บทที่ 2

ทฤษฎีการเลือกประชากรแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

2.1 หลักเบื้องต้นของการเรียงลำดับและการเลือกประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด[1]

ให้ θ_j เป็นพารามิเตอร์ของประชากรที่ j , $j = 1, 2, \ldots, k$ และให้ $\theta_{[i]}$ เป็น θ ที่มีค่าเป็นลำดับที่ i ในการเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก นั่นคือ $\theta_{[1]} \leq \theta_{[2]} \leq \ldots \leq \theta_{[k]}$ หรือ $\theta_{[1]} = \min(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, $\theta_{[k]} = \max(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$

และถือว่าประชากรที่ดีที่สุดได้แก่ ประชากรที่มีค่า θ สูงสุด คือเท่ากับ $\theta_{[k]}$ วิธีการเลือกเพื่อให้ได้ประชากรที่มีค่า $\theta = \theta_{[k]}$ นี้ ทำได้โดยสุ่มตัวอย่างจากแต่ละประชากร ซึ่งจะได้ตัวประมาณ $\hat{\theta}_j$ ของ θ_j แล้วเลือกประชากรที่ดีที่สุดจากค่าของ $\hat{\theta}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$

การเลือกจะถูกต้องถ้าค่า θ ของประชากรที่ถูกเลือกเป็นค่าที่สูงสุดจริง จุดประสงค์ของเราไม่ต้องการประมาณค่า $\theta_{[k]}$ แต่ต้องการเลือกประชากรที่มีค่า θ เท่ากับ $\theta_{[k]}$ ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนจะเกิดขึ้นเฉพาะเมื่อการเลือกนั้นไม่ถูกต้อง ความน่าจะเป็นของการเลือกไม่ถูกต้องเมื่อ $\theta_{[k]} > \theta_{[k-1]}$ ก็คือ ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 2 (Type II error) ซึ่งคือ β และความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง จึงเปรียบเทียบได้กับกำลังของการทดสอบ (power of the test) คือ $1-\beta$

---

[1] Jean D. Gibbons, Ingram Olkin and Milton Sobel, Selecting and Ordering Populations : A New Statistical Methodology (New York: John Wiley & Sons, Inc, 1977), pp. 5-17.

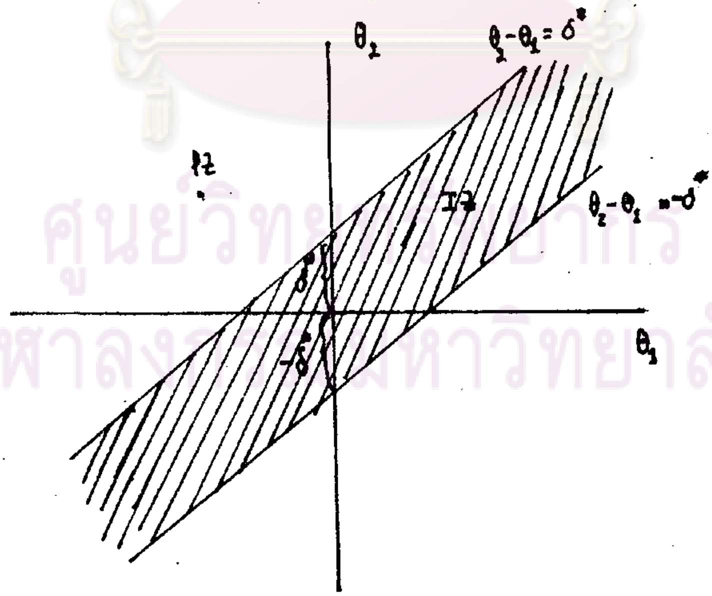
ความน่าจะเป็นของการเลือกถูกต้อง (The probability of correct selection) จะขึ้นอยู่กับเขตของค่าจริงของ θ ซึ่งแทนด้วยฟังก์ชั่น Pr $\{cs/\theta\}$ โดยที่ θ เป็นเวคเตอร์ของ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$

ถ้ามีการเลือกตามเกณฑ์หลายอย่างที่แตกต่างกันแล้วเราจะสรุปว่า การเลือกโดยเกณฑ์ใดจะถูกต้องมากกว่า เราจะแบ่งเขตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ θ (The total parameter space) ซึ่งแทนด้วย TPS ออกเป็น 2 ส่วน คือ

1. พรีเฟอเรนซ์โซน (Preference zone) ซึ่งเป็นอาณาเขตที่ประกอบด้วยค่าของ θ ที่ทำให้การเลือกถูกต้อง จะแทนบริเวณนี้ด้วยสัญญลักษณ์ PZ

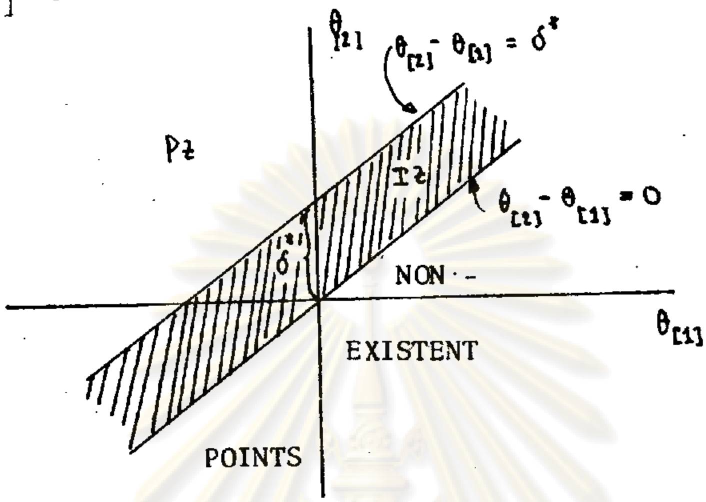
2. อินดิฟเฟอเรนซ์โซน (Indifference zone) ซึ่งเป็นอาณาเขตที่ประกอบด้วยค่าของ θ ที่ทำให้การเลือกไม่ถูกต้อง จะแทนบริเวณนี้ด้วยสัญญลักษณ์ IZ

เช่น ถ้า $k = 2$, θ_1 และ θ_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ TPS คือ ระบบ 2 มิติ ถ้าให้ δ^* เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $|\theta_2 - \theta_1| \geq \delta^*$ แล้วจะสามารถแสดงอาณาเขตของ PZ และ IZ ได้ดังรูปที่ 2.1



