บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

วัตถุประสงค์

1. การศึกษารูปแบบของการวางแผนกำลังคน (Manpower Planning Model)

2. การประยุกต์รูปแบบการวางแผนกำลังคน เพื่อศึกษาหาสัดส่วนที่เหมาะสมในขบวนการผลิต ซึ่งจะได้ทราบสัดส่วนของบุคคลากรในขบวนการผลิตที่เปลี่ยนในแต่ละช่วงของเวลา (Periods)

3.1 การศึกษารูปแบบของการวางแผนกำลังคน ที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการศึกษากลยุทธของกำลังคนในองค์การ โดยใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยให้การวิเคราะห์และวางแผนกำลังคนเป็นไปได้อย่างถูกต้องและเหมาะสมที่สุด ซึ่งรูปแบบการวางแผนโดยทั่วไปจะเกี่ยวข้องกับเวลา, งาน กำลังคนและเงิน และนโยบายโดยทั่วไปขององค์การได้แก่ การจ้างงาน, ค่าจ้างแรงงาน, การให้กำลังใจ, การให้ออก และเหตุผลอื่น ๆ ซึ่งมีอยู่ในโครงสร้างขององค์การ แต่ไม่ได้รวมปัญหาของการบริหารบุคคลเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย รูปแบบต่าง ๆ ที่จะกล่าวถึงมีดังต่อไปนี้ คือ

1. <u>รูปแบบในแนวตรงข้าม</u> (Cross - Sectional Models)

<u>บทนำ</u>

ในหัวข้อนี้จะได้อธิบายถึงวิธีการที่กำลังคนเปลี่ยนแปลงจากระดับที่ $S_i(t)$ ที่เวลา t ไปยังระดับ $S_i(t+1)$ ที่เวลา t+1 ซึ่งการเปลี่ยนแปลงนี้ได้มาจากข้อมูลในเวลาปัจจุบัน ซึ่งมีดังต่อไปนี้

1.1 <u>การประมาณการเคลื่อนไหวของสัดส่วน</u>

(Fractional - Flow Assumptions)

ในรูปแบบของการเคลื่อนไหวของสัดส่วน เราสมมติว่าสัดส่วนที่อยู่ในชั้น i ที่เวลา (t-1) เคลื่อนที่ไปยังชั้น i ที่เวลา t เป็นจำนวนคงที่ ถ้า q_{ji} เป็นอิสระจาก t และ $S_i(t-1)$ ดังนั้น

$$f_{ij}(t) = q_{ji}S_i(t-1) \qquad (1.1)$$

สำหรับทุกค่าของ t และ $i = 1, 2, \ldots N$; $j = 0, 1, 2, \ldots N$

สมมติฐานนี้ค่อนข้างยาก จะใช้ในกรณีของปัญหาที่มีจำนวนมาก สำหรับการเคลื่อนที่จะไม่เป็นลบ, เพราะ $q_{ji} \geqslant 0$ ดังนั้น ถ้าเรารวมดัชนี j จะได้

$$S_i(t-1) = \sum_{j=0}^{N} f_{ij}(t) = \sum_{j=0}^{N} q_{ji} S_i(t-1)$$

ซึ่งแสดงว่า $\Sigma_j^N = 0, q_{ji} = 1$ สัดส่วน q_{ji} แยกกำลังคนในชั้น i และเคลื่อนที่ไปยังชั้น j ซึ่งจะได้ว่า

$$S_j(t) = \sum_{i=0}^{N} f_{ij}(t) = f_{oj}(t) + \sum_{i=1}^{N} q_{ji} S_i(t-1) \qquad (1.2)$$

สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, N$

กำหนด $f_0(t)$ เป็นเวคเตอร์ $f_{01}(t), f_{02}(t), \ldots, f_{0N}(t)$ ที่กำหนดขึ้นในช่วงเวลา t เช่นเดียวกับ $S(t) = S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t)$ และสุดท้าย $Q = N \times N$ เมตริกซ์ (q_{ji}) สำหรับ j และ i ระหว่าง 1 และ N ดังนั้น จะได้

$$S(t) = Q_s(t-1) + f_0(t) \qquad (1.3)$$

เราถือว่า N เวคเตอร์ $S(t)$ และ $f_0(t)$ เป็น $N \times 1$ เมตริกซ์ ซึ่งปกติเรียกว่า "เวคเตอร์ในแนวตั้ง (Columm Vector)" เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนควรเขียนสมการหลักให้ชัดเจน สมการ 1.3 เป็นรูปแบบการเคลื่อนที่ของสัดส่วนเบื้องต้น กำหนดชั้นของเวลา (t-1) เหตุการที่เกิดในช่วงเวลา t และเมตริกซ์ Q สามารถพยากรณ์ชั้นของเวลา t รูปแบบ Cross-Sectional ใช้ข้อมูล S(t-1) และเป็นอิสระกับชั้นและการเคลื่อนที่ของเวลา (t-1) ในส่วนของสมการ 1.3 ทางขวามือ $Q_s(t-1)$ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดก่อนช่วงเวลา t ส่วน $f_0(t)$ เป็นเวคเตอร์ที่เกิดขึ้นในช่วง t และในส่วนย่อยจะแปรผันตามสมการเบื้องต้น (1.3)

1.2 <u>การประมาณสัดส่วนจากเหตุการณ์ในอดีต</u>

(Fractional Appointments with Hindsight)

กำหนดให้ $S_0(t)$ เป็นจำนวนของตำแหน่งที่ว่างที่เวลา t จะได้

$$\lambda(t) = \sum_{j=0}^{N} S_j(t) \qquad (1.4)$$

จำนวนตำแหน่งทั้งหมดในระบบ เราใช้ S(t) สำหรับเวคเตอร์ N $\{S_1(t), S_2(t), \ldots S_N(t)\}$ และ $S^*(t)$ สำหรับเวคเตอร์ N+1 $\{S_o(t), S(t)\}$., ผลรวม[1] es(t) = $\lambda(t) - S_o(t)$ เป็นจำนวนของงานแต่ละแบบที่มีอยู่ในองค์การที่เวลา t เราสามารถแยกตำแหน่งว่างที่เวลา t ได้ ดังนั้น $S_o(t) = \sum_{i=0}^{N} = 0\ f_{io}(t)$ กำหนดให้ $f_{oo}(t)$ เป็นจำนวนของตำแหน่งว่างที่เวลา (t-1) ซึ่งยังไม่เต็มระหว่างช่วงเวลา t การเคลื่อนที่อื่น ๆ ถูกกำหนดโดยสมการ (1.1); ดังนั้น

$$S_o(t) = f_{oo}(t) + \sum_{i=1}^{N} q_{oi} S_i(t-1) \qquad (1.5)$$

ความล่าช้าของนโยบายกำหนดสัดส่วนถูกกำหนดโดยสเกลล่ำ (Scalar) a_o และเวคเตอร์ N ฉนั้น $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ สำหรับ j = 1, 2, ..., N, โดยที่ a_j เป็นสัดส่วนของตำแหน่งว่าง $S_o(t-1)$ สังเกตที่เวลา (t - 1) ซึ่งทำให้เต็มจำนวน โดยแต่งตั้งจากแต่ละคนในชั้น j เราสามารถบอกได้ว่า a_o เป็นสัดส่วนของตำแหน่งว่าง ซึ่งยังคงมีอยู่ระหว่างช่วงเวลา t จำนวนของ a_j ซึ่ง j = 0, 1, 2, ..., N เป็นอิสระจาก t และ$S_o(t)$, ไม่เป็นค่าลบและมีผลรวมเท่ากับ 1 จากนิยามนี้จะเห็นได้ว่า การแต่งตั้ง หรือ การเคลื่อนที่เข้าจะกำหนดจาก

$$f_{oj}(t) = a_j S_o(t-1) \; ; \; j = 1, 1, 2, \ldots, N$$

สำหรับ j = 1, 2, ..., N เรากำหนด $W_j = q_{oj}$ เป็นสัดส่วนจากทั้งหมดในชั้นj ที่เวลา (t - 1) ซึ่งถูกเพิกถอนจากระบบระหว่างช่วงเวลา t และในที่สุด P^* จะมีค่าเท่ากับเมตริกซ์ (N + 1) x (N + 1)

---

[1] เวคเตอร์ e เป็นเวคเตอร์ในแนวนอน ซึ่งแต่ละอีเลมเมนต์เท่ากับ 1, ใช้สำหรับรวมอีเลมเมนต์ของแต่ละเวคเตอร์ นั่นคือ es(t) = $\sum_{j=1}^{N} S_j(t)$

$$P^* = \left[\begin{array}{c|c} a_o & W \\ \hline a & Q \end{array}\right] \tag{1.6}$$

ซึ่ง Q คือ เมตริกซ์ N x N จาก (1.3)

P^* เป็นเมตริกซ์ทางสโตคาสติค ; แต่ละอีเลมเมนต์ไม่เป็นลบ และผลรวมในแนวตั้งเท่ากับ 1 สถานะของระบบกำลังคนที่เวลา t กำหนดโดย (N + 1) เวคเตอร์ $S^*(t) = \{S_o(t), S(t)\}$, ซึ่ง $S(t) = \{S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t)\}$ จากนิยามจะได้ว่าความล้าหลังในรูปแบบของกำลังคนที่มีขนาดคงที่ คือ

$$S^*(t) = P^*S^*(t-1), \tag{1.7}$$

ตัวอย่าง 1 พิจารณาจากระบบมหาวิทยาลัย ซึ่งมี N = 3 แบบ : 1 - ทดลองเรียน, 2 - ปกติ, 3 - ไล่ออก, ให้แต่ละช่วงเวลาเท่ากับ 1 ปี และสมมติว่าใน 1 ปี 25 % ของนักศึกษาไม่มีสิทธิ์เปลี่ยนเป็นนักศึกษามีสิทธิ์, 25 % ยังคงไม่มีสิทธิ์เหมือนเดิม และที่เหลือให้ออก นอกจากนั้น 80 % ของนักศึกษาที่มีสิทธิ์ยังคงมีสิทธิ์อยู่, 10 %ให้ออก และอีก 10%ไล่ออก นอกจากนั้น 80 %ของนักศึกษาที่ถูกไล่ออกก็ยังคงถูกไล่ออกเหมือนเดิม ส่วนที่เหลือถูกไล่ออกพ้นจากระบบ และสมมติว่าการให้เข้ามาใหม่อยู่ในระดับนักศึกษาที่ไม่มีสิทธิ์

$$P^* = \begin{pmatrix} 0 & .5 & .1 & .2 \\ 1 & .25 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .8 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & .8 \end{pmatrix}$$

ปัญหา 1 ให้หาจำนวนนักศึกษาในแต่ละระดับหลังจากหนึ่งปี

ชั้น	กรณี A	กรณี B
ที่ว่าง	800	828
ทดลองเรียน	1000	1103
ปกติ	2000	1379
ไล่ออก	200	690
รวม	4000	4000

จะได้ว่า $S^*(t)$ รวมกับ $\lambda(t)$ สำหรับเวลาทั้งหมด t , ฉนั้น

$$\lambda(t) = es^*(t) = eP^*S^*(t-1) = es^*(t-1) = \lambda(t-1)$$

ดังนั้น ในระบบก็ยังคงมีกำลังคนจำนวนคงที่และ (N + 1) เวคเตอร์ $S^*(t) / \lambda(t)$ ไม่เป็นลบ และผลรวมเท่ากับ 1 จากสมการที่ 1.7 จะคล้ายรูปแบบทฤษฎีของลูกโซ่มาร์คอฟ (MARKOV CHAIN) ฉนั้น จาก (1.3) และ (1.7) บางครั้งเรียกว่า รูปแบบของมาร์คอฟ (MARKOV MODEL) แต่เราไม่ระบุแน่ชัดลงไปเพราะเหตุว่า เรากำลังศึกษาถึงรูปแบบที่กำหนดขึ้น (Deterministic Model) ไม่ใช่รูปบบของความน่าจะเป็น (Probabilities)

1.3 <u>การกำหนดสัดส่วนโดยคาดการณ์ล่วงหน้า</u>

(Fractional Appointments with Foresight)

เราจะต้องสร้างนโยบายการกำหนดสัดส่วนเพื่อคาดหมายตำแหน่งที่ว่างในช่วงเวลา t และจะจ้างเข้ามาใหม่เพื่อให้กำลังคนเต็มที่อยู่เสมอ กรณีที่มีตำแหน่งว่าง จากนโยบายนี้ $S_o(t) = 0$ สำหรับ t ทั้งหมด

ถ้า S(t - 1) เป็นกำลังคนที่มีอยู่ที่เวลา (t - 1), ฉนั้น $\sum_{i=1}^{N} W_i S_i(t-1)$ที่ว่างอยู่จะต้องหามาให้ครบในช่วงเวลา t ตำแหน่งว่างทั้งหมดนี้สัดส่วน a_j จะต้องจ้างใหม่โดยดูจากแต่ละชั้น j จะไม่มีตำแหน่งว่างมากขนาดที่หามาเพิ่มเติมให้ครบไม่ได้ ดังนั้น $a_o = 0$ และ $\sum_{j=1}^{N} a_j = 1$ การเคลื่อนที่ของการแต่งตั้งใหม่ในชั้น j และช่วงเวลา t คือ

$$f_{oj}(t) = a_j \sum_{i=1}^{N} W_i S_i(t-1) \qquad (1.8)$$

และจาก 1.3 จะได้ว่า

$$S_j(t) = \sum_{i=1}^{N} (q_{ji} + a_j \cdot S_i)\, S_i(t-1) \qquad (1.9)$$

สำหรับ j = 1, 2, ..., N

จากรูปแบบของเมตริกซ์, กำหนด a x w เป็นเมตริกซ์ N x N ซึ่งมีอีเลมเมนต์$a_j w_i$ ซึ่งคล้ายกับผลผลิตของเมตริกซ์ ถ้า a ประมาณว่าเป็นเมตริกซ์ N x 1 (เวคเตอร์ในแนวตั้ง) และ w คือเมตริกซ์ 1 x N (เวคเตอร์ในแนวนอน) และเมื่อ $P = Q + a \cdot w$ ดังนั้น

$$S(t) = P \cdot s\,(t-1) \qquad (1.10)$$

P เป็นเมตริกซ์ทางสโตคาสติค (ผลรวมในแนวตั้งเท่ากับ 1) เมื่อ W และ a ไม่เป็นลบ, $P_{ji} = q_{ji} + a_j W_i \geqslant 0$ ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ji} = \sum_{j=1}^{N} q_{ji} + W_i \sum_{j=1}^{N} a_j = 1$$

