบเทียบภาระการโก่งงอที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยการใช้อำนาจพจน์เริ่มต้นของคำตอบเท่ากับ 2 พจน์เท่านั้นเพราะว่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการใช้อำนาจพจน์เท่ากับ 1 พจน์มีค่าสูงเกินไป ค่าความคลาดเคลื่อนจึงสูงมากเกินไปที่จะยอมรับได้ เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างจากการเปรียบเทียบภาระการโก่งงอที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยการใช้อำนาจพจน์เริ่มต้นของคำตอบเท่ากับ 2 พจน์กับงานวิจัยของ Shufrin และ Liu มีค่าประมาณ 0.04 - 1.25 เปอร์เซ็นต์ จึงถือว่าคำตอบที่ได้มีความถูกต้อง โดยเงื่อนไขขอบเขตการจับแบบ CCCC มีภาระการโก่งงอมากที่สุด และเงื่อนไขขอบเขตการจับแบบ SSSS มีภาระการโก่งงอน้อยที่สุด แต่จากตารางที่ 5-5 แสดงถึงรูปร่างการโก่งงอของปัญหานี้ จะเห็นได้ว่าการใช้อำนาจพจน์ของคำตอบเพียงหนึ่งพจน์ไม่สามารถแสดงรูปร่างการโก่งงอที่มีลักษณะเอียงเหมือนกับรูปร่างการโก่งงอที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะการใช้อำนาจพจน์เริ่มต้นของคำตอบเท่ากับ 1 พจน์ไม่สามารถให้ผลเฉลยฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบในลักษณะเอียงได้ ดังนั้นผลของรูปร่างการโก่งงอในตารางที่ 5-5 แสดงว่าการสมมุติฟังก์ชันคำตอบเพียงพจน์เดียวไม่เพียงพอที่จะทำให้รูปร่างการโก่งงอมีลักษณะเอียงได้ จึงจำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันเริ่มต้นของคำตอบ 2 พจน์สำหรับปัญหา angle-ply จึงจะได้รูปร่างของการโก่งงอที่เอียงถูกต้องเมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

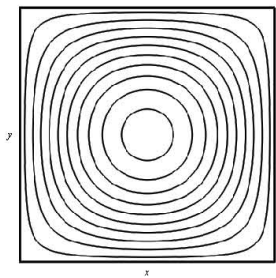
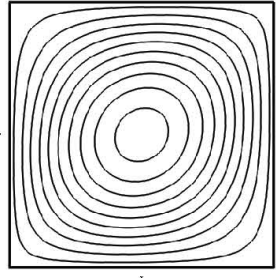
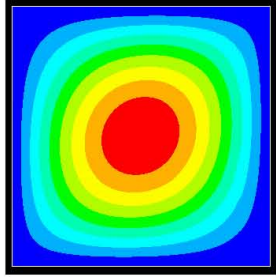
วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งโดยการสมมุติจำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์ เปรียบเทียบคำตอบกับงานวิจัยของ Shufrin โดยใช้พจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นของคำตอบเท่ากับ 6 พจน์ ค่าเปอร์เซ็นต์ความเคลื่อนอยู่ระหว่าง 0.04 – 0.24 เปอร์เซ็นต์แสดงให้เห็นว่าวิธีที่นำเสนอโดยการใช้อำนาจพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่เริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์ได้ผลที่มีความถูกต้องทั้งภาระการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอ จึง

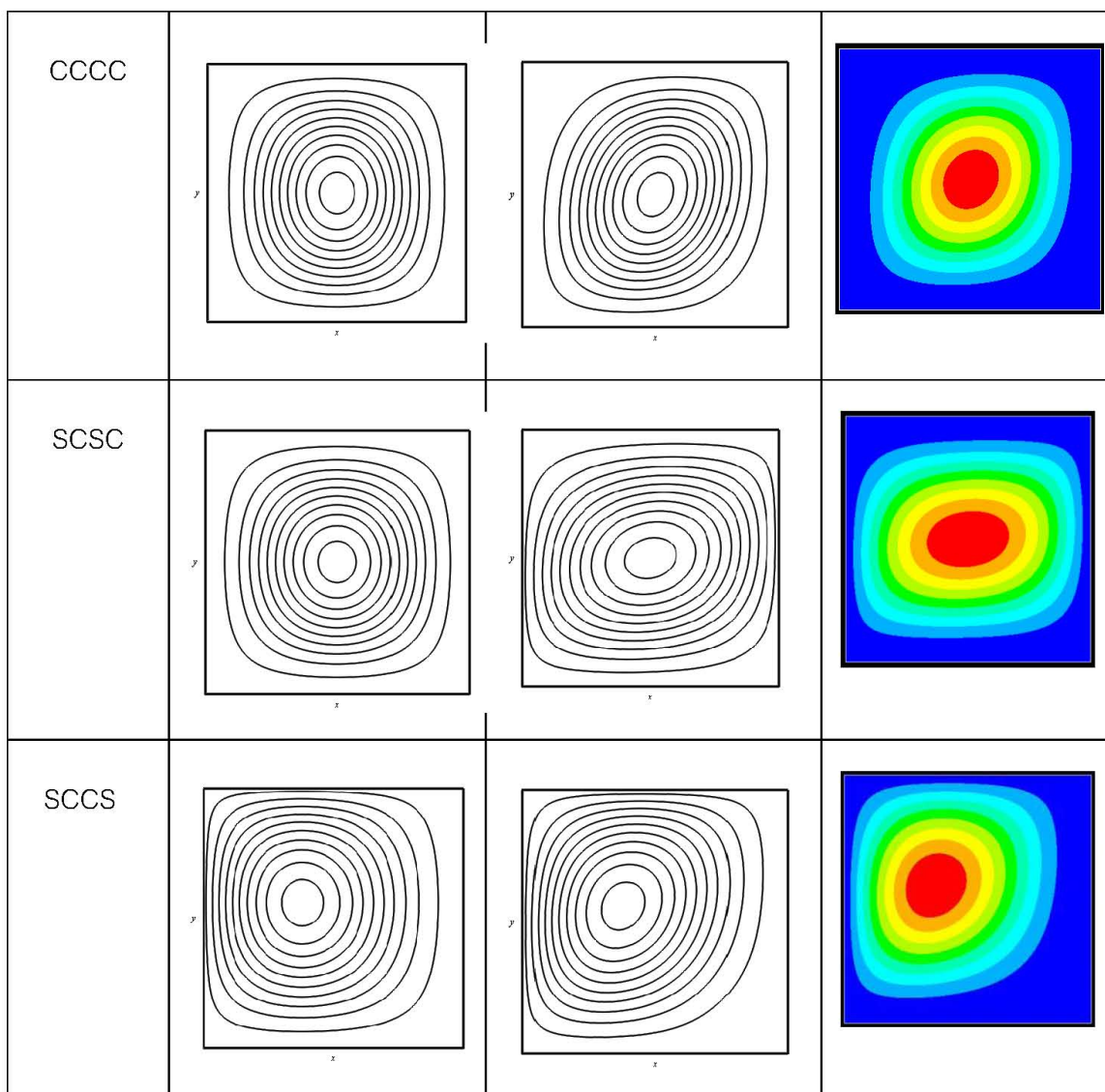
สรุปได้ว่าวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งโดยใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่นอกระนาบเท่ากับ 2 พจน์เพียงพอที่จะใช้คำนวณปัญหาการโก่งงอของชิ้นงานที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ angle-ply

ตารางที่ 5-4 ภาวะการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [30/-30/30] ที่มีเงื่อนไขขอบเขตของการจับยึดในแบบต่าง ๆ

Boundary condition	Shufrin 6terms [14]	Liu [7]	Kantoro vich 1 term	Kantoro vich 2 terms	% with Shufrin	% with Liu
SSSS	25.25	25.3	26.32	25.31	0.24	0.04
CCCC	62.05	62.77	65.27	62.02	0.04	1.19
SCSC	47.04	47.7	49.19	47.12	0.17	1.22
SCCS	38.54	39.08	40.94	38.59	0.13	1.25

ตารางที่ 5-5 รูปร่างการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [30/-30/30] ที่มีเงื่อนไขขอบเขตของการจับยึดในแบบต่าง ๆ โดยใช้พจน์สมมติเริ่มต้นของคำตอบเท่ากับ 1 และ 2 พจน์

Boundary Conditions	1 term	2 terms	FEM
SSSS			



ในส่วนต่อไปจะศึกษาความแม่นยำของผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อยืนยันความน่าเชื่อถือของโปรแกรมโดยการเปรียบเทียบภาระการโค้งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับระเบียบวิธีวิธซึ่งเป็นวิธีที่ได้ผลเฉลยมีความถูกต้องสูงและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ใช้ในการศึกษามีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC และมีการเรียงตัวของเส้นใยในมุมต่าง ๆ โดยใช้คุณสมบัติวัสดุเดียวกันกับการศึกษาก่อนหน้าและมีภาระการโค้งงอไรหน่วยตามสมการที่ (5-1) เปรียบเทียบผลการศึกษาที่ได้กับระเบียบวิธีวิธและการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในตารางที่ 5-6 เปรียบเทียบผลของรูปร่างการโค้งงอที่ได้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในตารางที่ 5-7 เปรอ์เซ็นต์ความแตกต่างที่คำนวณ

ได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นกับระเบียบวิธีรีทซ์ และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่าไม่เกิน 0.1 เปอร์เซ็นต์ แสดงให้เห็นว่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการคำนวณจากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนั้นมีความถูกต้องและแม่นยำสูงมาก ผลจากตารางที่ 5-6 แสดงให้เห็นว่าการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta/\theta]$ เมื่อค่า θ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ภาระการโก่งงอที่ได้จะลดลงตามลำดับ เนื่องจากเส้นใยในแผ่นคอมโพสิตไม่ได้อยู่ในแนวแกนเดียวกับภาระที่กระทำ

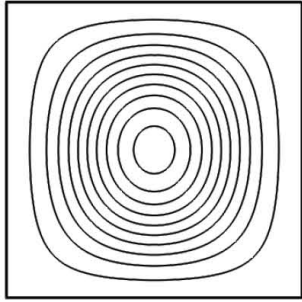
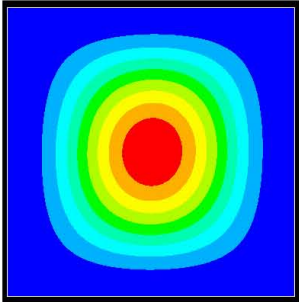
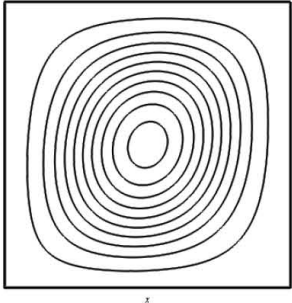
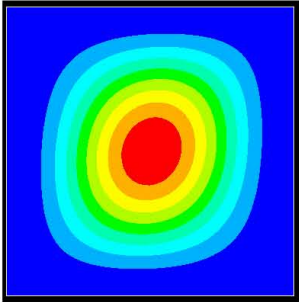
ตารางที่ 5-6 ภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[\theta/-\theta/\theta]$ ที่มีเงื่อนไขขอบเขตของการจับยึดแบบ CCCC กับระเบียบวิธีรีทซ์ และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

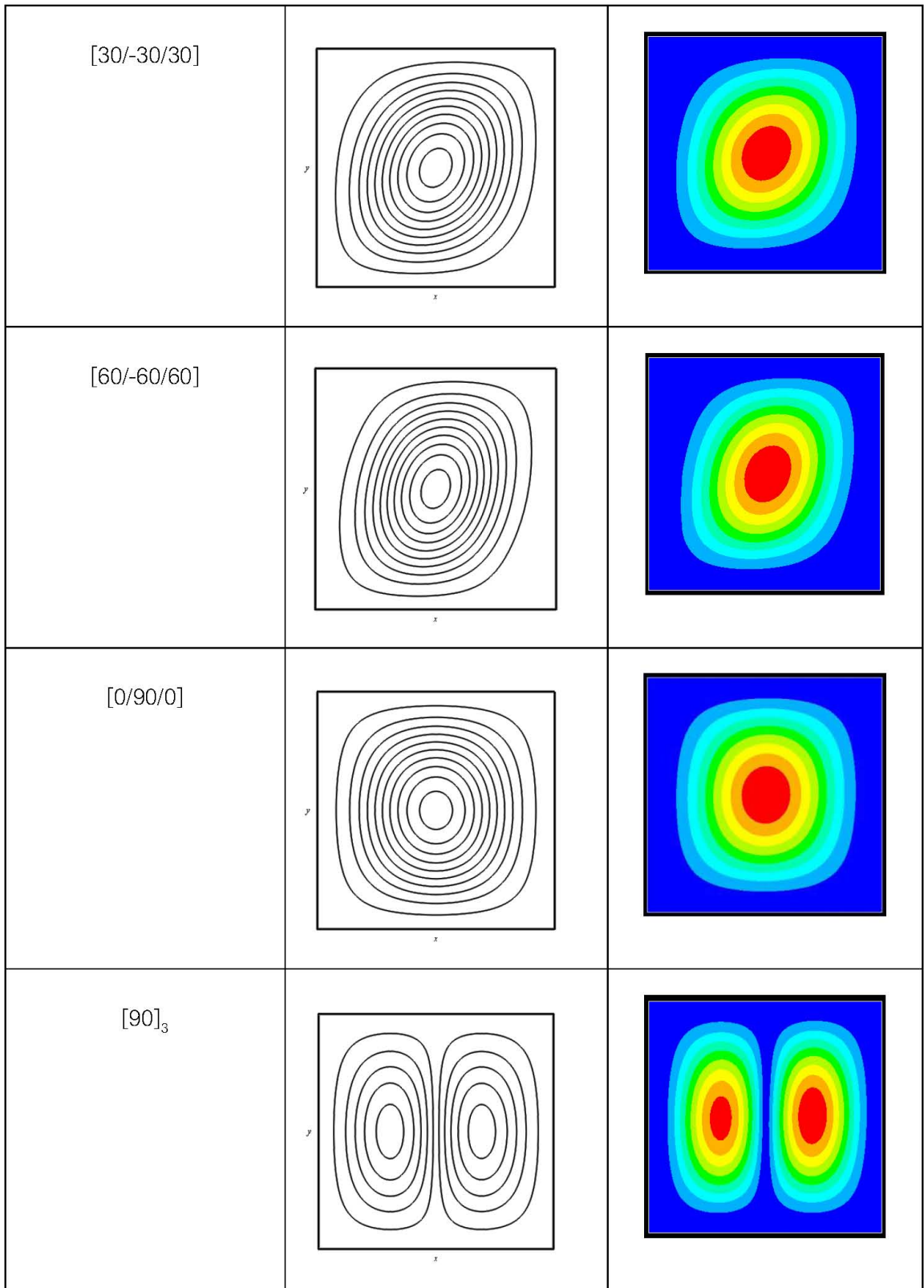
Stacking sequence	Kantorovich	RITZ	FEM	% difference with RITZ	% difference with FEM
$[0]_3$	66.24	66.18	66.15	0.10	0.13
$[15/-15/15]$	64.81	64.78	64.76	0.04	0.08
$[30/-30/30]$	62.02	62.05	61.83	0.04	0.31
$[60/-60/60]$	59.43	59.40	59.31	0.06	0.21
$[0/90/0]$	66.17	66.11	66.10	0.10	0.11
$[90]_3$	54.63	54.60	54.50	0.06	0.24

ผลจากการเปรียบเทียบรูปร่างของการโก่งงอจากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงในตารางที่ 5-7 จะเห็นว่ารูปร่างการโก่งงอจากการเปรียบเทียบมีลักษณะเหมือนกันจึงสรุปได้ว่ารูปร่างของการโก่งงอจากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นถูกต้อง และยังแสดงให้เห็นว่าสำหรับแผ่นบางที่มีการรับภาระตามภาพที่ 5-1 รูปร่างการโก่งงอจะเอียงเป็นเส้นทแยงมุมตามแนวโน้มมุม

ของการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิต สังเกตได้จากชิ้นงานที่มีมุมการเรียงตัวแบบ $[15/-15/15]$ $[30/-30/30]$ และ $[60/-60/60]$ ได้รูปร่างการโก่งที่ใกล้เคียงกันโดยมุมเพิ่มขึ้นรูปร่างการโก่งก็จะเฉียงมากขึ้น ส่วนแผ่น $[90]_3$ เกิดรูปร่างการโก่งงอแบบกราฟไซน์ 1 ลูกเนื่องจากค่าความแข็งแรงในแนวแกน x ซึ่งเป็นทิศที่รับภาระกระทำมีค่าน้อยกว่าค่าความแข็งแรงในแนวแกน y แผ่นคอมโพสิตบางจึงเกิดการโก่งงอในลักษณะที่แสดงในตาราง รูปร่างการโก่งงอจากตารางที่ 5-7 ทำให้สามารถคาดเดาลักษณะการโก่งงอได้ตามรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิตบางที่นำมาใช้งานได้

ตารางที่ 5-7 รูปร่างของการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบต่าง ๆ ที่มีเงื่อนไขขอบเขตของการจับยึดแบบ CCCC กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Stacking sequence	Present solution	FEM
$[0]_3$		
$[15/-15/15]$		



5.2 ผลของการเรียงตัวของเส้นใยต่อภาระการโก่งงอและรูปร่างของการโก่ง

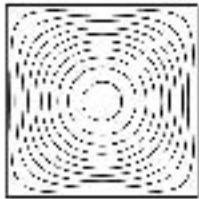
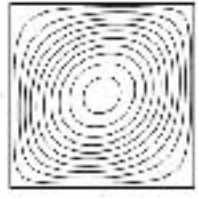
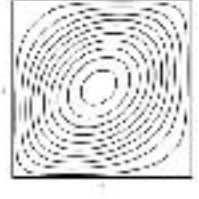
การนำแผ่นคอมโพสิตบางไปใช้กับโครงสร้างต่าง ๆ สิ่งที่สำคัญในการออกแบบคือทิศทางของภาระที่มากระทำกับมุมการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิตบางเพราะถ้าแผ่นคอมโพสิตบางรับภาระในแนวเดียวกับเส้นใย แผ่นคอมโพสิตบางจะมีภาระการโก่งสูงและรับภาระได้มากกว่า การรับภาระในทิศตรงข้ามกับเส้นใย ดังนั้นเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพและความปลอดภัยสูงสุดการเลือกใช้แผ่นคอมโพสิตบางจะต้องเลือกแผ่นที่มีมุมการเรียงตัวของเส้นใยให้มีความเหมาะสมกับลักษณะงานที่ต้องการ คุณสมบัติวัสดุของแผ่นคอมโพสิตบางที่ใช้ในการศึกษาหาภาระการโก่งงอและรูปร่างการโก่งแสดงในตารางที่ 5-8

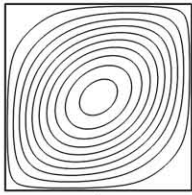
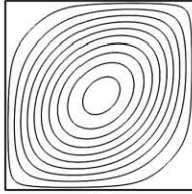
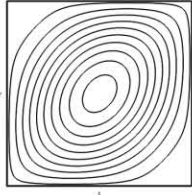
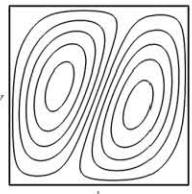
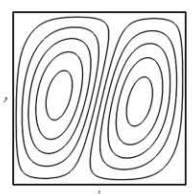
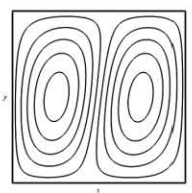
ตารางที่ 5-9 แสดงภาระการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_2$ จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น ในการคำนวณค่า θ เริ่มตั้งแต่ 0 องศาและเพิ่มขึ้นทีละ 10 องศาจนกระทั่งมีค่าเท่ากับ 90 องศา ชี้นงานที่ศึกษามีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS แผ่นคอมโพสิตมีคุณสมบัติวัสดุตามตารางที่ 5-8 คอลัมน์ที่หนึ่งของตารางที่ 5-9 แสดงการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิต คอลัมน์ถัดมาแสดงภาระการโก่งงอที่คำนวณได้ คอลัมน์สุดท้ายแสดงรูปร่างของการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิต ภาระการโก่งงอจะมีค่าสูงสุดที่มุมระหว่าง 40 องศา กับ 50 องศาและมีค่าน้อยที่สุดที่มุม 90 องศา เหตุผลที่ชี้นงานที่มีการเรียงตัวของเส้นใยที่มุม 90 องศารับค่าภาระกระทำได้น้อยที่สุดเพราะชี้นงานดังกล่าวรับแรงในทิศตั้งฉากกับเส้นใย แผ่นคอมโพสิตที่มีเส้นใยวางตัวในแนวเดียวจะมีความแข็งเกร็ง (stiffness) ตามแนวเส้นใยมากกว่าความแข็งเกร็งในแนวตั้งฉากกับแนวเส้นใย ดังนั้นชี้นงานรับแรงในแนวเส้นใยจะมีภาระการโก่งตัวสูงกว่าชี้นงานที่รับแรงในแนวตั้งฉาก ผลของรูปร่างของการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตจะโก่งงอและเอียงทแยงมุมไปตามทิศเดียวกันกับมุมของการเรียงตัวของเส้นใย การเรียงตัวของเส้นใยตั้งแต่ 60 องศาขึ้นไป รูปร่างการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตจะเป็นแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกแบบสองลูกและมีทิศทางการเอียงใกล้เคียงกับมุมการเรียงตัวของเส้นใย การที่แผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใย 60 องศาขึ้นไปแสดงรูปร่างการโก่งแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกสองลูกเพราะว่าทิศที่รับแรงของแผ่นไม่ได้ถูกรองรับด้วยเส้นใย ความแข็งแรงจึงน้อยกว่าจึงเกิดรูปร่างการโก่งในลักษณะตามตารางที่ 5-9

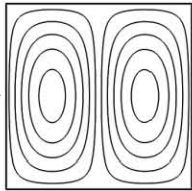
ตารางที่ 5-8 คุณสมบัติของแผ่นคอมโพสิตบาง graphite-epoxy

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	Fly thickness (mm)	a, b (m)
132	10.8	5.65	0.24	0.127	1