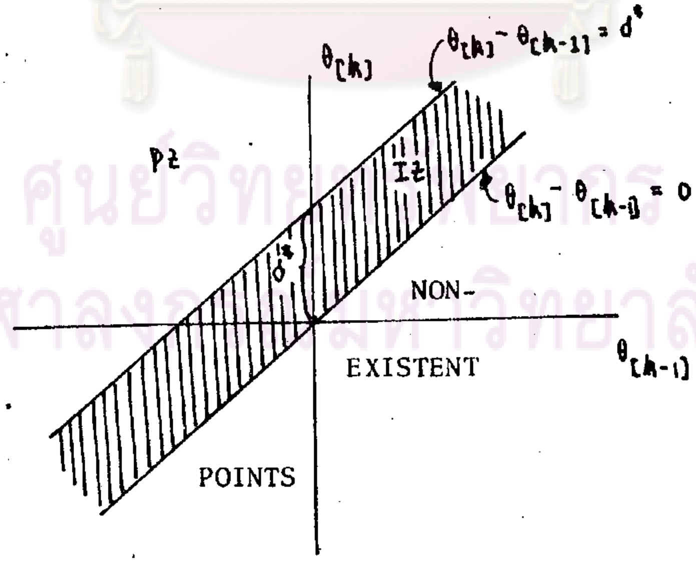
รูปที่ 2.1 : อาณาเขตของ PZ และ IZ เมื่อ $|\theta_2 - \theta_1| \geq \delta^*$

ถ้าเราเรียงลำดับพารามิเตอร์ θ_1, θ_2 แล้วจะได้ $\theta_{[1]} \leq \theta_{[2]}$ โดยที่ $0 < \theta_{[2]} - \theta_{[1]} < \delta^*$ ดังจะแสดงอาณาเขตของ PZ และ IZ ได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 : อาณาเขตของ PZ และ IZ เมื่อ $\theta_{[2]} - \theta_{[1]} > \delta^*$

สำหรับพารามิเตอร์ k ตัว TPS คือ ระนาบ k มิติ แต่เราต้องการเลือกประชากรที่มีค่า $\theta = \theta_{[k]}$ เราจึงสนใจเฉพาะกรณีที่ $\theta_{[k]} > \theta_{[k-1]}$ ดังนั้น การกำหนดอาณาเขต PZ และ IZ จึงขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ $\theta_{[k]}$ และ $\theta_{[k-1]}$ เท่านั้น ดังแสดงตามรูป 2.3



รูปที่ 2.3 : อาณาเขตของ PZ และ IZ เมื่อ $\theta_{[k]} - \theta_{[k-1]} \geq \delta^*$

อาณาเขต PZ จะมีจุดเป็นจำนวนมากมายนับไม่ถ้วน และจะมีกรณีพิเศษที่เซท ของ θ ใน PZ ที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของความถูกต้องต่ำสุด เราเรียกโครงสร้างนี้ว่า <u>โครงสร้างที่ชอบน้อยที่สุด</u> (The least favorable configuration) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ LFC และแทนเซทของ θ ที่มีคุณสมบัตินี้ด้วย "θ_{LF}" ฉะนั้น $Pr\{cs/\theta\} \geq Pr\{cs/\theta_{LF}\}$ สำหรับทุกค่าของ $\theta \in PZ$

ถ้าให้ $Pr\{cs/\theta_{LF}\} = P^*$

ฉะนั้น $Pr\{cs/\theta\} \geq P^*$

โดยที่ P^* คือ ค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้องที่มีค่าต่ำสุดสำหรับค่าของ θ

ในการเลือกประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุดนั้น LFC ได้แก่ สับเซทของ PZ ที่กำหนดให้ค่าเฉลี่ยของประชากรทุกค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยประชากรที่สูงเป็นอันดับสอง กล่าวคือ

$\mu_{[1]} = \mu_{[2]} = \cdots = \mu_{[k-1]} = \mu'$ และ $\mu_{[k]} - \mu' = \delta^*$

ให้ $\delta_{i,j} = \mu_{[i]} - \mu_{[j]}$

ฉะนั้น $\delta_{k,\,k-1} = \delta^*$ โดยที่ $\delta^* > 0$

และ $\delta_{i+1,\,i} = 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, k-2$

นอกจากนั้น $Pr\{cs/\mu\} \geq P^* \quad , \frac{1}{k} < P^* < 1$

2.2 <u>การเลือกประชากรแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด</u>

ให้ X_{ij} แทนค่าที่สังเกตที่ j ของประชากรที่ i โดยที่

$X_{ij} \sim NID\ (\mu_i\ ,\ \sigma_i^2)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, k\ ,\ j = 1, 2, \ldots$

n_i แทนขนาดของตัวอย่างจากประชากรที่ i , i = 1, 2, ... , k

เราจะถือว่าเราไม่ทราบค่า μ_i แต่สำหรับค่าของ σ_i^2 นั้น อาจจะทราบค่าหรือไม่ทราบค่าก็ได้

ให้ $\mu_{[i]}$ เป็นค่าของ μ ลำดับที่ i ในการเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก

$i = 1, 2, \ldots , k$

เพราะฉะนั้น $\mu_{[1]} \leq \mu_{[2]} \leq \ldots \leq \mu_{[k]}$

ให้ $\overline{X}_{(i)}$, $\sigma^2_{(i)}$, $n_{(i)}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง, วาเรียนซ์และขนาดของตัวอย่างของประชากรที่มีค่าเฉลี่ยของประชากรเท่ากับ $\mu_{[i]}$

และกำหนดให้ $E(\overline{X}_{(i)}) = \mu_{[i]}$ $V(\overline{X}_{(i)}) = \sigma^2_{(i)} / n_{(i)}$

เราจะพิจารณาทฤษฎีการเลือกประชากรแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุดใน 4 กรณีดังต่อไปนี้

1. วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันทุกประชากรและทราบค่าวาเรียนซ์
2. วาเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากัน แต่ทราบค่าวาเรียนซ์
3. วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันทุกประชากร แต่ไม่ทราบค่าวาเรียนซ์
4. วาเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากัน และไม่ทราบค่าวาเรียนซ์

2.2.1 <u>กรณีที่วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันทุกประชากรและทราบค่าวาเรียนซ์</u>

2.2.1.1 <u>การหาความน่าจะเป็นของความถูกต้องในการเรียงลำดับ</u>[1]

กำหนดให้ k_s เป็นจำนวนประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

k_{s-1} เป็นจำนวนประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงรองมาเป็นอันดับสอง

---

[1] Robert E. Bechhofer, "A Single-Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means for Normal Populations with Known Variance," <u>The Annal of Mathematical Statistics</u> 25 (1954) : 19-22

k_{s-2} เป็นจำนวนประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงรองมาเป็นอันดับสาม