ฉะนั้น $\sum_{j=1}^{N} a_j = 1$ และ $W_i = q_{oi} = 1 - \sum_{j=1}^{N} q_{ji}$ ซึ่งสมการ (1.10) มีรูปแบบทางคณิตศาสตร์คล้าย (1.7) แต่มีสมการน้อยกว่า, มีนโยบายการจ้างงานที่แตกต่างกันและเมตริกซ์ทางสโตคาสติค ซึ่งมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงต่อ a_j หรือ W_i ไม่ปรากฏชัดเจน

ตัวอย่างที่ 2 ต่อจากตัวอย่างที่ 1 สมมติว่าเราใช้นโยบายการจ้างงานเหมือนกัน แต่เราได้คาดหมายตำแหน่งที่ว่างไว้แล้ว เมตริกซ์ P ที่ได้รับจากเมตริกซ์ P* จากตัวอย่างที่ 1 คือ

$$P = \begin{pmatrix} .75 & .1 & .2 \\ .25 & .8 & 0 \\ 0 & .1 & .8 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น สภาวะที่ 0 (อยู่นอกระบบ)จะไม่เกิดขึ้นในรูปแบบนี้ คล้ายกับว่าการเคลื่อนที่ของสัดส่วนไม่เป็นไปตามธรรมชาติ ตัวอย่างเช่น 20 % ของนักศึกษาที่ถูกไล่ออกกลับเข้ามาอยู่ในระดับนักศึกษาไม่มีสิทธิ์ การเคลื่อนที่นี้คือถึงเวลาการจ้างงานใหม่นั่นเอง

ปัญหา 2 ให้หาจำนวนนักศึกษาในแต่ระดับหลังจากหนึ่งปี

ชั้น	กรณี a	กรณี b
ไม่มีสิทธิ์	1800	1391
มีสิทธิ์	2000	1739
ไล่ออก	200	870
ผลรวม	4000	4000

1.4 การวิเคราะห์นโยบายการกำหนดสัดส่วน

จากรูปแบบทั้งสองแบบที่ได้กล่าวมาแล้ว สามารถกำหนดสมการ (1.7)และ

(1.10) ขึ้น ซึ่งรูปแบบของสมการคล้ายคลึงกับสมการการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (Transition equations of Finite State) ของลูกโซ่มาร์คอฟ ในส่วนนี้เราจะวิเคราะห์ดูว่า ทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟจะนำมาใช้ในรูปแบบที่กำหนดได้อย่างไร เราจะเน้นไปที่สมการ (1.10) แต่ในทางพีชคณิตเหมือนกับรูปแบบในสมการ (1.7)

จากปัญหาข้อ 1 และข้อ 2 ในกรณี B เราสามารถทำให้สมดุลได้ สำหรับค่าของ S(0) เรานิยมใช้ S(1) = S(0), ฉะนั้น S(t) = S(0) สำหรับทุกค่าของ t การทำให้สมดุลนี้สามารถอธิบายโดยใช้ทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟ

ถ้า S(0) เป็นจำนวนเริ่มต้น ดังนั้น

$$S(1) = PS(0)$$

$$S(2) = PS(1) = P.PS(0) = P^2S(0)$$

โดยทั่วไป

$$S(t) = P^tS(0) \qquad (1.11)$$

ภายใต้สมมติฐานที่เชื่อถือได้เกี่ยวกับเมตริกซ์ P , สมการ (1.11) มีโครงสร้างกว้างมากสำหรับค่า t เราจะไม่มุ่งไปที่รายละเอียดทางเทคนิคของสมมติฐานเนื่องจากนิยามที่เกี่ยวข้องใช้ทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟ ซึ่งมีความเหมาะสมเพียงเล็กน้อยสำหรับรูปแบบการเคลื่อนที่ของกำลังคนในตัวอย่างต่าง ๆ ตั้งสมมติฐานไว้ว่า เมตริกซ์ P^t มีค่าเป็นบวกทั้งหมด สำหรับทุกค่าของ t และ

$$P^t \to V \text{ หรือ } t \to \infty \qquad (1.12)$$

ได้แก่

1. ในแนวตั้งเป็นค่าของเมตริกซ์ V ทั้งหมดได้แก่ $v_1, v_2 \ldots v_n$ ดังนั้น

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \cdots\cdots\cdots v_1 \\ v_2 \cdots\cdots\cdots v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \qquad\qquad v_n \end{pmatrix}$$

2. เวคเตอร์ $v = v_1, v_2 \ldots, v_n$ นั่นคือ

$v = Pv;\ ev = 1;\ v_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, N$

สำหรับค่าของ t มีจำนวนมากจาก (1.11), จะได้ $S(t) \approx Vs(0)$ และจาก 1.4.2 จะได้ $Vs(0) = (v_1, v_2 \ldots, v_n)\ \lambda\ (0)$, ซึ่ง $\lambda\ (0)$ เป็นขนาดของระบบที่เวลาเป็นศูนย์ ถ้าจำนวนของ $(v_1, v_2 \ldots v_n)$ ถูกกำหนดขึ้น เราสามารถรู้ได้ว่าการกระจายของกำลังคนในแต่ละชั้นเป็นอย่างไร หลังจากที่แต่ละช่วงเวลาได้ล่วงเลยไปแล้ว ถือเป็นค่ากำหนดว่า $t \to \infty$ และการกระจาย v จะใช้ประมาณในช่วงเวลาสั้น ๆ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 3 ใช้การกระจายของคนในกรณี (A) ของปัญหาข้อ 1 และ $S^*(0)$, P^* จากตัวอย่างที่ 1 , กำลังคนในแต่ละช่วงเวลา คือ

ชั้น	เวลา 0	1	2	4	8	∞
ว่าง	800	740	782	791	814	828
ไม่มีสิทธิ์	1000	1050	1003	1028	1075	1103
มีสิทธิ์	2000	1850	1742	1574	1422	1379
ไล่ออก	200	360	473	607	689	690

ปัญหา 3 ให้คำนวณตามรูปแบบตัวอย่างที่ 3 โดยใช้กรณี (a) ของปัญหาที่ 2 และ S(0), P จากตัวอย่างที่ 2

การคำนวณ S(t) จากสมการ (1.11) เมื่อค่า t มีจำนวนมาก จะกำหนด S เป็นเวคเตอร์ที่จำกัดขอบเขตของ S(t) เมื่อ $t \to \infty$ ฉะนั้นจาก 1.12 จะได้

$$S = Ps \tag{1.13}$$

ถ้า λ เป็นขนาดทั้งหมดของระบบ จะได้

$$\lambda = \sum_{j=1}^{N} S_j \tag{1.14}$$

สมการ 1.13 และ 1.14 ประกอบด้วยสมการ (N+1) ซึ่ง N ไม่รู้ค่าในระดับชั้น S ถ้า e เป็นเวคเตอร์ซึ่งทุก ๆ อีเลมเมนต์เท่ากับ 1 จะสามารถเขียนได้ว่า

$$(I - P)S = 0 \qquad (1.15)$$

$$es = \lambda$$

$$\begin{pmatrix} -P_{21} & (1-P_{22}) & & \cdots P_{2N} \\ -P_{31} & -P_{32} & (1-P_{33}) & P_{3N} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ -P_{N1} & -P_{N2} & -P_{N3} & (1-P_{NN}) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

สมการที่ 1.16 แสดงให้เห็นว่า เวคเตอร์ที่เข้าสู่สภาวะคงที่ของกำลังคนขึ้นอยู่กับนโยบายที่กำหนดได้อย่างไร

1.5 <u>นโยบายการกำหนดแต่งตั้งที่คงที่</u>

(STATIONARY APPOINTMENT POLICIES)

จากสมการ (1.3) รูปแบบการเคลื่อนที่ของสัดส่วนเบื้องต้น, กำลังคนในขั้น j ที่เวลา t จะได้

$$S_j(t) = \sum_{i=1}^{N} q_{ji}S_i(t-1) + f_{oj}(t), \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

หรือในรูปของเมตริกซ์ $S(t) = QS(t-1) + f_o(t)$

ให้ S_o เป็นเวคเตอร์เริ่มต้น และเวคเตอร์ที่ใส่เข้าไปใหม่ คือ $f_o(1)$, $f_o(2)$, ..., $f_o(t)$, กำลังคนในระดับต่าง ๆ คือ $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(t)$ ในส่วน $f_o(t)$ ที่เราพิจารณา ถ้าจำนวนของตำแหน่งคงที่สามารถหาความเปลี่ยนแปลงของ $f_o(t)$ ในระบบได้

1.5.1 <u>การเปลี่ยนแปลงในทางเรขาคณิต</u> (Geometric Growth)

กำหนด $f_o(0) = f$ เป็นเวคเตอร์ที่ใส่เข้าไปในช่วงเวลาที่เป็น 0 และ θ เป็นจำนวนที่เป็นค่าบวก พิจารณาเวคเตอร์ที่ใส่เข้าไปในช่วงเวลา t จะได้

$$f_o(t) \quad = \quad \theta^t f, \qquad t \geqslant 0 \tag{1.17}$$

ถ้า $\theta > 1$, การเปลี่ยนแปลงทางเรขาคณิตจะเพิ่มขึ้น

$\theta < 1$, การเปลี่ยนแปลงทางเรขาคณิตจะลดลง

$\theta = 1$, มีค่าคงที่ในแต่ละช่วงเวลา

แทนค่า 1.17 ลงใน 1.3 จะได้

$$S(t) \quad = \quad QS(t-1) + \theta^t f, \qquad t \geq 1$$

ถ้าค่าของ θ มีหลาย ๆ ค่า กำลังคนในแต่ละช่วงเวลาถ้าเริ่มต้นที่ระดับ $S(0)$ จะได้

$$S(1) \quad = \quad QS(0) + \theta f$$

$$S(2) \quad = \quad QS(1) + \theta^2 f$$

$$= \quad Q^2 S(0) + Q\theta f + Q^2 f$$

สมการทั่วไป คือ

$$S(t) \quad = \quad Q^t S(0) + \left(\sum_{j=0}^{t-1} \theta^{t-j} Q^j\right) f \tag{1.18}$$

การเปลี่ยนกำลังคนในระดับต่าง ๆ จะต้องศึกษาจากรูปแบบการจัดองค์การให้ถูกต้อง กำหนดให้ เมตริกซ์ R เหมือนกับเมตริกซ์ Q ซึ่งแต่ละอีเลมเมนต์ถูกหารด้วย θ นั่นคือ $R = Q/\theta$ ซึ่งจะหมายความว่า $\rho > 0$ แต่น้อยกว่า 1 , ถ้า $\theta > \rho$ ทุกอีเลมเมนต์ของเมตริกซ์ R^t จะเข้าใกล้ 0 เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น จะได้

$$R^t \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } t \rightarrow \infty \tag{1.19}$$

เมื่อ 0 เป็น N x N เมตริกซ์ ซึ่งทุกอีเลมเมนต์เท่ากับศูนย์ และ $\theta > \rho$, ส่วนกลับของ (I-R) มีจริงและมีค่าเป็นบวก

$$(I - R)^{-1} \quad = \quad \sum_{t=0}^{\infty} R^t$$

ซึ่งเมตริกซ์นี้มีความสำคัญในรูปแบบของเรา ซึ่งแสดงว่า

$$D(\theta) \quad = \quad (I - R)^{-1}$$

สำหรับ $\theta = 1$, $D(1) = D = (I-Q)^{-1}$

จากการสังเกตพฤติกรรมของ $S(t)$ ซึ่งถูกหารด้วย θ^t และแทน R ด้วย Q/θ จะได้

$$\frac{S(t)}{\theta^t} = R^t S(0) + \left(\sum_{j=0}^{t-1} R^j\right) f \qquad (1.20)$$

ซึ่งแสดงว่า $\sum_{j=0}^{t-1} R^j = (I-R^t)D(\theta)$, เมื่อ $\theta > \rho$ แทนค่าลงใน (1.20)

$$\frac{S(t)}{\theta^t} = D(\theta) + R^t \quad S(0) - D(\theta)f \qquad (1.21)$$

สมการการเปลี่ยนแปลงกำลังคนที่เวลา t ในรูปแบบนี้เป็นประโยชน์มากในการกำหนดพฤติกรรมของ $S(t)$ เมื่อ t เพิ่มขึ้น ซึ่งพฤติกรรมนี้ขึ้นอยู่กับขนาดของ θ , และสามารถพิจารณาใน 4 กรณี

กรณีที่ 1 เมื่อ $\theta > 1$ และ $f_o(t)$ เพิ่มขึ้นโดยปราศจากขอบเขตรูปแบบขององค์การก็ยังคงเปลี่ยนแปลง ในเทอมแรกทางขวามือของ (1.21) มีค่าคงที่ แต่ในเทอมที่สองเปลี่ยนแปลงที่ R^t ถ้า $\theta > 1$, และ $\theta > \rho$, $\rho < 1$ ดังนั้น $R^t \to 0$ และ $t \to \infty$ ด้วย นั่นคือ

$$\frac{S(t)}{\theta^t} \to D(\theta)f,$$

ถ้า t มีค่ามาก เราสามารถประมาณกำลังคน โดย

$$S(t) = \theta^t D(\theta) f \qquad (1.22)$$

อย่างไรก็ตามจาก (1.22) จะสามารถบอกสัดส่วนในแต่ละชั้น i และถ้า $S(t-1)$ เป็นกำลังคนที่ (t-1) นั่นคือ $\theta S(t-1)$ เป็นกำลังคนที่เวลา t ในกำลังคนแต่ละระดับชั้นจะมีค่า θ เป็นตัวคูณและการแจกแจงกำลังคนในแต่ละระดับชั้น ซึ่งผลรวมทั้งหมดคงเท่าเดิม

1.5.2 <u>การเปลี่ยนแปลงในทางคณิตศาสตร์</u> (Arithmetic Growth)

กำหนด f และ G เป็นเวคเตอร์ N (ไม่เป็นลบ) สมมติเวคเตอร์ที่ใส่เข้าไปที่เวลา t คือ

$$f(t) = f + g^t, \ t \geq 0$$

ในแต่ละชั้นกำหนดโดย

$$S(1) = QS(0) + f + g$$

$$S(2) = QS(1) + f + 2g$$

$$= Q^2S(0) + Qf + Qg + f + 2g,$$

สมการทั่วไป

$$S(t) = Q^tS(0) + \sum_{j=0}^{t} jQ^{t-j}g + \sum_{j=0}^{t-1} Q^jf$$

$$= Q^tS(0) + t\sum_{j=0}^{t} Q^jg - \sum_{j=0}^{t} jQ^jg + \sum_{j=0}^{t-1} Q^jf \quad (1.23)$$