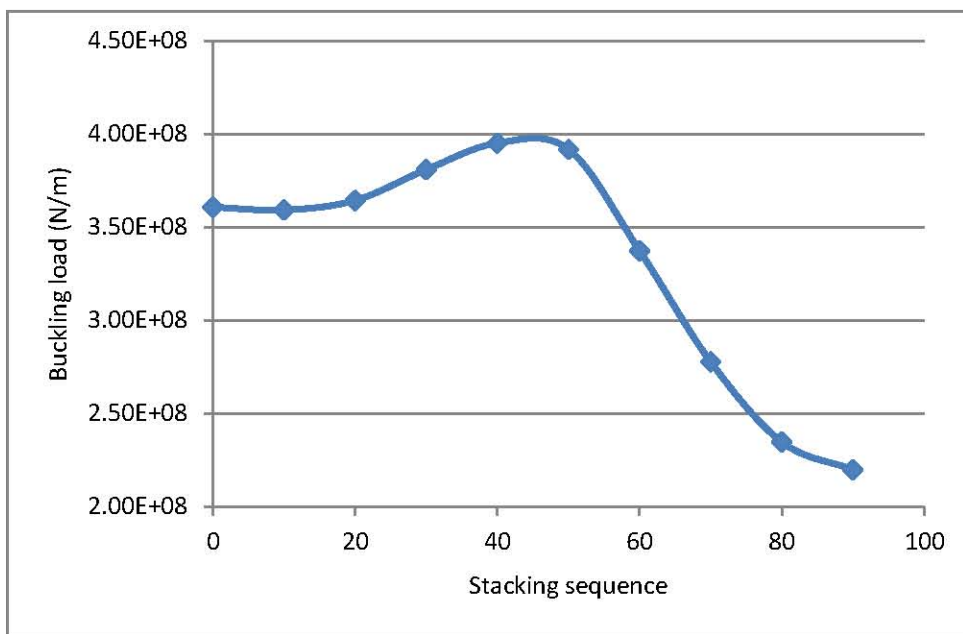
ตารางที่ 5-9 ภาวะการโก่งงอและรูปร่างของการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[\theta]_s$ ที่มีเงื่อนไขขอบเขตของการจับยึดแบบ SSSS

Stacking sequence	Buckling load (Nm)	Buckling mode
$[0]_s$	36.0710	
$[10]_s$	35.9206	
$[20]_s$	36.4351	

$[30]_5$	38.0889	
$[40]_5$	39.5124	
$[50]_5$	39.1745	
$[60]_5$	33.7286	
$[70]_5$	27.7682	
$[80]_5$	23.4710	

$[90]_5$	21.9792	
----------	---------	---

ผลของมุมของการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิตบางกับภาวะการโก่งงอ สามารถดูได้จากภาพที่ 5-2 ภาวะการโก่งงอจะเพิ่มขึ้นไปสู่ค่าสูงสุดค่าหนึ่งและลดต่ำลงสุดค่าหนึ่งตามภาพ พบว่าชั้นงานที่มีมุม 20 องศาจนถึง 50 องศา มีภาวะการโก่งงอมากกว่าชั้นงานที่มี 0 องศา และ 10 องศา การรับแรงในทิศทางของเส้นใยที่มีมุมนดังกล่าวจะมีผลของแรงเฉือนมาเกี่ยวข้องทำให้ชั้นงานเกิดรูปร่างการโก่งงอที่มีลักษณะเอียง ซึ่งการเกิดรูปร่างลักษณะแบบนี้จะเกิดขึ้นได้ยากกว่าปกติ และต้องใช้ภาระที่มากกว่ามากขึ้นกว่าการโก่งในทิศเดียวกันกับการเรียงตัวของเส้นใย



ภาพที่ 5-2 กราฟระหว่างภาวะการโก่งงอและการเรียงตัวของเส้นใยบนแผ่นคอมโพสิต

จากการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาของแผ่นคอมโพสิตบางด้วยระเบียบวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง พบว่าโปรแกรมที่

ประดิษฐ์ขึ้นมีความถูกต้องแม่นยำเมื่อเปรียบเทียบภาวะการโก่งงอและรูปร่างการโก่งที่ได้กับงานวิจัยในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่ามีความใกล้เคียงกัน เมื่อพิจารณาถึงผลของจำนวนพจน์คำตอบเริ่มต้น จะเห็นได้ว่าการสมมุติจำนวนพจน์คำตอบเท่ากับ 1 พจน์เพียงพอต่อการคำนวณสำหรับปัญหา cross-ply เท่านั้น ปัญหา angle-ply จะได้คำตอบที่ถูกต้องและรูปร่างการโก่งที่ถูกต้องจำเป็นจะต้องใช้จำนวนพจน์ของคำตอบเริ่มต้น 2 พจน์ขึ้นไป ดังนั้นเมื่อได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้สำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิทบางที่มีความน่าเชื่อถือแล้ว ในบทความต่อไปจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบาง

บทที่ 6

การสันสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบาง

จากบทที่ 5 ซึ่งแสดงการใช้โปรแกรมในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอ เนื้อหาในบทนี้จึงจะประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ที่ขึ้นกับการแก้ปัญหาการการสันสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางเนื่องจากปัญหาการสันสะเทือนมีรูปแบบของสมการที่ใกล้เคียงกับปัญหาการโก่งงอ เนื้อหาในบทนี้จะสอบทวนความถูกต้องของโปรแกรมที่นำมาประยุกต์กับปัญหาการสันสะเทือน โดยการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสันสะเทือนของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นกับงานวิจัยในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการสันสะเทือนไปศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของแผ่นคอมโพสิทบางกับรูปร่างโหมดการสันสะเทือนและค่าความถี่ธรรมชาติ นอกจากความถูกต้องและแม่นยำของคำตอบการตรวจสอบยังแสดงให้เห็นถึงความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการจับยึด การเรียงตัวของเส้นใย รวมถึงศึกษาการใช้จำนวนพจน์ที่ใช้ในค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบว่ามีผลต่อคำตอบที่ได้ได้อย่างไรด้วย

6.1 การสอบทวนโดยเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในหัวข้อย่อยแรกของบทนี้จะสอบทวนผลเฉลยในรูปค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสันสะเทือนที่ได้จากการคำนวณโดยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยการเปรียบเทียบผลการศึกษา กับระเบียบวิธี Galerkin จากการศึกษาของ Chen [29] และระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ใช้การแก้สมการโดยแทนค่าอนุกรมกำลัง จากการศึกษาของ ธนาวุฒิ [26] เนื่องจากค่าความถี่ธรรมชาติในการศึกษาทั้งสองแสดงในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วยดังนิยามได้ดังนี้

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_0}} \quad \text{โดยที่} \quad D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$$

ดังนั้นในการสอบทวนความถูกต้องของระเบียบวิธีที่เสนอนี้จะเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย ปัญหาการสันสะเทือนที่ศึกษาเป็นปัญหาของแผ่นคอมโพสิทบางที่มีการ

เรียงตัวของเส้นใยแบบ [0/90/0] และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้เป็นดังนี้

$$E_1 = 131 \text{ GPa} \quad E_1/E_2 = 2.45 \quad G_{12}/E_2 = 0.48 \quad \nu_{12} = 0.23$$

$$a = b = 10 \text{ m} \quad t = 0.06 \text{ m} \quad \rho = 8000 \text{ kg/m}^3$$

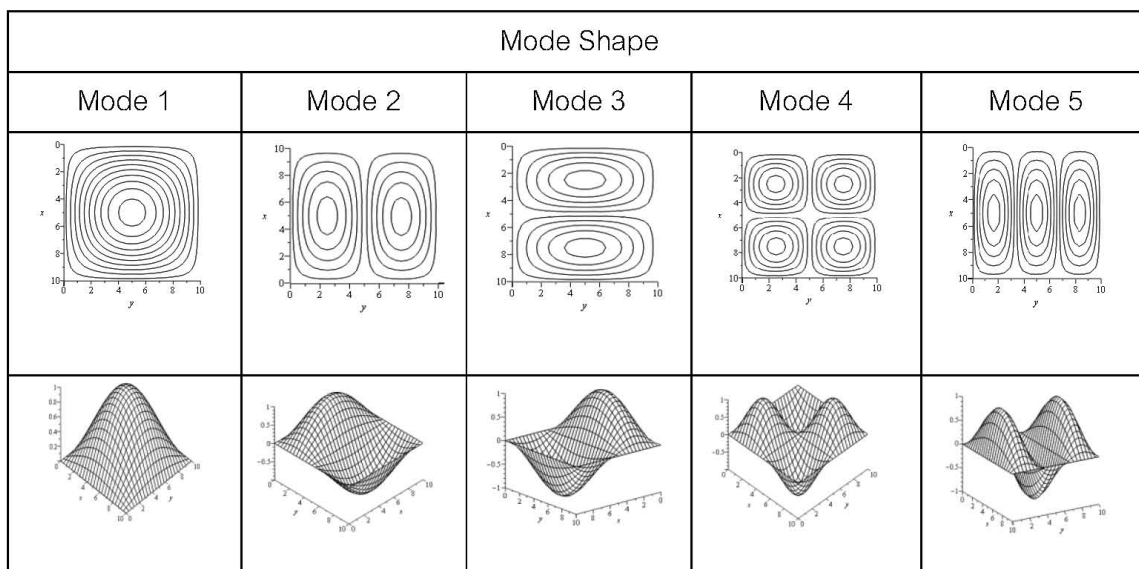
ในการวิเคราะห์ที่ใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 พจน์ พิจารณาโหมดการสั่นสะเทือนจำนวน 5 โหมด การศึกษาของ Chen วิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนโดยการสมมุติคำตอบแล้วแทนลงในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย การศึกษาของ ธนาวุฒิ เป็นวิธีแคนโทโรวิชเช่นเดียวกันกับวิทยานิพนธ์นี้ ต่างกันตรงวิธีการแก้สมการครอบคลุมโดยที่วิธีอนุกรมกำลังจะสมมุติคำตอบของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบในรูปอนุกรมกำลังแต่ระเบียบวิธีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้จะแก้ผลเฉลยจากสมการครอบคลุมโดยตรง ผลที่ได้จากการใช้วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง โดยใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบในการคำนวณเท่ากับหนึ่งพจน์ แสดงในตารางที่ 6-1 พบว่าผลเฉลยที่ได้มีค่าความคลาดเคลื่อนจากผลจากงานวิจัยของ Chen มีค่าประมาณ 0.2-0.5 เปอร์เซ็นต์ โดยความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนโหมดที่ 5 มีความแตกต่างจากผลการศึกษาในอดีตมากกว่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนที่โหมดอื่น ๆ ค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ ธนาวุฒิ มีค่าเท่ากับ 0 เปอร์เซ็นต์ในทุกโหมดการสั่นสะเทือน จากผลการเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในอดีตทั้งสองวิธีพบว่ามีความใกล้เคียงกันมาก แสดงว่าคำตอบที่ได้จากวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งด้วยการสมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเพียงหนึ่งพจน์มีความถูกต้องแม่นยำ (สำหรับปัญหาแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply การเริ่มต้นการคำนวณด้วยฟังก์ชันเท่ากับ 1 พจน์และ 2 พจน์ได้ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนเท่ากันเช่นเดียวกับปัญหาการโก่งงอตั้งที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 5) ตารางที่ 6-2 แสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนโดยพล็อตการเคลื่อนที่นอกกระนาบแบบพื้นผิวและพล็อตแบบคอนทัวร์ จากกราฟจะเห็นได้ว่าที่โหมดหนึ่งมีการสั่นสะเทือนแบบกราฟไซน์ครึ่งลูก โหมดถัดมาสั่นสะเทือนแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกในแนวแกน x และสั่นสะเทือนแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกในแนวแกน y สำหรับ

โหมดที่สามตามลำดับ โหมดที่สี่สั้นสะท้อนแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกจำนวน 2 ลูกทั้งในแนวแกน x และแกน y และโหมดที่ห้าสั้นสะท้อนแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกจำนวน 3 ลูกในแนวแกน x

ตารางที่ 6-1 ค่าพารามิเตอร์ไร้หน่วย β ของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [0/90/0] และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS

Mode	Chen [29]	EKM[26]	Present study	% difference with Chen	% difference with EKM
Mode 1	15.18	15.17	15.17	0.06	0
Mode 2	33.82	33.73	33.73	0.28	0
Mode 3	44.14	44.02	44.02	0.26	0
Mode 4	60.79	60.68	60.68	0.18	0
Mode 5	66.12	65.77	65.77	0.53	0

ตารางที่ 6-2 โหมดการสั้นสะท้อนของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [0/90/0] และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS



จากผลการคำนวณในตารางที่ 6-1 พบว่าวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งโดยการสมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเพียง 1 พจน์ ได้คำตอบที่มีความถูกต้องและมีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนน้อย จึงสามารถกล่าวได้ว่าสำหรับปัญหาแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply การสมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นเพียงหนึ่งพจน์เพียงพอที่จะให้คำตอบที่ถูกต้องแล้ว การตรวจสอบในส่วนต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าจำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่สมมุติขึ้นมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดของการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ angle-ply อย่างไร

แผ่นบางคอมโพสิตที่ใช้พิจารณามีคุณสมบัติตามตารางที่ 6-3 โดยมีการเรียงตัวของเส้นใยแตกต่างกันสี่ประเภทคือ ไอโซทรอปิก $[0/90]_{2s}$ $[\pm 45]_{2s}$ และ $[45/-45/45]$ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้วยกันทั้งสามประเภทคือ CCCC CCSS และ SCSF นำผลเฉลยที่ได้จากวิธีที่นำเสนอเปรียบเทียบกับการศึกษาของ ธนาวุฒิ โดยการใช้อำนาจพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 พจน์ 2 พจน์ และ 5 พจน์ตามลำดับ วิธีอนุกรมกำลังเป็นวิธีที่สมมุติคำตอบให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง ความถูกต้องและแม่นยำของคำตอบต้องขึ้นกับจำนวนพจน์ในอนุกรมกำลังที่ใช้ด้วย จากงานวิจัยของ ธนาวุฒิ พบว่าต้องใช้อำนาจพจน์ในอนุกรมกำลังจำนวน 100 พจน์ขึ้นไป จึงจะได้คำตอบที่มีความถูกต้องสูงและเมื่อเพิ่มจำนวนพจน์ในอนุกรมกำลังและจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบให้มากขึ้นไปทั้งสองค่าพร้อมกัน คำตอบที่ได้จึงมีความถูกต้องมากขึ้น ดังนั้นวิธีอนุกรมกำลังที่สมมุติฟังก์ชันเริ่มต้นของคำตอบเท่ากับ 5 พจน์ถือว่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากที่สุด

ตารางที่ 6-3 คุณสมบัติของแผ่นคอมโพสิตบาง graphite-epoxy

$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	$G_{12}(GPa)$	ν_{12}	Ply thickness (mm)	$a, b(m)$	ρ (kg / m ³)
132	10.8	5.65	0.24	0.127	1	1540

ตารางที่ 6-4 แสดงการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีที่นำเสนอโดยการใช้อำนาจพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 และ 2 พจน์กับผลของวิธีอนุกรมกำลังที่คำนวณโดยใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 5 พจน์ คอลัมน์แรกแสดง

เงื่อนไขขอบเขตการจับยึด คอลัมน์ที่สองแสดงค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณวิธีอนุกรมกำลัง และวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งโดยการใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเริ่มต้นต่างๆ คอลัมน์ที่สามแสดงการเรียงตัวของเส้นใยในมุมต่าง ๆ เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่แสดงในตารางที่ 6-4 เกิดจากการเปรียบเทียบสองลักษณะคือ

-ลักษณะที่ 1 เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างวิธีอนุกรมกำลังและวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งโดยการใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 พจน์

-ลักษณะที่ 2 เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างวิธีอนุกรมกำลังและวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งโดยการใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 2 พจน์

ผลที่ได้จากการเปรียบเทียบลักษณะที่หนึ่งมีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนอยู่ระหว่าง 0 – 12.466 เปอร์เซ็นต์ โดยที่ปัญหาของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และวัสดุไอโซโทรปิกมีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนแตกต่างกันน้อยมากไม่เกิน 0.038 เปอร์เซ็นต์ แต่สำหรับปัญหาแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ angle-ply การใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 พจน์มีค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสูงถึง 12.466 เปอร์เซ็นต์สำหรับชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCSS แสดงให้เห็นว่าวิธีที่นำเสนอโดยการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบของคำตอบเท่ากับหนึ่งพจน์ให้ผลเฉลยที่ถูกต้องสำหรับแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply และวัสดุไอโซโทรปิกเท่านั้น สำหรับปัญหา angle-ply ไม่สามารถให้คำตอบที่ถูกต้องได้ การเปรียบเทียบในลักษณะที่สองแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนอยู่ระหว่าง 0 – 1.708 เปอร์เซ็นต์ ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าแตกต่างกันมากที่สุดสำหรับแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [45/-45/45] และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCSS จะเห็นได้ว่าการคำนวณโดยใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 2 พจน์ ให้คำตอบที่เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงมากเมื่อเทียบกับการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 พจน์ จึงถือได้ว่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีที่นำเสนอโดยการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 พจน์มีความ

ถูกต้องเพียงพอในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์แสดงในตารางที่ 6-5 โดยคอลัมน์ที่หนึ่งแสดงเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด คอลัมน์ที่สองแสดงมุมการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิตบาง คอลัมน์ที่สามและสี่แสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการคำนวณโดยจำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่เท่ากับ 1 พจน์และ 2 พจน์ตามลำดับ คอลัมน์สุดท้ายแสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการคำนวณด้วยวิธีที่นำเสนอด้วยการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 พจน์ให้รูปร่างโหมดที่ถูกต้องสำหรับวัสดุไอโซโทรปิกและวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply เท่านั้นเมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่การใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 2 พจน์ให้รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่สอดคล้องกัน

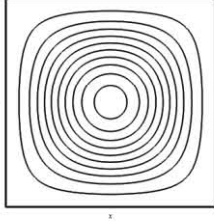
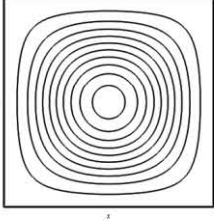
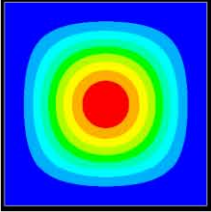
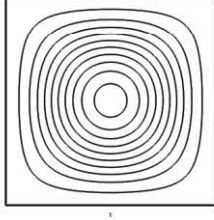
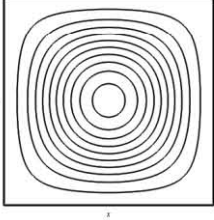
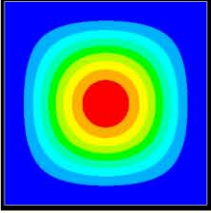
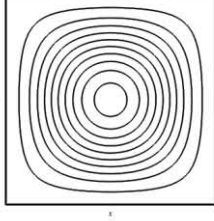
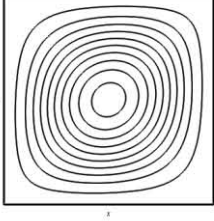
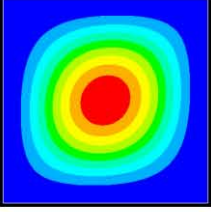
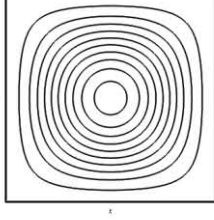
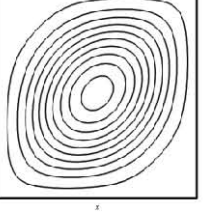
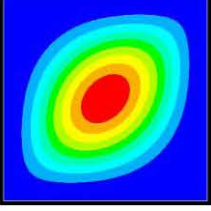
ตารางที่ 6-4 ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/s) ของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยต่าง ๆ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้งสามประเภท

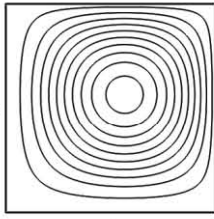
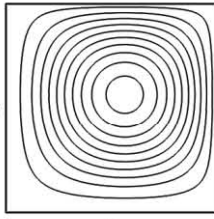
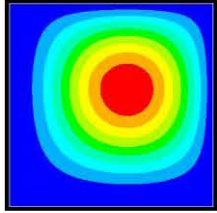
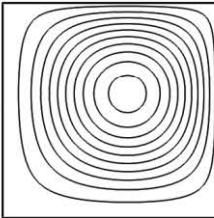
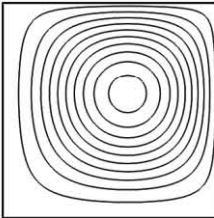
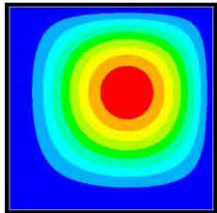
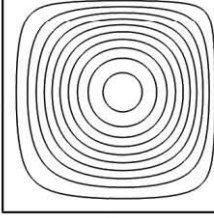
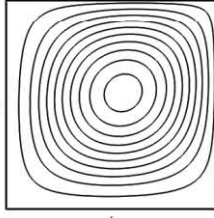
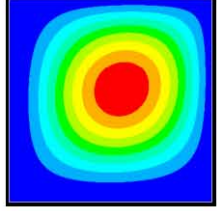
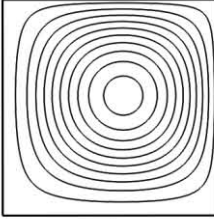
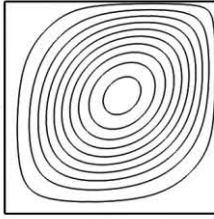
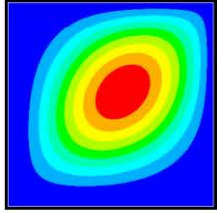
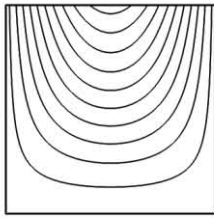
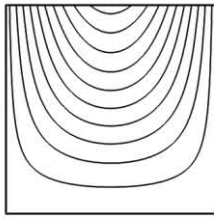
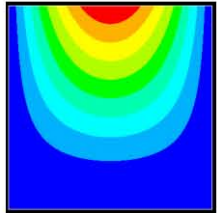
Boundary conditions	Solutions	Stacking sequence			
		isotropic	[0/90] _{2s}	[±45] _{2s}	[45/-45/45]
CCCC	EKM	103.60	723.93	693.58	236.71
	Present study (1 term)	103.64	723.95	703.35	263.76
	Present study (2 terms)	103.64	723.95	693.78	238.39
	% difference (1 term)	0.038	0.003	1.389	10.26
	% difference (2 terms)	0.038	0.003	0.029	0.710
CCSS	EKM	77.89	510.30	551.62	183.84
	Present study (1 term)	77.90	510.31	560.05	210.02
	Present study (2 terms)	77.90	510.31	551.82	186.98
	% difference (1 term)	0.013	0.002	1.505	12.47
	% difference (2 terms)	0.013	0.002	0.036	1.708