$\vdots$

k_1 เป็นจำนวนประชากรที่มีค่าเฉลี่ยต่ำสุด

โดยที่ $k_1, k_2, \ldots, k_s$ $(s \leq k)$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง เท่ากับ

$$\Pr\Big[\max\{\overline{X}_{(1)},\ldots,\overline{X}_{(k_1)}\} < \min\{\overline{X}_{(k_1+1)},\ldots\overline{X}_{(k_1+k_2)}\},$$
$$\max\{\overline{X}_{(k_1+1)},\ldots,\overline{X}_{(k_1+k_2)}\} < \min\{\overline{X}_{(k_1+k_2+1)},\ldots,\overline{X}_{(k_1+k_2+k_3)}\},$$
$$\vdots$$
$$\max\{\overline{X}_{(k-k_s-k_{s-1}+1)},\ldots,\overline{X}_{(k-k_s)}\} < \min\{\overline{X}_{(k-k_s+1)},\ldots,\overline{X}_{(k)}\}\Big] \qquad (2.1)$$

ถ้า $s = 2$, $k = k_1+k_2$, $k_1 = k-t$, $k_2 = t$ จากสมการ (2.1) จะได้ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง เท่ากับ

$$\Pr\Big[\max\{\overline{X}_{(1)},\overline{X}_{(2)},\ldots,\overline{X}_{(k-t)}\} < \min\{\overline{X}_{(k-t+1)},\ldots,\overline{X}_{(k)}\}\Big] \qquad (2.2)$$

ถ้า $t = 1$ จากสมการ (2.2) จะได้ ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง $= \Pr\Big[\max\{\overline{X}_{(1)},\overline{X}_{(2)},\ldots,\overline{X}_{(k-1)}\} < \min\{\overline{X}_{(k)}\}\Big]$ ซึ่งได้แก่ ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง สำหรับการเลือกประชากรดีที่สุดหนึ่งประชากร

ถ้า $t = 2$ จากสมการ (2.2) จะได้ ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง $= \Pr\Big[\max\{\overline{X}_{(1)},\overline{X}_{(2)},\ldots,\overline{X}_{(k-2)}\} < \min\{\overline{X}_{(k-1)},\overline{X}_{(k)}\}\Big]$ ซึ่งได้แก่ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง สำหรับการเลือกประชากรที่ดีที่สุดสองประชากร (โดยไม่พิจารณาลำดับในสองประชากรนั้น)

และถ้าพิจารณาจาก LFC จะได้

$$\left.\begin{aligned} \mu_{[k]} - \mu_{[k-t+1]} &= 0 \\ \mu_{[k-t+1]} - \mu_{[k-t]} &= \delta^* \\ \mu_{[k-t]} - \mu_{[1]} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{-------------(2.3)}$$

และถ้าให้ $\sigma_i^2 = \sigma^2$ และ $n_i = n$, $i = 1, 2, \ldots, k$ แล้ว

จากสมการ (2.2) จะได้ ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

$$= t \Pr\left[\max\left\{\overline{X}_{(1)}, \ldots, \overline{X}_{(k-t)}\right\} < \overline{X}_{(k-t+1)} < \min\left\{\overline{X}_{(k-t+2)}, \ldots, \overline{X}_{(k)}\right\}\right]$$

$$= t \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\overline{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t]})/(\sigma/\sqrt{n})} e^{-z^2/2} dz\right]^{k-t}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\overline{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t+1]})/(\sigma/\sqrt{n})}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz\right]^{t-1}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-n(\overline{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t+1]})^2/2\sigma^2} d\overline{X}_{(k-t+1)}$$

-------------(2.4)

ถ้าให้ $y = \sqrt{n}\,(\overline{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t+1]})/\sigma$ และ $d = \dfrac{\sqrt{n}\delta^*}{\sigma}$ แล้ว

จากสมการ (2.4) จะได้ ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

$$= t \int_{-\infty}^{\infty} [F(y+d)]^{k-t} [1-F(y)]^{t-1} f(y)\,dy \qquad \text{-------------(2.5)}$$

โดยที่ $F(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx$, $F'(y) = f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$

จาก $d = \frac{\sqrt{n}\,\delta^*}{\sigma}$ เราเรียก d นี้ว่า <u>ความแตกต่างมาตราฐานของค่าเฉลี่ยที่มีค่าน้อยที่สุด</u> และถ้าใช้ค่า $\mathcal{T}$ แทนค่า d แล้ว จะได้ $\mathcal{T} = \frac{\sqrt{n}\,\delta^*}{\sigma}$

$$\therefore \quad n = \left(\frac{\mathcal{T}\sigma}{\delta^*}\right)^2 \qquad \text{---------------(2.6)}$$

จากสมการ (2.5) ถ้าค่า d หรือ $\mathcal{T}$ เท่ากับ 0 จะได้

ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง $= t\int_{0}^{1} F(y)^{k-t}[1-F(y)]^{t-1}dF$

$$= \frac{t(k-t)!\,(t-1)!}{\Gamma(k-t+1+t)}$$

$$= \frac{t!(k-t)!}{k!}$$

ถ้า $\mathcal{T} = 0$ จะได้ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง มีค่าเท่ากับ $\frac{t!\,(k-t)!}{k!}$ ดังนั้น จึงมีความหมายว่า ถ้าความแตกต่างมาตราฐานของค่าเฉลี่ยมีค่าเป็น 0 แล้วความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง คือ ความน่าจะเป็นของการเลือกประชากร t ประชากรจากทั้งหมด k ประชากร

<u>ถ้า t = 1</u> จากสมการ (2.3) จะได้คุณสมบัติ LFC เป็น

$$\left.\begin{aligned} \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} &= \delta^* \text{ ซึ่ง } \delta^* > 0 \\ \mu_{[i]} - \mu_{[j]} &= 0 \quad , i, j = 1, 2, \ldots , k-1 \end{aligned}\right\} \text{----------(2.7)}$$

ดังนั้นเมื่อ t=1 จากสมการ (2.5) จะได้

ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง $= \int_{-\infty}^{\infty}[F(y+d)]^{k}[1-F(y)]\,f(y)\,dy$ ....(2.8)

ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้องสำหรับการเลือกประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุดหนึ่งประชากรจากหลายประชากรที่มีอยู่ , จากสมการ (2.8) นี้ เมื่อกำหนดค่า k และ

ค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้องให้ จะแก้สมการได้ค่า $\mathcal{T}$ ดังปรากฏในตาราง A.1[1] จากค่าของ $\mathcal{T}$ เราสามารถหาขนาดของตัวอย่างได้ โดยการแทนค่า $\mathcal{T}$ ในสมการ (2.6) คือ $n = \left(\frac{\mathcal{T}\sigma}{\delta^*}\right)^2$ แต่ถ้าจากสมการ (2.8) เมื่อกำหนดค่า k และค่า $\mathcal{T}$ ให้ จะแก้สมการ ได้ค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง ดังปรากฏในตาราง A.2[1]

2.2.1.2 ขั้นตอนการหาขนาดของตัวอย่างและการเลือกประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