จากการศึกษาถึงพฤติกรรมระยะยาวของระบบในเทอมทางขวามือ จะได้ว่า เทอมแรกหมดไปเพราะ t มีค่ามาก ดังนั้น $Q^t \to 0$ ทำให้เข้าใกล้ D_f เทอมที่สามยังคงจำกัดขอบเขต ส่วนเทอมที่สอง เพิ่มขึ้นโดยตรงกับค่า t สำหรับค่า t มีค่ามาก ดังนั้นผลรวมจะประมาณได้เท่ากับ D_g จากเทอมที่สามผลรวมสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{t} jQ^j = \; & Q \\ & + Q^2 + Q^2 \\ & + Q^3 + Q^3 + Q^3 \\ & \quad \vdots \\ & + Q^t + Q^t + \ldots + Q^t,\end{aligned}$$

ผลรวมในแต่ละคอลัมน์ใช้ $\sum_{j=0}^{t-1} Q^j = (I-Q^t)D$, จะได้

$$\sum_{j=0}^{t} jQ^j = Q\left((I-Q^t)D - tQ^{t+1}\right)D$$

เมื่อ t มีค่ามาก จะใกล้เคียงกับ QD^2 ฉะนั้นจาก 1.23 แสดงว่า

$$\lim_{t \to \infty} \left(S(t) - tD_g\right) = D_f - Q\,D^2_g$$

หรือ

$$S(t) \approx D(tg + f - Q\,D_g)$$

แสดงว่า จำนวนคนของระบบในระยะยาวเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรง จำนวนในแต่ละสภาวะ i ถูกกำหนดโดยอีเลมเมนต์ i^{th} ของเวคเตอร์ $D(f - QD_g)$ บวกด้วยเวลา t ที่อีเลมเมนต์ i^{th} ของเวคเตอร์ D_g แสดงให้เห็นว่า $D = (I-Q)^{-1}$ นั่นเอง

1.6 รูปแบบที่ต้องการ

(A REQUIREMENT MODEL)

ในส่วนนี้ รูปแบบของการเคลื่อนที่ของสัดส่วนใช้ประโยชน์ในการกำหนดขั้นตอนของเวคเตอร์ที่ใส่เข้าไป $f_o(t)$ ซึ่งใช้กำหนดขั้นตอนของระดับชั้นที่ต้องการ $S(t)$ ได้อย่างแน่นอน จากที่ผ่านมาเวคเตอร์ที่ใส่เข้าไป $f_o(t)$ ได้ถูกสมมติขึ้นมาเพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมของเวคเตอร์ของเหตุผลในระดับชั้น และถ้าเรากระทำในทางตรงกันข้าม ระยะเวลาในแต่ละช่วงเวลาจะมีดัชนีเป็นศูนย์ และเวคเตอร์ $S(0), S(1), \ldots, S(T)$ ถูกกำหนดให้เป็นโซนของการวางแผน T เวคเตอร์ $f_o(1), \ldots f_o(T)$ ของระดับชั้น จะถูกกำหนดจาก 1.1 เรามี $f_o(t) = S(t) - QS(t-1)$, $t = 1, 2\ldots, T$ เวคเตอร์ที่ใส่เข้าไปจะเกิดได้ต่อเมื่อได้มีการกำหนดขึ้นเท่านั้น ขั้นตอนของขั้นต่าง ๆ$S(1), \ldots, S(T)$ สามารถทำให้สำเร็จได้ด้วยการกำหนดค่าของ $f_o(1), \ldots, f_o(T)$ ที่เป็นไปได้ ถ้า $S(t) \geq QS(t-1)$ สำหรับ $t = 1, \ldots, T$ นั่นคือ $(T \times N)$ จะไม่เสมอภาค ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ ถ้าสมมติว่า ระดับชั้นที่เราต้องการหามีการเปลี่ยนแปลงทางเรขาคณิต จะได้ $S(t) = Q^t S(0)$, $\theta > 0$

$$S(0) \geqslant \frac{Q}{\theta} S(0) \tag{1.24}$$

จาก $R = Q/\theta$ จะเห็นได้จาก 1.24 ว่าไม่ใช่ทั้งหมดของระดับชั้นที่เริ่มต้นที่จะดำเนินตามการกำหนดที่เป็นไปได้ นั่นคือ

$$(I-R)x \geqslant 0; \quad x \geqslant 0 \tag{1.25}$$

ถ้า x เป็นกำลังคนในระดับชั้นเริ่มต้นที่เป็นไปได้ และความต้องการกำลังคนดำเนินในรูปแบบเรขาคณิต มีการเปลี่ยนแปลงในอัตร θ นั่นคือ $\theta' \geqslant 0$

2. รูปแบบในแนวยาว (Longitudinal Models)

รูปแบบ cross- sectional มีโครงสร้างที่ยุ่งยาก เมื่อใช้อธิบายถึงการเคลื่อนที่ของกำลังคน โดยเฉพาะเมื่อการเคลื่อนที่ของสัดส่วนอยู่ในแบบมีความน่าจะเป็น (Probabilistic) มีสมมติฐานทั่วไปว่า การเคลื่อนที่ของกำลังคนจากระดับหนึ่งไปยังระดับอื่น ๆ เป็นอิสระกับเวลา ซึ่งไม่ค่อยถูกต้องกับระบบวางแผนกำลังคนโดยทั่วไป เพราะเวลาในแต่ละระดับชั้นเป็นตัวแปรที่สำคัญในการกำหนดการเลื่อนระดับ (Movement) และการให้กำลังใจ (Promotion)

รูปแบบที่จะศึกษานี้ไม่ต้องการสมมติฐานว่าต้องเป็นอิสระกับเวลา ซึ่งเป็นในรูปแบบทั่ว ๆ ไปมากกว่ารูปแบบ cross - sectional และแสดงให้เห็นถึงการเคลื่อนที่เป็นกลุ่มในระบบกำลังคน รูปแบบจะขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ในอดีตของกลุ่มนั้น

2.1 สมมติฐานของความคงที่ตามแนวยาว

(THE ASSUMPTION OF LONGITUDINAL STABILITY)

สมมติให้องค์การประกอบด้วยกำลังคน N ระดับ การเข้าในระบบของกำลังคนจะเป็นสัดส่วน K ชั้นที่แตกต่างกัน ในแต่ละชั้นเรียกกันต่าง ๆ ไปเช่น ลูกโซ่ (Chain) , หมู่พวก (Coharts), เส้นทาง (Paths) ตัวอย่างเช่น เราสามารถจำแนกจำนวนนักศึกษาที่เข้ามหาวิทยาลัยในแต่ละปีได้ ในกรณี K = 1 นักศึกษาถูกจำแนกถึงสถานะสุดท้าย หมายความว่า กำลังคนที่เข้ามาจะถูกจัดสัดส่วนจนถึงสถานะสุดท้าย แต่ไม่สามารถระบุได้ว่า มาจากชั้นไหนเมื่อเริ่มเข้า

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง จากข้อมูล 20 ปีที่ผ่านมา จากจำนวนนักศึกษาทั้งหมดรับปีละ 600 คน แต่จะสำเร็จการศึกษาหลังจากเรียน 4 ปีแล้วเพียง 200 คน แต่ไม่สามารถระบุได้ว่านักศึกษาที่รับมาใหม่นั้นอยู่ในจำพวกไหน

กำหนดให้ g(t) เป็นเวคเตอร์ K ซึ่งแทนกำลังคนที่เข้ามาในช่วงเวลา t , ดังนั้น $g_K(t)$ ซึ่งเข้าไปในลูกโซ่ k จากจำนวนกำลังคนที่มีอยู่ในชั้น i ที่เวลา t ขึ้นอยู่กับจำนวนที่ใส่เข้าไปในลูกโซ่ k = 1, 2, ...,K ในช่วงเวลา t, t-1, ..., t-m กำหนด $S_i(t; u)$ เป็นจำนวนทั้งหมดในชั้น i ที่เวลา t ซึ่งเข้าไปในช่วงเวลา (t-u) จะเห็นได้ว่า ในกลุ่มนี้มีระยะเวลาการทำงานเท่ากับ u ถ้ามีการนับที่เวลา t-u, t-u+1, ..., t-1 เมื่อ u = 0 เวลาการทำงานก็เป็น 0 ด้วย

ค่าของ $S_i(t;u)$ ถูกกำหนดจากลูกโซ่ k คือ

$$S_i(t;u) = \sum_{k=1}^{K} P_i i(u) g_k(t-u) \qquad (2.1)$$

จำนวนที่มีอยู่ในชั้น i ที่เวลา t จะเท่ากับ

$$S_i(t) = \sum_{u=0}^{M} S_i(t;u) = \sum_{u=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} P_{ik}(u) g_k(t-u) \qquad (2.2)$$

เราสามารถจัดสัดส่วนบุคคลในชั้น i โดยลูกโซ่ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ กำหนด $S_{ik}(t)$ เป็นจำนวนบุคคลในชั้น i ซึ่งอยู่บนลูกโซ่ k จะได้ว่า

$$S_{ik}(t) = \sum_{u=0}^{M} P_{ik}(u) g_k(t-u), \qquad (2.3)$$

จากสมการ (2.2) เป็นรูปแบบของการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง ถ้าอยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$S(t) = P(o)g(t) + P(1)g(t-1)+\ldots+P(M)g(t-M)$$

ถ้าในช่วงเวลา t สำหรับ $t \leq 0$ จะเป็นช่วงเวลาในอดีต, ช่วงเวลา $t > 1$ เป็นช่วงเวลาในอนาคต และถ้า $t = 1$ จะเป็นช่วงเวลาปัจจุบัน เราสามารถกำหนดกำลังคนที่เวลา $t \geq 1$ ให้เป็นส่วนที่เข้าไปเมื่ออดีต $g(0), g(-1), \ldots, g(1-M)$ ไปยังจำนวนที่มีอยู่ในอนาคต t ให้ $L(t)$ เป็นเวลาที่ยังมีอยู่ที่ t ดังนั้น

$$L(t) = \begin{cases} P(t)g(0) + P(t+1)\,g(-1) + \ldots + P(M)g(t-M), & t \leq M \\ 0 & , t > M \end{cases}$$

ปกติแล้ว จำนวนที่มีอยู่จะเป็นขั้นตอนของระดับกำลังคน ซึ่งสามารถสังเกตุได้ถ้าไม่มีการเพิ่มจำนวนบุคคลเข้าไปในระบบ เช่น $g(t) = 0$ สำหรับ $t \geq 1$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> พิจารณาวิทยาลัยชั้นต้น เรียน 2 ปี ซึ่งมี 2 ระดับ คือระดับเข้าใหม่ (F) และนักศึกษาปี 2(S) กำหนด G เป็นพวกสำเร็จการศึกษา D เป็นพวกสอบตก สมมติว่ามีลูกโซ่ 7 แบบที่เป็นไปได้

ลูกโซ่	1	2	3	4	5	6	7
กลุ่ม	FSG	FFSG	FSSG	FD	FFD	FSD	FFSD

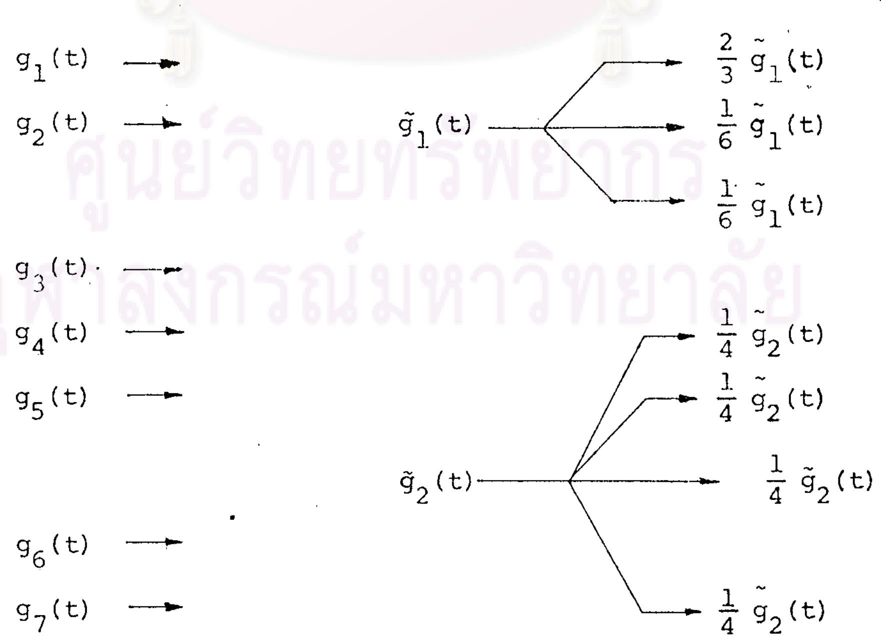
นั่นคือ N = 2, K = 7 บุคคล 1 ถึง 3 ได้รับปริญญา ตั้งแต่ 4 ถึง 7 สอบตก บุคคลในกลุ่ม 3 เรียนซ้ำชั้นก่อสำเร็จ เมตริกซ์ P(0) , P(1) และ P(2) คือ

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccccccc} \text{ลูกโซ่}\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
P(0) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
P(1) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
P(2) & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

เมตริกซ์ P(u) , u $\geqslant$ 3 เป็นเมตริกซ์มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด

จากตัวอย่างจะไม่สามารถทราบได้ว่า นักศึกษาจะอยู่ในแบบใดทั้ง 7 แบบ แต่เราสามารถใช้เป็นข้อมูลในการกำหนดต่อไปได้

ตัวอย่างที่ 3 ถ้ากำหนดการเคลื่อนที่ในลูกโซ่ 1 , 2 , 3 เป็นลูกโซ่รวมที่ 1 และการเคลื่อนที่ในลูกโซ่ 4, 5, 6, 7 เป็นลูกโซ่รวมที่ 2 สมมติให้ $\frac{2}{3}$ ของการเคลื่อนที่อยู่ในเส้นทางเดิมที่ 1 และ $\frac{1}{6}$ ของการเคลื่อนที่อยู่ในเส้นทางเดิมที่ 2 และ 3 และ $\frac{1}{4}$ ของการเคลื่อนที่จะอยู่ในเส้นทาง 4,5 ,6 , 7 แทนค่าลงในระบบ จะได้



จากการรวมกันนี้ จะได้ค่าใหม่ของ P คือ

$$P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \; P(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} ; \; P(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> พิจารณาจากการศึกษาระดับปริญญาตรี 4 ปี ซึ่งมีทั้งผู้สำเร็จการศึกษาและไม่สำเร็จการศึกษา และสมมติว่ามีลูกโซ่อยู่ 4 แบบ ในแต่ละแบบ หมายถึง จำนวนปีเฉลี่ยที่จำนวนคนในแต่ละแบบต้องศึกษาอยู่

ลูกโซ่	1	2	3	4
จำนวนปีที่ศึกษา	4.5	2.3	2.2	0.8

ถ้าจำนวน M = 4, สร้างเมตริกซ์ P ได้

$$\begin{array}{cc} \text{ลูกโซ่} & \begin{array}{cccc} 1 & \;\;2 & \;\;3 & \;\;4 \end{array} \\ P(0) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \\ P(1) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P(2) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P(3) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P(4) = & \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