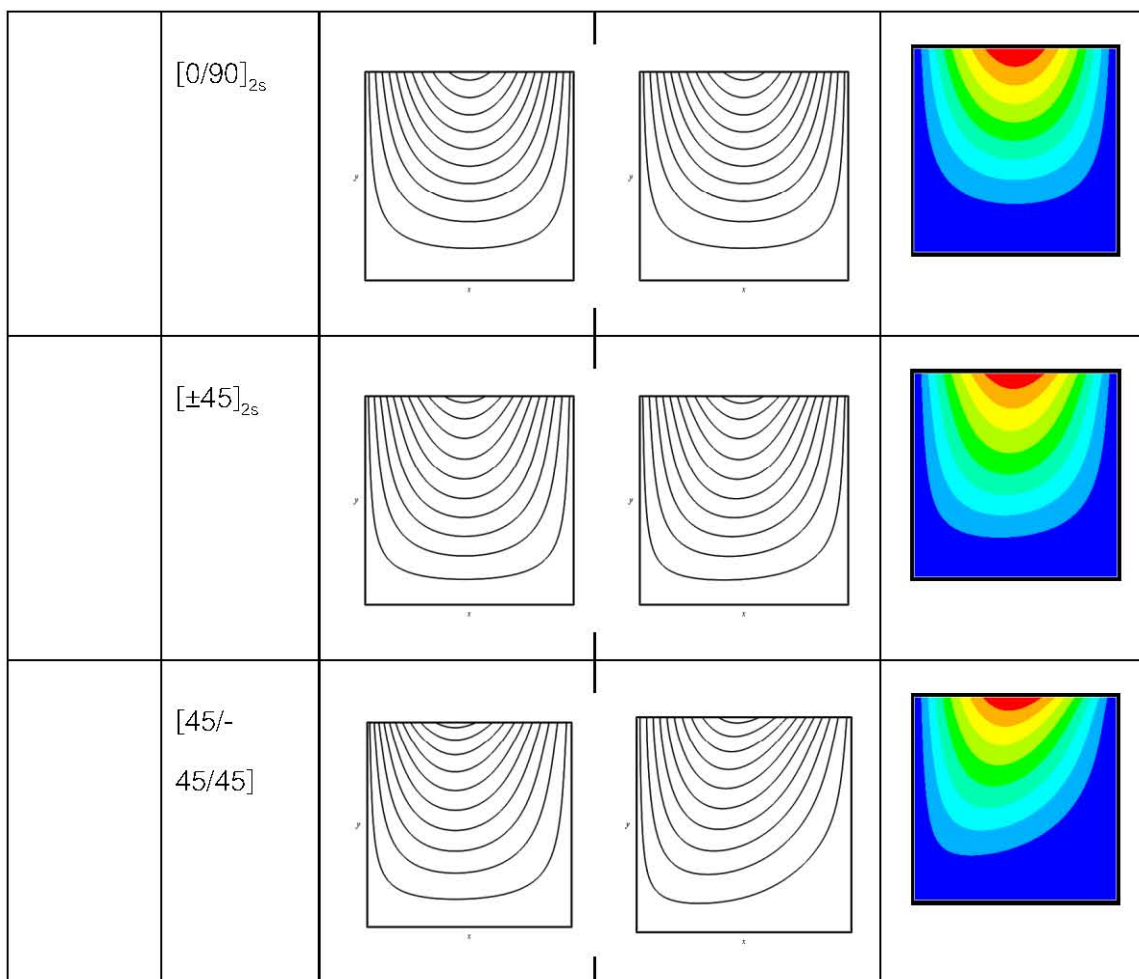
SCSF	EKM	36.53	272.18	245.92	76.95
	Present study (1 term)	36.53	272.18	248.74	85.50
	Present study (2 terms)	36.53	272.18	246.03	77.98
	% difference (1 term)	0	0	1.134	10.00
	% difference (2 terms)	0	0	0.045	1.34

จากรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่แสดงในตารางที่ 6-5 พบว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการหาโดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่หนึ่งพจน์ สอดคล้องกับผลการศึกษาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เฉพาะวัสดุไอโซทรอปิกและวัสดุคอมโพสิตแบบ $[0/90]_{2s}$ สำหรับการเรียงตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ในปัญหานี้คือ $[\pm 45]_{2s}$ และ $[45/-45/45]$ การใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระบวนเริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์ ที่แสดงในคอลัมน์ที่สามให้รูปร่างโหมดถูกต้องเมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แสดงในคอลัมน์ที่สี่ ในทุก ๆ เงื่อนไขขอบเขตการจับยึด จากผลรูปร่างโหมดในตารางที่ 6-5 แสดงให้เห็นว่าการใช้จำนวนพจน์เท่ากับหนึ่งพจน์เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสามารถแก้ปัญหาได้กับวัสดุไอโซทรอปิกและวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply เท่านั้นไม่สามารถแก้ปัญหาวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ angle-ply แม้ว่าจะให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ใกล้เคียงกันก็ตามแต่การสมมุติพจน์เริ่มต้นเพียงหนึ่งพจน์ไม่สามารถแสดงรูปร่างโหมดที่ต้องการได้ การสมมุติพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 2 พจน์สามารถแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนได้ผลของค่าความถี่ธรรมชาติที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยและสามารถแสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้ถูกต้อง ในวิทยานิพนธ์นี้จึงจะใช้จำนวนพจน์ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระบวนเริ่มต้นสูงสุดเท่ากับ 2 พจน์

ตารางที่ 6-5 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยต่าง ๆ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้งสามประเภท

Boundary Condition	Stacking sequence	Present study (1term)	Present study (2terms)	Finite element method
CCCC	isotropic			
	$[0/90]_{2s}$			
	$[\pm 45]_{2s}$			
	$[45/-45/45]$			

CCSS	isotropic			
	$[0/90]_{2s}$			
	$[\pm 45]_{2s}$			
	$[45/-45/45]$			
SCSF	isotropic			



การเปรียบเทียบในส่วนต่อไปจะแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_3$ และ $[30/-30/30]$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธี Galerkin ระบบวิธีแคนโทโรวิชโดยการแทนผลเฉลยด้วยอนุกรมกำลังลงในสมการครอบคลุม (จากนี้จะเรียกโดยย่อว่า EKM) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การศึกษาใช้คุณสมบัติของวัสดุตามตารางที่ 6-3 แสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจำนวน 5 โหมดแรก ผลจากการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติตามตารางที่ 6-6 ได้ค่าที่ความถี่ใกล้เคียงกันในช่วงโหมดที่หนึ่งถึงสาม และเริ่มมีความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นในโหมดที่สี่และห้า แต่ค่าความถี่อยู่ในเกณฑ์ค่อนข้างน้อยจึงถือว่ามีความถูกต้อง ผลการเปรียบเทียบรูปร่างโหมดการสั่นกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามตารางที่ 6-7 และตารางที่ 6-8 มีความคล้ายคลึงกัน แผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_3$ มีค่า

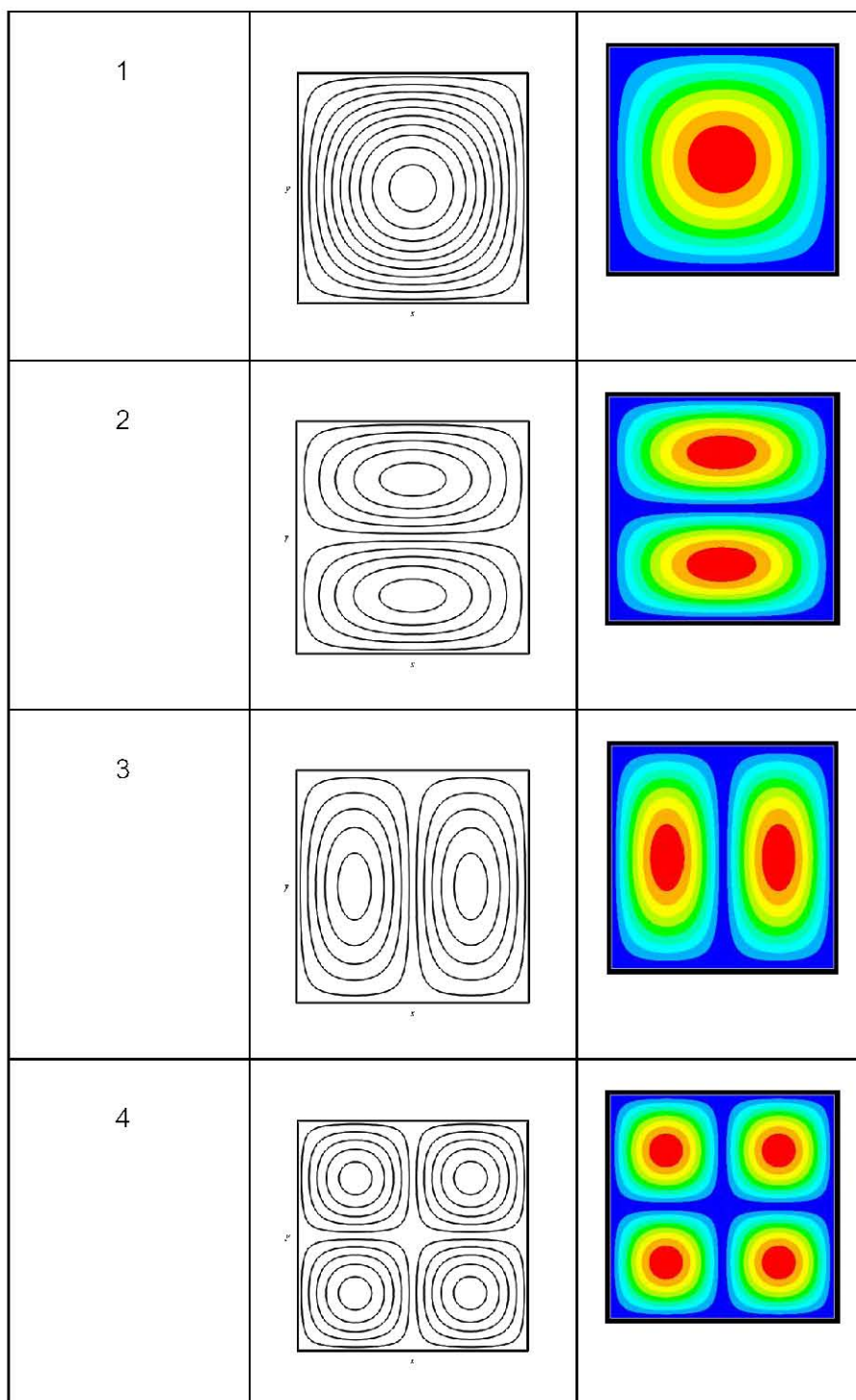
ความแข็งเกร็งในแนวแกน x สูงกว่า ความแข็งเกร็งในแนวแกน y ทำให้รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนเกิดเป็นรูปภาพไซนในแนวแกน y ที่ความถี่ต่ำกว่าการเกิดการสั่นสะเทือนเป็นรูปภาพไซนในแนวแกน x แสดงให้เห็นว่าการเรียงตัวของเส้นใยมีผลต่อรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน ตารางที่ 6-8 แสดงรูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [30/-30/30] รูปร่างโหมดการสั่นที่ 1 – 5 มีลักษณะที่เอียงในแนวทแยงมุมตามรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใย รูปร่างโหมดการสั่นที่ได้มีลักษณะคล้ายรูปร่างโหมดการสั่นทั้งห้าโหมดของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ $[0]_3$ แต่ต่างกันตรงที่รูปร่างโหมดของชิ้นงานที่มีการเรียงตัวแบบ [30/-30/30] มีรูปร่างลักษณะที่เอียง เหตุที่รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนคล้ายคลึงกันเพราะแกนในแนวระนาบเดียวกันกับการเรียงตัวของเส้นใยมีค่าความแข็งแรงมากกว่าแกนในทิศตั้งฉากกับการเรียงตัวของเส้นใย โหมดของการสั่นสะเทือนจึงเป็นไปตามทฤษฎีที่อธิบายไว้ข้างต้น

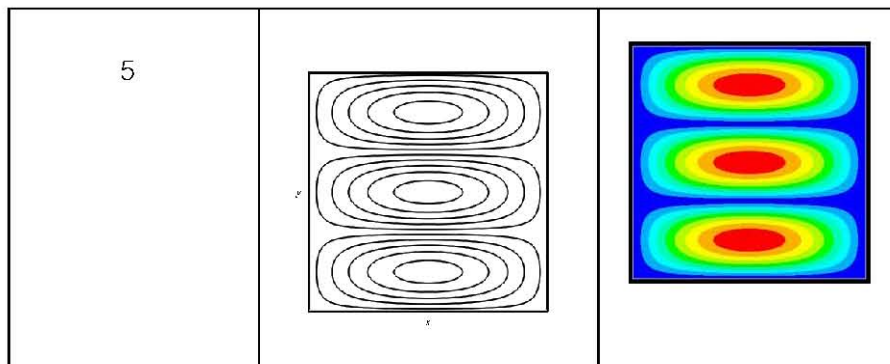
ตารางที่ 6-6 ความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบต่าง ๆ และเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS

Mode shape	$[0]_3$				[30/-30/30]			
	Ref11	EKM	FEM	Present	Ref11	EKM	FEM	Present
1	32.27	32.25	33.27	32.24	33.76	33.71	33.26	33.74
2	70.87	70.68	75.24	70.67	76.42	76.04	75.24	76.20
3	94.62	94.36	89.43	94.35	90.62	90.52	89.43	90.55
4	129.22	128.99	128.39	128.99	130.82	130.33	128.39	130.60
5	137.75	137.03	150.36	137.02	153.31	152.80	150.36	153.16

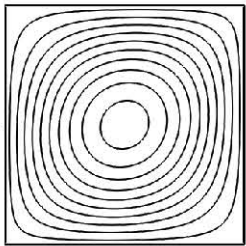
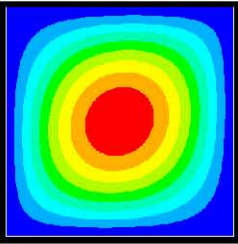
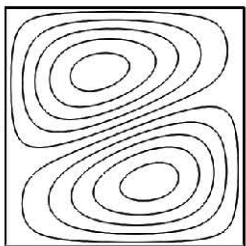
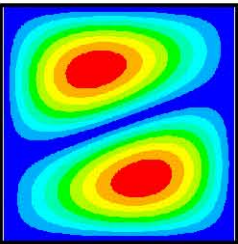
ตารางที่ 6.7 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่หนึ่งของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_3$ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS

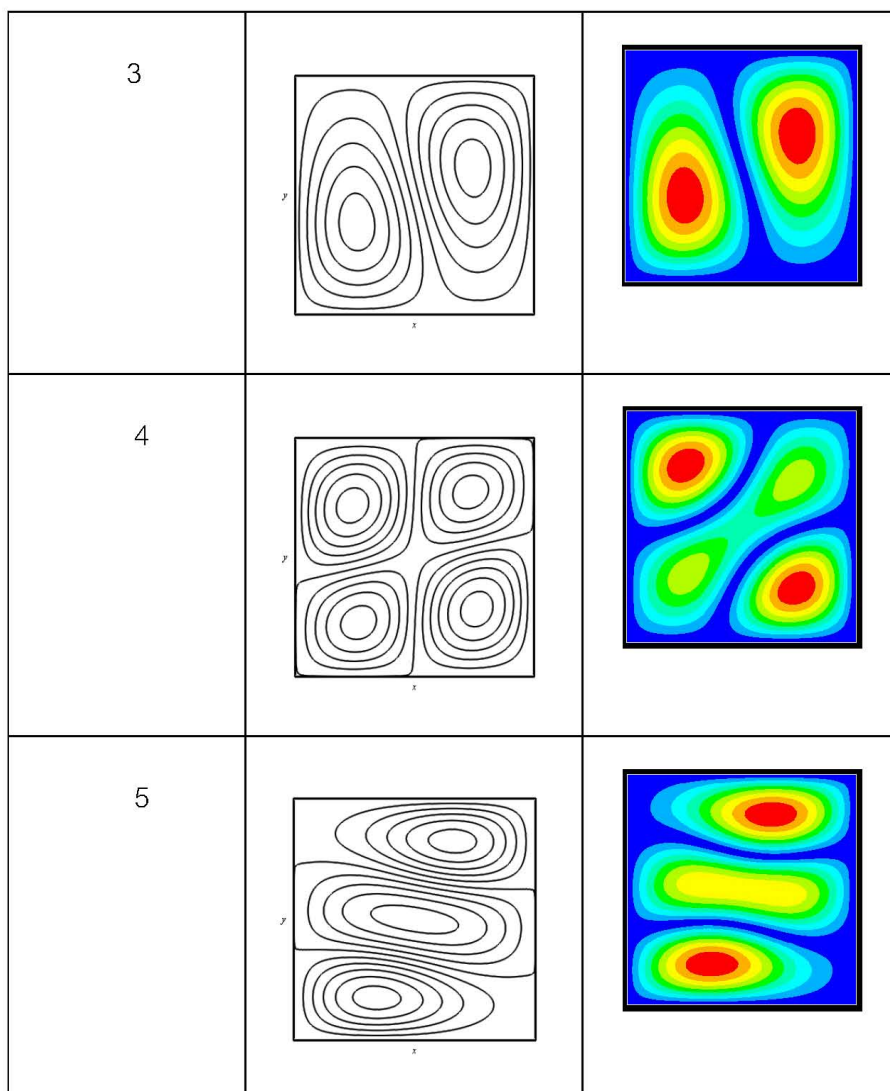
Mode shape	Present solution	FEM
------------	------------------	-----





ตารางที่ 6-8 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่หนึ่งของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [30/-30/30] และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS

Mode shape	Present solution	FEM
1		
2		



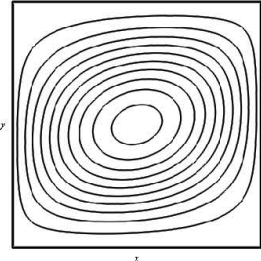
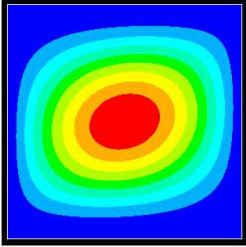
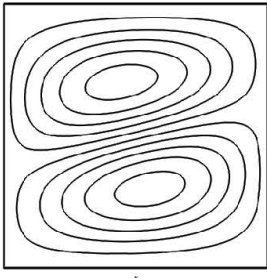
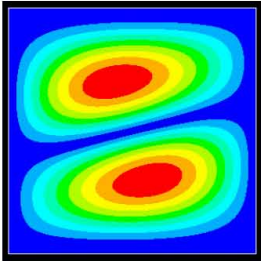
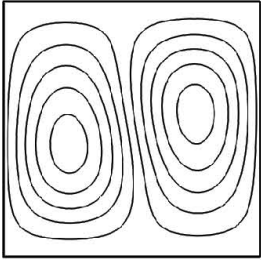
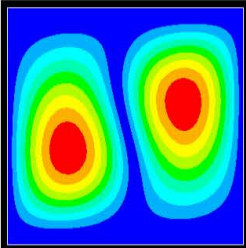
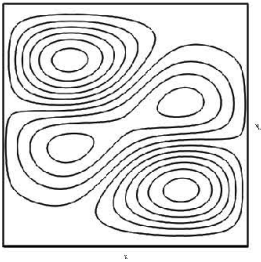
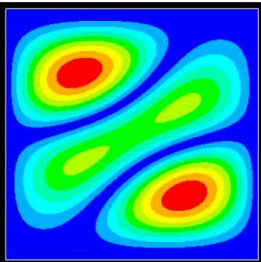
ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางสามารถวิเคราะห์หาคำตอบโดยวิธีต่าง ๆ มากมายที่กล่าวไว้ในบทที่สอง วิธีแต่ละวิธีมีข้อดีข้อด้อยต่างกันไป ระเบียบวิธีวิธีหนึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่นิยมนำมาวิเคราะห์สมการในทางวิศวกรรม ระเบียบวิธีวิธีอื่นสามารถให้คำตอบที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมากแต่ใช้ทรัพยากรในการคำนวณมากเช่นกัน การเปรียบเทียบในส่วนถัดมาจึงเลือกระเบียบวิธีวิธีมาใช้ในการเปรียบเทียบและจะแสดงให้เห็นถึงรูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/30/60/90]$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้กับวิธีระเบียบวิธีวิธี วิธี EKM และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้คุณสมบัติตามตารางที่ 6-3 แสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจำนวน 6 โหมด ผลจาก

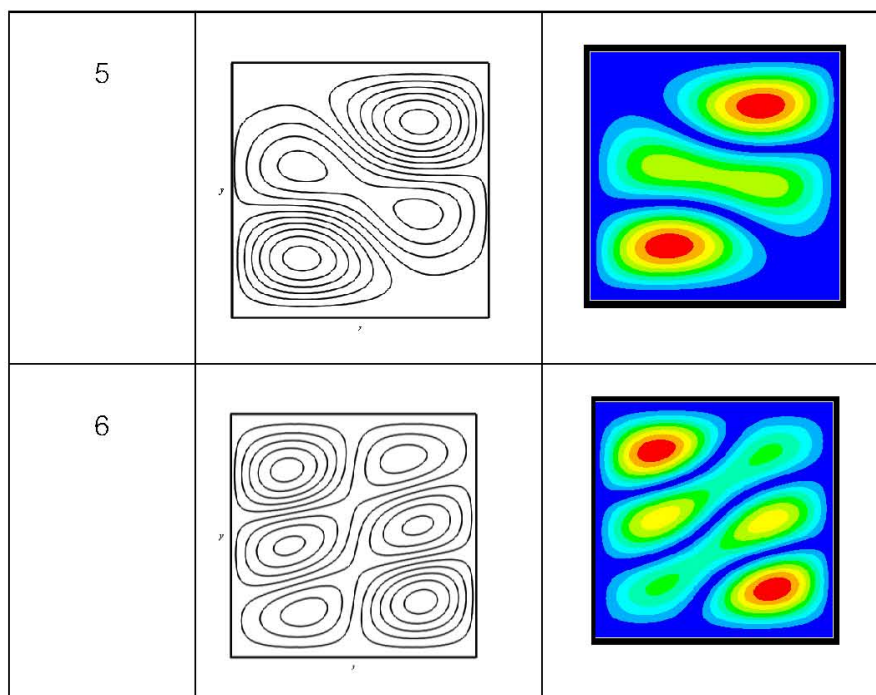
การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติตามตารางที่ 6-9 ได้ค่าที่ความใกล้เคียงกันมีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 0.06 เปอร์เซ็นต์ ค่าความถี่อยู่ในเกณฑ์ค่อนข้างน้อย ถือว่ามีความถูกต้อง ผลจากการเปรียบเทียบรูปร่างโหมดการสั่นกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามตารางที่ 6-10 มีความคล้ายคลึงกัน พิจารณารูปร่างโหมดการสั่นสะท้อนตามการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/30/60/90]_{2s}$ จะเห็นได้รูปร่างโหมดการสั่นสะท้อนที่ 1 และ 2 มีลักษณะเอียงในแนวทแยงมุม เพราะในทิศตั้งฉากกับแกนแนวเส้นใยมีความแข็งแรงน้อยกว่าในทิศของเส้นใย ทำให้เกิดรูปร่างการสั่นสะท้อนในทิศทางตามรูป เช่นเดียวกับกับรูปร่างโหมดการสั่นที่ 4 และ 6 สำหรับโหมดการสั่นที่ 3 และ 5 เกิดการสั่นสะท้อนแบบกราฟรูปไซน์บนทิศเดียวกับการเรียงตัวของเส้นใยเมื่อรับความถี่ที่สูงขึ้นค่า ๆ หนึ่ง จนตรงกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิตบางในโหมดนั้น ๆ