1. เลือก (P^*, δ^*) ที่ $\frac{1}{k} < P^* < 1$, $\delta = \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} \geq \delta^*$

โดยที่ P^* เป็นค่าอย่างน้อยที่สุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

δ^* เป็นค่าความแตกต่างน้อยที่สุดระหว่างค่าเฉลี่ยจริงของประชากรที่มีค่าสูงสุดกับค่าเฉลี่ยจริงของประชากรที่สูงรองลงมา ซึ่งได้จากคุณสมบัติ LFC $(\mu_{[1]} = \mu_{[2]} = \cdots = \mu_{[k-1]}, \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} = \delta^*)$

โดยการกำหนดค่าของ (P^*, δ^*) ขึ้นอยู่กับประสบการณ์หรือการตัดสินใจของผู้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลนั้น

2. นำค่า P^* และ k ไปเปิดตาราง A.1 เพื่อหาค่า $\mathcal{T}_t$ (t หมายถึงค่า $\mathcal{T}$ นั้น ได้จากตาราง)

3. แทนค่า δ^* , $\mathcal{T}_t$ และ σ^2 ที่ทราบค่าแล้วในสมการ (2.6) จะได้

$$n = \left(\frac{\mathcal{T}_t\sigma}{\delta^*}\right)^2$$

ถ้าค่า n ที่ได้ไม่เป็นจำนวนเต็มให้แทนด้วยจำนวนเต็มที่อยู่ถัดไป

4. คำนวณหาค่า $\overline{X}_i$ โดย

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} X_{ij} \quad , i = 1, 2, \ldots, k \; , j = 1, 2, \ldots, n$$

---

[1] Jean D. Gibbons, Ingram Olkin and Milton Sobel, Selecting and Ordering Populations : A New Statistical Methodology, pp. 400-401.

5. เลือกประชากรที่มีค่า $\bar{X}_i$ สูงสุด ซึ่งจะถือว่าเป็นประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

2.2.2 <u>กรณีที่ว่าเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากัน แต่ทราบค่าว่าเรียนซ์</u> [1]

ให้ $X_{ij} \sim NID(\mu_i , \sigma_i^2)$

μ_i ไม่ทราบค่า σ_i^2 ทราบค่า , $i = 1, 2, \ldots, k$,

$j = 1, 2, \ldots$ และ $\sigma_i^2 = \alpha_i \sigma_o^2$ ---------(2.9)

โดยที่ σ_o^2 เป็นค่าคงที่ที่กำหนดค่าให้

α_i เป็นค่าบวกคงที่

ในการที่จะใช้ตาราง A.1 และ A.2 เราต้องถือเสมือนกับว่าเป็นกรณีที่ว่าเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ เท่ากัน คือ ต้องมี $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma_o^2$ และ

$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n'$

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \ldots = \frac{\sigma_k^2}{n_k} = \frac{\sigma_o^2}{n'} \qquad \text{-----------(2.10)}$$

จากสมการ (2.9) และ (2.10) จะได้

$$\frac{\sigma_i^2}{n_i} = \frac{\alpha_i \sigma_o^2}{n_i} = \frac{\sigma_o^2}{n'} , \quad i = 1, 2, \ldots , k \qquad \text{---------(2.11)}$$

และจาก (2.11) จะได้ขนาดของตัวอย่างจากแต่ละประชากรเป็น

$$n_i = \alpha_i n' \qquad \text{--------------(2.12)}$$

---

[1] Robert E. Bechhofer, "A Simple-Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means for Normal Populations with Known Variance," <u>The Annal of Mathematical Statistics</u> 25: 24

โดยหาค่า n' จาก $n' = \left(\frac{\mathcal{T}_t \sigma_o}{\delta^*}\right)^2$

ถ้าค่าของ n' และ n_i ไม่เป็นจำนวนเต็มให้แทนด้วยจำนวนเต็มที่อยู่ถัดไป

เรานำค่า n_i ไปใช้หาค่า $\bar{X}_i$ โดย $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, k$

$j = 1, 2, \ldots, n_i$ แล้วเลือกประชากรที่มีค่า $\bar{X}_i$ สูงสุด ซึ่งจะถือว่าเป็นประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับ $k=2$ เราสามารถแสดงการหาขนาดของตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพจากสมการ $n_2\sigma_1^2 = n_1\sigma_2^2$ และ $n_1+n_2 = n$ โดย σ_1^2 , σ_2^2 รู้ค่าและค่า n ซึ่งเป็นขนาดของตัวอย่างทั้งหมดที่กำหนดมาให้

แต่สำหรับ k มากกว่า 2 กฎเกณฑ์ที่ให้ประสิทธิภาพมากที่สุดของการหาค่า n_i , $i = 1, 2, \ldots, k$ ทำได้ยุ่งยากมาก และวิธีการหาขนาดของตัวอย่างที่เสนอมาแล้วข้างต้นเป็นวิธีการหาขนาดของตัวอย่างวิธีหนึ่งเท่านั้น

2.2.3 <u>กรณีที่วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันแต่ไม่ทราบค่าวาเรียนซ์</u> [1]

ให้ $X_{ij} \sim NID\ (\mu_i, \sigma_i^2)$, μ_i ไม่ทราบค่า $i = 1, 2, \ldots, k$

$j = 1, 2, \ldots, n_i$

โดยที่ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ แต่ไม่ทราบค่า

$$\mu_{[i]} \leq \mu_{[2]} \ldots \leq \mu_{[k]}$$

$$\delta_{i,j} = \mu_{[i]} - \mu_{[j]} \quad i, j = 1, 2, \ldots, k , i \neq j$$

$$\Pr\{cs/\mu\} \geq P^* \ ; \ \delta_{k,k-1} \geq \delta^*$$

---

[1] Robert E. Bechhofer, Charles W. Dunnett and Milton Sobel, "A Two-Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with a Common Unknown Variance," <u>Biometrika</u> 41 (1954) : 170 - 176.