การเลือกเมตริกซ์นั้น กำหนดเองตามขอบเขต ส่วนรายละเอียดของรูปแบบนั้นจำเป็นจะต้องให้ค่าของ P(v) ถูกต้อง สมมติว่า การเคลื่อนที่ของกำลังคนไปในแต่ละแบบที่อัตราคงที่ และนั่นคือคนในลูกโซ่ที่ 2 ยังคงอยู่ในช่วงเวลา 2.3 ปีจึงจะเป็นรูปแบบที่ถูกต้อง

ถ้าการเคลื่อนที่เข้าในแต่ละลูกโซ่วันที่15 กันยายนของแต่ละปีและการคงคลังวันที่ 1

พฤศจิกายน รูปแบบที่ถูกต้องคือ ทุก ๆ คนในลูกโซ่ที่ 2 จะต้องอยู่มากกว่า 13.5 เดือน, ร้อยละ 30 อยู่มากกว่า 25.5 เดือน, และไม่มีอยู่เลย 37.5 เดือนจึงจะได้ค่าเฉลี่ย 2.3 ปี หรือถ้าร้อยละ 90 อยู่มากกว่า 1.5เดือน ร้อยละ 60 อยู่มากกว่า 13,5 เดือน, ร้อยละ 50 อยู่มากกว่า 25.5 เดือน ร้อยละ 30 อยู่มากกว่า 37.5 เดือน และไม่มีใครอยู่เลยมากกว่า 49.5 เดือน, จำนวนปีที่คาดหมายก็ยังคงเท่ากับ 2.3 สัดส่วนของ $P_{22}(u)$ เปลี่ยนแปลงดังนี้

สัดส่วน $P_{22}(u)$

u	0	1	2	3	4
เก่า	1.0	1.0	0.3	0	0
ใหม่	0.9	0.6	0.5	0.3	0

<u>ตัวอย่างรูปแบบของการพยากรณ์การลงทะเบียนของนักศึกษา</u> (A Student - Enrollment Forecasting Model)

ตัวอย่างนี้ เป็นการแสดงให้เห็นถึงการเคลื่อนไหวของข้อมูลสำหรับนักศึกษาที่เข้าเรียนระดับปริญญาตรี ซึ่งหลังจากวิเคราะห์ข้อมูลแล้ว จะเห็นได้ว่า มีพฤติกรรมต่าง ๆ ที่ไม่สามารถให้เหตุผลได้ชัดเจน กำหนด FXX หมายถึง ฤดูฝนที่ปี XX, F69 หมายถึง ฤดูฝนในปี 1969 และสมมติว่ากำหนดให้กำลังคนมี 4 ระดับ ได้แก่ พวกเข้าใหม่, นักศึกษาปัจจุบัน, รุ่นน้อง, รุ่นพี่ ช่วงเวลา 1 ปี ตามข้อมูลในตารางและกำลังคนรวมถึงนักศึกษาที่เข้าในภาคอื่น ๆ ในปีนั้นด้วย

ตารางที่ 3.1

จำนวนนักศึกษาที่ลงทะเบียน f(t)

ชั้น	F63	F64	F65	F66	F67	F68	F69
นศ.ปี 1	1883	2239	3303	3053	2579	3427	3620
นศ.ปี 2	258	542	843	733	390	602	728
นศ.ปี 3	817	1366	1662	1418	1042	1442	1569
นศ.ปี 4	48	124	175	205	125	202	199

ตารางที่ 3.2

แสดง เมตริกซ์ P(u) จำนวน 6 ปี

$$
0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
1 \quad \begin{bmatrix} .254 & & & \\ .584 & .118 & & \\ .009 & .622 & .265 & \\ & .039 & .493 & .395 \end{bmatrix}
$$

$$
2 \quad \begin{bmatrix} .012 & & & \\ .210 & .013 & & \\ .454 & .189 & .138 & \\ .009 & .337 & .192 & .046 \end{bmatrix}
$$

$$
3 \quad \begin{bmatrix} .007 & & & \\ .027 & .003 & & \\ .281 & .022 & .033 & \\ .318 & .130 & .042 & .029 \end{bmatrix}
$$

$$
4 \quad \begin{bmatrix} .004 & & & \\ .008 & .003 & & \\ .033 & .005 & .005 & \\ .152 & .031 & .008 & .016 \end{bmatrix}
$$

$$
5 \quad \begin{bmatrix} .003 & & & \\ .003 & & & \\ .009 & .004 & .001 & \\ .031 & .010 & .003 & .015 \end{bmatrix}
$$

$$
6 \begin{pmatrix} .003 & & & \\ .003 & & & \\ .004 & .001 & .001 & \\ .015 & .007 & .003 & 0 \end{pmatrix}
$$

จากข้อมูลในตารางที่ 3.2 เราสามารถคำนวณหากำลังคนที่ F69 และถ่ายทอดจาก F63 -69 เข้าไปสู่ F70 - F74 ได้ ผลลัพธ์ในตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3

การถ่ายทอดเข้าไปสู่ F69

ชั้น	F69	F70	F71	F72	F73	F74	F75
นศ.ปี 1	4570	1010	96	55	32	21	11
นศ.ปี 2	3470	3040	906	147	50	22	12
นศ.ปี 3	4780	3668	3120	1200	176	52	18
นศ.ปี 4	3160	2980	2410	2020	753	187	64

ระดับที่ยอมรับสภาวะคงที่ สามารถหาได้จาก $S = L_g$ ซึ่ง

$$
L = \begin{pmatrix} 1.283 & 0 & 0 & 0 \\ 0.835 & 1.137 & 0 & 0 \\ 0.790 & 0.842 & 1.413 & 0 \\ 0.525 & 0.554 & 0.741 & 1.501 \end{pmatrix}
$$

ถ้าเราจะคิดระดับกำลังคนในเข้าใหม่ในภาคฤดูฝนเป็นค่าคงที่ เราสามารถคำนวณหาค่า F70 - F74ได้โดยคงระดับที่ F69 ไว้ ดังแสดงในตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.4

กำลังคนในอนาคตโดยคงระดับที่ F 69

ชั้น	F70	F71	F72	F73	สภาวะคงที่
นศ.ปีที่ 1	3560	3570	3569	3560	3560
นศ.ปีที่ 2	431	437	439	439	440
นศ.ปีที่ 3	1110	1060	1140	1130	1130
นศ.ปีที่ 4	183	118	160	140	143

ในกรณีจะให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ควรมีข้อมูลกำลังคนในแต่ละภาคการศึกษา ไม่ควรคิดรวมทั้งปี

3. การสังเคราะห์รูปแบบในแนวตรงข้ามและในแนวเส้นตรง

(SYNTHESIS OF CROSS-SECTIONAL AND LONGITUDINAL MODELS)

บทนำ

จากการวิเคราะห์รูปแบบทั้งสองแบบที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่า รูปแบบในแนวเส้นตรงมีขบวนการการเคลื่อนที่ที่เป็นแบบทั่ว ๆ ไป ในขณะที่รูปแบบในแนวตรงข้ามเป็นกรณีพิเศษมากกว่า แต่ความต้องการข้อมูลในอดีตนั้น รูปแบบในแนวเส้นตรงต้องการมากกว่า ฉะนั้น ควรจะมีการปรับปรุงระหว่างรูปแบบทั้งสองให้เหมาะสมต่อไป

3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบในแนวตรงข้ามและในแนวเส้นตรง

(Relation Between Cross-Sectional and Longitudinal Models)

จากรูปแบบในแนวเส้นตรง การเคลื่อนที่เข้าไปบนลูกโซ่ที่ 1 ถึง K ในช่วงเวลา t ถูกกำหนดโดยเวคเตอร์ g(t), และจำนวนที่มากที่สุดของช่วงเวลาที่ใช้ในระบบเท่ากับ (M+1) ฉะนั้นเราสามารถจัดระดับการรวมหมวดหมู่ของชนิดลูกโซ่และช่วงเวลาที่เข้ามาได้ จะได้ K X(M+1) ระดับ กำหนดให้กำลังคนที่มีอยู่ที่เวลา t เท่ากับ K x (M+1) ของลูกโซ่ที่เคลื่อนที่เข้าไปในอดีต

9(t), g(g=1), ..., g(t-M) , และ Q เป็นสแควร์เมตริกซ์ K X (M+1) ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นเมตริกซ์ในแนวทะแยงที่ต่ำกว่าระดับ K^{th} มีค่าเป็น 1 ถ้า 0 คือเมตริกซ์ K X K ซึ่งมี

ค่าเป็นศูนย์ และ I คือเมตริกซ์เฉพาะ (Identity Matrix) K X K, สำหรับ M = 3

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

ถ้า f(t) เป็นเวคเตอร์ K X (M+1) ซึ่งมีอีเลมเมนต์แรกของ K เป็น g(t) และที่เหลือมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$S(t+1) = QS(t) + f(t+1)$$

จากรูปแบบในแนวตรงข้าม ถ้านำมาจัดรูปแบบใหม่ในแนวเส้นตรงโดยทั่วไป จะได้ว่า P(0) เป็นเมตริกซ์ N X K และ P(U+1) = QP(U) ,ซึ่ง Q เป็นเมตริกซ์ N X N ฉะนั้น P(U+1) = $Q^{U+1}P(0)$ สำหรับทุกค่าของ u , จะได้

$$S(t) = P(0)\ g(t) + Q \sum_{U=1}^{\infty} Q^{U-1}P(0)\ g(t-U)$$

$$QS(t-1) + P(0)g(t) \qquad (3.1)$$

นั่นคือ รูปแบบในแนวตรงข้าม ซึ่ง f(t) = P(0)g(t) และในทางตรงกันข้าม เหตุผลนี้เป็นความจริงด้วย ถ้า S(t) - P(0)g(t) = QS(t-1) สำหรับทุกค่าของ g(t-u) , u 1 จะได้P(U+1) = $Q^{U+1}P(0)$ โดยปรับ g(t-U) = 0, ยกเว้นเมื่อ u = k ดังนั้น S(t-k) = P(0)g(t-k) และ S(t) = P(k)g(t-k) = $Q^{k}P(0)g(t-k)$ ถ้า g(t-k) กำหนดขึ้นเองจะได้ P(k) = $Q^{k}P(0)$ จากที่กล่าวมาแล้ว จะเห็นได้ว่า รูปแบบในแนวตรงข้ามและรูปแบบในแนวเส้นตรงเหมือนกันทุกอย่าง ถ้า f(t) = P(0)g(t) และ P(U+1) = $Q^{U+1}P(0)$ สำหรับทุกค่าของ $u \geqslant 0$

3.2 การเคลื่อนที่กึ่งรูปแบบมาร์คอฟ (Semi-Markov Flow Models)

พิจารณาระบบซึ่งมีกำลังคน N ระดับ เมื่อแต่ละคนเข้าไปในระดับ i ให้ $q_{ji}(u)$ เป็นความน่าจะเป็นที่จะเข้าไปในระดับ i หลังจากช่วงเวลา u และมีการเปลี่ยนแปลงให้สำเร็จไปสู่สภาวะ j ที่ระดับ 0 ถือว่าอยู่นอกระบบ จะเข้าในระบบได้ถือว่าต้องมีระยะเวลาอย่างน้อย 1 ช่วงเวลา, $q_{ji}(0) = 0$

ความน่าจะเป็น $q_{ji}(u)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, $u = 1, 2, \ldots,$ ได้ถูกกำหนดเพื่อเป็นข้อมูลเบื้องต้นและสามารถคำนวณหาปริมาณได้ดังนี้

3.2.1 ความน่าจะเป็นที่ระดับ j จะปฏิบัติตามระดับได้ คือ

$$q_{ji} = \sum_{u=1}^{\infty} q_{ji}(u)$$

3.2.2 ระยะเวลาที่คาดหมายที่จะไปที่ระดับ i , ถ้า j เป็นระดับต่อไปที่จะเข้าไป คือ

$$u_{ji} = \sum_{u=1}^{\infty} u \frac{q_{ji}(u)}{q_{ji}}$$

3.2.3 ระยะเวลาคาดหมายที่จะเข้าไปในระดับ i คือ

$$u_i = \sum_{j=0}^{N} u_{ji} q_{ji}$$

3.2.4 ความน่าจะเป็นในการใช้มากกว่า u ช่วงเวลาในระดับ i คือ

$$l_i(u) = \sum_{v=u+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N} q_{ji}(v)$$

3.2.5 ความแปรปรวนในช่วงที่จะเข้าไประดับ i, ถ้าระดับต่อไปคือระดับ j คือ

$$\sigma^2_{ji} = \sum_{u=1}^{\infty} (u-u_{ji})^2 \frac{q_{ji}(u)}{q_{ji}}$$

3.2.6 ความแปรปรวนในช่วงที่จะเข้าไประดับ i คือ

$$\sigma^2_i = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N} (u-u_i)^2 q_{ji}(u)$$

3.3 <u>การเปรียบเทียบทางทฤษฎี</u>

เราสมมติให้รูปแบบในแนวเส้นตรงเป็นการจัดรายละเอียดการเคลื่อนที่ได้อย่างสมบูรณ์ และจะประมาณรูปแบบในแนวเส้นตรงด้วยรูปแบบในแนวตรงข้าม ซึ่งการประมาณที่แท้จริงขึ้นอยู่กับเวลาและการเคลื่อนที่เข้าในอดีต และข้อมูลบางอย่างซึ่งไม่มีในรูปแบบในแนวเส้นตรง