ตารางที่ 6-9 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบต่าง ๆ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS

Mode shape	$[0/30/60/90]_s$			
	EKM	Ritz	FEM	Present
1	71.71	71.75	71.681	71.76
2	145.89	145.96	145.82	145.90
3	190.41	190.38	190.27	190.40
4	237.79	237.96	237.72	237.73
5	278.45	277.69	277.47	277.87
6	342.01	342.16	341.80	342.18

ตารางที่ 6-10 รูปร่างโหมดการสั่นสะท้อนที่หนึ่งแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/30/60/90]_{2s}$ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC

Mode shape	Present solution	FEM
1		
2		
3		
4		



6.2 ผลของขนาดสัดส่วนต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน

ในส่วนนี้จะแสดงให้เห็นถึงขนาดสัดส่วน (aspect ratio) ต่อค่าความถี่ธรรมชาติรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_8$ และ $[0/90]_{2s}$ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC โดยใช้คุณสมบัติวัสดุตามตารางที่ 6-3 โดยพิจารณารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจำนวน 8 โหมดโดยใช้ขนาดสัดส่วนทั้งหมดสามค่าคือ 1 2 และ 3 ตามลำดับ

ตารางที่ 6-11 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้เรียงลำดับจากโหมดหนึ่งไปถึงโหมดแปด สำหรับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนต่าง ๆ ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าน้อยลงสำหรับชิ้นงานที่มีขนาดใหญ่ขึ้น ตารางที่ 6-12 แสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตที่มีขนาดสัดส่วนความยาวต่อความกว้างเท่ากับ 1 พิจารณาโหมดที่หนึ่งแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใย $[0]_8$ และ $[0/90]_{2s}$ เกิดรูปร่างเป็นกราฟไซน์ครึ่งลูกเหมือนกัน แต่ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีความแตกต่างกันมาก รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 2 แผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใย $[0]_8$ และ $[0/90]_{2s}$ เกิดรูปร่างกราฟไซน์ครึ่งลูกเหมือนกันแต่ทิศทางตรงกันข้าม เนื่องจากแผ่นคอมโพสิต

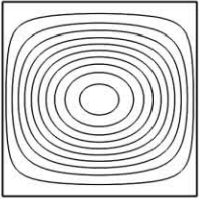
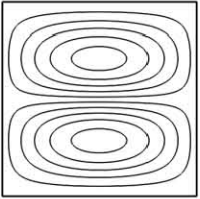
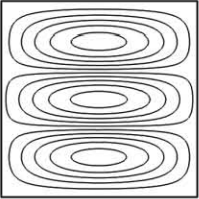
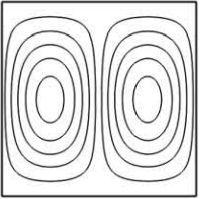
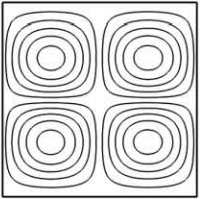
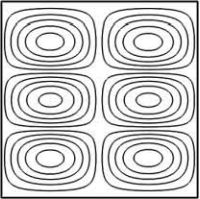
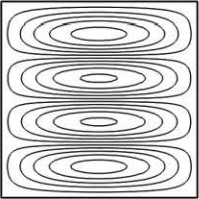
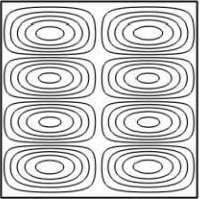
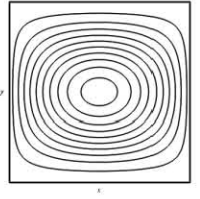
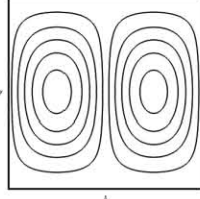
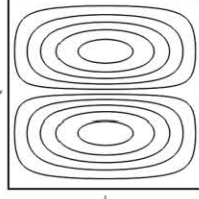
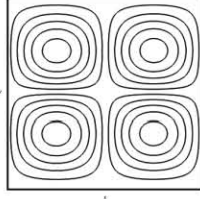
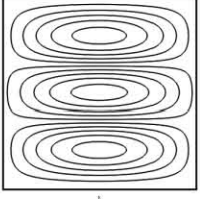
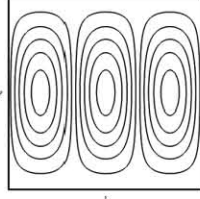
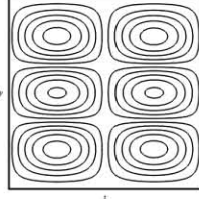
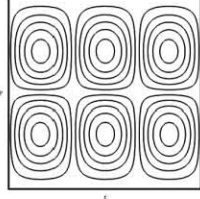
ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเท่ากับ $[0]_8$ มีค่าความแข็งแรงในทิศทางหนึ่งมากกว่า จึงเป็นผลให้รูปร่างโหมดการสั้นสะเทือนที่สองของแผ่น $[0/90]_{2s}$ เกิดรูปแบบการสั้นแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกในทิศทาง 0 องศา ก่อนที่จะเกิดรูปแบบการสั้นในทิศทาง 90 องศาในโหมดการสั้นสะเทือนที่ 3 ซึ่งตรงกับโหมดการสั้นสะเทือนที่ 2 ของแผ่น $[0]_8$ ตารางที่ 6-13 แสดงรูปร่างโหมดการสั้นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 2 พิจารณาโหมดการสั้นสะเทือนที่ 1 2 3 และ 4 ของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ $[0/90]_{2s}$ จะเกิดรูปร่างการสั้นแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกในทิศทาง 0 องศาตั้งแต่ 1 ถึง 4 ลูกตามลำดับก่อนที่จะเกิดรูปแบบการสั้นแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกจำนวน 2 ลูกในทิศทาง 90 องศาในโหมดการสั้นสะเทือนที่ 5 ในขณะที่แผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_8$ เกิดรูปแบบเดียวกันนี้ในโหมดที่สาม ตารางที่ 6-14 และ 6-15 แสดงรูปร่างโหมดการสั้นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 3 ของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเท่ากับ $[0]_8$ และ $[0/90]_{2s}$ ตามลำดับ ผลที่แสดงในตารางสอดคล้องกับหลักที่พิจารณาดังที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น สัดส่วนความยาวต่อความกว้างที่เท่ากับ 3 ทำให้แผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเท่ากับ $[0/90]_{2s}$ เกิดรูปร่างการสั้นแบบกราฟไซน์ครึ่งลูกสูงสุด 6 ลูกในแนวทิศทาง 0 องศา ก่อนที่จะเกิดแบบสองลูกในทิศทาง 90 องศา ค่าความถี่ธรรมชาติในตารางที่ 6-11 สำหรับแผ่นที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 3 มีค่าความถี่ธรรมชาติน้อยกว่ามากในทุกโหมดการสั้นสะเทือนเมื่อเทียบกับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1 และสามารถสังเกตได้อีกว่าค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับแผ่นที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 3 มีค่าความถี่ธรรมชาติในแต่ละโหมดการสั้นสะเทือนค่อนข้างใกล้เคียงกัน ดังนั้นการนำไปใช้งานในความถี่ต่าง ๆ อาจทำให้หลีกเลี่ยงค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นที่มีอัตราส่วนเท่ากับ 3 ได้ค่อนข้างยาก จึงอาจเกิดการสั้นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางได้

จากการศึกษาขนาดสัดส่วนกับค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั้นสะเทือนสำหรับแผ่นคอมโพสิตบางที่มีคุณสมบัติวัสดุเดียวกัน สามารถอธิบายได้ว่าขนาดสัดส่วนของแผ่นหรือขนาดของชิ้นงานแปรผกผันกันกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นในแต่ละโหมดรูปร่างการสั้นสะเทือน

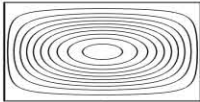
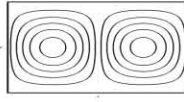
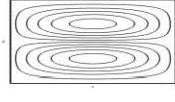
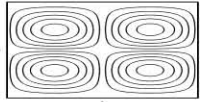
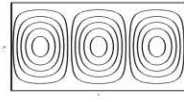
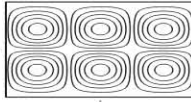
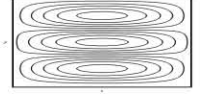
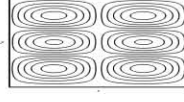
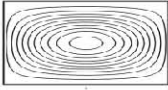
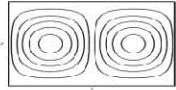
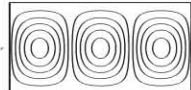
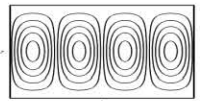
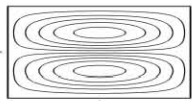
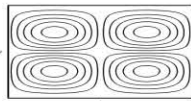
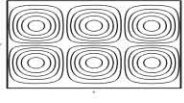
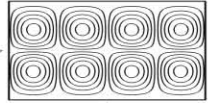
ตารางที่ 6-11 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบต่างๆและมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC

Mode shape	[0] ₈			[0/90] _{2s}		
	Aspect ratio			Aspect ratio		
	1	2	3	1	2	3
1	505.52	422.62	414.96	386.67	220.96	202.82
2	1130.15	505.52	437.83	678.54	386.67	255.61
3	1197.22	736.50	505.52	1170.43	558.52	386.67
4	1626.72	1130.15	640.89	1245.87	678.54	543-50
5	2276.09	1143-90	850.35	1432.69	734.47	583-83
6	2349.23	1197.22	1130.15	1806.74	964.17	599.56
7	2587.34	1341.62	1137.20	1844.64	1070.60	678.54
8	2684.26	1626.72	1155.00	2389.75	1170.43	848.40

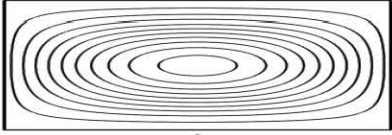
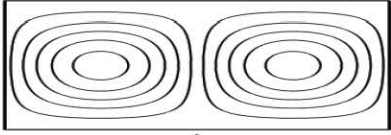
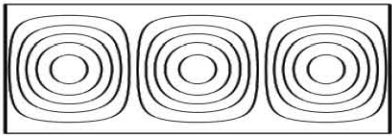
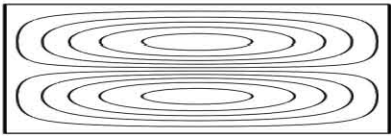
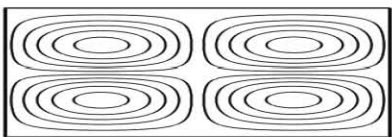
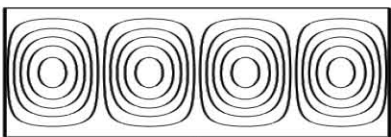
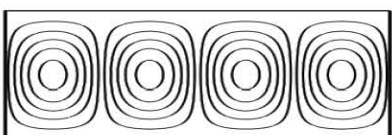
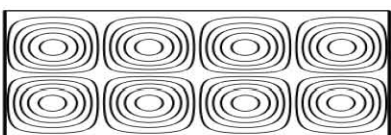
ตารางที่ 6-12 รูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบ $[0]_8$ และ $[0/90]_{2s}$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC โดยมีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1

Stacking sequence	Mode shape				
	1	2	3	4	
$[0]_8$					
	5	6	7	8	
					
	Stacking sequence				
	Mode shape				
		1	2	3	4
	$[0/90]_{2s}$				
		5	6	7	8
					

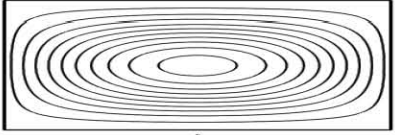
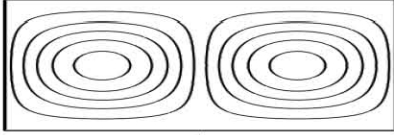
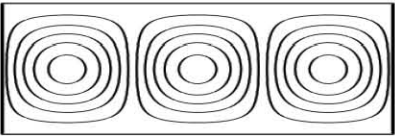
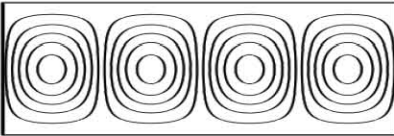
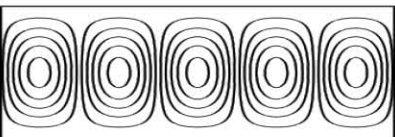
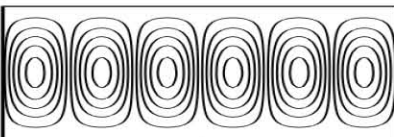
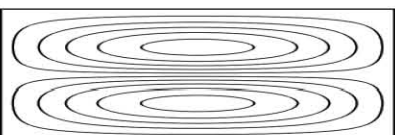
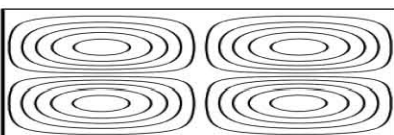
ตารางที่ 6-13 รูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบ $[0]_8$ และ $[0/90]_{2s}$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC โดยมีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 2

Stacking sequence	Mode shape		
	1	2	3
$[0]_8$			
	4	5	6
			
	7	8	
			
Stacking sequence	Mode shape		
	1	2	3
$[0/90]_{2s}$			
	4	5	6
			
	7	8	
			

ตารางที่ 6-14 รูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบ $[0]_8$ มีเส้นใยขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC โดยมีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 3

Stacking sequence	Mode shape	
	1	2
$[0]_8$		
	3	4
		
	5	6
		
	7	8
		

ตารางที่ 6-15 รูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบ $[0/90]_{2s}$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC โดยมีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 3

Stacking sequence	Mode shape	
	1	2
$[0/90]_{2s}$		
	3	4
		
	5	6
		
	7	8
		

ในบทนี้ได้้นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบาง โดยศึกษาผลของจำนวนพจน์ในการใช้สมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply และ angle-ply ศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดของการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยในมุมต่าง ๆ ศึกษาผลของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน พบว่าปัจจัยต่าง ๆ ที่ใช้เป็นหัวข้อในการศึกษา มีความสัมพันธ์กันตามผลที่ได้จากการคำนวณ และผลจากการเปรียบเทียบการคำนวณด้วยวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งอยู่ในเกณฑ์ดี การศึกษาในบทนี้ยืนยันว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีแคนโทโรวิชและวิธีการแปลงสมการให้อยู่รูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งสามารถใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นคอมโพสิทบางได้เป็นอย่างดี

บทที่ 7

บทสรุป

7.1 บทสรุป

ปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือนเป็นปัญหาที่อาจเกิดขึ้นได้ในโครงสร้างทางวิศวกรรมต่าง ๆ เช่น เสา เหล็กคดคด แผ่นคอนกรีต หรือโครงสร้างแผ่นบางที่เป็นส่วนประกอบต่าง ๆ มากมาย วัสดุคอมโพสิตเป็นวัสดุที่ได้รับความนิยมมาใช้สำหรับโครงสร้างในงานทางวิศวกรรม เนื่องจากมีน้ำหนักเบาและคุณสมบัติทางกลที่ได้เปรียบในการออกแบบ การออกแบบเพื่อที่จะหลีกเลี่ยงความเสียหายจากพฤติกรรมทั้งสองจึงเป็นที่มาของการศึกษาปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือน การหาภาวะการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติที่ผ่านมาทำได้โดยวิธีการวิเคราะห์วิธีการทดลอง และวิธีเชิงตัวเลข สองวิธีแรกมีข้อจำกัดทั้งในเรื่องเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดหรือค่าใช้จ่ายในการทดลอง วิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นอีกระเบียบวิธีที่ได้รับการยอมรับและใช้กันอย่างกว้างขวางในปัจจุบันเนื่องจากสามารถประเมินภาวะการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติได้โดยไม่มีข้อจำกัดตามที่กล่าวไปในข้างต้น

วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหามีหลายวิธีเช่น ระเบียบวิธีริทซ์ ระเบียบวิธี Galerkin ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นต้น วิธีต่างๆที่กล่าวมานี้มีข้อดีข้อด้อยแตกต่างกัน การศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้จึงเลือกใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการหาภาวะการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิตบาง เนื่องจากในการสมมุติค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเริ่มต้นไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของปัญหา และระเบียบวิธีแคนโทโรวิชยังลดรูปสมการจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างๆ ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชจึงเป็นระเบียบวิธีกึ่งวิเคราะห์กึ่งเชิงเลขชนิดหนึ่ง ผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีนี้นำมาซึ่งผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำเนื่องจากมีการแก้ปัญหามาจากสมการครอบคลุมโดยตรง

สมการครอบคลุมเชิงอนุพันธ์สามัญที่ลดรูปมาจากเงื่อนไขพลังงานรวมโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชอยู่ในรูประบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สี่ การแก้สมการครอบคลุมโดยตรงที่ผ่านมาสามารถหาผลเฉลยในรูป Closed-form ได้ตามที่แสดงในงานวิจัยของ Ungbhakorn และ

Singhatanagid [14] แต่มีข้อจำกัดคือการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นคอมโพสิตบางต้องอยู่ในรูป cross-ply และมีลักษณะสมมาตรเท่านั้น ไม่สามารถหาผลเฉลยของแผ่นคอมโพสิตบางที่การเรียงตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ได้ งานวิจัยของ Shufrin และคณะ [13] แก่สมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สี่โดยการสมมติคำตอบให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง แล้วแทนลงในสมการครอบคลุมเพื่อหาภาวะการโก่งงอหรือค่าความถี่ธรรมชาติ วิธีนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยไม่มีเรื่องข้อจำกัดการเรียงตัวของเส้นใยหรือเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของปัญหา แต่วิธีนี้ต้องการจำนวนเทอมอนุกรมของคำตอบมากเพื่อความถูกต้องแม่นยำของผลเฉลยจึงทำให้ใช้เวลาและทรัพยากรในการคำนวณสูง การศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำเสนอวิธีการแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่สี่ให้อยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา ซึ่งวิธีที่นำเสนอนี้เป็นการแก้สมการครอบคลุมโดยตรง ไม่ต้องสมมติคำตอบเหมือนวิธีอนุกรมกำลัง คำตอบที่ถือได้ว่าเป็นผลเฉลยแม่นยำที่แก้จากสมการครอบคลุมและพจน์ของคำตอบมีจำนวนเท่ากับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งจึงเป็นวิธีที่ใช้ทรัพยากรในการคำนวณน้อยกว่าทั้งสองวิธีที่ผ่านมา

ผลจากการศึกษาด้วยการแก้สมการครอบคลุมด้วยวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งแบ่งเป็นสองส่วนคือปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือนมีดังนี้

1. ปัญหาการโก่งงอที่ศึกษาในส่วนแรกคือการสอบทวนความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นและจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบของคำตอบที่ใช้สำหรับปัญหา cross-ply โดยเลือกใช้แผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบ $[0/90]_{5s}$ และ $[90/0]_{5s}$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดเป็นแบบ CCCC และ SCSC เมื่อเปรียบเทียบผลการทดลองกับระเบียบวิธีวิธีและ Ungbhakom และ Singhatanagid [12] พบว่ามีเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างกันอยู่ระหว่าง 0.01-0.5 % ถือว่าผลคำตอบที่ได้มีความถูกต้องสูงและยังสามารถแสดงรูปร่างการโก่งงอได้ถูกต้องตามเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้วย
2. ศึกษาผลของจำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดในรูปแบบต่าง ๆ กับภาวะการโก่งงอและรูปร่างการโก่งของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการเรียงตัวแบบ angle-ply โดยที่แผ่นคอมโพสิตมีการเรียงตัวแบบ $[30/-30/30]$ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดเป็นแบบ SSSS CCCC SCSC และ SCCS ใช้จำนวนพจน์ใน

ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบการคำนวณเท่ากับ 1 และ 2 พจน์เปรียบเทียบผลการคำนวณกับ Shufrin และคณะ [11] และระเบียบวิธี Galerkin ผลจากการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าการใช้จำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบของคำตอบเท่ากับ 1 พจน์ไม่สามารถให้รูปร่างการโก่งที่ถูกต้องได้แม้ว่าการโก่งงอที่ได้จะใกล้เคียงกับผลเฉลยที่นำมาเปรียบเทียบ การใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 2 พจน์ให้คำตอบที่ถูกต้องและรูปร่างการโก่งที่ถูกต้องเมื่อเปรียบเทียบกับรูปร่างการโก่งที่คำนวณได้จากโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ จึงสรุปได้ว่าการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับสองพจน์เพียงพอสำหรับวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งในการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตแบบ angle-ply

3. ศึกษาถึงผลของการเรียงตัวของเส้นใยโดยกำหนดรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใยคือ $[\theta]_5$ โดยที่ θ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 90 องศาโดยมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSS ผลจากการศึกษาพบว่าภาระการโก่งงอจะเพิ่มขึ้นไปจนถึงค่า ๆ หนึ่งและลดต่ำสุดที่การเรียงตัวของเส้นใยเท่ากับ $[90]_5$
4. การประยุกต์วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งกับปัญหาการสันสะเทือนเป็นอีกการศึกษาหนึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ ในการศึกษาสนใจตัวแปรดังนี้ จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่ใช้ในการคำนวณ มุมของการเรียงตัวของเส้นใย และขนาดสัดส่วนของแผ่นคอมโพสิต โดยส่วนแรกศึกษาจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบของคำตอบที่ใช้ในการคำนวณ โดยใช้จำนวนพจน์เท่ากับ 1 และ 2 พจน์ โดยศึกษาวัสดุแบบไอโซทรอปิกและแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเป็นแบบ $[0/90]_{2s}$ $[\pm 45]_{2s}$ และ $[45/-45/45]$ มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC CCSS และ SCSF เมื่อเปรียบเทียบผลการศึกษาที่ได้กับงานวิจัยของ ธนาวุฒิ [30] พบว่ามีความสอดคล้องกับปัญหาการโก่งงอ จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเท่ากับหนึ่งไม่สามารถให้รูปร่างโหมดการสันสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ angle-ply ที่ถูกต้องได้ จำเป็นต้องใช้จำนวนพจน์เท่ากับ 2 พจน์จึงจะเพียงพอ รูปร่างโหมดการสันสะเทือนจะเป็นไปตามทิศทางของเส้นใย