ที่ซึ่ง $k^{-1} < P^* < 1$ และ $\delta^* < 0$

ซึ่งค่าของ δ^* และ P^* ได้จากคุณสมบัติ LFC

2.2.3.1 <u>ขั้นตอนการหาขนาดของตัวอย่างและการเลือกประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด</u>

1. เลือกตัวอย่างครั้งแรกด้วยขนาด n จากแต่ละประชากร

2. หาค่า S^2 จาก

$$S^2 = \frac{(n-1)\ S_1^2 + (n-1)\ S_2^2 + \ldots + (n-1)\ S_k^2}{k(n-1)}$$

$$= \frac{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2}{k}$$

โดยที่ $S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_{in})^2$, $i = 1,2, \ldots, k$, $j = 1,2, \ldots, n$

$\overline{X}_{in} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$, $i = 1,2, \ldots, k$, $j = 1,2, \ldots, n$

ชั้นแห่งความอิสระของ S^2 คือ $= k\ (n-1)$

กำหนดค่า δ^* และ P^* แล้ว เลือกตัวอย่างสุ่มครั้งที่สองด้วยขนาด N-n จากแต่ละประชากร โดยที่

$$N = \max \left[n, \frac{2S^2h^2}{\delta^{*2}} \right] \qquad (2.14)$$

ซึ่ง h เป็นค่าบวกคงที่ (ดูจาก 2.2.3.2) ที่ได้จาก<u>ตาราง A.3</u> [1] เมื่อใช้ค่า และ P^* เปิดตาราง

ถ้าค่า n มากกว่า $\{2S^2h^2 / \delta^{*2}\}$ จะได้ N=n ดังนั้น ขนาดของตัวอย่างก็จะเท่ากับ n จึงไม่ต้องเลือกตัวอย่างสุ่มครั้งที่สองอีก

---

[1]Jean D. Gibbon, Ingram Olkin and Milton Sobel, <u>Selecting and Ordering Populations : A New Statistical Methodology</u>, pp. 405

4. คำนวณหาค่า $\overline{X}_i$ โดย

$$\overline{X}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \quad , i = 1, 2, \ldots, k$$
$$j = 1, 2, \ldots, N$$

ถ้า $\overline{X}_i$ บางค่าเท่ากัน เราจะเรียงลำดับของค่าเฉลี่ยที่เท่ากันด้วยการสุ่ม โดยให้ความน่าจะเป็นในการสุ่มค่า $\overline{X}_i$ ที่เท่ากันนั้นเท่ากัน

5. เลือกประชากรที่มีค่า $\overline{X}_i$ สูงสุด ซึ่งจะถือว่าเป็นประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุดในประชากรกลุ่มนี้

2.2.3.2 <u>การคำนวณหาค่า</u> h

จากคุณสมบัติ LFC จะได้

$$\mu_{[1]} = \mu_{[2]} \cdots = \mu_{[k-1]} \qquad \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} = \delta^*$$

ให้ $\overline{X}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_{ij}$ และ $E(\overline{X}_i) = \mu_i$

$, i = 1, 2, \ldots, k \;, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

$$\Pr\left\{ \overline{X}_{(i)} < \overline{X}_{(k)} \quad i = 1,2, \ldots, k \right\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{\sqrt{\frac{N}{2}}\,(\overline{X}_{(i)} - \overline{X}_{(k)} + \delta^*)}{S} < \sqrt{\frac{N}{2}}\, \frac{\delta^*}{S} \right\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{Z_i}{S} < h \right\} \qquad \text{--------------} (2.15)$$

โดย $Z_i = \sqrt{\frac{N}{2}}\,(\overline{X}_{(i)} - \overline{X}_{(k)} + \delta^*)$ และ $\sqrt{\frac{N}{2}}\,\frac{\delta^*}{S} \geqslant h$

(ซึ่งจะได้ $N \geqslant \frac{2S^2h^2}{\delta^{*2}}$)

Z_i มีการกระจายแบบปกติด้วย $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$

จากฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นแบบเงื่อนไขของ Z_i เมื่อกำหนด S (conditional joint distribution of Z_i given S) เป็นฟังก์ชั่นการกระจายแบบปกติของหลายตัวแปร (multivariate normal distribution) ด้วย $\mu = 0$ วาเรียนซ์ σ^2 และเมททริกซ์ของความสัมพันธ์ $\{\rho_{ij}\}$ ซึ่ง $\rho_{ij} = \begin{cases} 1 , & i = j \\ \frac{1}{2} , & i \neq j \end{cases}$, ในฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของ Z_i และ S เราจะเปลี่ยนให้ $Z_i = t_i s$ เพื่อจะอินทีเกรดเอา S ออกไป ดังนั้น สมการ (2.15) เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นหลายตัวแปรของการกระจายแบบที (multivariate-t distribution) ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\Pr\left\{ \frac{Z_i}{S} < h \right\} = \int_{-\infty}^{h} \cdots \int_{-\infty}^{h} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+k)]}{\sqrt{k}\,(\frac{1}{2} n\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} b_{ij} t_i t_j \right\}^{-\frac{1}{2}(n+k-1)} dt_1 \ldots dt_{k-1} \quad \text{----------} (2.16)$$

โดย $b_{ij} = \begin{cases} 2(k-1) / k , & i = j \\ -2/k , & i \neq j \end{cases}$

จากสมการ (2.16) ถ้ากำหนดค่า P^* , k , n ให้จะสามารถแก้สมการหาค่า h ได้ดังปรากฏในตาราง A.3

2.2.4 กรณีที่วาเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากันและไม่ทราบค่าวาเรียนซ์[1]

ให้ $X_{ij} \sim NID(\mu_i, \sigma_i^2)$, μ_i ไม่ทราบค่า σ_i^2 ไม่ทราบค่า

$, i = 1, 2, \ldots, k , \quad j = 1, 2, \ldots$

$\mu_{[1]} \leq \mu_{[2]} \cdots \leq \mu_{[k]}$

$\delta_{i,j} = \mu_{[i]} - \mu_{[j]}$, $i,j = 1, 2, \ldots k$, $i \neq j$

$Pr\{cs/\mu\} \geq P^*$, $\delta_{k,k-1} \geq \delta^*$

ที่ซึ่ง $k^{-1} < P^* < 1$ และ $\delta^* \leq 0$

โดยที่ค่า δ^* และ P^* ได้จากคุณสมบัติ LFC

2.2.4.1 ขั้นตอนของการหาขนาดของตัวอย่างและการเลือกประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

1. เลือกตัวอย่างครั้งแรกด้วยขนาด n จากแต่ละประชากร

2. หาค่า S_i^2 ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ σ_i^2 จาก

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_{in})^2 \quad , i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\bar{X}_{in} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \quad , \quad i = 1,2, \ldots , k \ , \ j = 1,2, \ldots , n$$

3. กำหนดค่า δ^* และ P^* แล้วเลือกตัวอย่างสุ่มครั้งที่สองด้วยขนาด $N_i - n$

$i = 1, 2, \ldots , k$ จากแต่ละประชากร โดยที่

$$N_i = \max \left[n , \left\{ \frac{S_i h}{\delta} \right\}^2 \right] \qquad (2.17)$$

---

[1] J.B. Ofosu, "A Two-Sample Procedure for Selecting the Population with the Largest Mean from Several Normal Populations with Unknown Variances," Biometrika 60 (1973) : 117-123.