จาก S(t) คือ เวคเตอร์ที่มีมิติอย่างสุ่ม N , และ $S_i(t)$ เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีกำลังคนในระดับ i ที่เวลา t กำลังคนที่คาดหมายในแต่ละระดับถูกกำหนดโดยอีเลมเมนต์ของ S(t) = $E\left[S(t)\right]$ สำหรับรูปแบบในแนวตรงข้าม ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไขของ S(t+1) หาได้จากสมการ 2.1 ซึ่งจะได้ทั้งกำลังคน S(t) ที่เวลา t และค่าคาดหมายที่เคลื่อนที่เข้าไปของ $f_o(t+1)$ ในช่วงเวลา (t+1) กำหนดตัวย่อ c หมายถึง รูปแบบในแนวตรงข้าม ดังนั้น

$$E^c\left[S(t+1)/S(t) = x\right] = Q(t)x + f_o(t+1) \qquad (3.2)$$

นั่นคือ Q(t) จะชี้บ่งว่า เมตริกซ์ของความเปลี่ยนแปลงอาจจะไม่คงที่จากช่วงเวลาหนึ่งไปยังอีกช่วงเวลาหนึ่ง รูปแบบในแนวเส้นตรงเบื้องต้น จะให้ค่าคาดหมายที่ไม่มีเงื่อนไขของ S(t+1) คือ

$$E\left[S(t+1)\right] = \sum_{u=0}^{\infty} P(u)g(t-1-u) \qquad (3.3)$$

การเปรียบเทียบระหว่างรูปแบบในแนวเส้นตรงและในแนวตรงข้าม จะได้จากค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไขของ E^{ℓ} S(t+1)/S(t) = x) ,ซึ่งตัวย่อ ℓ หมายถึง รูปแบบในแนวเส้นตรง ในการคาดหมายนี้ ต้องมีสมมติฐานขึ้นอยู่กับพฤติกรรมแต่ละบุคคลและเหตุผลบางอย่างของทฤษฎีความน่าจะเป็น รูปแบบในแนวเส้นตรงกำหนดว่า แต่ละบุคคลในระบบทำตามกฎทางสโตคาสติค ซึ่งขึ้นในแต่ละลูกโซ่เท่านั้นตามเวลาที่ดำเนินไป แต่ละบุคคลที่เข้าไปในระบบ จะกำหนดเป็นตัวแปรสุ่มที่นับได้ คือ

$$Z^{(j)}_{i,k}(t-u,t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าแต่ละคนที่ } j \text{ เข้าไปที่ลูกโซ่ } k \text{ ในช่วง} \\ & \text{เวลา}(t-u)\text{ไปอยู่ในระดับ } i \text{ ที่เวลา } t \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ถ้า $g_k(u)$ เป็นจำนวนกำลังคนทั้งหมดที่เข้าไปในลูกโซ่ k ในช่วงเวลา u ฉะนั้นกำลังคนที่มีอยู่ในระดับ i ที่เวลา t เป็นตัวแปรสุ่ม

$$S_i(t) = \sum_{k=1}^{k} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{g_k(t-u)} Z^{(j)}_{i,k}(t-u,t) \qquad (3.4)$$

ทฤษฎีเข้าสู่ศูนย์กลางภายใต้สมมติฐาน $S_i(t)$ ประมาณเป็นการแจกแจงแบบปกติรวมทั้งเวคเตอร์ N (S(t))และเวคเตอร์ 2N $\left[S(t), S(t+1)\right]$ มีการแจกแจงแบบปกติด้วย กำหนดให้ B และ C ซึ่งมีอีเลมเมนต์ (i, j) เท่ากับ b_{ij} และ c_{ij} ซึ่งเป็นเมตริกซ์โคแวเรียนซ์(Covariance

I16811331

Matrix) N X N, $b_{ij} = c_{ov}\left[S_i(t),\ S_j(t)\right]$, $c_{ij} = c_{ov}\left[S_j(t),\ S_i(t+1)\right]$

จากทฤษฎีการแจกแจงแบบปกติ สามารถรวมความคาดหมายแบบมีเงื่อนไขได้เป็น

$$
\begin{aligned}
E^{\ell}\left[S(t+1)/S(t) = x\right] &= c(t)B^{-1}(t)x + P(0)g(t+1) + \\
&\quad + \{S(t+1) - \left[c(t)B^{-1}(t)S(t)\right. \\
&\quad \left. + P(0)g(t+1)\right]\} \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

ถ้านำสมการ (3.5) เปรียบเทียบกับสมการ (3.2) จะได้

$$E^{\ell}\left[S(t+1)/S(t) = x\right] = S(t+1) + c(t)B^{-1}(t)\left[x-S(t)\right],$$

ถ้า $x = S(t)$ การพยากรณ์จะลดลงมาที่ $S(t+1)$ และก่อนจะเปรียบเทียบการพยากรณ์จาก (3.2) และ (3.5) เราจำเป็นต้องวิเคราะห์เมตริกซ์โคแวเรียนซ์ $B(t)$ และ $c(t)$ ก่อน โดยใช้นิยามของโคแวเรียนซ์ใน (3.4) จะได้

$$b_{ii}(t) = S_i(t) - \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k} P_{ik}^2(u)g_k(t-u),$$

$$b_{ij}(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k} P_{jk}(u)P_{ik}(u)g_k(t-u), \text{ เมื่อ } i \neq j$$

กำหนด $M(t)$ เป็นเมตริกซ์ N X N ซึ่งค่านอกเหนือแนวเส้นทะแยงมุมเท่ากับศูนย์ และ $m_{ii}(t) = S_i(t)$ และกำหนดเมตริกซ์ K X K ใกล้เคียงกับ $G(t-u)$ แต่ถ้า $g_{ii}(t-u) = g_i(t-u)$ เมตริกซ์ $B(t)$ จะเขียนได้เป็น

$$B(t) = M(t) - \sum_{u=0}^{\infty} P(u)G(t-u)P'(u) \qquad (3.6)$$

เครื่องหมาย (') คือ เมตริกซ์ที่มีการย้าย

เมื่อ $c_{ij}(t)$ เป็นเทอมโคแวเรียนซ์ระหว่างกำลังคนในระดับ i ที่เวลา t และกำลังคนในระดับ j ที่ (t+1) ซึ่งต้องรู้ถึงการแจกแจงร่วมของกำลังคนทั้งที่ t และ (t+1)

$$f_{ij}^{k}(u) = \text{Prob}\left\{\begin{array}{ll} \text{ที่ระดับ } i \text{ ที่เวลา } t & \text{เข้าสู่ลูกโซ่}k\text{ในช่วงเวลา} \\ \text{ที่ระดับ } j \text{ ที่เวลา} t+1 & (t+1-u) \end{array}\right\}$$

ถ้า $f_{ij}(t+1)$ เป็นค่าคาดหมายของการเคลื่อนที่จากระดับ i ไปยังระดับ j ในช่วงเวลา (t+1) จะได้

$$f_{ij}(t+1) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k} f_{ij}^{k}(u+1) g_k(t-u)$$

จากสมการ 3.4 และนิยามของโควาเรียนซ์ จะได้ว่า

$$c(t) = F'(t+1) - \sum_{u=0}^{\infty} P'(u+1)G(t-u)P(u) \qquad (3.7)$$

ซึ่ง $F(t+1)$ เป็นเมตริกซ์ $N \times N$ ของค่าคาดหมายการเคลื่อนที่ $f_{ij}(t+1)$ จาก $q_{ji}(t)$ เป็นสัดส่วนของแต่ละบุคคลในระดับ i ที่เวลา t ซึ่งเคลื่อนที่ไปสู่ระดับ j ที่เวลา $t+1$ จะได้ว่า

$$q_{ji}(t) = \frac{f_{ij}(t+1)}{S_i(t)} \qquad (3.8)$$

หรือในรูปของเมตริกซ์

$$Q(t) = F'(t+1)\, M^{-1}(t)$$

ถ้ากำลังคนในระดับ j ที่เวลา $(t+1)$ ได้มาจากผลรวมของการเคลื่อนที่ทั้งหมดที่เวลานั้น จะได้ว่า

$$S_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} f_{ij}(t+1) + f_{oj}(t+1)$$

ในรูปของเมตริกซ์ จะได้

$$S(t+1) = Q(t)S(t) + P(0)g(t+1) \qquad (3.9)$$

เอาสมการ 3.5 ลบจาก 3.2 แล้วแทนลงใน 3.9 จะได้

$$E^{c}\left[S(1+1)/S(t) = x\right] - E^{\ell}\left[S(t+1)/S(t) = x\right]$$
$$= \left[c(t)B^{-1}(t) - Q(t)\right]\left[S(t) - x\right] \qquad (3.10)$$

จากการใช้รูปแบบในแนวตรงข้ามแทนรูปแบบในแนวเส้นตรงจะมีค่าผิดพลาดในการพยากรณ์ในหนึ่งช่วงเวลา ถ้าเราใช้การคาดหมายด้วย $S(t)$ จะได้ค่าเฉลี่ยจากการคาดหมายผิดพลาดเป็นศูนย์ในทุก ๆ ระดับ ในการที่จะทราบว่า ความคลาดเคลื่อนระหว่างรูปแบบทั้งสองมีมากเท่าใดนั้น จะต้องรู้ขนาดของกำลังคนที่เข้าไปในเมตริก $\left[c(t)B^{-1}(t) - Q(t)\right]$ ด้วยนั่นคือ

$$D(t) = \sum_{u=0}^{\infty} P'(u+1)G(t-u)P(u)$$

และ

$$H(t) = \sum_{u=0}^{\infty} P(u)G(t-u)P'(u)$$

จากสมการ 3.6 และ 3.7 จะได้

$$B(t) = M(t) - H(t)$$

และ

$$c(t) = F'(t+1) - D(t)$$

จากสมการดังกล่าวนี้รวมกับสมการที่ (2.8) จะได้

$$c(t)B^{-1}(t) - Q(t) = \left[Q(t)H(t) - D(t) \right] B^{-1}(t)$$

4. รูปแบบที่เหมาะสมที่สุด

(OPTIMIZATION MODELS)

คำนำ

รูปแบบที่เหมาะสมที่สุดที่จะได้กล่าวต่อไปนี้ขึ้นอยู่กับขบวนการการเคลื่อนที่ของกำลังคนดังที่ได้กล่าวมาแล้ว รูปแบบกำลังคนที่สำคัญที่สุดขึ้นอยู่ระยะเวลาเพื่อการตัดสินใจและความไม่แน่นอนของความต้องการกำลังคนในอนาคต ซึ่งในส่วนนี้จะต้องหาปัญหาที่เกิดขึ้นจริง ๆ และใช้เทคนิคการประมาณค่าเพื่อหากำลังคนที่เป็นไปได้จามนโยบายที่กำหนด ผู้ที่จะทำการประมาณค่าจะนำข้อมูล และสมมติฐานที่มีอยู่ใส่เข้าไปในรูปแบบเพื่อหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด ข้อมูลต่าง ๆ จะต้องตั้งสมมติฐานและนโยบายของกำลังคนในอนาคต ซึ่งประกอบด้วย แผนงาน, ความต้องการกำลังในอนาคต, สถานะเงินทุน, ค่าใช้จ่าย, และแฟคเตอร์ต่าง ๆที่เกี่ยวข้อง

4.1 การทำงานในระยะยาวที่ดีที่สุด

(Optimal Long Term Operation)

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงรูปแบบการวางแผนกำลังคนในระยะยาว (Long Range Planning) และการรวมการวางแผนระยะสั้นและระยะยาวเข้าด้วยกัน รูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Model) ถูกนำมาใช้และการเคลื่อนที่ของกำลังคนเข้าในระบบเป็นตัวแปรในการตัดสินใจ เพื่อหาค่าใช้จ่ายที่ต่ำสุด และรูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้นยังเป็นเครื่องมือสำหรับหาความสอดคล้องระหว่างระบบที่มีอยู่และทางเลือกของนโยบายต่าง ๆ ด้วย ดังนั้นจึงต้องมีสมมติฐานเกิดขึ้น ซึ่งได้แก่

4.1.1 ขบวนการการเคลื่อนที่ของกำลังคนจะต้องอธิบายในรูปแบบใน

แนวยาว (Longitudinal Model)

4.1.2 ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนแปลงของการทำงานในระบบเป็นสัดส่วนกับกำลังคนที่มีอยู่และการเคลื่อนที่

4.1.3 กำลังคนในระบบจะต้องคงที่

4.1.4 ค่าใช้จ่ายในอนาคตลดลงที่อัตรา $\alpha < 1$

4.1.5 เงื่อนไขของการเคลื่อนที่และกำลังคนที่มีอยู่เป็นชนิดเดียวกัน

สมการพื้นฐานของการเคลื่อนที่ในแนวยาวให้กำลังคนที่เวลา t:

$$S(t) = \sum_{j=1}^{t} P(t-j)g(j) + \ell(t), \tag{4.2}$$

ซึ่ง $\ell(t)$ เป็นผลลัพธ์ของการตัดสินใจก่อนช่วงเวลาที่ 1 ขนาดของระบบกำลังคน คือ $\sum_{i=1}^{N} S_i(t) = es(t)$ ถ้าสมมติว่า $es(0) = \rho$, จะได้ข้อจำกัดที่มีขนาดคงที่ คือ

$$\sum_{j=1}^{t} P(t-j) = \rho - e\ell(t), \quad t \geqslant 1 \tag{4.3}$$

ข้อจำกัดซึ่งเหมือนกันในระดับกำลังคนที่มีอยู่ คือ

$$AS(t) \geqslant 0, \quad t \geqslant 1 \tag{4.4}$$

ซึ่งถ้า 4.4 แทนค่าด้วย 4.2 จะได้

$$A \sum_{j=1}^{t} P(t-j) \geqslant - A\ell(t), \quad t \geqslant 1 \tag{4.5}$$

ข้อจำกัดของเงื่อนไขที่เหมือนกัน (4.4) จะไม่ยุ่งยากนักในช่วงแรก ซึ่งเงื่อนไขของการเคลื่อนที่ได้แก่

$$B_g(t) \geqslant 0, \quad g(t) \geqslant 0, \text{ สำหรับ } t \geqslant 1 \tag{4.6}$$

กำหนดเวคเตอร์ N, $a = (a_1, \ldots, a_N)$ และเวคเตอร์ K, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_K)$ เป็นค่าใช้จ่ายของกำลังคนและการเคลื่อนที่ในแต่ละช่วงเวลามูลค่าปัจจุบันของค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t คือ

$$\alpha^t \quad as(t) + b_g(t)$$

ค่าใช้จ่ายทั้งหมดของการทำงานของระบบในอนาคตที่ไม่แน่นอน คือ

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t} \quad as(t) + bg(t) \qquad (4.7)$$

ซึ่งต้องใช้ 4.2 กำจัด S(t) จากสมการนี้ แต่จำเป็นต้องมีสมการที่เกี่ยวข้อง คือ

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t} \left(\sum_{j=1}^{t} P(t-j)g(j) \right) = \left(\sum_{u=0}^{\infty} \alpha^{u} P(u) \right) \sum_{t=1}^{\infty} g(t) \qquad (4.8)$$

เราสามารถบรรยายผลรวมเบื้องต้นจาก (4.8) ในรูปแบบคล้ายรูปสามเหลี่ยม (Traingular Form)

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ P(0)\ g(1) \right\} \\ + & \alpha^{2} \left\{ P(1)\ g(1) + P(0)\ g(2) \right\} \\ + & \alpha^{3} \left\{ P(2)\ g(1) + P(1)\ g(2) + P(0)\ g(3) \right\} \\ + & \alpha^{4} \left\{ P(3)\ g(1) + P(2)\ g(2) + P(1)\ g(3) \right\} + P(0)\ g(4) \end{aligned}$$

นำผลรวมในแนวนอนจากรูปแบบนี้ใส่ไว้ทางซ้ายมือของสมการ (4.8) และผลรวมในแนวตั้งใส่ไว้ทางขวามือของสมการ (4.8) แล้วกำหนดให้

$$\tilde{P}(\alpha) = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^{u} P(u)$$