5. ส่วนสุดท้ายศึกษาถึงขนาดสัดส่วนของแผ่นคอมโพสิต โดยกำหนดให้ขนาดสัดส่วนมีค่าเท่ากับ 1 2 และ 3 เท่าตามลำดับ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSC พบว่าขนาดสัดส่วนยิ่งเพิ่มมากขึ้น ค่าความถี่ธรรมชาติในแต่ละโหมดของแผ่นคอมโพสิตจะลดลงเมื่อเทียบกับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1 และจากผลการคำนวณยังแสดงให้เห็นอีกว่าชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 3 ความถี่ธรรมชาติตั้งแต่โหมดการสั่นสะเทือนที่ 1 ถึง 8 มีค่าน้อยลงจนใกล้เคียงกัน ค่าความถี่ธรรมชาติที่ใกล้เคียงกันในแต่ละโหมดทำให้หลีกเลี่ยงความถี่ของงานไม่ให้ตรงกับความถี่ธรรมชาติของแผ่นได้ยาก

ผลจากการแก้ปัญหาสมการควบคุมของปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนโดยวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งสามารถสรุปได้ว่าสำหรับปัญหาแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply การใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 พจน์ หรือ 2 พจน์ผลเฉลยของคำตอบที่ได้มีค่าเท่ากันและถูกต้อง แต่สำหรับปัญหาแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 2 พจน์เพียงพอที่จะให้คำตอบและรูปร่างที่ถูกต้องแต่หากชิ้นงานของโครงสร้างมีความซับซ้อนมากขึ้น การใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 2 พจน์อาจจะไม่เพียงพอ ดังนั้นในการคำนวณจำเป็นต้องเพิ่มจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 3 หรือมากกว่าเพื่อจะได้คำตอบที่มีความถูกต้องและแม่นยำ ในวิทยานิพนธ์นี้มีการพยายามแก้ปัญหาโดยใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 3 พจน์แต่ไม่สามารถทำได้เนื่องจากข้อจำกัดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ กล่าวคือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไม่สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ตามที่ต้องการได้ จึงอาจนำไปศึกษาเป็นหัวข้อวิจัยในอนาคตได้ วิธีที่นำเสนอนี้สามารถแก้ปัญหาได้ทุกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด มีจำนวนของคำตอบตั้งแต่ 4 ถึง 8 พจน์ซึ่งเมื่อเทียบกับวิธีอนุกรมกำลังที่ต้องใช้จำนวนเทอมของคำตอบถึง 100 พจน์ขึ้นไป วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งจึงเป็นวิธีที่เหมาะสมที่จะใช้แก้สมการหรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง ๆ สำหรับปัญหาทางวิศวกรรมหรือสาขาอื่นๆ

7.1 ประโยชน์ที่ได้รับและข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ประโยชน์ที่ได้รับจากการนำเสนอวิทยานิพนธ์นี้คือ ทราบถึงประโยชน์ของวิธีแคนโทโรวิชว่าสามารถลดรูปสมการจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญทำให้ง่ายในการแก้หาผลเฉลยของคำตอบ พบว่าปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั้นสะเทือนและผลของตัวแปรสำคัญต่าง ๆ ที่มีผลต่อภาระการโก่งงอและรูปร่างการโก่งงอสำหรับปัญหาการโก่งงอหรือค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั้นสะเทือนสำหรับปัญหาการสั้นสะเทือน เช่น การเรียงตัวของเส้นใยด้วยรูปแบบมุมต่าง ๆ จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณขนาดสัดส่วนของแผ่นคอมโพสิตบาง เป็นต้น สามารถประยุกต์วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งมาใช้แก้สมการครอบคลุมของปัญหาทั้งสองพร้อมทั้งได้ประดิษฐ์โปรแกรมเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั้นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตบางด้วย รับรู้ถึงข้อจำกัดของวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งว่าจำเป็นต้องใช้จำนวนทศนิยมสูงเพื่อความถูกต้องของคำตอบทำให้บางปัญหาอาจต้องใช้ทรัพยากรมากในการคำนวณหรือโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นอาจต้องปรับปรุงเพื่อประสิทธิภาพในการคำนวณปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นโดยใช้ทรัพยากรน้อยลง

งานวิจัยในอนาคตที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีแคนโทโรวิชรวมถึงการศึกษาปัญหาการโก่งงอและการสั้นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยที่มุมใด ๆ โดยที่แผ่นคอมโพสิตมีลักษณะที่ซับซ้อนและมีลักษณะใกล้เคียงกับชิ้นงานโครงสร้างจริงในปัจจุบันได้เช่นโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้ทำอากาศยาน นอกจากนี้ยังสามารถนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ในทางวิศวกรรมที่มีสมการซับซ้อนและรูปแบบสมการที่วิเคราะห์คล้ายกับปัญหาการโก่งงอและสั้นสะเทือน นำวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งไปประยุกต์แก้สมการเชิงอนุพันธ์ลำดับสูง ๆ ในทางวิศวกรรม เพราะวิธีที่นำเสนอนี้มีความถูกต้องสูง และแก้สมการครอบคลุมโดยตรง คำตอบของสมการที่ได้จึงถือว่าเป็นผลเฉลยแม่นยำตรงได้

รายการอ้างอิง

- [1] Lyengar, N.G.R. Structural Stability of Columns and Plates. The United Kingdom : JOHN WILEY & SONS, 1988.
- [2] Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [3] Chai, G.B., and Hoon K.H. Buckling of generally laminated composite plates with various edges support conditions. Composite Structures 29 (1994): 299-310.
- [4] Darvizeh M., Darvizeh, A., Ansari R., and Sharma, C.B. Buckling analysis of generally laminated composite plates (generalized differential quadrature rules versus Rayleigh-Ritz method). Composite Structures 63 (2004): 69-74.
- [5] Dawe DJ., Wang S. Spline finite strip analysis of the buckling and vibration of rectangular composite laminated plates. Int J Mech Sci 1995; 37(6): 645–67.
- [6] Chai GB., Khong PW. The effect of varying the support conditions on the buckling of laminated composite plates. Compos Struct 1993; 24(2): 99–106.
- [7] Liu GR., Chen XL., Reddy JN. Buckling of symmetrically laminated composite plates using the element-free Galerkin method. Int J Struct Stabil Dyn 2002; 2(3): 281–94.
- [8] Kim YS., Hoa SV. Bi-axial buckling behavior of composite rectangular plates. Compos Struct 1995; 31(4): 247–52.
- [9] Kerr, A.D. An extended Kantorovich method for solution of eigenvalue problem. International Journal of Solids and Structures 5 (1969): 559-572.
- [10] Eisenberger M., Alexandrov A. Buckling loads of variable thickness thin isotropic plates. Thin-walled Struct 2003; 41(9): 871–89.
- [11] Shufrin I., Eisenberger M. Stability of variable thickness shear deformable plates first order and high order analyses. Thin-Walled Struct 2005; 43(2): 189–207.
- [12] Ungbhakorn V. and Singhatanadgid P. Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method. Composite Structures 73 (2006): 120-128.

- [13] Yuan S. and Jin Y. Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method. Composite Structures 66 (1998): 861-867.
- [14] Shufrin I., Rabinovitch O. and Eisenberger M. Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions-A semi analytical approach. Composite Structures 82 (2008): 521-531.
- [15] Leissa, A.W. Vibration of Plates. The United States of America : Office of Technology Utilization National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [16] Blevin R.D., Van Nostrand Reinhold. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. New York, 1979.
- [17] Gorman, D.J. Free Vibration Analysis of Rectangular Plates. The United States of America. Elsevier, 1982.
- [18] RAMKUMAR R.L., CHEN P.C. and SANDERS W.J. Free vibration solution for clamped orthotropic plates using Lagrangian multiplier technique. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 25 (1987): 035-040.
- [19] YU S.D. and CLEGHORN W.L. Generic free vibration of orthotropic rectangular plates with clamped and simply supported edges. Journal of Sound and Vibration 163 (1993): 328-349.
- [20] Aydogdo M., and Timarci T. Free Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Thin Square Composite Plates. Trakya University: Turkey, 2007.
- [21] Messinan A., and Soldatos K.P. Vibration of completely Free Composite Plates and Cylindrical Shell Panels by a Higher Order Theory. International Journal of Mechanical Sciences 41(1999): 891-918.
- [22] Bercin A.N. Free vibration solution for clamped orthotropic plates using the Kantorovich method. Journal of Sound and Vibration 196 (1996): 243-247.
- [23] Marangoni, R.D. Upper and lower bounds to the natural frequencies of vibration of clamped rectangular orthotropic plates. International Journal of Solids and Structures 14 (1978): 611-623.

- [24] Chang D.C., Wang G., and Wereley N.M. A Generalized Kantorovich Method and its Application to Free In-Plane Plate Vibration Problem. Applicable Analysis 80 (2001): 493-523.
- [25] Farag, N.H., and Pan J. Modal characteristics of in-plane vibration of rectangular plates. Journal of the Acoustical Society of America 105 (1999): 3295-3309.
- [26] ธนาวุฒิ เวชฎานนท์. การวิเคราะห์การโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิต ภาควิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552.
- [27] Whitney, J.M. Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plate. Technomic Publishing: Lancaster, 1987.
- [28] Bill Goodwin. Engineering Differential Equation: Theory and Applications. Springer Science + Business Media, 2011.
- [29] Chen X.L., Liu G.R., and Lim S.P. An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape. Composite Structures 59 (2003): 279-89.

ภาคผนวก

รายละเอียดของโปรแกรม

เนื้อหาในภาคผนวกนี้จะแสดงรายละเอียดของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิตด้วยระเบียบวิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง โดยแต่ละโปรแกรมจะมีคำอธิบายอย่างละเอียดเป็นลำดับขั้นตอนตามที่กล่าวไว้ในบทที่ 4 โดยจะแบ่งรายละเอียดของโปรแกรมทั้งหมดออกเป็น 3 ส่วนดังนี้

1. โปรแกรมสำหรับปัญหาการโก่งงอ ซึ่งจะแบ่งรายละเอียดออกเป็นสองหัวข้อย่อยคือ
 - การสมมติ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่ทราบค่า
 - การสมมติ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่ทราบค่า
2. โปรแกรมสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือน แบ่งรายละเอียดเป็นสองหัวข้อย่อยคือ
 - การสมมติ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่ทราบค่า
 - การสมมติ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่ทราบค่า
3. โปรแกรมย่อยที่แสดงอยู่ในส่วนที่ 1 และ 2

สำหรับโปรแกรมที่ใช้สำหรับการคำนวณปัญหาการโก่งงอและการสั่นสะเทือน นอกจากจะแบ่งรายละเอียดออกเป็นสองด้านแล้ว ในแต่ละด้านจะแบ่งการคำนวณออกเป็นสองส่วนอีกคือ กรณีที่ 1 สมมติจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 พจน์สำหรับปัญหาแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply และวัสดุไอโซโทรปิก อีกกรณีหนึ่งคือสมมติจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 2 พจน์สำหรับแผ่นคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ซึ่งลำดับขั้นตอนการดำเนินการของโปรแกรมได้แสดงอยู่ในรูปแผนผังในภาพที่ 4.3 โดยโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณคือภาษา Maple

1. โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการโก่งของแผ่นคอมโพสิต

ในตอนนี้จะอธิบายถึงรายละเอียดของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการโก่งของแผ่นคอมโพสิต โดยจะแบ่งโปรแกรมออกเป็นสองส่วนคือส่วนแรกสำหรับการสมมุติจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 พจน์และส่วนที่สองคือการสมมุติจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 2 พจน์ ซึ่งแต่ละส่วนจะแบ่งออกเป็นอีกสองส่วนย่อยคือด้านที่สมมุติ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่ทราบค่าและด้านที่สมมุติ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบที่ทราบค่า โดยรายละเอียดของแต่ละโปรแกรมมีดังนี้

=====

โปรแกรมสำหรับการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 1 พจน์

กำหนดให้ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า

restart :

Digits := 100:

กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ

N_term := 1:

กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบ

ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ

E1 := 31.18e6:

Longitudanal modulus

E2 := $\frac{E1}{2.45}$:

Transverse modulus

v12 := 0.23:

Poisson ratio

G12 := 0.48·E2:

Shear modulus

v21 := $\frac{v12 \cdot E2}{E1}$:

Poisson ratio

ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน

aspectratio := 1.0:

ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน

a := 10:

ความยาวในแนวแกน x

b := $\frac{a}{aspectratio}$:

ความยาวในแนวแกน y

t := $\frac{0.091}{20} \cdot 3$:

ความหนาของลามิเนต

h := t·N:

ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน

N := 3:

จำนวนชั้นของลามิเนต

phi := vector([0, 90, 0]):

มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น

theta := 0:

มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ


```

# การจัดรูปแบบคำตอบของผลเฉลยตามสมการที่ (3-78) ในรูปฟังก์ชัน  $X_i(x)$  โดยมีค่าสัมประสิทธิ์  $C_1 - C_4$ 
X1 := C1·H[1, 1] + C2·H[1, 2] + C3·H[1, 3] + C4·H[1, 4] :
X2 := C1·H[2, 1] + C2·H[2, 2] + C3·H[2, 3] + C4·H[2, 4] :
X3 := C1·H[3, 1] + C2·H[3, 2] + C3·H[3, 3] + C4·H[3, 4] :
X4 := C1·H[4, 1] + C2·H[4, 2] + C3·H[4, 3] + C4·H[4, 4] :
# การแทนค่าของฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-42) – (3-45) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่น
คอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC
X5 := subs(ξ = 0, X1) :
X6 := subs(ξ = 0, X2) :
X7 := subs(ξ = 1, X1) :
X8 := subs(ξ = 1, X2) :
# จัดสมการในรูปเมทริกซ์เพื่อหาค่า  $N_x$ 
J := Matrix([[1, 1, 1, 1], [subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, X6),
subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, X6), subs(C1 = 0, C2 = 0,
C3 = 1, C4 = 0, X6), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, X6)],
[subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, X7), subs(C1 = 0, C2 = 1,
C3 = 0, C4 = 0, X7), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, X7),
subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, X7)], [subs(C1 = 1, C2 = 0,
C3 = 0, C4 = 0, X8), subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, X8),
subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, X8), subs(C1 = 0, C2 = 0,
C3 = 0, C4 = 1, X8)]]):
M := Determinant(J) : # คำนวณ determinant เพื่อหาค่า  $N_x$ 
with(plots) : # เรียกฐานข้อมูลในการพล็อต
plot((M), Nx = 0 ..120); # พล็อตกราฟเพื่อหาค่า  $N_x$  โดยเลือกค่าที่
น้อยที่สุด
read "c:/newton.txt": # เรียกโปรแกรมย่อย newton เพื่อช่วยในการ
คำนวณหา  $N_x$ 
result1 := Newton([M = 0], [Nx = 120], output = {functions,
variables}): # กำหนดค่า  $N_x$  เพื่อใช้ระเบียบวิธีนิวตันช่วยใน
การประมาณค่าผลเฉลย
# แทนค่า  $N_x$  ลงในสมการเพื่อหาค่า  $C_1 - C_4$ 
Nxfinal := subs(result1, λx) :
Nxfinal1 := Re(Nxfinal) :
Ffinal := matrix(4, 4, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -A4[1, 1], 0,
(A5[1, 1]·Nxfinal1) - A2[1, 1], 0]) :
Gfinal := eigenvects(Ffinal) :
Cfinal := matrixDE(Ffinal, ξ) :
Cfinal1 := evalf(Cfinal) :
Cfinal2 := Cfinal1[1] :
Xfinal := C1·Cfinal2[1, 1] + C2·Cfinal2[1, 2] + C3·Cfinal2[1, 3]
+ C4·Cfinal2[1, 4] :

```

การแทนค่าของฟังก์ชัน $X_i(x)$ ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-42) – (3-45) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่นคอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC เพื่อหาค่า $C_1 - C_4$

$X1final := subs(\xi = 0, Xfinal) :$

$X2final := subs(\xi = 1, Xfinal) :$

$X3final := subs(\xi = 0, diff(Xfinal, \xi)) :$

$X4final := subs(\xi = 1, diff(Xfinal, \xi)) :$

ขั้นตอนการหาค่า $C_1 - C_4$

$X5final := subs(C1 = 1, X2final) :$

$X6final := subs(C1 = 1, X4final) :$

สมมติค่า C_1 เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ที่เหลือ

$X7final := subs(C1 = 1, X3final) :$

$Call := solve(\{X5final = 0, X6final = 0, X7final = 0\}, \{C2, C3, C4\}) :$

$Xlast := subs(Call, C1 = 1, Xfinal) :$

แทนค่า C_1 สมมติขึ้น

$Xlast1 := subs(\xi = \frac{x}{a}, Xlast) :$

แทนค่า $\xi = \frac{x}{a}$ เพื่อหาค่า $X_i(x)$

$plot3d(Xlast1 \cdot Ylast1, x = 0 .. 10, y = 0 .. 10, style = contour, orientation$
 $= [-90, 0], color = black, thickness = 2, axes = box, tickmarks$
 $= [0, 0, 0], grid = [80, 80]$
 $);$

พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเพื่อดูรูปร่างการโก่งงอ

save Xlast1, "Xanswer1.txt":

เก็บค่าฟังก์ชัน $X_i(x)$ เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าฟังก์ชัน $Y_i(y)$ ในครั้งต่อไป

=====
 ส่วนโปรแกรมที่สองแสดงการทำซ้ำในรอบที่สองโดยนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ ที่ได้จากการทำซ้ำรอบแรกเป็นตัวหาค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

=====

กำหนดให้ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า

restart :

Digits := 100:

กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ

N_term := 1:

กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบ

ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ

E1 := 31.18e6:

Longitudanal modulus

E2 := $\frac{E1}{2.45}$:

Transverse modulus

v12 := 0.23:

Poisson ratio

```

G12 := 0.48·E2 : # Shear modulus
v21 :=  $\frac{v12 \cdot E2}{E1}$  : # Poisson ratio
# ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน
aspectratio := 1.0 : # ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน
a := 10 : # ความยาวในแนวแกน x
b :=  $\frac{a}{aspectratio}$  : # ความยาวในแนวแกน y
t :=  $\frac{0.091}{20} \cdot 3$  : # ความหนาของลามิเนต
h := t·N : # ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน
N := 3 : # จำนวนชั้นของลามิเนต
phi := vector([0, 90, 0]) : # มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น
theta := 0 : # มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ

# คำวณเมทริกซ์ [ABD]
read "c:/ABD.txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย ABD
read "Xanswer1.txt": # สั่งให้โปรแกรมอ่านค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  สำหรับกรณีการคำนวณซ้ำ

XX[1] := Xlast1 : # กำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้น
# คำวณเมทริกซ์ [R]
read "c:/[R].txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย [R]
# คำวณเมทริกซ์ [B]
with(LinearAlgebra) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
IM := IdentityMatrix(N_term) : # กำหนดเมทริกซ์เอกลักษณ์
B1 := evalm( (2*b*D26/D22) * (R1_i*(R3-R3_t)) ) :
B2 := evalm( ((b^2*D12/D22) * (R1_i*(R2 + R2_t))) - ((4*b^2*D66/D22) * (R1_i*R6_t)) ) :
B3 := evalm( (2*b^3*D16/D22) * (R1_i*(R5-R5_t)) ) :
B4 := evalm( (b^4*D11/D22) * (R1_i*R4_t) ) :
B5 := -IM :
B6 := evalm( -b * (R1_i*(R3-R3_t)) ) :
B7 := evalm( b^2 * (R1_i*R6_t) ) :
B8 := evalm( (D22/b^2)*R1 ) : B9 := evalm( (2*D26/b)*R3 ) :
B10 := evalm( D12 * R2 ) : # คำวณเมทริกซ์ [B] ตามสมการ (3-49) และ (3-55)

B11 := evalm( (-D22/b^3)*R1 ) :
B12 := evalm( (-2*D26/b^2) * (R3-R3_t) ) :
B13 := evalm( ((4*D66/b)*R6_t) - ((D12/b)*R2) ) :
B14 := evalm( (D22/b^3)*R1 ) :
B15 := evalm( (2*D16)*R5_t ) :
B16 := evalm( (D22/b^2)*R3 ) :

```



```

cx :=  $\frac{Nx \cdot b^2}{D22}$  :
# วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง

with(linalg) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
with(DEtools) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
assume(0 < Nx) : # กำหนดให้  $N_x$  มีค่ามากกว่า 0
F := matrix(4, 4, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, K, 0, L, 0]) : # แปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตาม
# สมการที่ (3-73)
C := matrixDE(F,  $\xi$ ) : # คำนวณ eigenvalue และ eigenvector จาก
# เมทริกซ์ ตามสมการที่ (3-77)
E := subs(K = (B7[1, 1]·cx) - B4[1, 1], L = -B2[1, 1], C) : # แทนค่าตัวแปรจากการแปลงสมการ
H := E[1] : # กำหนดตัวแปรสำหรับค่า eigenvalue และ
# eigenvector ก่อนนำมาใช้
# การจัดรูปแบบคำตอบของผลเฉลยตามสมการที่ (3-78) ในรูปฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  โดยมีค่าสัมประสิทธิ์  $C_1 - C_4$ 
Y1 := C1·H[1, 1] + C2·H[1, 2] + C3·H[1, 3] + C4·H[1, 4] :
Y2 := C1·H[2, 1] + C2·H[2, 2] + C3·H[2, 3] + C4·H[2, 4] :
Y3 := C1·H[3, 1] + C2·H[3, 2] + C3·H[3, 3] + C4·H[3, 4] :
Y4 := C1·H[4, 1] + C2·H[4, 2] + C3·H[4, 3] + C4·H[4, 4] :
# การแทนค่าของฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-51) - (3-54) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่น
# คอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC
Y5 := subs( $\eta = 0$ , Y1) :
Y6 := subs( $\eta = 1$ , Y1) :
Y7 := subs( $\eta = 0$ , Y2) :
Y8 := subs( $\eta = 1$ , Y2) :
# จัดสมการในรูปเมทริกซ์เพื่อหาค่า  $N_x$ 
J := Matrix([[1, 1, 1, 1], [subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, Y6),
# subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, Y6), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3
# = 1, C4 = 0, Y6), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, Y6],
# [subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, Y7), subs(C1 = 0, C2 = 1,
# C3 = 0, C4 = 0, Y7), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, Y7),
# subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, Y7)], [subs(C1 = 1, C2 = 0,
# C3 = 0, C4 = 0, Y8), subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, Y8),
# subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, Y8), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3
# = 0, C4 = 1, Y8)]]):

M := Determinant(J) : # คำนวณ determinant เพื่อหาค่า  $N_x$ 
with(plots) : # เรียกฐานข้อมูลในการพล็อต
plot(M), Nx = 0 .. 120; # พล็อตกราฟเพื่อหาค่า  $N_x$  โดยเลือกค่าที่
# น้อยที่สุด
read "c:/newton.txt": # เรียกโปรแกรมย่อย newton เพื่อช่วยในการ
# คำนวณหา  $N_x$ 
result1 := Newton(M = 0, Nx = 120, output = {functions,
# variables }):