ซึ่ง h เป็นค่าบวกคงที่ (ดูใน 2.2.4.2) ที่ได้จากตาราง A.4[1] เมื่อใช้ค่า n, k, P^* เปิดตาราง

ถ้าค่า n มากกว่า $\left\{\frac{S_i h}{\delta^*}\right\}^2$, i = 1,2, --- , k จะได้ $N_i = n$,

i = 1, 2, ... , k

4. คำนวณหาค่า $\bar{X}_{i,N_i}$ โดย

$$\bar{X}_{i,N_i} = \frac{1}{\bar{N}_i} \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$j = 1, 2, \ldots, N_i$$

ถ้า $\bar{X}_i$ บางค่าเท่ากัน เราจะเรียงลำดับของค่าเฉลี่ยที่เท่ากันด้วยการสุ่ม โดยให้ความน่าจะเป็นในการสุ่มค่า $\bar{X}_i$ ที่เท่ากันนั้นเท่ากัน

5. เลือกประชากรที่มีค่า $\bar{X}_{i,N_i}$ สูงสุด ซึ่งจะถือว่าเป็นประชากรที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุดในประชากรกลุ่มนี้

2.2.4.2 การคำนวณหาค่า h

ทฤษฎี เพื่อให้สอดคล้องกับ $\{Pr\ cs/\mu\} \geq P^*$ เมื่อ $\delta_{k,k-1} \geq \delta^*$ จะเลือกค่าของ h ให้สอดคล้องกับสมการ

$$\int_{\infty}^{\infty} \left(F_m\ (t+h)\right)^{k-1} f_m\ (t)\ dt = P^*$$

โดยที่ F_m เป็นฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function) ของตัวแปร t

f_m เป็นฟังก์ชั่นแสดงความน่าจะเป็น (density function) ของตัวแปร t

t มีค่าชั้นความอิสระซึ่งเท่ากับ m = n-1

[1] Jean D. Gibbon, Ingram Olkin and Milton Sobel, Selecting and Ordering Populations : A New Statistical Methodology, pp. 412-413

<u>พิสูจน์</u> จากการหาค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้องด้วยคุณสมบัติ LFC จะได้

$$\theta_{[1]} = \theta_{[2]} = \cdots = \theta_{[k-1]} = \theta$$

$$\theta_{[k]} - \theta_{[k-1]} = \delta_{k,k-1} = \delta^*$$

และ $\delta_{i+1,i} = o \quad , \quad i = 1, \cdots, k-2$

ให้ประชากรที่ k เป็นประชากรที่มีค่าพารามิเตอร์เท่ากับ $\theta_{[k]}$

$$\therefore \quad X_{kj} \sim NID\ (\theta+\delta^*, \sigma_k^2)$$

$$X_{ij} \sim NID\ (\theta, \sigma_i^2) \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, k-1$$

$$Pr\left\{ \bar{X}_{i,N_i} < \bar{X}_{k,N_k} , i = 1,2, \cdots, k-1 \right\} = Pr\left\{ Z_i < U_i , i = 1,2,\ldots, k \right\} \qquad (2.18)$$

โดย $Z_i = \left\{ \bar{X}_{i,N_i} - \theta - (\bar{X}_{k,N_k} - \theta - \delta^*) \right\} / a_{N_k,N_i} \quad , \quad U_i = \delta^* / a_{N_k,N_i}$

และ $a_{N_k,N_i} = \left(\frac{\sigma_k^2}{N_k} + \frac{\sigma_k^2}{N_i} \right)^{\frac{1}{2}}$

Z_i มีการกระจายแบบปกติด้วย $\mu = o$, $\sigma^2 = 1$

U_i เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มขึ้นโดยตลอดของ N_i และ N_k

ดังนั้น สมการ (2.18) จะเป็นฟังก์ชั่นที่เพิ่มขึ้นโดยตลอดของ N_i, $i = 1,2, \cdots, k$ และค่าต่ำสุดของสมการ (2.18) สามารถหาค่าได้โดยใช้ N_i ที่มีค่าต่ำสุด

ให้ n_i แทนค่า N_i ที่มีค่าต่ำสุด

จากสมการ (2.17) จะได้ $n_i = (S_i h / \delta^*)^2$

$$\therefore \quad \sqrt{n_i} = S_i h / \delta^*$$

และ $\delta^* = S_i h / \sqrt{n_i}$, $i = 1, 2, \cdots, k$ ----------(2.19)

ดังนั้น จากสมการ (2.18) จะได้

$$\Pr\left\{ (\bar{X}_{i,n_i} - \theta) < (\bar{X}_{k,n_k} - \theta - \delta^*) + \delta^* \ , \ i = 1,2, \cdots, k-1 \right\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{(\bar{X}_{i,n_i} - \theta)\sqrt{n_i}}{S_i} < \frac{\left((\bar{X}_{k,n_k} - \theta - \delta^*) + \delta^*\right) .h}{\delta^*} \right\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{(\bar{X}_{i,n_i} - \theta)\sqrt{n_i}}{S_i} < \frac{(\bar{X}_{k,n_k} - \theta - \delta^*)\, h + h}{\delta^*} \right\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{(\bar{X}_{i,n_i} - \theta)\sqrt{n_i}}{S_i} < \frac{(\bar{X}_{k,n_k} - \theta - \delta^*)\sqrt{n_k}}{S_k} + h \right\}$$

$$= \Pr\ \{ t_i < t_k + h \ , \ i = 1, 2, \cdots, k-1 \} \qquad \text{------------(2.20)}$$

ซึ่ง t_i เป็นตัวแปรอิสระที่มีชั้นความอิสระเท่ากับ $n-1$

ดังนั้น เพื่อให้สอดคล้องกับ $\Pr\{ cs/\mu\} \geq P^*$ เมื่อ $\delta_{k,k-1} \geq \delta^*$

ซึ่งให้สมการ (2.20) เท่ากับ P^* ซึ่งจะได้

$$P^* = \int_{-\infty}^{\infty} F(t+h)^{k-1} f(t)\, dt \qquad \text{------------(2.21)}$$

จากสมการ (2.21) นี้ เมื่อกำหนดค่า P^*, k, n ให้จะสามารถแก้สมการ

หาค่า h ได้ดังปรากฏในตาราง A.4

2.3 การหาค่าของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดตัวอย่างให้

ในบางกรณีเราไม่สามารถหาขนาดของตัวอย่างตามวิธีดังกล่าวข้างต้นได้ เพราะผู้วิเคราะห์ไม่สามารถตัดสินใจเลือกค่า P^* และ δ^* หรืออาจจะเป็นเพราะการกำหนดขนาดของตัวอย่างไม่ได้ขึ้นอยู่กับการตัดสินใจของผู้วิเคราะห์ แต่อาจถูกกำหนดด้วยเศรษฐกิจหรืออื่น ๆ ซึ่งในกรณีเช่นนี้เราจะประมาณค่าของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง ของแบบแผนที่กำหนดขนาดของตัวอย่างไว้แล้วนั้น เป็นช่วงกว้างโดยจะหาค่าต่ำสุด (lower bound) และค่าสูงสุด (upper bound) ของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง ซึ่งแทนด้วยสัญญลักษณ์ P_L และ P_U ตามลำดับ แล้วค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง จะอยู่ระหว่าง P_L กับ P_U