ใช้เหตุผลนี้ไปรวมกับสมการ (4.2) และ (4.6) จะได้

$$\sum_{t=0}^{\infty} a^{t} \left(as(t) + bg(t) \right) = C \sum_{t=1}^{\infty} \ell^{t}\, g(t) + a\tilde{\ell}(\alpha) \qquad (4.9)$$

$$\text{ซึ่ง} \qquad C = a\tilde{P}(\alpha) + b \text{ และ } \tilde{\ell}(\alpha) = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t} \ell(t)$$

ปัญหาของการเลือกเวคเตอร์ที่เคลื่อนที่เข้าที่เหมาะสมที่สุด g(1), g(2), ..., g(t), ... สามารถแก้ปัญหาจากสมการที่ (4.3), (4.5), (4.6) และ (4.9)

$$\text{Minimize } C \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t} g(t),$$

$$\text{ขึ้นอยู่กับ} \qquad e \sum_{j=1}^{t} P(t-j)\ g(j) = \rho - e\ell(t),$$

$$A \sum_{j=1}^{t} P(t-j)\ g(j) \geqslant -A\ell(t), \qquad (4.10)$$

$$B_g(t) \geqslant 0,\ g(t) \geqslant 0, \text{สำหรับ}\ \ t \geqslant 1$$

โปรแกรมเชิงเส้น (4.10) มีจำนวนเงื่อนไขและตัวแปรที่ไม่จำกัด และคำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบจากการประมาณที่เหมาะสมที่สุดเท่านั้น

เราได้รับโปรแกรมเชิงเส้น (4.11) จาก (4.10) โดยคูณจำพวกของเงื่อนไข t^{TH} ด้วย α^t และรวมผล จาก (4.8) จะได้

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t P(t-j)\ g(j) = \tilde{P}(\alpha) \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t g(t)$$

จากเหตุผลนี้เป็นแนวทางการเปลี่ยนแปลงจาก (4.10) การโปรแกรมเชิงเส้น คือ

Minimize cg,

ขึ้นอยู่กับ $\quad A\tilde{P}(\alpha)g \geqslant -A\tilde{\ell}(\alpha) \qquad (4.11)$

$$e\tilde{P}(\alpha)g = \frac{\alpha\rho}{1-\alpha} - e\tilde{\ell}(\alpha),\ B_g \geqslant 0,\ g \geqslant 0$$

ในโปรแกรมนี้มีตัวแปร K (จำนวนของลูกโซ่) เท่านั้น, และปกติจะแก้ปัญหาได้ง่ายมาก สำหรับขั้นตอนอื่น ๆ $\{g(t)\}$ จะเป็นไปได้สำหรับ (4.10), ตัวแปร $g = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t g(t)$ เป็นไปได้สำหรับ (4.11) และจากทั้ง 2 สมการจะได้ค่าตามวัตถุประสงค์เหมือนกัน ผลรวมที่ไม่สิ้นสุดจะเข้าใกล้กันเสมอ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข $es(t) = \rho$, สำหรับทุกค่าของ t และค่าที่ได้จาก (4.11) จะต่ำกว่า (4.10) ถ้า $\sum_{t=1}^{\infty} {}^{t}g(t) = g^*$ ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่สุดจากสมการ 4.11 ฉะนั้นเราจะต้องหาข้อกำหนดของคำตอบที่เหมาะสมที่สุดจากสมการ 4.10 ซึ่งเรียกว่า $\{g^*(t)\}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับเงื่อนไขว่า $B_g(t) = 0$, $g(t) = 0$, และ $es(t) = \rho$ ผลลัพธ์ของ $\{g^*(t)\}$ จะอยู่ในรูปแบบของ $\{\gamma(t)g\}$ ซึ่ง $\gamma(t)$ เป็นสกาลา (Scalar) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P(0)\ \gamma(1) &= \gamma(1), \\
P(1)\ \gamma(1) + P(0)\ \gamma(2) &= \gamma(2), \qquad (4.12)\\
&\ \ \vdots \\
\sum_{j=1}^{t} P(t-j)\ \gamma(j) &= \gamma(t)
\end{aligned}$$

จาก (4.12), $P(u) = ep(u)g^*$ และ $\gamma(t) = (\rho - e\ell(t))$ ซึ่งสมการนี้จะแน่ใจได้ว่า $g^*(t)$ ขึ้นอยู่กับขนาดของเงื่อนไขได้ต่อเมื่อ

$$e\sum_{j=1}^{t} P(t-j)\gamma(j)g^* = \sum_{j=1}^{t} P(t-j)j(j) = \gamma(t) = \rho - e\ell(t)$$

จาก 4.5 ได้กำหนดทั่วไปว่า $p(u)$ และ $\gamma(t)$ ขึ้นอยู่กับ $\gamma(j)$ 0 สำหรับทุกค่าของ j ในกรณีจำเพาะจะได้ผลรวมทั้งหมด $e\ell(t)$ ลดลง แต่ $\gamma(t)$ เพิ่มขึ้น จากสมมติฐานว่า $eP(u) \geqslant eP(u+1)$ และเวคเตอร์ $eP(u)$ คือความน่าจะเป็นที่คงอยู่ในระบบ u หรือมากกว่าในแต่ละช่วงเวลาสำหรับแต่ละลูกโซ่ ผลลัพธ์ของ g^* ไม่เป็นลบ, ดังนั้น $P(u) = eP(u)g^* \geqslant P(u+1) = eP(u+1)g^*$ จากการลบสมการ t^{th} ของ (4.12) จาก (t+1) เราจะได้

$$P(0)\gamma(t+1) = \gamma(t+1) - \gamma(t) + \sum_{j=1}^{t}\left[P(t-j) - P(t+1-j)\right] j(j) \qquad (4.13)$$

ถ้า $\gamma(t)$ เพิ่มขึ้น, $P(u)$ ลดลง $P(0) > 0$, และ $\gamma(1), \ldots, \gamma(t) \geqslant 0$, และ (4.13) ขึ้นอยู่กับ $\gamma(t+1) \geqslant 0$ นั่นคือ $\gamma(t) \geqslant 0$ ทุกค่าของ t, $B_g{}^*(t) = \gamma(t)B_g{}^* \geqslant 0$ $g^*(t) = \gamma(t)\, g^* \geqslant 0$ จะได้ว่า

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t g^*(t) = \left(\sum_{t+1}^{\infty} \alpha^t \gamma(t)\right) g^* = \mu g^*$$

ถ้าให้ $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \gamma(t) = \mu$ ค่าใช้จ่ายของโปรแกรม $\{g^*(t)$ เท่ากับ cg^* ซึ่งถ้า $=1$ โปรแกรมจะเป็นไปตามข้อกำหนดที่ต่ำกว่า cg^* ผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่สุดของ (4.10) จากค่า g^* ที่เป็นไปได้จาก (5.11) คือ

$$e\tilde{P}(\alpha)g^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} - e\tilde{\ell}(\alpha) \qquad (4.14)$$

ถ้าคูณเงื่อนไขที่ t^{th} ของ (5.12) ด้วย α^t และรวมเข้าด้วยกัน จะได้

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^u P(u) \quad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \gamma(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \gamma(t) = \frac{\alpha\rho}{1-\alpha} - \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t e\ell(t)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^u P(u) = e\tilde{P}(\alpha)g^*, \text{และ} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t e\ell(t) = e\tilde{\ell}(\alpha) \quad \text{นั่นคือ}$$

$$e\tilde{P}(\alpha)g^* \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \gamma(t) = \frac{\rho\alpha}{1-\alpha} - e\tilde{\ell}(\alpha) \qquad (4.15)$$

จากการเปรียบเทียบระหว่าง 4.14 และ 4.15 ทำให้สรุปได้ว่า $\mu = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t} \gamma(t) = 1$ ถ้ากลับมาพิจารณาเงื่อนไขที่มีอยู่ คือ

$$S^{*}(t) = \ell(t) + \sum_{j=1}^{t} P(t-j)\, g^{*}(t)$$

แต่ไม่ยอมรับว่า $AS^{*}(t) \geqslant 0$ ทุกค่าของ t อย่างไรก็ดีเงื่อนไขต่าง ๆ ก็ยังมีน้ำหนักพอที่จะยอมรับได้ น้ำหนักของเงื่อนไขที่ t^{th} จะเป็น $\alpha^{t-1}/(1-\alpha)$ ผลรวมจะได้

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\alpha^{t-1}}{1-\alpha} AS^{*}(t) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} AP(\tilde{\alpha})g^{*} + A\ell(\alpha) \quad 0$$

น้ำหนักนี้จะเน้นมากในช่วงเวลาต้น ๆ เพราะ $\alpha^{t-1}/(1-\alpha)$ จะลดลงโดย t จึงเป็นการง่ายที่จะกำหนดขอบเขตของ $\gamma(t)$, $g^{*}(t)$ และ $S^{*}(t)$ ถ้า $\ell(t) \to 0$, $\gamma(t) \to \rho$ ดังนั้น $\gamma(t) \to \rho / \sum_{\mu=0}^{\infty} P(u)$ หรือ

$$\gamma(t) \to \frac{\rho}{e \sum_{\mu=0}^{\infty} P(u) g^{*}} = \frac{\rho}{eL\, g^{*}} \qquad (4.16)$$

ใน (4.16) เมตริกซ์ $L = \sum_{u=0}^{\infty} P(u)$ เป็นเมตริกซ์ของเวลาทำงานเฉลี่ย ซึ่งปฏิบัติตาม

(1) $g^{*}(t) \to \dfrac{\rho g^{*}}{eL\, g^{*}}$

(2) $S^{*}(t) \to \dfrac{\rho L g^{*}}{eL\, g^{*}}$

เงื่อนไขที่มีอยู่ในขอบเขตจะพิสูจน์ได้โดยตรวจสอบ $AL\, g^{*} \geqslant 0$

<u>สรุป</u>

เนื้อหาที่กล่าวโดยทั่วไปในส่วนนี้ ได้มาจากหนังสือต่าง ๆ ดังนี้

1. Bartholomew (1973)
2. Charnes, Cooper และ Niehans (1972)
3. Smith (1971)
4. Bartholomew และ Morris (1971)

ในส่วนที่เน้นจริง ๆ ในหัวข้อ 4.1 ได้มาจาก Grinold (1976 b), Grinold และ Standford (1976)

3.2 <u>การประยุกต์รูปแบบการวางแผนกำลังคน</u> เพื่อศึกษาหาสัดส่วนที่เหมาะสมในขบวนการผลิต ซึ่งจะได้ทราบสัดส่วนของบุคคลากรในขบวนการผลิตที่เปลี่ยนในแต่ละช่วงเวลา (Periods) จะต้องศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องเสียก่อน ซึ่งได้แก่ ทฤษฎีของลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) และประยุกต์ทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟในรูปแบบของการวางแผนกำลังคน

3.2.1 <u>ลูกโซ่มาร์คอฟ</u> (Markov Chain)

ลูกโซ่มาร์คอฟเป็นแขนงหนึ่งของขบวนการสโตคาสติค (Stochastic Process) ขบวนการสโตคาสติคจะแตกต่างจากขบวนการสถิติธรรมดาตรงที่ว่า ผล (ontcome) ที่จะเกิดขึ้นได้นั้นจะขึ้นอยู่กับเวลา (Time dependent) สมมติถ้า x เป็นผลที่เกิดขึ้นในทางสถิติ แต่ถ้าเป็นผลของปัญหาทางขบวนการสโตคาสติคแล้ว ค่า x นั้นจะต้องมีตัวสัปสคริพต์ (Subscript) แสดงถึงเวลาที่เกิดขึ้นต่อท้ายด้วย นั่นคือ x จะกลายเป็น x_t หรือ x_n ซึ่งทั้ง t และ n เป็นสัญลักษณ์แทนเวลา ความสัมพันธ์ระหว่างผล (x_t) และเวลา (t) แสดงในรูปที่ 3.1

รูปที่ 3.1 ผลของปัญหาทางขบวนการสโตคาสติค

ตัวแปร 2 ตัวของปัญหาชนิดนี้ คือ ค่า x_t และ t นั้น จะมีค่าเป็นช่วง ๆ (dicrete) หรือมีค่าแบบต่อเนื่อง (continuous) ได้ทั้งนั้น ดังนั้น ขบวนการทางสโตคาสติคอาจแยกออกได้เป็นสี่แขนงใหญ่ ๆ ตามประเภทของตัวแปรดังนี้

ค่าผลลัพธ์	ค่าเวลา	แขนงของขบวนการสโตคาสติค
เป็นช่วง	เป็นช่วง	ลูกโซ่มาร์คอฟ
ต่อเนื่อง	เป็นช่วง	อนุกรมเวลา
เป็นช่วง	ต่อเนื่อง	ขบวนการมาร์คอฟ
ต่อเนื่อง	ต่อเนื่อง	ขบวนการนอร์มอล

โดยทั่วไปแล้วปัญหาทางลูกโซ่มาร์คอฟนั้น มักจะเป็นการศึกษาถึงกลุ่มสภาวะ (State Space) ในปัจจุบัน ศึกษาถึงกลุ่มสภาวะข้างหน้าที่จะก้าวไปหา (move) และศึกษาถึงความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากสภาวะปัจจุบันไปอยู่สภาวะข้างหน้า ดังนั้น จะกล่าวถึงนิยามของกลุ่มสภาวะก่อน

<u>นิยาม</u> กลุ่มสภาวะ (State Space) ของลูกโซ่มาร์คอฟ คือ ชุด (set) ของสภาวะทั้งหมดของระบบที่ศึกษา

<u>นิยาม</u> คุณสมบัติของมาร์คอฟ (Markov property) กล่าวไว้ว่า ถ้ากำหนดสภาวะปัจจุบันของระบบ สภาวะในอนาคตของระบบจะขึ้นโดยตรงกับสภาวะปัจจุบันโดยที่ไม่ขึ้นกับสภาวะในอดีตที่เกิดขึ้นมาแล้ว