```

```

# กำหนดค่า  $N_x$  เพื่อใช้ระเบียบวิธีนิวตันช่วยใน
# การประมาณค่าผลเฉลย

# แทนค่า  $N_x$  ลงในสมการเพื่อหาค่า  $C_1 - C_4$ 
Nxfinal := subs(result1,  $\lambda x$ ):
Nxfinal1 := Re(Nxfinal):
Ffinal := matrix(4, 4, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, (B7[1, 1]
·Nxfinal1) - B4[1, 1], 0, -B2[1, 1], 0]);

Gfinal := eigenvects(Ffinal):
Cfinal := matrixDE(Ffinal,  $\eta$ ):
Cfinal1 := evalf(Cfinal):
Cfinal2 := Cfinal1[1]:
Yfinal := C1·Cfinal2[1, 1] + C2·Cfinal2[1, 2] + C3·Cfinal2[1, 3]
+ C4·Cfinal2[1, 4]:

# การแทนค่าของฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-42) - (3-45) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่น
# คอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC เพื่อหาค่า  $C_1 - C_4$ 
Y11 := subs( $\eta = 0$ , Yfinal):
Y22 := subs( $\eta = 1$ , Yfinal):
Y33 := subs( $\eta = 0$ , diff(Yfinal,  $\eta$ )):
Y44 := subs( $\eta = 1$ , diff(Yfinal,  $\eta$ )):

# ขั้นตอนการหาค่า  $C_1 - C_4$ 
Y55 := subs(C2 = 1, Y11):
Y66 := subs(C2 = 1, Y33): # สมมุติค่า  $C_2$  เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ที่เหลือ
Y77 := subs(C2 = 1, Y22):
Call := solve({Y55 = 0, Y66 = 0, Y77 = 0}, {C3, C4, C1});
Ylast := subs(Call, C2 = 1, Ylast5): # แทนค่า  $C_2$  ที่สมมุติขึ้น

Ylast1 := subs( $\eta = \frac{y}{b}$ , Ylast): # แทนค่า  $\eta = \frac{y}{b}$  เพื่อหาค่า  $Y_i(y)$ 

plot3d(Xlast1·Ylast1, x = 0..10, y = 0..10, style = contour, orientation
= [-90, 0], color = black, thickness = 2, axes = box, tickmarks
= [0, 0, 0], grid = [80, 80]
);

# พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่บนกระดานเพื่อดู
# รูปร่างการโก่งงอ
save Ylast1, "Yanswer2.txt": # เก็บค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  เพื่อนำไปใช้ในการ
# คำนวณหาค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  ในครั้งต่อไป

```

=====

=====

โปรแกรมสำหรับการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 2 พจน์

=====

กำหนดให้ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า

```

restart :
Digits := 100 : # กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ
N_term := 2 : # กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอก
                 กระนาบเท่ากับ 2 พจน์

# ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ
E1 := 31.18e6 : # Longitudanal modulus
E2 :=  $\frac{E1}{2.45}$  : # Transverse modulus
v12 := 0.23 : # Poisson ratio
G12 := 0.48·E2 : # Shear modulus
v21 :=  $\frac{v12·E2}{E1}$  : # Poisson ratio

# ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน
aspectratio := 1.0 : # ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน
a := 10 : # ความยาวในแนวแกน x
b :=  $\frac{a}{aspectratio}$  : # ความยาวในแนวแกน y
t :=  $\frac{0.091}{20}·3$  : # ความหนาของลามิเนต
h := t·N : # ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน
N := 3 : # จำนวนชั้นของลามิเนต
phi := vector([30,-30,30]) : # มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น
theta := 0 : # มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ

# คำฉนวนเมทริกซ์ [ABD]
read "c:/ABD.txt" : # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย ABD
read "Yanswer3.txt" read "Yanswer4.txt" : # สั่งให้โปรแกรมอ่านค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  สำหรับ
                                           กรณีการคำนวณซ้ำ

YY[1] := Ylast11; YY[2] := Ylast22; # กำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้น
# คำฉนวนเมทริกซ์ [S]
read "c:/[S].txt" : # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย [S]
# คำฉนวนเมทริกซ์ [A]
with(LinearAlgebra) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
IM := IdentityMatrix(N_term) : # กำหนดเมทริกซ์เอกลักษณ์

```

```

A1 := evalm( ( ( 2*a*D16 / D11 ) * (SI_i &*(S3 - S3_t)) ) ):
A2 := evalm( ((a^2*D12/D11) * (SI_i &*(S2 + S2_t))) - ((4*a
^2*D66/D11) * (SI_i &*(S6_t)) ) ):
A3 := evalm( (2*a^3*D26/D11) * (SI_i &*(S5 - S5_t)) ):
A4 := evalm( (a^4*D22/D11) * (SI_i &*(S4_t)) ):
A5 := -IM :
A6 := evalm( -a * (SI_i &*(S3 - S3_t)) ) :
A7 := evalm( a^2 * (SI_i &*(S6_t)) ) :
A8 := evalm( (D11/a^2) * S1 ) :

```

คำวณ [A] ตามสมการที่ (3-40)

และ (3-46)

```

A9 := evalm( (2*D16/a) * S3 ) :
A10 := evalm( D12 * S2 ) :
A11 := evalm( (-D11/a^3) * S1 ) :
A12 := evalm( (-2*D16/a^2) * (S3 - S3_t) ) :
A13 := evalm( ((4*D66/a) * S6_t) - ((D12/a) * S2) ) :
A14 := evalm( (D11/a^3) * S1 ) :
A15 := evalm( (2*D26) * S5_t ) :
A16 := evalm( (D11/a^2) * S3 ) :
λx := (Nx * a^2) / D11 :

```

วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง

```

with(linalg) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
with(DEtools) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
assume(0 < Nx) : # กำหนดให้ Nx มีค่ามากกว่า 0

```

```

F := Matrix( 8, 8, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, -A4[1, 1], -A3[1, 1], (A5[1, 1] * λx) - A2[1, 1], -A1[1, 1],
-A4[1, 2], -A3[1, 2], -A2[1, 2], -A1[1, 2], 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -A4[2, 1], -A3[2, 1], -A2[2, 1],
-A1[2, 1], -A4[2, 2], -A3[2, 2], (A5[2, 2] * λx) - A2[2, 2],
-A1[2, 2]] ) :

```

แปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตามสมการที่ (3-73)

```

K := matrixDE(F, ξ) : # คำสั่งหา eigenvalue และ eigenvector จากเมทริกซ์ ตามสมการที่ (3-77)

```

ขั้นตอนในการคำนวณหาค่า N_x โดยการแทนค่าเพื่อหาค่าที่ตีเทอริมันแนซ์เท่ากับ 0 และมีค่า N_x น้อยที่สุดโดยการแทนค่าตอบลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด

```

Digits := 100 :
for i from 0 by 0.0000000001 to 200 do
  NN := i :
  HH := subs(Nx = NN, K[1]) : H := evalf(%) :
  X11 := C[1]·H[1, 1] + C[2]·H[1, 2] + C[3]·H[1, 3] + C[4]
    ·H[1, 4] + C[5]·H[1, 5] + C[6]·H[1, 6] + C[7]·H[1, 7]
    + C[8]·H[1, 8] :
  X55 := C[1]·H[5, 1] + C[2]·H[5, 2] + C[3]·H[5, 3] + C[4]
    ·H[5, 4] + C[5]·H[5, 5] + C[6]·H[5, 6] + C[7]·H[5, 7]
    + C[8]·H[5, 8] :
  X[1] := subs(ξ = 0, X11) :
  X[2] := subs(ξ = 0, diff(X11, ξ)) :
  X[3] := subs(ξ = 1, X11) :
  X[4] := subs(ξ = 1, diff(X11, ξ)) :
  X[5] := subs(ξ = 0, X55) :
  X[6] := subs(ξ = 0, diff(X55, ξ)) :
  X[7] := subs(ξ = 1, X55) :
  X[8] := subs(ξ = 1, diff(X55, ξ)) :
  J := (i, j) → diff(X[i], C[j]) :
  L := Matrix(8, 8, J);
  M := Determinant(L) :
  NXX[i] := NN;
  MM[i] := Re(M);
  print(NXX[i], MM[i]) :
end do:

```

ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน $X_i(x)$ สำหรับ $X1$

```

P1 := diff(X11, C[1]) :
PP1 := Im(P1) :
P2 := diff(X11, C[2]) :
PP2 := Im(P2) :
P3 := diff(X11, C[3]) :
PP3 := Im(P3) :
P4 := diff(X11, C[4]) :
PP4 := Im(P4) :
P5 := diff(X11, C[5]) :
PP5 := Re(P5) :
P6 := diff(X11, C[6]) :
PP6 := Re(P6) :
P7 := diff(X11, C[7]) :
PP7 := Re(P7) :
P8 := diff(X11, C[8]) :
PP8 := Re(P8) :
##PPP:=subs(C[4]=0, C[8]=0, X11) :
X11b := C[1]·PP1 + C[2]·PP2 + C[3]·PP3 + C[4]·PP4 + C[5]
  ·PP5 + C[6]·PP6 + C[7]·PP7 + C[8]·PP8;

```

```

# ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  สำหรับ  $X_2$ 
P9 := diff(X55, C[1]) :
PP9 := Im(P9) :
P10 := diff(X55, C[2]) :
PP10 := Im(P10) :
P11 := diff(X55, C[3]) :
PP11 := Im(P11) :
P12 := diff(X55, C[4]) :
PP12 := Im(P12) :
P13 := diff(X55, C[5]) :
PP13 := Re(P13) :
P14 := diff(X55, C[6]) :
PP14 := Re(P14) :
P15 := diff(X55, C[7]) :
PP15 := Re(P15) :
P16 := diff(X55, C[8]) :
PP16 := Re(P16) :
##PPPP:=subs( C[4]=0, C[8]=0, X55) :
X55b := C[1]·PP9 + C[2]·PP10 + C[3]·PP11 + C[4]·PP12
      + C[5]·PP13 + C[6]·PP14 + C[7]·PP15 + C[8]·PP16;

# ขั้นตอนในการหาสัมประสิทธิ์  $C_1 - C_8$  โดยการแทนฟังก์ชันลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต
X1final := subs(ξ=0, X11b) : X2final := subs(ξ=1, X11b) :
X3final := subs(ξ=0, diff(X11b, ξ)) :
X4final := subs(ξ=1, diff(X11b, ξ)) :
X5final := subs(ξ=0, X55b) :
X6final := subs(ξ=1, X55b) :
X7final := subs(ξ=0, diff(X55b, ξ)) :
X8final := subs(ξ=1, diff(X55b, ξ)) :
# สมมติค่า C เพื่อที่จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ค่าอื่นได้ในรูปอัตราส่วน
X9final := subs(C[8]=1, X1final) :
X10final := subs(C[8]=1, X2final) :
X11final := subs(C[8]=1, X3final) :
X16final := subs(C[8]=1, X4final) :
X12final := subs(C[8]=1, X5final) :
X13final := subs(C[8]=1, X6final) :
X14final := subs(C[8]=1, X7final) :
X15final := subs(C[8]=1, X8final) :
Call := solve({X9final=0, X10final=0, X11final=0, X12final=0,
              X13final=0, X14final=0, X15final=0}, {C[1], C[2], C[3],
              C[4], C[6], C[7], C[5]});
# แทนค่า C ที่สมมติขึ้นเพื่อได้ผลเฉลยที่สมบูรณ์
Xlast1 := subs(Call, C[8]=1, X11b) :
Xlast2 := subs(Call, C[8]=1, X55b) :
Xlast11 := subs(ξ = x/a, Xlast1); Xlast22 := subs(ξ = x/a, Xlast2);

```

```
with(plots) : plot3d((Xlast11·Ylast11) + (Xlast22·Ylast22), x = 0
..10, y = 0 ..10, style = contour, orientation = [-90, 0], color
= black, thickness = 2, axes = box, tickmarks = [0, 0, 0], grid
= [80, 80]
);; plot(Xlast1, ξ = 0 ..1);
```

พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเพื่อดู
รูปร่างการโค้งงอ

```
save Xlast11, "Xanswer1a.txt": save Xlast22, "Xanswer2a.txt": # เก็บค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  เพื่อนำไปใช้ในการ  
คำนวณหาค่าฟังก์ชัน  $X_i(y)$  ในครั้งต่อไป
```

=====
ส่วนโปรแกรมที่สองแสดงการทำซ้ำในรอบที่สองโดยนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ ที่ได้จากการ
ทำซ้ำรอบแรกเป็นตัวหาค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

=====
กำหนดให้ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า

restart :

Digits := 100:

กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ

N_term := 2

กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอก
กระนาบเท่ากับ 2 พจน์

ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ

E1 := 31.18e6:

Longitudanal modulus

E2 := $\frac{E1}{2.45}$:

Transverse modulus

v12 := 0.23:

Poisson ratio

G12 := 0.48·E2 :

Shear modulus

v21 := $\frac{v12·E2}{E1}$:

Poisson ratio

ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน

aspectratio := 1.0:

ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน

a := 10:

ความยาวในแนวแกน x

b := $\frac{a}{aspectratio}$:

ความยาวในแนวแกน y

t := $\frac{0.091}{20}·3$:

ความหนาของลามิเนต

h := t·N:

ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน

N := 3:

จำนวนชั้นของลามิเนต

phi := vector([30, -30, 30]) :

มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น

theta := 0:

มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ

คำฉนวนเมทริกซ์ [ABD]

read "c:/ABD.txt":

คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย ABD

```

read "Xanswer1a.txt" read "Xanswer2a.txt": # สั่งให้โปรแกรมอ่านค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  สำหรับ
                                             กรณีการคำนวณซ้ำ
XX[1] := Xlast11; XX[2] := Xlast22; # กำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้น
# คำนวณเมทริกซ์ [R]
read "c:/[R].txt"; # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย [R]
# คำนวณเมทริกซ์ [B]
with(LinearAlgebra) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
IM := IdentityMatrix(N_term) : # กำหนดเมทริกซ์เอกลักษณ์
B1 := evalm( (2*b*D26/D22) * (R1_i&*(R3-R3_t)) ) :
B2 := evalm( ((b^2*D12/D22) * (R1_i&*(R2 + R2_t))) - ((4*b
    ^2*D66/D22) * (R1_i&*R6_t)) ) :
B3 := evalm( (2*b^3*D16/D22) * (R1_i&*(R5-R5_t)) ) :
B4 := evalm( (b^4*D11/D22) * (R1_i&*R4_t) ) :
B5 := - IM :
B6 := evalm( -b * (R1_i&*(R3-R3_t)) ) :
B7 := evalm( b^2 * (R1_i&*R6_t) ) :
B8 := evalm( (D22/b^2)*R1 ) : B9 := evalm( (2*D26/b)*R3 ) :
B10 := evalm( D12 * R2 ) : # คำนวณเมทริกซ์ [B] ตามสมการ (3-49) และ
                                (3-55)
B11 := evalm( (-D22/b^3)*R1 ) :
B12 := evalm( (-2*D26/b^2) * (R3-R3_t) ) :
B13 := evalm( ((4*D66/b)*R6_t) - ((D12/b)*R2) ) :
B14 := evalm( (D22/b^3)*R1 ) :
B15 := evalm( (2*D16)*R5_t ) :
B16 := evalm( (D22/b^2)*R3 ) :
alpha :=  $\frac{N_x \cdot b^2}{D22}$  :
# วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง
with(linalg) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
with(DEtools) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
assume(0 < Nx) : # กำหนดให้  $N_x$  มีค่ามากกว่า 0
F := matrix(8, 8, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
    0, 0, (alpha*B7[1, 1]) - B4[1, 1], -B3[1, 1], -B2[1, 1], -B1[1, 1],
    (alpha*B7[1, 2]) - B4[1, 2], -B3[1, 2], -B2[1, 2], -B1[1, 2], 0, 0,
    0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, (alpha*B7[2, 1])
    - B4[2, 1], -B3[2, 1], -B2[2, 1], -B1[2, 1], (alpha*B7[2, 2])
    - B4[2, 2], -B3[2, 2], -B2[2, 2], -B1[2, 2]]) :
# แปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตาม
    สมการที่ (3-73)
K := matrixDE(F, eta) : # คำสั่งหา eigenvalue และ eigenvector จาก
    เมทริกซ์ ตามสมการที่ (3-77)

```


ขั้นตอนในการคำนวณหาค่า N_x โดยการแทนค่าเพื่อหาค่าที่ดีที่สุดเทอริมีแนนซ์เท่ากับ 0 และมีค่า N_x น้อยที่สุดโดยการแทนค่าตอบลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด

```

Digits := 100;
for i from 113.1by 0.001 to 113.2do
  NN := i;
  HH := subs(Nx = NN, K[1]) : H := evalf(%);
  Y11 := C[1]·H[1, 1] + C[2]·H[1, 2] + C[3]·H[1, 3] + C[4]
    ·H[1, 4] + C[5]·H[1, 5] + C[6]·H[1, 6] + C[7]·H[1, 7]
    + C[8]·H[1, 8];
  Y55 := C[1]·H[5, 1] + C[2]·H[5, 2] + C[3]·H[5, 3] + C[4]
    ·H[5, 4] + C[5]·H[5, 5] + C[6]·H[5, 6] + C[7]·H[5, 7]
    + C[8]·H[5, 8];
  Y[1] := subs(η = 0, Y11);
  Y[2] := subs(η = 0, diff(Y11, η));
  Y[3] := subs(η = 1, Y11);
  Y[4] := subs(η = 1, diff(Y11, η));
  Y[5] := subs(η = 0, Y55);
  Y[6] := subs(η = 0, diff(Y55, η));
  Y[7] := subs(η = 1, Y55);
  Y[8] := subs(η = 1, diff(Y55, η));
  J := (i, j) → diff(Y[i], C[j]);
  L := Matrix(8, 8, J);
  M := Determinant(L);
  NXX[i] := NN;
  MM[i] := Im(M);
  print(NXX[i], MM[i]);
end do;

```

ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน $Y_i(y)$ สำหรับ $Y1$

```

##P1 := diff(Y11, C[1]);
##PP1 := Im(P1);
##P2 := diff(Y11, C[2]);
##PP2 := Im(P2);
##P3 := diff(Y11, C[3]);
##PP3 := Im(P3);
P4 := diff(Y11, C[4]);
PP4 := Im(P4);
##P5 := diff(Y11, C[5]);
##PP5 := Re(P5);
##P6 := diff(Y11, C[6]);
##PP6 := Re(P6);
##P7 := diff(Y11, C[7]);
##PP7 := Re(P7);
P8 := diff(Y11, C[8]);
PP8 := Re(P8);
PPP := subs(C[4] = 0, C[8] = 0, Y11);
Y11b := PPP + C[4]·PP4 + C[8]·PP8;

```

```

# ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  สำหรับ  $Y_2$ 
##P9:=diff(Y55, C[1]) :
##PP9:=Im(P9) :
##P10:=diff(Y55, C[2]) :
##PP10:=Im(P10) :
##P11:=diff(Y55, C[3]) :
##PP11:=Im(P11) :
P12 := diff(Y55, C[4]) :
PP12 := Im(P12) :
##P13:=diff(Y55, C[5]) :
##PP13:=Re(P13) :
##P14:=diff(Y55, C[6]) :
##PP14:=Re(P14) :
##P15:=diff(Y55, C[7]) :
##PP15:=Re(P15) :
P16 := diff(Y55, C[8]) :
PP16 := Re(P16) :
PPPP := subs(C[4]=0, C[8]=0, Y55) :
Y55b := PPPP + C[4]·PP12 + C[8]·PP16;
# ขั้นตอนในการหาสัมประสิทธิ์  $C_i - C_8$  โดยการแทนฟังก์ชันลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต
Y1bo := subs(eta=0, Y11b) :
Y2bo := subs(eta=0, diff(Y11b, eta)) :
Y3bo := subs(eta=1, Y11b) :
Y4bo := subs(eta=1, diff(Y11b, eta)) :
Y5bo := subs(eta=0, Y55b) :
Y6bo := subs(eta=0, diff(Y55b, eta)) :
Y7bo := subs(eta=1, Y55b) :
Y8bo := subs(eta=1, diff(Y55b, eta)) :
# สมมติค่า C เพื่อที่จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ค่าอื่นได้ในรูปอัตราส่วน
Y1final := subs(C[1]=1, Y1bo) :
Y2final := subs(C[1]=1, Y2bo) :
Y3final := subs(C[1]=1, Y3bo) :
Y4final := subs(C[1]=1, Y4bo) :
Y5final := subs(C[1]=1, Y5bo) :
Y6final := subs(C[1]=1, Y6bo) :
Y7final := subs(C[1]=1, Y7bo) :
Y8final := subs(C[1]=1, Y8bo) :
Call := solve({Y1final=0, Y2final=0, Y3final=0, Y4final=0,
Y5final=0, Y7final=0, Y8final=0}, {C[2], C[3], C[4], C[5],
C[6], C[7], C[8]});

```

```

# แทนค่า C ที่สมมติขึ้นเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่สมบูรณ์
Ylast1 := subs(Call, C[1] = 1, Y11b) :
Ylast2 := subs(Call, C[1] = 1, Y55b) :
Ylast11 := subs( $\eta = \frac{y}{b}$ , Ylast1); Ylast22 := subs( $\eta = \frac{y}{b}$ ,
  Ylast2) :

with(plots) : plot3d((Xlast11·Ylast11) + (Xlast22·Ylast22), x = 0
  ..10, y = 0 ..10, style = contour, orientation = [-90, 0], color
  = black, thickness = 2, axes = box, tickmarks = [0, 0, 0], grid
  = [80, 80]
);; plot(Xlast1,  $\xi = 0 ..1$ );

# พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเพื่อดู
# รูปร่างการโค้งงอ
save Ylast11, "Yanswer3.txt" save Ylast22, "Yanswer4.txt" : # เก็บค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  เพื่อนำไปใช้ในการ
# คำนวณหาค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ในครั้งต่อไป