เราจะแยกพิจารณาการหาค่าของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างให้เป็น 4 กรณี คือ

1. วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันทุกประชากรและทราบค่าวาเรียนซ์
2. วาเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากัน แต่ทราบค่าวาเรียนซ์
3. วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันทุกประชากร แต่ไม่ทราบค่าวาเรียนซ์
4. วาเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากัน และไม่ทราบค่าวาเรียนซ์

2.3.1 กรณีที่วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันทุกประชากรและทราบค่าวาเรียนซ์ [1]

ความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้องนี้จะขึ้นอยู่กับโครงสร้างที่แท้จริงของค่าเฉลี่ยของประชากร μ ($\mu_{[1]}, \mu_{[2]}, \ldots, \mu_{[k]}$) ซึ่งจะมี k-1 ค่าของความแตกต่างระหว่าง $\mu_{[k]}$ และ $\mu_{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ โดย

---

[1] Ibid. , pp. 44-48.

ให้ $\delta_1 = \mu_{[k]} - \mu_{[1]}$, $\delta_2 = \mu_{[k]} - \mu_{[2]}$, ... , $\delta_{k-1} = \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]}$

และ $\hat{\delta}_1 = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[1]}$, $\hat{\delta}_2 = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[2]}$, ... , $\hat{\delta}_{k-1} = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[k-1]}$

โดยที่ $\bar{X}_{[i]}$ เป็นค่าของ $\bar{X}$ ลำดับที่ i ในการเรียงลำดับจากน้อยไปมาก ,

$i = 1, 2, \ldots , k$

จากค่าของ $\hat{\delta}_i$, $i = 1, 2, \ldots , k-1$ เราจะประมาณค่า $\hat{\tau}_i$ จาก

$$\hat{\tau}_i = \frac{\hat{\delta}_i \sqrt{n_o}}{\sigma_o} \qquad i = 1, 2, \ldots , k-1 \qquad \text{-----------(2.22)}$$

เมื่อ $$n_o = \left(\frac{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \ldots + \sqrt{n_k}}{k}\right)^2$$

และ n_i เป็นขนาดของตัวอย่างจากประชากรที่ i , $i = 1, 2, \ldots , k$

σ_o^2 เป็นค่าวาเรียนซ์ของประชากร

เนื่องจาก $\hat{\delta}_i$ เป็นค่าเรียงลำดับจากมากไปน้อย ดังนั้น $\hat{\tau}_i$ จึงเป็นค่าที่เรียงลำดับจากมากไปน้อยด้วย คือ $\hat{\tau}_1 \geq \hat{\tau}_2 \geq \ldots \geq \hat{\tau}_{k-1}$

เราจะหาค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง โดยหาเป็น 2 ค่า คือ ค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง (P_L) และค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง (P_U)

2.3.1.1 <u>การประมาณค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง (P_L)</u>

<u>ขั้นที่ 1</u> หาค่า P_i , $i = 1, 2, \ldots, k-1$

จากสมการ (2.22) $\hat{\tau}_i = \dfrac{\hat{\delta}_i \sqrt{n_o}}{\sigma_o}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$

แล้วนำค่า $\hat{\tau}_i$ และ $k=2$ ไปเปิดตาราง A.2 จะได้ค่า P_i , $i = 1,2, \ldots, k-1$ (ใช้ $k=2$ เพราะค่า $\hat{\tau}_i$ ได้มาจาก $\hat{\delta}_i$ ซึ่งเป็นค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง 2 กลุ่ม)

หรืออาจจะหาค่า P_i จาก $P_i = \Phi\,(\hat{\tau}_i / \sqrt{2})$ ____________(2.23)

ซึ่ง Φ (X) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการกระจายแบบปกติมาตราฐาน

<u>ขั้นที่ 2</u> หาค่า P_L จาก

$$P_L = P_1 P_2 \ldots P_{k-1} \qquad \text{____________(2.24)}$$

ซึ่งจะเป็นค่าประมาณของค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.1.2 <u>การประมาณค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง (P_U)</u>

จากสมการ (2.22) $\hat{\tau}_i = \dfrac{\hat{\delta}_i \sqrt{n_o}}{\sigma_o}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\hat{\tau}_i}{k-1} \; , \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \qquad \text{______(2.25)}$$

นำค่า $\bar{\tau}$ และ k ไปเปิดตาราง A.2 จะได้ค่า P_U ซึ่งเป็นค่าประมาณของค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.2 กรณีที่วาเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากัน แต่ทราบค่าวาเรียนซ์

ให้ $\delta_1 = \mu_{[k]} - \mu_{[1]}$, $\delta_2 = \mu_{[k]} - \mu_{[2]}$, ... , $\delta_{k-1} = \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]}$

$\hat{\delta}_1 = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[1]}$, $\hat{\delta}_2 = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[2]}$, ... , $\hat{\delta}_{k-1} = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[k-1]}$

โดยที่ $\bar{X}_{[i]}$ เป็นค่าของ $\bar{X}$ ลำดับ i ในการเรียงลำดับจากน้อยไปมาก , $i = 1,2,\ldots, k$

เราจะหาช่วงของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง โดยหาเป็น 2 ค่า คือ ค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง และค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.2.1 การประมาณค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

ให้ $$Z_i = \frac{\hat{\delta}_i}{\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{\sigma_k^2}{n_k}}} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots , k-1 \qquad (2.26)$$

โดยที่ σ_i^2 เป็นวาเรียนซ์ของประชากรที่ i , $i = 1, 2, \ldots , k$

n_i เป็นขนาดของตัวอย่างของประชากรที่ i , $i = 1, 2, \ldots , k$

ให้ $$P_i = \Phi(Z_i) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots , k \qquad (2.27)$$

โดยที่ $\Phi(Z_i)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการกระจายแบบปกติมาตราฐาน

แล้วหา P_L โดยใช้สมการ $P_L = P_1 . P_2 \ldots P_{k-1}$

ซึ่งจะเป็นค่าประมาณของค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.2.2 การประมาณค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

ให้ $\hat{\tau}_i = \dfrac{\hat{\delta}_i\sqrt{n_o}}{\sigma_{ik}}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ ---------(2.28)

โดยที่ $n_o = \left(\dfrac{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}+\ldots+\sqrt{n_k}}{k}\right)^2$

ซึ่ง n_i , $i = 1, 2, \ldots, k$ เป็นขนาดของตัวอย่างจากประชากรที่ i

$$\sigma_{ik}^2 = \frac{(n_i-1)\,\sigma_i^2 + (n_k-1)\,\sigma_k^2}{n_1+n_k-2}, \quad i = 1,2,\ldots,k-1 \quad \text{--------}(2.29)$$

ให้ $\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{\hat{\tau}_i}{k-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$

นำค่า $\bar{\tau}$ และ k ไปเปิดตาราง A.2 จะได้ค่า P_U ซึ่งเป็นค่าประมาณของค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.2 กรณีที่วาเรียนซ์ของประชากรเท่ากันทุกประชากรแต่ไม่ทราบค่าวาเรียนซ์

ให้ $\delta_1 = \mu_{[k]} - \mu_{[1]}$, $\delta_2 = \mu_{[k]} - \mu_{[2]}$, $\ldots$, $\delta_{k-1} = \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]}$

$\hat{\delta}_1 = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[1]}$, $\hat{\delta}_2 = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[2]}$, $\ldots$, $\hat{\delta}_{k-1} = \bar{X}_{[k]} - \bar{X}_{[k-1]}$

โดยที่ $\bar{X}_{[i]}$ เป็นค่าของ $\bar{X}$ ลำดับ i ในการเรียงลำดับน้อยไปมาก , $i = 1, 2, \ldots, k$

เราหาค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง โดยหาเป็น 2 ค่า คือ ค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง และค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.3.1 <u>การประมาณค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง</u>

ให้ $$t_i = \frac{\hat{\delta}_i}{S_{ik}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k}}} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, k-1 \qquad (2.30)$$

โดยที่ $$S_{ik}^2 = \frac{(n_i-1)\, S_i^2 + (n_k-1)\, S_k^2}{n_i+n_k-2} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, k-1 \qquad (2.31)$$

$$\left.\begin{aligned} S_i^2 &= \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2 \quad , \; i = 1, 2, \ldots, k \\ \overline{X}_i &= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad , \; j = 1, 2, \ldots, n_i \end{aligned}\right\} \qquad (2.32)$$

n_i , $i = 1, 2, \ldots, k$ เป็นขนาดตัวอย่างจากประชากรที่ i

จากค่า t_i เปิดตารางความน่าจะเป็นสะสมของการกระจายแบบที ด้วยชั้นความอิสระ n_1+n_2-2 จะได้ค่า P_i , $i = 1, 2, \ldots, k-1$ แล้วหา P_L โดยใช้สมการ

$$P_L = P_1 . P_2 \ldots P_{k-1}$$

ซึ่งจะเป็นค่าประมาณของค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.3.2 <u>การประมาณค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง</u>

ให้ $$\hat{\tau}_i = \frac{\hat{\delta}_i \sqrt{n_o}}{S_o} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, k-1 \qquad (2.33)$$

โดยที่ $$n_o = \left(\frac{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \ldots + \sqrt{n_k}}{k}\right)^2$$

$$S_o^2 = \frac{(n_1-1)\ S_1^2 + (n_2-1)\ S_2^2 + \ldots + (n_k-1)\ S_k^2}{n_1+n_2+\ \ldots\ + n_k-k} \quad \text{----------(2.34)}$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i) \ , \ i = 1, 2, \ldots , k \ ; \ j = 1, 2, \ldots , n_i$$

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

n_i , $i = 1, 2, \ldots , k$ เป็นขนาดของตัวอย่างจากประชากรที่ i

ให้ $\overline{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\hat{\mathcal{T}}_i}{k-1}$, $i = 1, 2, \ldots , k-1$

นำค่า $\overline{\mathcal{T}}$ และ k ไปเปิดตาราง A.2 จะได้ค่า P_U ซึ่งเป็นค่าประมาณของค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.4 <u>กรณีที่วาเรียนซ์ของประชากรต่าง ๆ ไม่เท่ากัน และไม่ทราบค่าวาเรียนซ์</u>

ให้ $\delta_1 = \mu_{[k]} - \mu_{[1]}$, $\delta_2 = \mu_{[k]} - \mu_{[2]}$, ... , $\delta_{k-1} = \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]}$

$\hat{\delta}_1 = \overline{X}_{[k]} - \overline{X}_{[1]}$, $\hat{\delta}_2 = \overline{X}_{[k]} - \overline{X}_{[2]}$, ... , $\hat{\delta}_{k-1} = \overline{X}_{[k]} - \overline{X}_{[k-1]}$

โดยที่ $\overline{X}_{[i]}$ เป็นค่าของ $\overline{X}$ ลำดับที่ i ในการเรียงลำดับจากน้อยไปมาก , $i = 1,2, \ldots , k$

เราหาค่าความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง โดยหาเป็น 2 ค่า คือ ค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง และค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.4.1 <u>การประมาณค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง</u>

ให้
$$t_i = \frac{\hat{\delta}_i}{\sqrt{\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_k^2}{n_k}}} \quad , \; i = 1, 2, \ldots , k-1 \qquad \text{-----------} (2.35)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)$$

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad , \; i = 1, 2, \ldots , k ; \; j = 1, 2, \ldots , n_i$$

n_i , $i = 1, 2, \ldots , k$ เป็นขนาดของตัวอย่างจากประชากรที่ i

จากค่า t_i จะหาค่า P_i , $i = 1, 2, \ldots , k-1$ โดยเปิดตารางความน่าจะเป็นสะสมของการกระจายแบบที ด้วยชั้นความอิสระ v โดย

$$v = \frac{S_i^2/n_i + S_k^2/n_k}{[(S_i^2/n_i)^2 \; /(n_i - 1)] + [(S_k^2/n_k)^2 \; /(n_k - 1)]} \qquad \text{----------} (2.36)$$

แล้วหา P_L โดยใช้ $P_L = P_1 . P_2 \ldots P_{k-1}$ ซึ่งจะเป็นค่าประมาณของค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง

2.3.4.2 <u>การประมาณค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง</u>

ให้
$$\hat{\tau}_i = \frac{\hat{\delta}_i \sqrt{n_o}}{S_{ik}} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, k-1 \qquad \text{------------} (2.37)$$

โดยที่ $n_o = \left(\frac{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \ldots + \sqrt{n_k}}{k}\right)^2$ ซึ่ง n_i , $i = 1, \ldots , k$

เป็นขนาดของตัวอย่างจากประชากรที่ i

$$S^2_{ik} = \frac{(n_i-1)\ S^2_i + (n_k-1)\ S^2_k}{n_1+n_k-2}\ , \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ k-1$$

ให้ $$\bar{T} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\hat{T}_i}{k-1}\ , \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ k-1$$

นำค่า $\bar{T}$ และ k ไปเปิดตาราง A.2 จะได้ค่า P_U ซึ่งเป็นค่าประมาณของค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของการเลือกได้ถูกต้อง