```

2. โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิต

ในส่วนนี้จะอธิบายถึงรายละเอียดของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิต โดยจะแบ่งโปรแกรมออกเป็นสองส่วนคือส่วนแรกสำหรับการสมมุติจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 พจน์และส่วนที่สองคือการสมมุติจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 2 พจน์ ซึ่งแต่ละส่วนจะแบ่งออกเป็นอีกสองส่วนย่อยคือด้านที่สมมุติ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ทราบค่าและด้านที่สมมุติ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ทราบค่า โดยรายละเอียดของแต่ละโปรแกรมมีดังนี้

=====

โปรแกรมสำหรับการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 1 พจน์

กำหนดให้ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า

restart :

Digits := 100:

กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ

N_term := 1:

กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ

ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ

E1 := 31.18e6:

Longitudanal modulus

E2 := $\frac{E1}{2.45}$:

Transverse modulus

v12 := 0.23:

Poisson ratio

G12 := 0.48·E2:

Shear modulus

v21 := $\frac{v12 \cdot E2}{E1}$:

Poisson ratio

density := 1540:

density

ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน

aspectratio := 1.0:

ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน

a := 10:

ความยาวในแนวแกน x

b := $\frac{a}{aspectratio}$:

ความยาวในแนวแกน y

t := $\frac{0.091}{20} \cdot 3$:

ความหนาของลามิเนต

h := t·N:

ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน

N := 3:

จำนวนชั้นของลามิเนต

phi := vector([0, 90, 0]):

มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น

theta := 0:

มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ

```

# จำนวนเมทริกซ์ [ABD]
read "c:/ABD.txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย ABD
read "Yanswer2.txt": # สั่งให้โปรแกรมอ่านค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  สำหรับ
                       # กรณีการคำนวณซ้ำ
YY[1] := y2 : # กำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้น
# จำนวนเมทริกซ์ [S]
read "c:/[S].txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย [S]
# จำนวนเมทริกซ์ [A]
with(LinearAlgebra) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
IM := IdentityMatrix(N_term) : # กำหนดเมทริกซ์เอกลักษณ์
A1 := evalm( ( (  $\frac{2 \cdot a \cdot D16}{D11}$  ) * (S1_i &*(S3 - S3_t)) ) ) :
A2 := evalm( ((a2*D12/D11) * (S1_i &*(S2 + S2_t))) - ((4*a2*D66/D11) * (S1_i &*S6_t)) ) :
A3 := evalm( (2*a3*D26/D11) * (S1_i &*(S5 - S5_t)) ) :
A4 := evalm( (a4*D22/D11) * (S1_i &*S4_t) ) :
A5 := evalm( (  $\frac{\text{density} \cdot h \cdot a^4}{D11}$  ) * IM ) :
A6 := evalm( (D11/a2) * S1 ) : # ขั้นตอนในการคำนวณเมทริกซ์ [A]
ตามสมการที่ (3-60) และ (3-65)
A7 := evalm( (2*D16/a) * S3 ) :
A8 := evalm( D12 * S2 ) :
A9 := evalm( (-D11/a3) * S1 ) :
A10 := evalm( (-2*D16/a2) * (S3 - S3_t) ) :
A11 := evalm( ((4*D66/a) * S6_t) - ((D12/a) * S2) ) :
A12 := evalm( (2*D26) * S5_t ) :
# วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง
with(linalg) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
with(DEtools) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
F := matrix(4, 4, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, K, 0, L, 0]) : # แปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตาม
                       # สมการที่ (3-73)
C := matrixDE(F,  $\xi$ ) : # คำสั่งหา eigenvalue และ eigenvector จาก

```

```

# เมทริกซ์ ตามสมการที่ (3-77)
E := subs(K = ω2·A5[1, 1]-A4[1, 1], L = -A2[1, 1], C): # แทนค่าตัวแปรจากการแปลงสมการ
H := E[1]: # กำหนดตัวแปรสำหรับค่า eigenvalue และ
# eigenvector ก่อนนำมาใช้

# การจัดรูปแบบคำตอบของผลเฉลยตามสมการที่ (3-78) ในรูปฟังก์ชัน  $X_i(x)$  โดยมีค่าสัมประสิทธิ์  $C_1 - C_4$ 
X1 := C1·H[1, 1] + C2·H[1, 2] + C3·H[1, 3] + C4·H[1, 4]:
X2 := C1·H[2, 1] + C2·H[2, 2] + C3·H[2, 3] + C4·H[2, 4]:
X3 := C1·H[3, 1] + C2·H[3, 2] + C3·H[3, 3] + C4·H[3, 4]:
X4 := C1·H[4, 1] + C2·H[4, 2] + C3·H[4, 3] + C4·H[4, 4]:
# การแทนค่าของฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-42) – (3-45) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่น
# คอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC
X5 := subs(ξ = 0, X1):
X6 := subs(ξ = 0, X2):
X7 := subs(ξ = 1, X1):
X8 := subs(ξ = 1, X2):
# จัดสมการในรูปเมทริกซ์เพื่อหาค่า ω
J := Matrix([[1, 1, 1, 1], [subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, X6),
subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, X6), subs(C1 = 0, C2 = 0,
C3 = 1, C4 = 0, X6), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, X6)],
[subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, X7), subs(C1 = 0, C2 = 1,
C3 = 0, C4 = 0, X7), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, X7),
subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, X7)], [subs(C1 = 1, C2 = 0,
C3 = 0, C4 = 0, X8), subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, X8),
subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, X8), subs(C1 = 0, C2 = 0,
C3 = 0, C4 = 1, X8)]]):
M := Determinant(J): # คำนวณ determinant เพื่อหาค่า ω
with(plots): # เรียกฐานข้อมูลในการพล็อต
plot(Re(M), ω = 0 .. 1000); plot(Im(M), ω = 0 .. 1000); # พล็อตกราฟเพื่อหาค่า ω โดยเลือกค่าความถี่
# ธรรมชาติตามโหมดการสั่นสะเทือนที่ต้องการ
read "c:/newton.txt": # เรียกโปรแกรมย่อย newton เพื่อช่วยในการ
# คำนวณหา ω

result1 := Newton([M = 0], [ω = 700], output = {functions,
variables});
# กำหนดค่า ω เพื่อใช้ระเบียบวิธีนิวตันช่วยใน
# การประมาณค่าผลเฉลย

# แทนค่า ω ลงในสมการเพื่อหาค่า  $C_1 - C_4$ 
lambda1 := subs(result1, lambda):
ω2 := Re(lambda1);
Xsub := subs(ω = ω2, X1);

```

```

# ขั้นตอนการแปลงฟังก์ชัน
P1 := diff(Xsub, C1) :
PP1 := Re(P1) :
P2 := diff(Xsub, C2) :
PP2 := Im(P2) :
##P3 := diff(Xsub, C3) :
##PP3 := Re(P3) :
##P4 := diff(Xsub, C4) : ##PP4 := Im(P4) : PPP := subs(C1 = 0, C2 = 0, Xsub) :
Xfinal := PPP + C1·PP1 + C2·PP2;

# การแทนค่าของฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-61) – (3-64) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่น
คอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC เพื่อหาค่า  $C_1 - C_4$ 
X1final := subs(ξ = 0, Xfinal) :
X2final := subs(ξ = 1, Xfinal) :
X3final := subs(ξ = 0, diff(Xfinal, ξ)) :
X4final := subs(ξ = 1, diff(Xfinal, ξ)) :
# ขั้นตอนการหาค่า  $C_1 - C_4$ 
X5final := subs(C1 = 1, X2final) :
X6final := subs(C1 = 1, X4final) : # สมมุติค่า  $C_1$  เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ที่เหลือ
X7final := subs(C1 = 1, X3final) :
Call := solve({X5final = 0, X6final = 0, X7final = 0}, {C2, C3,
C4}) :
Xlast := subs(Call, C1 = 1, Xfinal) : # แทนค่า  $C_1$  สมมุติขึ้น

Xlast1 := subs(ξ =  $\frac{x}{a}$ , Xlast) : # แทนค่า  $\xi = \frac{x}{a}$  เพื่อหาค่า  $X_i(x)$ 

plot3d(Xlast1·Ylast1, x = 0..10, y = 0..10, style = contour, orientation
= [-90, 0], color = black, thickness = 2, axes = box, tickmarks
= [0, 0, 0], grid = [80, 80]
);

# พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่บนกระดานเพื่อดู
# รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน
# เก็บค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  เพื่อนำไปใช้ในการ
# คำนวณหาค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  ในครั้งต่อไป

save Xlast1, "Xanswer1.txt":

```

=====
 ส่วนโปรแกรมที่สองแสดงการทำซ้ำในรอบที่สองโดยนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X_i(x)$ ที่ได้จากการ
 ทำซ้ำรอบแรกเป็นตัวหาค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้
 =====

กำหนดให้ $X_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่า

```
restart :
Digits := 100: # กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ
N_term := 1: # กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอก
              ระบาย

# ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ
E1 := 31.18e6: # Longitudanal modulus
E2 :=  $\frac{E1}{2.45}$ : # Transverse modulus
v12 := 0.23: # Poisson ratio
G12 := 0.48·E2: # Shear modulus
v21 :=  $\frac{v12·E2}{E1}$ : # Poisson ratio
density := 1540: # density

# ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน
aspectratio := 1.0: # ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน
a := 10: # ความยาวในแนวแกน x
b :=  $\frac{a}{aspectratio}$ : # ความยาวในแนวแกน y
t :=  $\frac{0.091}{20}·3$ : # ความหนาของลามิเนต
h := t·N: # ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน
N := 3: # จำนวนชั้นของลามิเนต
phi := vector([0, 90, 0]): # มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น
theta := 0: # มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ

# คำณวนเมทริกซ์ [ABD]
read "c:/ABD.txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย ABD
read "Xanswer1.txt": # สั่งให้โปรแกรมอ่านค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  สำหรับ
                    กรณีการคำนวณซ้ำ

XX[1] := Xlast1: # กำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้น

# คำณวนเมทริกซ์ [R]
read "c:/[R].txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย [R]

# คำณวนเมทริกซ์ [B]
with(LinearAlgebra): # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
```



```

IM := IdentityMatrix(N_term) : # กำหนดเมทริกซ์เอกลักษณ์
B1 := evalm( (2*b*D26/D22) * (R1_i&*(R3-R3_t)) ) :
B2 := evalm( ((b^2*D12/D22)*(R1_i&*(R2 + R2_t))) - ((4*b
^2*D66/D22)*(R1_i&*(R6_t)) ) :
B3 := evalm( (2*b^3*D16/D22) * (R1_i&*(R5-R5_t)) ) :
B4 := evalm( (b^4*D11/D22) * (R1_i&*(R4_t)) ) :
B5 := evalm( (density*h*b^4 / D22) * IM : # ขั้นตอนการคำนวณเมทริกซ์ [B] ตามสมการที่
(3-67) และ (3-72)

B6 := evalm( (D22/b^2)*R1 ) :
B7 := evalm( (2*D26/b)*R3 ) :
B8 := evalm( D12*R2 ) :
B9 := evalm( (-D22/b^3)*R1 ) :
B10 := evalm( (-2*D26/b^2) * (R3 - R3_t) ) :
B11 := evalm( ((4*D66/b)*R6_t) - ((D12/b)*R2) ) :
B12 := evalm( (2*D16)*R5_t ) :

# วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง
with(linalg) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
with(DEtools) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
F := matrix(4, 4, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, K, 0, L, 0]) : # แปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตาม
สมการที่ (3-73)
C := matrixDE(F, ξ) : # คำสั่งหา eigenvalue และ eigenvector จาก
เมทริกซ์ ตามสมการที่ (3-77)
E := subs(K = ω^2*B5[1, 1] - B4[1, 1], L = -B2[1, 1], C) : # แทนค่าตัวแปรจากการแปลงสมการ
H := E[1] : # กำหนดตัวแปรสำหรับค่า eigenvalue และ
eigenvector ก่อนนำมาใช้
# การจัดรูปแบบคำตอบของผลเฉลยตามสมการที่ (3-78) ในรูปฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  โดยมีค่าสัมประสิทธิ์  $C_1 - C_4$ 
Y1 := C1*H[1, 1] + C2*H[1, 2] + C3*H[1, 3] + C4*H[1, 4] :
Y2 := C1*H[2, 1] + C2*H[2, 2] + C3*H[2, 3] + C4*H[2, 4] :
Y3 := C1*H[3, 1] + C2*H[3, 2] + C3*H[3, 3] + C4*H[3, 4] :
Y4 := C1*H[4, 1] + C2*H[4, 2] + C3*H[4, 3] + C4*H[4, 4] :
# การแทนค่าของฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-68) - (3-71) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่น
คอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC
Y5 := subs(η = 0, Y1) :
Y6 := subs(η = 1, Y1) :
Y7 := subs(η = 0, Y2) :
Y8 := subs(η = 1, Y2) :

```

```

# จัดสมการในรูปเมทริกซ์เพื่อหาค่า  $\omega$ 
J := Matrix([[1, 1, 1, 1], [subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, Y6),
  subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, Y6), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3
  = 1, C4 = 0, Y6), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, Y6)],
  [subs(C1 = 1, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 0, Y7), subs(C1 = 0, C2 = 1,
  C3 = 0, C4 = 0, Y7), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, Y7),
  subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 0, C4 = 1, Y7)], [subs(C1 = 1, C2 = 0,
  C3 = 0, C4 = 0, Y8), subs(C1 = 0, C2 = 1, C3 = 0, C4 = 0, Y8),
  subs(C1 = 0, C2 = 0, C3 = 1, C4 = 0, Y8), subs(C1 = 0, C2 = 0, C3
  = 0, C4 = 1, Y8)]]):

M := Determinant(J) :
with(plots) :
plot(M,  $\omega = 0..500$ ); plot(Im(M),  $\omega = 0..600$ );

read "c:/newton.txt":

result1 := Newton([M = 0], [ $\omega = 260$ ], output = {functions,
  variables}):

# กำหนดค่า  $N_x$  เพื่อใช้ระเบียบวิธีนิวตันช่วยใน
การประมาณค่าผลเฉลย

# แทนค่า  $\omega$  ลงในสมการเพื่อหาค่า  $C_1 - C_4$ 
lambda1:=subs(result1,lambda):
 $\omega2 := \text{Re}(\text{lambda1})$  :
Ysub := subs( $\omega = \omega2, X1$ ) :
# ขั้นตอนการแปลงฟังก์ชัน
P1 := diff(Ysub, C1) :
PP1 := Re(P1) :
P2 := diff(Ysub, C2) :
PP2 := Im(P2) :
##P3:=diff(Ysub, C3) :
##PP3:=Re(P3) :
##P4:=diff(Ysub, C4) : ##PP4:=Im(P4) : PPP := subs(C1 = 0, C2 = 0, Ysub) :
Yfinal := PPP + C1·PP1 + C2·PP2;

# การแทนค่าของฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดตามสมการที่ (3-42) – (3-45) ในกรณีนี้ยกตัวอย่างแผ่น
คอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC เพื่อหาค่า  $C_1 - C_4$ 
Y11 := subs( $\eta = 0, Yfinal$ ) :
Y22 := subs( $\eta = 1, Yfinal$ ) :
Y33 := subs( $\eta = 0, \text{diff}(Yfinal, \eta)$ ) :
Y44 := subs( $\eta = 1, \text{diff}(Yfinal, \eta)$ ) :
# ขั้นตอนการหาค่า  $C_1 - C_4$ 
Y55 := subs(C2 = 1, Y11) :
Y66 := subs(C2 = 1, Y33) :
Y77 := subs(C2 = 1, Y22) :

```

```

Call := solve({Y55 = 0, Y66 = 0, Y77 = 0}, {C3, C4, C1});
Ylast := subs(Call, C2 = 1, Ylast5) : # แทนค่า  $C_2$  ที่สมมุติขึ้น

Ylast1 := subs( $\eta = \frac{y}{b}$ , Ylast); # แทนค่า  $\eta = \frac{y}{b}$  เพื่อหาค่า  $Y_i(y)$ 

plot3d(Xlast1 * Ylast1, x = 0 .. 10, y = 0 .. 10, style = contour, orientation
= [-90, 0], color = black, thickness = 2, axes = box, tickmarks
= [0, 0, 0], grid = [80, 80]
);

# พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเพื่อดู
# รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน

save Ylast1, "Yanswer2.txt": # เก็บค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  เพื่อนำไปใช้ในการ
# คำนวณหาค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ในครั้งต่อไป

```

=====

โปรแกรมสำหรับการใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเท่ากับ 2 พจน์

=====

กำหนดให้ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า

```

restart :
Digits := 100: # กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ
N_term := 2: # กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอก
# กระนาบเท่ากับ 2 พจน์

# ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ
E1 := 31.18e6: # Longitudanal modulus
E2 :=  $\frac{E1}{2.45}$ : # Transverse modulus
v12 := 0.23: # Poisson ratio
G12 := 0.48 * E2: # Shear modulus
v21 :=  $\frac{v12 * E2}{E1}$ : # Poisson ratio
density := 1540: # density

# ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน
aspectratio := 1.0: # ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน
a := 10: # ความยาวในแนวแกน x
b :=  $\frac{a}{aspectratio}$ : # ความยาวในแนวแกน y
t :=  $\frac{0.091}{20} * 3$ : # ความหนาของลามิเนต
h := t * N: # ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน
N := 3: # จำนวนชั้นของลามิเนต
phi := vector([30, -30, 30]): # มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น

```

```

theta := 0 : # มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ

# คำนวณเมทริกซ์ [ABD]
read "c:/ABD.txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย ABD
read "Yanswer3.txt".read "Yanswer4.txt": # สั่งให้โปรแกรมอ่านค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  สำหรับ
                                           กรณีการคำนวณซ้ำ

YY[1] := Ylast11; YY[2] := Ylast22; # กำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้น
# คำนวณเมทริกซ์ [S]
read "c:/[S].txt"; # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย [S]
# คำนวณเมทริกซ์ [A]
with(LinearAlgebra) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
IM := IdentityMatrix(N_term) : # กำหนดเมทริกซ์เอกลักษณ์
A1 := evalm( ( (  $\frac{2 \cdot a \cdot D16}{D11}$  ) * (SI_i & * (S3 - S3_t)) ) ):
A2 := evalm( ((a^2 * D12 / D11) * (SI_i & * (S2 + S2_t))) - ((4 * a
^2 * D66 / D11) * (SI_i & * S6_t)) ):
A3 := evalm( (2 * a^3 * D26 / D11) * (SI_i & * (S5 - S5_t)) ):
A4 := evalm( (a^4 * D22 / D11) * (SI_i & * S4_t) ):
A5 := evalm( (  $\frac{\text{density} \cdot h \cdot a^4}{D11}$  ) * IM ):
A6 := evalm( (D11 / a^2) * SI ): # ขั้นตอนในการคำนวณเมทริกซ์ [A]
ตามสมการที่ (3-60) และ (3-65)
A7 := evalm( (2 * D16 / a) * S3 ):
A8 := evalm( D12 * S2 ):
A9 := evalm( (-D11 / a^3) * SI ):
A10 := evalm( (-2 * D16 / a^2) * (S3 - S3_t) ):
A11 := evalm( ((4 * D66 / a) * S6_t) - ((D12 / a) * S2) ):
A12 := evalm( (2 * D26) * S5_t ):
# วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง
with(linalg) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
with(DEtools) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม

```

```

F := Matrix(8, 8, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, ( $\omega^2 \cdot A5[1, 1]$ )-A4[1, 1], -A3[1, 1], -A2[1, 1], -A1[1, 1],
( $\omega^2 \cdot A5[1, 2]$ )-A4[1, 2], -A3[1, 2], -A2[1, 2], -A1[1, 2], 0, 0, 0,
0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, ( $\omega^2 \cdot A5[2, 1]$ )
-A4[2, 1], -A3[2, 1], -A2[2, 1], -A1[2, 1], ( $\omega^2 \cdot A5[2, 2]$ )
-A4[2, 2], -A3[2, 2], -A2[2, 2], -A1[2, 2]]);

```

```

# แปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตาม
สมการที่ (3-73)

```

```

K := matrixDE(F,  $\xi$ ) :

```

```

# คำสั่งหา eigenvalue และ eigenvector จาก
เมทริกซ์ ตามสมการที่ (3-77)

```

```

# ขั้นตอนในการคำนวณหาค่า  $\omega$  โดยการแทนค่าเพื่อหาค่าที่ตีเทอร์มิแนนซ์เท่ากับ 0 โดยการแทนค่าตอบลงในสมการเงื่อนไข
ขอบเขตการจับยึด

```

```

Digits := 100 :
for i from 0 by 0.00000001 to 600 do
  NN := i :
  HH := subs( $\omega = NN, K[1]$ ) : H := evalf(%) :
  X11 := C[1]·H[1, 1] + C[2]·H[1, 2] + C[3]·H[1, 3] + C[4]
·H[1, 4] + C[5]·H[1, 5] + C[6]·H[1, 6] + C[7]·H[1, 7]
+ C[8]·H[1, 8] :
  X55 := C[1]·H[5, 1] + C[2]·H[5, 2] + C[3]·H[5, 3] + C[4]
·H[5, 4] + C[5]·H[5, 5] + C[6]·H[5, 6] + C[7]·H[5, 7]
+ C[8]·H[5, 8] :
  X[1] := subs( $\xi = 0, X11$ ) :
  X[2] := subs( $\xi = 0, diff(X11, \xi)$ ) :
  X[3] := subs( $\xi = 1, X11$ ) :
  X[4] := subs( $\xi = 1, diff(X11, \xi)$ ) :
  X[5] := subs( $\xi = 0, X55$ ) :
  X[6] := subs( $\xi = 0, diff(X55, \xi)$ ) :
  X[7] := subs( $\xi = 1, X55$ ) :
  X[8] := subs( $\xi = 1, diff(X55, \xi)$ ) :
  J := (i, j) → diff(X[i], C[j]) :
  L := Matrix(8, 8, J);
  M := Determinant(L) :
  NXX[i] := NN;
  MM[i] := Im(M);
  print(NXX[i], MM[i]) :
end do:

```

```

# ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  สำหรับ  $X1$ 
P1 := diff(X11, C[1]) :
PP1 := Im(P1) :
P2 := diff(X11, C[2]) :
PP2 := Im(P2) :
P3 := diff(X11, C[3]) :
PP3 := Im(P3) :
P4 := diff(X11, C[4]) :
PP4 := Im(P4) :
P5 := diff(X11, C[5]) :
PP5 := Re(P5) :
P6 := diff(X11, C[6]) :
PP6 := Re(P6) :
P7 := diff(X11, C[7]) :
PP7 := Re(P7) :
P8 := diff(X11, C[8]) :
PP8 := Re(P8) :
##PPP:=subs( C[4]=0, C[8]=0, X11) :
X11b := C[1]·PP1 + C[2]·PP2 + C[3]·PP3 + C[4]·PP4 + C[5]
·PP5 + C[6]·PP6 + C[7]·PP7 + C[8]·PP8;

# ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  สำหรับ  $X2$ 
P9 := diff(X55, C[1]) :
PP9 := Im(P9) :
P10 := diff(X55, C[2]) :
PP10 := Im(P10) :
P11 := diff(X55, C[3]) :
PP11 := Im(P11) :
P12 := diff(X55, C[4]) :
PP12 := Im(P12) :
P13 := diff(X55, C[5]) :
PP13 := Re(P13) :
P14 := diff(X55, C[6]) :
PP14 := Re(P14) :
P15 := diff(X55, C[7]) :
PP15 := Re(P15) :
P16 := diff(X55, C[8]) :
PP16 := Re(P16) :
##PPPP:=subs( C[4]=0, C[8]=0, X55) :
X55b := C[1]·PP9 + C[2]·PP10 + C[3]·PP11 + C[4]·PP12
+ C[5]·PP13 + C[6]·PP14 + C[7]·PP15 + C[8]·PP16;

# ขั้นตอนในการหาสัมประสิทธิ์  $C_1 - C_8$  โดยการแทนฟังก์ชันลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต
X1final := subs(ξ = 0, X11b) : X2final := subs(ξ = 1, X11b) :
X3final := subs(ξ = 0, diff(X11b, ξ)) :
X4final := subs(ξ = 1, diff(X11b, ξ)) :
X5final := subs(ξ = 0, X55b) :

```

```

X6final := subs(ξ = 1, X55b) :
X7final := subs(ξ = 0, diff(X55b, ξ)) :
X8final := subs(ξ = 1, diff(X55b, ξ)) :
# สมมติค่า C เพื่อที่จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ค่าอื่นได้ในรูปอัตราส่วน
X9final := subs(C[8] = 1, X1final) :
X10final := subs(C[8] = 1, X2final) :
X11final := subs(C[8] = 1, X3final) :
X16final := subs(C[8] = 1, X4final) :

X12final := subs(C[8] = 1, X5final) :
X13final := subs(C[8] = 1, X6final) :
X14final := subs(C[8] = 1, X7final) :
X15final := subs(C[8] = 1, X8final) :
Call := solve({X9final = 0, X10final = 0, X11final = 0, X12final = 0,
X13final = 0, X14final = 0, X15final = 0}, {C[1], C[2], C[3],
C[4], C[6], C[7], C[5]});
# แทนค่า C ที่สมมติขึ้นเพื่อได้ผลเฉลยที่สมบูรณ์
Xlast1 := subs(Call, C[8] = 1, X11b) :
Xlast2 := subs(Call, C[8] = 1, X55b) :

Xlast11 := subs(ξ = x/a, Xlast1); Xlast22 := subs(ξ = x/a, Xlast2);

with(plots) : plot3d((Xlast11·Ylast11) + (Xlast22·Ylast22), x = 0
..10, y = 0 ..10, style = contour, orientation = [-90, 0], color
= black, thickness = 2, axes = box, tickmarks = [0, 0, 0], grid
= [80, 80]
);; plot(Xlast1, ξ = 0 ..1);

# พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกกระนาบเพื่อดู
# รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน
save Xlast11, "Xanswer1a.txt": save Xlast22, "Xanswer2a.txt": # เก็บค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  เพื่อนำไปใช้ในการ
# คำนวณหาค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  ในครั้งต่อไป

=====

ส่วนโปรแกรมที่สองแสดงการทำซ้ำในรอบที่สองโดยนำฟังก์ชันเริ่มต้น  $X_i(x)$  ที่ได้จากการ
ทำซ้ำรอบแรกเป็นตัวหาค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

=====

กำหนดให้  $X_i(x)$  เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า

restart :
Digits := 100: # กำหนดจำนวนทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ
N_term := 2 # กำหนดจำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอก
# กระนาบเท่ากับ 2 พจน์

```

```

# ใส่ค่าคุณสมบัติของวัสดุ
E1 := 31.18e6: # Longitudanal modulus
E2 :=  $\frac{E1}{2.45}$ : # Transverse modulus
v12 := 0.23: # Poisson ratio
G12 := 0.48·E2: # Shear modulus
v21 :=  $\frac{v12·E2}{E1}$ : # Poisson ratio
density := 1540: # density
# ใส่ค่าขนาดของชิ้นงาน
aspectratio := 1.0: # ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน
a := 10: # ความยาวในแนวแกน x
b :=  $\frac{a}{aspectratio}$ : # ความยาวในแนวแกน y
t :=  $\frac{0.091}{20}·3$ : # ความหนาของลามิเนต
h := t·N: # ความสูงทั้งหมดของชิ้นงาน
N := 3: # จำนวนชั้นของลามิเนต
phi := vector([30,-30,30]): # มุมการเรียงตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น
theta := 0: # มุมในการหมุนรอบแกนมีค่าเท่า 0 เสมอ

# คำานวนเมทริกซ์ [ABD]
read "c:/ABD.txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย ABD
read "Xanswer1a.txt":read "Xanswer2a.txt": # สั่งให้โปรแกรมอ่านค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  สำหรับกรณีการคำนวณซ้ำ
XX[1] := Xlast11; XX[2] := Xlast22; # กำหนดค่าฟังก์ชันเริ่มต้น
# คำานวนเมทริกซ์ [R]
read "c:/[R].txt": # คำสั่งในการอ่านค่าโปรแกรมย่อย [R]
# คำานวนเมทริกซ์ [B]
with(LinearAlgebra): # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
IM := IdentityMatrix(N_term): # กำหนดเมทริกซ์เอกลักษณ์
B1 := evalm( (2*b*D26/D22) * (R1_i&*(R3-R3_t)) ):
B2 := evalm( ((b^2*D12/D22) * (R1_i&*(R2 + R2_t))) - ((4*b^2*D66/D22) * (R1_i&*(R6_t)) ):
B3 := evalm( (2*b^3*D16/D22) * (R1_i&*(R5-R5_t)) ):
B4 := evalm( (b^4*D11/D22) * (R1_i&*(R4_t)) ):
B5 := evalm(  $\left(\frac{density·h·b^4}{D22}\right)·IM$ : # ขั้นตอนการคำนวณเมทริกซ์ [B] ตามสมการที่ (3-67) และ (3-72)
B6 := evalm( (D22/b^2)*R1 ):
B7 := evalm( (2*D26/b)*R3 ):
B8 := evalm( D12*R2 ):
B9 := evalm( (-D22/b^3)*R1 ):

```



```

B10 := evalm( (-2*D26/b^2) * (R3 - R3_t) ) :
B11 := evalm( ((4*D66/b)*R6_t) - ((D12/b)*R2) ) :
B12 := evalm( (2*D16)*R5_t ) :

# วิธีการแปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง
with(linalg) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม
with(DEtools) : # เรียกฐานข้อมูลในการคำนวณของโปรแกรม

F := Matrix(8, 8, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, ( $\omega^2 \cdot B5[1, 1]$ ) - B4[1, 1], -B3[1, 1], -B2[1, 1], -B1[1, 1],
( $\omega^2 \cdot B5[1, 2]$ ) - B4[1, 2], -B3[1, 2], -B2[1, 2], -B1[1, 2], 0, 0,
0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, ( $\omega^2 \cdot B5[2, 1]$ )
- B4[2, 1], -B3[2, 1], -B2[2, 1], -B1[2, 1], ( $\omega^2 \cdot B5[2, 2]$ )
- B4[2, 2], -B3[2, 2], -B2[2, 2], -B1[2, 2]]);

# แปลงสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตาม
สมการที่ (3-73)
K := matrixDE(F,  $\eta$ ) : # คำสั่งหา eigenvalue และ eigenvector จาก
เมทริกซ์ ตามสมการที่ (3-77)

# ขั้นตอนในการคำนวณหาค่า  $\omega$  โดยการแทนค่าเพื่อหาค่าที่ตีเทอร์มิแนนซ์เท่ากับ 0 โดยการแทนค่าตอบลงในสมการเงื่อนไข
ขอบเขตการจับยึด
Digits := 100 :
for i from 693.781275787by 0.000000001to 693.781275787do
NN := i :
HH := subs( $\omega = NN, K[1]$ ) : H := evalf(%) :
Y11 := C[1]·H[1, 1] + C[2]·H[1, 2] + C[3]·H[1, 3] + C[4]
·H[1, 4] + C[5]·H[1, 5] + C[6]·H[1, 6] + C[7]·H[1, 7]
+ C[8]·H[1, 8] :
Y55 := C[1]·H[5, 1] + C[2]·H[5, 2] + C[3]·H[5, 3] + C[4]
·H[5, 4] + C[5]·H[5, 5] + C[6]·H[5, 6] + C[7]·H[5, 7]
+ C[8]·H[5, 8] :
Y[1] := subs( $\eta = 0, Y11$ ) :
Y[2] := subs( $\eta = 0, diff(Y11, \eta)$ ) :
Y[3] := subs( $\eta = 1, Y11$ ) :
Y[4] := subs( $\eta = 1, diff(Y11, \eta)$ ) :
Y[5] := subs( $\eta = 0, Y55$ ) :
Y[6] := subs( $\eta = 0, diff(Y55, \eta)$ ) :
Y[7] := subs( $\eta = 1, Y55$ ) :
Y[8] := subs( $\eta = 1, diff(Y55, \eta)$ ) :
J := (i, j) → diff(Y[i], C[j]) :
L := Matrix(8, 8, J);
M := Determinant(L) :
NXX[i] := NN;
MM[i] := Im(M);
print(NXX[i], MM[i]) :
end do:

```

ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน $Y_i(y)$ สำหรับ $Y1$

```
##P1:=diff(Y11, C[1]) :
##PP1:=Im(P1) :
##P2:=diff(Y11, C[2]) :
##PP2:=Im(P2) :
##P3:=diff(Y11, C[3]) :
##PP3:=Im(P3) :
P4 := diff(Y11, C[4]) :
PP4 := Im(P4) :
##P5:=diff(Y11, C[5]) :
##PP5:=Re(P5) :
##P6:=diff(Y11, C[6]) :
##PP6:=Re(P6) :
##P7:=diff(Y11, C[7]) :
##PP7:=Re(P7) :
P8 := diff(Y11, C[8]) :
PP8 := Re(P8) :
PPP := subs( C[4]=0, C[8]=0, Y11) :
Y11b := PPP + C[4]·PP4 + C[8]·PP8;
```

ขั้นตอนในการคำนวณแปลงค่าฟังก์ชัน $Y_i(y)$ สำหรับ $Y2$

```
##P9:=diff(Y55, C[1]) :
##PP9:=Im(P9) :
##P10:=diff(Y55, C[2]) :
##PP10:=Im(P10) :
##P11:=diff(Y55, C[3]) :
##PP11:=Im(P11) :
P12 := diff(Y55, C[4]) :
PP12 := Im(P12) :
##P13:=diff(Y55, C[5]) :
##PP13:=Re(P13) :
##P14:=diff(Y55, C[6]) :
##PP14:=Re(P14) :
##P15:=diff(Y55, C[7]) :
##PP15:=Re(P15) :
P16 := diff(Y55, C[8]) :
PP16 := Re(P16) :
PPPP := subs( C[4]=0, C[8]=0, Y55) :
Y55b := PPPP + C[4]·PP12 + C[8]·PP16;
```

ขั้นตอนในการหาค่าสัมประสิทธิ์ $C_1 - C_8$ โดยการแทนฟังก์ชันลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต

```

Y1bo := subs(eta = 0, Y11b) :
Y2bo := subs(eta = 0, diff(Y11b, eta)) :
Y3bo := subs(eta = 1, Y11b) :
Y4bo := subs(eta = 1, diff(Y11b, eta)) :
Y5bo := subs(eta = 0, Y55b) :
Y6bo := subs(eta = 0, diff(Y55b, eta)) :
Y7bo := subs(eta = 1, Y55b) :
Y8bo := subs(eta = 1, diff(Y55b, eta)) :

```

สมมติค่า C เพื่อที่จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ค่าอื่นได้ในรูปอัตราส่วน

```

Y1final := subs(C[1] = 1, Y1bo) :
Y2final := subs(C[1] = 1, Y2bo) :
Y3final := subs(C[1] = 1, Y3bo) :
Y4final := subs(C[1] = 1, Y4bo) :

Y5final := subs(C[1] = 1, Y5bo) :
Y6final := subs(C[1] = 1, Y6bo) :
Y7final := subs(C[1] = 1, Y7bo) :
Y8final := subs(C[1] = 1, Y8bo) :

Call := solve({Y1final = 0, Y2final = 0, Y3final = 0, Y4final = 0,
              Y5final = 0, Y7final = 0, Y8final = 0}, {C[2], C[3], C[4], C[5],
              C[6], C[7], C[8]});

```

แทนค่า C ที่สมมติขึ้นเพื่อได้ผลเฉลยที่สมบูรณ์

```

Ylast1 := subs(Call, C[1] = 1, Y11b) :
Ylast2 := subs(Call, C[1] = 1, Y55b) :
Ylast11 := subs(eta = y/b, Ylast1); Ylast22 := subs(eta = y/b,
Ylast2) :

```

```

with(plots) : plot3d((Xlast11·Ylast11) + (Xlast22·Ylast22), x = 0
..10, y = 0 ..10, style = contour, orientation = [-90, 0], color
= black, thickness = 2, axes = box, tickmarks = [0, 0, 0], grid
= [80, 80]
); plot(Xlast1, xi = 0 ..1);

```

พล็อตค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่บนกระดานเพื่อดู
รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน

```

save Ylast11, "Yanswer3.txt" save Ylast22, "Yanswer4.txt": # เก็บค่าฟังก์ชัน  $Y_i(y)$  เพื่อนำไปใช้ในการ  
คำนวณหาค่าฟังก์ชัน  $X_i(x)$  ในครั้งต่อไป

```

3. โปรแกรมย่อยที่ใช้ในการคำนวณ

ในหัวข้อนี้จะแสดงโปรแกรมย่อยที่เป็นคำสั่งในการคำนวณค่าเมทริกซ์ต่าง ๆ คือเมทริกซ์ [ABD] [S] และ [R] ที่แสดงอยู่ในโปรแกรมในภาคผนวกส่วนที่ 1 และ 2 ดังที่กล่าวไปแล้วข้างต้น รายละเอียดของแต่ละโปรแกรมมีดังนี้

=====

โปรแกรมย่อยที่ 1 โปรแกรมที่ทำหน้าที่ในการคำนวณเมทริกซ์ [ABD] ซึ่งคำนวณได้จากค่าคุณสมบัติของวัสดุ มีรายละเอียดดังนี้

```
> #----- (Subroutine 1) -----#
> #Calculate the lamina stiffness matrix [Q] in material axis
> Q11:=E1^2/(E1-v12^2*E2):
> Q12:=v12*E1*E2/(E1-v12^2*E2):
> Q22:=E1*E2/(E1-v12^2*E2):
> Q66:=G12:
> #Calculate invariants U
> U1:= (3*Q11+3*Q22+2*Q12+4*Q66)/8:
> U2:= (Q11-Q22)/2:
> U3:= (Q11+Q22-2*Q12-4*Q66)/8:
> U4:= (Q11+Q22+6*Q12-4*Q66)/8:
> U5:= (Q11+Q22-2*Q12+4*Q66)/8:
>
> #Calculate the distance from midplane : z[1]to z[N+1]
> for i from 1 to N+1 do
>   z[i]:=t*(i-1-N/2)
> od:
> #Calculate the invariants V (a total of 15 invariants)
> VA0 := N*t: VB0:=0:
> VD0:=(N*t)^3/12:
> VA1:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VA1:=VA1+cos(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
>   od:
```

```

> VA2:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VA2:=VA2+sin(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
>   od:
> VA3:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VA3:=VA3+cos(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
>   od:
> VA4:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VA4:=VA4+sin(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
>   od:
> VB1:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VB1:=VB1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>   od:
> VB1:=VB1/2:
> VB2:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VB2:=VB2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>   od:
> VB2:=VB2/2:
> VB3:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VB3:=VB3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>   od:
> VB3:=VB3/2:
> VB4:=0:
>   for i from 1 to N do
>     VB4:=VB4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
>   od:
> VB4:=VB4/2:
> VD1:=0:

```

```

>         for i from 1 to N do
>             VD1:=VD1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>         od:
> VD1:=VD1/3:
> VD2:=0:
>         for i from 1 to N do
>             VD2:=VD2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>         od:
> VD2:=VD2/3:
> VD3:=0:
>         for i from 1 to N do
>             VD3:=VD3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>         od:
> VD3:=VD3/3:
> VD4:=0:
>         for i from 1 to N do
>             VD4:=VD4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
>         od:
> VD4:=VD4/3:
> #This are the results: [ABD] w.r.t. the rotated axis.

> #----- Matrix [A] -----#
>
> A11:=evalf(U1*VA0+U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VA2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
> A22:=evalf(U1*VA0-U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
> A12:=evalf(U4*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> A66:=evalf(U5*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> A16:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)+2

```

```

> *U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> A26:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)-2
> *U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> #----- Matrix [B] -----#
> B11:=evalf(U1*VB0+U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VB2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
> B22:=evalf(U1*VB0-U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
> B12:=evalf(U4*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> B66:=evalf(U5*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> B16:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)+2
> *U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> B26:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)
> -2*U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> #----- Matrix [D] -----#
>
> D11:=evalf(U1*VD0+U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VD2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D22:=evalf(U1*VD0-U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD2*sin(2*theta*Pi
> /180)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D12:=evalf(U4*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> D66:=evalf(U5*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi
> /180)):
> D16:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)+2
> *U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> D26:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)-2
> *U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> #----- Matrix [ABD] -----#
>
ABD:=linalg[matrix](6,6,[A11,A12,A16,B11,B12,B16],[A12,A22,A26,B12,B22,B26],

```

```
[A16,A26,A66,B16,B26,B66],[B11,B12,B16,D11,D12,D16],[B12,B22,B26,D12,D22,D26],
,[B16,B26,B66,D16,D26,D66]]);
```

```
>
```

=====

โปรแกรมย่อยที่ 2 โปรแกรมที่ทำหน้าที่ในการคำนวณเมทริกซ์ [S] ซึ่งคำนวณได้จากการสมมติให้ $Y_i(y)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่า มีรายละเอียดดังนี้

```
# Calculate [S] Matrix #

with(linalg):  Y:=array(1..N_term,1..1):
               Y_y:=array(1..N_term,1..1):
               Y_yy:=array(1..N_term,1..1):

for i from 1 to N_term do
  Y[i,1]:=YY[i];
  Y_y[i,1]:=diff(Y[i,1],y);
  Y_yy[i,1]:=diff(Y_y[i,1],y,y);
od:

Y_t:=transpose(Y):
Y_y_t:=transpose(Y_y):
Y_yy_t:=transpose(Y_yy):

ss1:=evalm(Y&*Y_t):
ss2:=evalm(Y&*Y_yy_t):
ss3:=evalm(Y&*Y_y_t):
ss4:=evalm(Y_yy&*Y_yy_t):
ss5:=evalm(Y_yy&*Y_y_t):
ss6:=evalm(Y_y&*Y_y_t):

S1:=array(1..N_term,1..N_term):
S2:=array(1..N_term,1..N_term):
S3:=array(1..N_term,1..N_term):
S4:=array(1..N_term,1..N_term):
S5:=array(1..N_term,1..N_term):
S6:=array(1..N_term,1..N_term):

for i from 1 to N_term do
  for j from 1 to N_term do
    S1[i,j]:=evalf(int(ss1[i,j],y=0..b));
S2[i,j]:=evalf(int(ss2[i,j],y=0..b));
S3[i,j]:=evalf(int(ss3[i,j],y=0..b));
S4[i,j]:=evalf(int(ss4[i,j],y=0..b));
S5[i,j]:=evalf(int(ss5[i,j],y=0..b));
S6[i,j]:=evalf(int(ss6[i,j],y=0..b));
  od:
od:

S1_t:=transpose(S1):      S1_i:=inverse(S1):
S2_t:=transpose(S2):
S3_t:=transpose(S3):
S4_t:=transpose(S4):
S5_t:=transpose(S5):
S6_t:=transpose(S6):
```



```

=====
โปรแกรมย่อยที่ 3 โปรแกรมที่ทำหน้าที่ในการคำนวณเมทริกซ์ [R] ซึ่งคำนวณได้จากการสมมุติให้
 $X_i(x)$  เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่า มีรายละเอียดดังนี้
# Calculate [R] Matrix #

with(linalg):  X:=array(1..N_term,1..1):
               X_x:=array(1..N_term,1..1):
               X_xx:=array(1..N_term,1..1):

for i from 1 to N_term do
  X[i,1]:=XX[i];
  X_x[i,1]:=diff(X[i,1],x);
  X_xx[i,1]:=diff(X[i,1],x,x);
od:

X_t:=transpose(X):
X_x_t:=transpose(X_x):
X_xx_t:=transpose(X_xx):

rr1:=evalm(X&*X_t):
rr2:=evalm(X&*X_xx_t):
rr3:=evalm(X&*X_x_t):
rr4:=evalm(X_xx&*X_xx_t):
rr5:=evalm(X_xx&*X_x_t):
rr6:=evalm(X_x&*X_x_t):

R1:=array(1..N_term,1..N_term):
R2:=array(1..N_term,1..N_term):
R3:=array(1..N_term,1..N_term):
R4:=array(1..N_term,1..N_term):
R5:=array(1..N_term,1..N_term):
R6:=array(1..N_term,1..N_term):

for i from 1 to N_term do
  for j from 1 to N_term do
    R1[i,j]:=evalf(int(rr1[i,j],x=0..a));
R2[i,j]:=evalf(int(rr2[i,j],x=0..a));
    R3[i,j]:=evalf(int(rr3[i,j],x=0..a));
R4[i,j]:=evalf(int(rr4[i,j],x=0..a));
    R5[i,j]:=evalf(int(rr5[i,j],x=0..a));
R6[i,j]:=evalf(int(rr6[i,j],x=0..a));
  od:
od:

R1_t:=transpose(R1):      R1_i:=inverse(R1):
R2_t:=transpose(R2):
R3_t:=transpose(R3):
R4_t:=transpose(R4):
R5_t:=transpose(R5):
R6_t:=transpose(R6):

```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายภานุพันธ์ จอมมาลัย เกิดเมื่อวันที่ 11 มกราคม 2530 ที่จังหวัดพิษณุโลก สำเร็จ การศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมการบินและอวกาศ คณะ วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2551 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2553 และมีผลงานวิชาการที่ได้เผยแพร่ดังนี้

Panupan Jommalai and Paired Singhatanadgid, Buckling and Vibration of composite plates using a system of First-order Differential Equation, The 25th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand 19-21 October 2011, Krabi, Thailand