<u>นิยาม</u> ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้าหนึ่งขั้น (One-Step transition Probability function) สำหรับลูกโซ่มาร์คอฟ คือ ฟังก์ชั่นซึ่งบ่งบอกความน่าจะเป็นในการที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j ในการก้าวไปหนึ่งก้าวข้างหน้า (one - step) หรืออีกนัยหนึ่งก็คือความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j เมื่อเวลา (time) ได้ผ่านไปหนึ่งหน่วยของเวลาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้าหนึ่งขั้น อาจแสดงได้ดังนี้

$$P_{ij} = P(E_j/E_i) = P(j/i) \text{ ทุก ๆ ค่า } i \text{ และ } j \qquad (3.1)$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปเมื่อศึกษาระบบ เราอาจจะศึกษาเมื่อสภาวะของระบบผ่านการก้าวไปข้างหน้าแล้ว n ขั้นก็ได้ หรือคือเมื่อระบบผ่านไปแล้ว n ขั้นหรือ n หน่วยเวลา สภาวะของระบบอยู่ที่สภาวะ i เราอยากจะรู้ความน่าจะเป็นในกรณีที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ i ในขั้นตอนที่ n ไปสู่สภาวะ

j ในขั้นตอนที่ n+1 ในกรณีนี้ ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้าหนึ่งขั้นตอนจะเขียนได้ดังนี้

$$P_{ij}(n, n+1) = P(x_{n+1} = E_j / x_n = E_i) \qquad (3.2)$$

ข้อแตกต่างระหว่างสมการ (3.1) และ (3.2) ก็คือ ดัชนีที่บ่งบอกเวลาสมการไม่ขึ้นอยู่กับเวลา คือเป็นแบบโฮโมเจนเนียส (Homogeneous) ในเชิงเวลา แต่สมการที่ (3.2) จะขึ้นอยู่กับเวลา (time dependent) ซึ่งบ่งไว้โดยดัชนีบ่งเวลา คือ n

ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้า 1 ขั้นตอน อาจจัดอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1j} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{j1} & P_{j2} & & P_{jj} \end{pmatrix}$$

<u>นิยาม</u> ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นการไปข้างหน้า n ขั้น (n-step transition Probability function) คือ ฟังก์ชั่นที่บอกค่าความน่าจะเป็นในการที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j เมื่อก้าวไปข้างหน้า n ก้าว หรือคือเมื่อเวลาผ่านพ้นไปแล้ว n หน่วยเวลา ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นอันนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_{ij}^{(n)} = P(x_{t+n} = E_j / x_t = E_i) \qquad (3.3)$$

สมการที่ (3.3) นี้ไม่ขึ้นอยู่กับเวลา (t) ในการก้าวไปข้างหน้า n ก้าวนี้ มีอยู่หลายเส้นทางที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j ถ้าสมมติว่าระบบที่ศึกษาอยู่ระบบหนึ่งมีจำนวนสภาวะทั้งหมดเท่ากับ r สภาวะ การเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j เมื่อก้าวไปสองขั้นตอนนั้นมีอยู่หลายเส้นทางด้วยกัน ดังแสดงไว้ข้างล่างนี้

$$\begin{array}{ccccc} E_i & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & E_j \\ E_i & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & E_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_i & \rightarrow & E_r & \rightarrow & E_j \end{array}$$

ในการเปลี่ยนสภาวะจาก E_i ไปสู่ $E_k (K = 1, 2, \ldots, r)$ เมื่อก้าวไปข้างหน้า 1 ก้าว (one step) หรือคือ $E_i \rightarrow E_k$ นั้นจะไม่ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนสภาวะจาก E_k ไปสู่ E_j เมื่อก้าวต่อไปอีกหนึ่งก้าวข้างหน้า นั่นคือ เหตุการณ์ทั้งสองเหตุการณ์นี้จะไม่ขึ้นแก่กันในเชิงสถิติ ค่าความน่าจะเป็นจึงอาจแสดงได้ดังนี้

$$P(E_i \rightarrow E_k \text{ และ } E_k \rightarrow E_j) = P(E_i \rightarrow E_k).P(E_k \rightarrow E_j)$$
$$= P_{ik} . P_{kj} \qquad (3.4)$$

และเนื่องจากจำนวนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นทั้งหมด r เหตุการณ์นั้นไม่สามารถที่จะเกิดขึ้นได้พร้อมกันได้ (Mutually exclusive) ดังนั้น $P_{ij}^{(2)}$ จะเท่ากับผลบวกของค่าความน่าจะเป็นในทุก ๆ เส้นทางซึ่งมีอยู่ด้วยกัน r เส้นทางด้วยกัน ดังนี้

$$P_{ij}^{(2)} = P_{i1} . P_{1j} + P_{i2} . P_{2j} + \ldots + P_{ir} . P_{rj}$$

โดยใช้หลักการเชิงย้อนกลับ (recursive) ค่า $P_{ij}^{(3)}$ แสดงไว้ดังนี้

$$P_{ij}^{(3)} = P_{i1} . P_{1j}^{(2)} + P_{i2} . P_{2j}^{(2)} + \ldots + P_{ir} . P_{rj}^{(2)}$$

โดยวิธีการแบบอนุมาน (Induction) ค่า $P_{ij}^{(n)}$ หาได้ดังนี้

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} P_{ik} . P_{kj}^{(n-1)} \qquad (3.5)$$

ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนแปลงเมื่อก้าวไป n ก้าว อาจเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} \ldots\ldots & P_{1j}^{(n)} \ldots\ldots \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} \ldots\ldots & P_{2j}^{(n)} \ldots\ldots \\ P_{i1}^{(n)} & P_{i2}^{(n)} \ldots\ldots & P_{ij}^{(n)} \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

เนื่องจาก $P^{(n)} = P^n$ หรือคือค่า $P^{(n)}$ นั้นได้จากการเอาเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเมื่อก้าวไป 1 ก้าว (one-step transition matrix) มาคูณตัวเอง n ครั้งด้วยกัน สมการ (3.5) อาจเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P^{(n)} = P^n = P . P^{(n-1)} \qquad (3.6)$$

3.2.2 การวิเคราะห์มาร์คอฟ

การวิเคราะห์มาร์คอฟเป็นวิธีการอย่างหนึ่งที่ใช้วิเคราะห์ความเคลื่อนไหวของตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่ง เพื่อคาดคะเนล่วงหน้าถึงความเคลื่อนไหวในอนาคตของตัวแปรผันนั้น การวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับที่หนึ่ง (First-order markov Analysis) นั้น ตั้งอยู่บนข้อสมมติฐานที่ว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ถัดไปขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของเหตุการณ์สุดท้าย และไม่ขึ้นอยู่กับพฤติกรรมซึ่งเกิดขึ้นก่อนหน้านี้แต่อย่างใด

ในการนำการวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับหนึ่งมาใช้นั้น มีความประสงค์ในการคาดคะเนล่วงหน้าสำหรับงวดอนาคต โดยมักจะตั้งสมมติฐานว่า เสถียรภาพของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (Stability of Transition Probability Matrix) ค่อนข้างจะแน่นอน และได้มีการพิสูจน์กันแล้วว่า เป็นวิธีการที่ใช้คาดคะเนล่วงหน้าเกี่ยวกับพฤติกรรม (Behavior) ในอนาคตที่เชื่อถือได้

เพื่อให้เข้าใจได้โดยง่ายจะยกตัวอย่างของการวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับที่หนึ่งมาใช้ในการพยากรณ์สัดส่วนของกำลังคนในอนาคต ประกอบทฤษฎีในการวิเคราะห์ปัญหาดังนี้

ตัวอย่าง ในการทำงานของขบวนการประกอบ (assembly operation) ของโรงงานหนึ่ง ได้แบ่งคนงานเป็น 5ระดับ ได้แก่ เด็กฝึกงาน (Trainee), D, C, B และ A คนงานในแต่ละระดับแบ่งตามความสามารถในการทำงาน (Skill level) ในแต่ละช่วงเวลา (Period) จะมีการเปลี่ยนแปลงคนงานเนื่องจากคนงานลาออกหรือเลื่อนระดับตามความสามารถ ฉะนั้นสัดส่วนของคนงานในระดับต่าง ๆ จะเปลี่ยนแปลงไปตลอดเวลา ซึ่งเราไม่สามารถคาดการณ์ได้ จึงต้องใช้ทฤษฎีของลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) หาสัดส่วนที่เหมาะสมและสภาวะคงที่ (Steady-State) ของสัดส่วนบุคลากรในอนาคต

ในขั้นแรกจะต้องแสดงถึงสัดส่วนของการเลื่อนระดับ (Promotion) และการให้ออก (Attrition) ของคนงานแต่ละระดับ จากการบันทึกของฝ่ายบุคคลแสดงว่า ในหนึ่งปี ร้อยละ 60 ของคนงานในระดับ D ได้รับการเลื่อนระดับ (Promote) ไประดับ C และร้อยละ 20 ลาออก ข้อมูลนี้จะแสดงความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (Transition Probability) ของคนงานจากระดับหนึ่งไปยังอีกระดับหนึ่ง

ตารางที่ 3.5 แสดงการเปรียบเทียบบุคลากรในช่วงเวลา (Period)

ระดับ	การเลื่อนระดับ	การให้ออก
A	0	3.75
B	2.50	2.50
C	9.67	5.00
D	15.00	5.00
T	80.00	20.00

จากตารางแสดงเป็นช่วงเวลาหนึ่ง (3 เดือน) ตามเวลาของการอบรม (Training Period) เมื่อเสร็จการอบรมแสดงว่า ร้อยละ 80 ของเด็กฝึกงานได้รับการเลื่อนระดับไประดับ D และที่เหลือให้ออก และแสดงว่าระดับ A ไม่มีการเลื่อนระดับ เพราะถึงระดับสูงสุดในขบวนการผลิตแล้ว นอกจากว่าลาออกหรือทำงานอื่น

ตารางที่ 3.6 แสดงจำนวนบุคลากรที่มีอยู่ในปัจจุบัน

ระดับ	จำนวน (คน)
A	50
B	60
C	80
D	90
T	35

จากสัดส่วนของบุคคลากรในระดับต่าง ๆ แสดงให้เห็นว่ามีการเปลี่ยนแปลงระดับกันในช่วงระยะเวลาหนึ่ง (3 เดือน) ตลอดไป และจำนวนพนักงานที่มีอยู่เพียงพอและเหมาะสมกับกำลังการผลิตแล้วจะมีคนงานใหม่เมื่อคนงานเก่าลาออกไปเท่านั้น สำหรับในช่วงระยะเวลาหนึ่ง (3 เดือน) จะสามารถกำหนดการเลื่อนระดับ การลาออกของบุคคลากรทั้งหมดในรูปของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงดังนี้

ถึง / จาก	A	B	C	D	ลาออก
A	.9625	0	0	0	.0375
B	.0250	.9570	0	0	.0250
C	0	.0967	.8533	0	.0500
D	0	0	.1500	.8000	.0500
T	0	0	0	.8000	.2000

จากนั้นเราสามารถจะคาดคะเนสัดส่วนสำหรับบุคลากรในอนาคตได้ดังต่อไปนี้

สัดส่วนของบุคลากรที่น่าจะเป็นในช่วงที่ 2 = ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม x สัดส่วนของบุคลากรในช่วงที่ 1

สัดส่วนของบุคลากรในช่วงที่ 1 เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & T \\ (50 & 60 & 80 & 90 & 35) \end{array} \times \begin{pmatrix} .9625 & 0 & 0 & 0 & .0375 \\ .025 & .95 & 0 & 0 & .025 \\ 0 & .0967 & .8533 & 0 & .05 \\ 0 & 0 & .15 & .8 & .05 \\ 0 & 0 & 0 & .8 & .2 \end{pmatrix}$$

สัดส่วนของบุคลากรที่น่าจะเป็นในช่วงที่ 2

A = (50x.9625)+(60x.025)+(80x0)+(90x0)+(35x0) = 49.6

B = (50x0)+(60x.95)+(80x.0967)+(90x0)+(35.0) = 64.7

C = (50x0)+(60x0)+(80x.8533)+(90x.15)+(35.0) = 81.8

D = (50x0)+(60x0)+(80x0)+(90x.8)+(35x.8) = 100.0

T = (50x.0375)+(60x.025)+(80x.05)+(90x.05)+(35x.2) = 18.9

และเมื่อเราคำนวณซ้ำ ๆ กันไปโดยที่นโยบายต่าง ๆ ไม่เปลี่ยนจนถึงช่วงที่ 20 หรือ 5 ปี จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

ตารางที่ 3.7 แสดงสัดส่วนของบุคลากรในแต่ละช่วงเวลา (3 เดือน)

ระดับ	ช่วงที่									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	49.6	49.4	49.3	49.3	49.4	49.6	50.0	50.4	50.9	51.4
B	64.7	69.4	74.1	78.8	83.3	87.6	91.5	95.2	98.5	101.5
C	81.8	84.8	86.6	87.3	87.1	86.3	85.0	83.5	81.9	80.2
D	100.0	95.1	89.2	84.0	79.7	76.2	73.3	70.8	68.7	67.0
T	18.9	16.3	15.8	15.7	15.5	15.4	15.2	15.1	15.0	14.9

ระดับ	ช่วงที่									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	52.0	52.7	53.4	54.1	54.8	55.6	56.3	57.1	57.8	58.6
B	104.2	106.5	108.6	110.5	112.1	113.4	114.6	115.6	116.4	117.1
C	78.5	76.8	75.2	73.6	72.2	70.8	69.5	68.3	67.3	66.3
D	65.5	64.3	63.2	62.3	61.5	60.8	60.2	59.6	59.2	58.8
T	14.8	14.7	14.6	14.6	14.5	14.4	14.4	14.3	14.3	14.3

ระดับ	สัดส่วนบุคลากร	
	ช่วงที่ 20	เริ่มแรก
A	58.6	50
B	117.1	60
C	66.3	80
D	58.8	90
T	14.3	35

จากผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า เมื่อนโยบายต่าง ๆ ไม่เปลี่ยนและการจ้างคนงานใหม่จะเป็นไปได้ในกรณีที่คนงานเดิมออกเท่านั้น ก็หมายความว่า คนงานที่มีอยู่ปัจจุบันในขบวนการผลิตเพียงพอแล้ว และคนงานก็ยังคงมีเท่าเดิมตลอดเวลา 315 คน และจากสัดส่วนของคนงานในแต่ละช่วงเวลา (Period) เราสามารถนำมาวิเคราะห์หาความเหมาะสมของกำลังคนกับกำลังการผลิตได้ จะเห็นจากตารางได้ว่า ในช่วงสุดท้ายของการวางแผนกำลังคน จำนวนคนงานในระดับ A เพิ่มขึ้นเล็กน้อย แต่จำนวนคนในระดับ B มีแนวโน้มสูงขึ้นมาก ควรที่จะมีมาตรการต่าง ๆ ในการดำเนินงานได้แก่

1. เพิ่มอัตราการเลื่อนระดับจาก B ไป A
2. เพิ่มอัตราการให้ออกในระดับ B
3. ลดอัตราการเลื่อนระดับจาก C มา B

จากแนวทางต่าง ๆ นี้ สามารถที่จะกำหนดในรูปของความน่าจะเป็นเปลี่ยนแปลง (Transition probability matrix) ได้

สรุปได้ว่า จากขั้นตอนทั่วไปของการจัดกำลังคนให้เหมาะสมขึ้นอยู่กับสมมติฐาน 2 ประการ คือ

1. กำลังคนในการผลิตนั้นเหมาะสมกันอยู่แล้ว หมายถึง ในแต่ละขั้นตอนการผลิตมีจำนวนคนเหมาะสม กรณีจะจ้างคนงานใหม่ก็ต่อเมื่อคนงานเก่าลาออกเท่านั้น

2. ไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล (Seasonal Variation) เข้ามาเกี่ยวข้องในการกำหนดอัตราการเลื่อนระดับคนงาน (Promotion) หรือการให้ออกจากงาน (Loss)

3.2.3 <u>สถานะดุลยภาพ</u>

(Equilibrium Condition)

สิ่งที่ควรนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์มาร์คอฟก็คือ สถานะดุลยภาพ ซึ่งหมายถึงสถานะซึ่งส่วนแบ่งของความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นใหม่อยู่ในลักษณะที่คงที่ เช่น กรณีสัดส่วนของบุคลากรอยู่ในสถานะดุลยภาพ หมายความว่า การสับเปลี่ยนบุคลากรอยู่ในลักษณะที่คงที่ ไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าสัดส่วนของบุคลากรในงวดแรกจะเป็นเท่าใดก็ตาม เมื่อไม่มีส่วนแบ่งใดเป็นศูนย์แล้วจะต้องมีอยู่งวด

หนึ่งในอนาคตที่ส่วนแบ่งที่น่าจะเป็นสุดท้ายอยู่ในลักษณะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงอีก

สมมติจากตัวอย่างที่ 1 ซึ่งมีเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเป็น

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{pmatrix}
.9625 & 0 & 0 & 0 & .0375 \\
.025 & .95 & 0 & 0 & .025 \\
0 & .0967 & .8533 & 0 & .05 \\
0 & 0 & .15 & .8 & .05 \\
0 & 0 & 0 & .8 & .2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

จากแถวนอนที่ 1 หาส่วนแบ่งของ A ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ (เราเรียกงวดระยะเวลาอนาคตที่ไม่อาจระบุเจาะจงนี้ว่า เป็นงวดระยะเวลาดุลยภาพ) มีค่าเท่ากับ 0.9625 x ส่วนแบ่งที่ A มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ -1

(งวดระยะเวลาก่อนดุลยภาพ)

+ 0 x ส่วนแบ่งที่ B มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ-1

+ 0 x ส่วนแบ่งที่ C มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ-1

+ 0 x ส่วนแบ่งที่ D มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ-1

+ 0.0375 x ส่วนแบ่งที่ E มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลยภาพ-1

เขียนอยู่ในรูปสมการได้ คือ

$$A_{eq} = 0.9625\ A_{eq-1} + 0.0375\ E_{eq-1}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาส่วนแบ่งตลาดของ B, C, D และ E ที่ระยะเวลาดุลยภาพได้ดังนี้

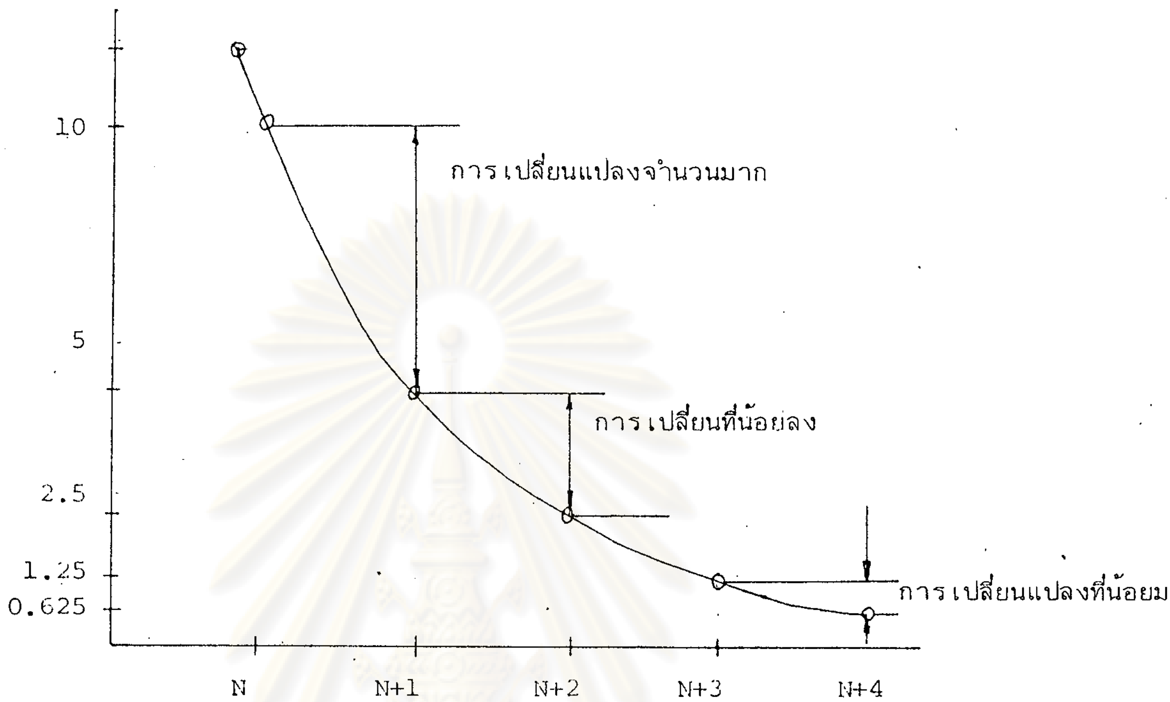
$$B_{eq} = 0.025\ A_{eq-1} + 0.95\ B_{eq-1} + 0.025\ E_{eq-1}$$

$$C_{eq} = 0.0967\ B_{eq-1} + 0.8533\ C_{eq-1} + 0.05\ E_{eq-1}$$

$$D_{eq} = 0.15\ C_{eq-1} + 0.8\ D_{eq-1} + 0.05\ E_{eq-1}$$

$$E_{eq} = 0.8\ D_{eq-1} + 0.2\ E_{eq-1}$$

จากแนวความคิดของกราฟ ที่แสดงการแบ่งเลขตัวหนึ่ง (เช่น 10)ที่ถูกแบ่งครึ่งในขั้นต่าง ๆ ตามรูปที่



รูปที่ 3.2 แสดงการแบ่งครึ่งตัวเลขตัวหนึ่งเป็นขั้น ๆ
เมื่อใกล้ดุลยภาพการเปลี่ยนแปลงจะน้อยลงตามลำดับ

จะเห็นได้ว่า แนวความคิดนี้มีลักษณะเช่นเดียวกับการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนบุคลากรเมื่อใกล้สถานะดุลยภาพ กล่าวคือ ในงวดระยะเวลาแรก ๆ ความน่าจะเป็นที่บุคลากรระดับหนึ่งได้มา หรือสูญเสียให้แก่บุคลากรอีกระดับหนึ่งจะอยู่ในอัตราสูง แต่เมื่อใกล้จุดดุลยภาพก็จะลดลงเรื่อย ๆ จนถึงงวดระยะเวลาก่อนถึงดุลยภาพการได้มาหรือการสูญเสียมีจำนวนน้อยมาก จนกระทั่งอาจถือได้ว่า เท่ากันในเชิงคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ค่าของตัวแปรในสถานะภาพ EQ มีค่าใกล้เคียงจนอาจถือได้ว่าเท่ากับค่าของตัวแปรในสถานะภาพ EQ - 1

ดังนั้น เราอาจเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$A = 0.9625\ A + 0.0375\ E + \ldots.. \quad (1)$$

$$B = 0.0250\ A + 0.9500\ B + 0.025\ E + \ldots.. \quad (2)$$

$$C = 0.0967\ B + 0.8533\ C + 0.050\ E + \ldots.. \quad (3)$$

$$D = 0.15\,C + 0.8\,D + 0.05\,E \;.......... \qquad (4)$$

$$E = 0.8\,D + 0.2\,E \;.......... \qquad (5)$$

และผลรวมของสัดส่วนทั้งหมดเท่ากับ 1

จะได้ $A + B + C + D + E = 1 \;..........$ (6)

เมื่อแก้สมการหาสัดส่วนของบุคลากร ณ ระยะเวลาดุลยภาพ จะได้

$A = .2366$

$B = .3552$

$C = .1836$

$D = .1795$

$E = .0449$

อาจพิสูจน์โดยการคูณเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเดิมด้วยสัดส่วนบุคลากรดุลยภาพได้ดังนี้

ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{pmatrix} .925 & 0 & 0 & 0 & .0375 \\ .025 & .95 & 0 & 0 & .025 \\ 0 & .0967 & .8533 & 0 & .05 \\ 0 & 0 & .15 & .8 & .05 \\ 0 & 0 & 0 & .8 & .2 \end{pmatrix} X$$

สัดส่วนบุคลากรดุลยภาพ

$$\begin{pmatrix} .2366 & .3552 & .1836 & .1795 & .0449 \end{pmatrix}$$

เท่ากับ $\begin{pmatrix} .2366 & .3552 & .1836 & .1795 & .0449 \end{pmatrix}$

ก็แสดงว่า หลังจากงวดระยะเวลาดุลยภาพไปแล้ว ส่วนแบ่งที่น่าจะเป็นที่เกิดขึ้นจะคงที่ ในกรณีที่มีเหตุผลที่พอจะเชื่อถือได้ว่า ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิมที่ใช้อยู่นั้นเกิดการเปลี่ยนแปลงหรือแตกต่างไปจากเดิม เนื่องจากเหตุผลบางประการก็อาจจะมีการสร้างเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงใหม่ และใช้การวิเคราะห์มาร์คอฟตามวิธีการเดิม เพื่อคาดคะเนความน่าจะเป็น

ของส่วนแบ่งที่ต้องการหาสำหรับงวดอนาคตได้ ซึ่งผลจากวิธีการดังที่กล่าวมาแล้วนี้ใช้เป็นเครื่องมือหรือดัชนีในการชี้นำ เพื่อการคาดคะเนความน่าจะเป็นของส่วนแบ่งที่ต้องการหาสำหรับงวดอนาคตอย่างได้ผลในระยะสั้นหรือปานกลางวิธีหนึ่ง ซึ่งควรนำมาศึกษา

3.2.4 ภาวะอยู่ตัว (Steady State) ของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง

นิยาม ขบวนการมาร์คอฟจะเรียกว่าเป็น "REGULAR" เมื่อนำเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงมายกกำลังแล้ว สมาชิก (ELEMENTS) ทุก ๆ ตัวของเมตริกซ์นั้นต้องมากกว่าศูนย์ และจากภาวะเริ่มต้น (INITIAL STATE) เมื่อเวลาผ่านไปไม่ว่ากี่ช่วง (STEPS) เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงนี้ จะสามารถออกจากภาวะใดไปอีกภาวะหนึ่งได้โดยอิสระ โดยสามารถติดต่อทุกภาวะได้หมด

ทฤษฎี เมื่อ P เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงซึ่งสมจริง (Correspond) กับ regular markov process ถ้านำ P มายกกำลังไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งแถวนอน (row) แต่ละแถวของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงที่ได้มีสมาชิก (ELEMENTS) ทุกตัวเหมือนกัน หรือใกล้เคียงกันหมด เช่น

$$P^n = T^{(1)}$$

$$T = \begin{pmatrix} \P \\ \P \\ \vdots \\ \P \end{pmatrix}$$

(¶ เป็น row vector ที่มีสมาชิกเป็นบวกหมด)

$$\P = (\P_1 , \P_2 \cdots \P_n)$$

T จะเรียกว่า STEADY STATE PROBABILITY MATRIX หรือ LIMITING PROBABILITY MATRIX เช่นจากตัวอย่างที่ 1 เราได้เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเป็น

---

[1] วิจิตร ตัณฑสุทธิ์ วันชัย ริจิรวนิช และ ศิริจันทร์ ทองประเสริฐ , การวิจัยการดำเนินงาน เล่ม 2 ภาค Probabilistic (กรุงเทพ ฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

$$
\begin{array}{ccc}
 & & j \\
 & & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
I & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} .9625 & 0 & 0 & 0 & .0375 \\ .0250 & .95 & 0 & 0 & .025 \\ 0 & .0967 & .8533 & 0 & .05 \\ 0 & 0 & .15 & .80 & .05 \\ 0 & 0 & 0 & .80 & .20 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

เมื่อเราสับที่เมตริกซ์ (Transpose) เพื่อให้ได้ตามข้อกำหนด

$\Sigma_{ij} P_{ij} = 1$ และ $0 \leq P_{ij} \leq 1$

ซึ่งเมื่อนำเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงนี้มายกกำลังไปเรื่อย ๆ โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะพบว่า

$$
\begin{pmatrix} .9625 & 0 & 0 & 0 & .0375 \\ .0250 & .95 & 0 & 0 & .025 \\ 0 & .0967 & .8533 & 0 & .05 \\ 0 & 0 & .15 & .80 & .05 \\ 0 & 0 & 0 & .80 & .20 \end{pmatrix}^{109} \text{ เท่ากับ }
$$

$$
\begin{pmatrix} .2366 & .3552 & .1836 & .1975 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1975 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1975 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1975 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1975 & .0449 \end{pmatrix}
$$

เมื่อยกกำลังครั้งที่ 110, 111 และต่อไปเรื่อย ๆ ก็ยังคงได้ผลลัพธ์เช่นเดิม แสดงว่าภาวะที่ 109 (ยกกำลัง 109) เป็นภาวะอยู่ตัว (STEADY STATE) ของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงชุดนี้

<u>ทฤษฎี</u> ถ้า P เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง ซึ่งสมจริงกับ REGULAR MARKOV PROCESS และความเกี่ยวพันของ P กับ UNIQUE VECTOR OF STEADY STATE PROBABILITY เป็น ¶ (D) $= \left(¶_1, ¶_2 \ldots\ldots ¶_n\right)$

โดยที่ $¶_j = ¶_j(P)$ คือ STEADY STATE PROBABILITY ของระบบในภาวะ j เมื่อ j = 1, 2, ...N

ดังนั้น จะได้ $¶ = ¶.p$ [1]

$$\sum_{j=1}^{N} ¶_j = 1$$

เช่น จากเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง

$$P = \begin{pmatrix} .9625 & 0 & 0 & 0 & .0375 \\ .025 & .95 & 0 & 0 & .025 \\ 0 & .0967 & .8533 & 0 & .05 \\ 0 & 0 & .15 & .80 & .05 \\ 0 & 0 & 0 & .80 & .20 \end{pmatrix}$$

$$(¶_1 \; ¶_2 \; ¶_3) \quad X \quad \begin{pmatrix} .9625 & 0 & 0 & 0 & .0375 \\ .025 & .95 & 0 & 0 & .025 \\ 0 & .0967 & .8533 & 0 & .05 \\ 0 & 0 & .15 & .80 & .05 \\ 0 & 0 & 0 & .80 & .20 \end{pmatrix} = (¶_1 \; ¶_2 \; ¶_3)$$

จะได้

$$.9625\, ¶_1 + .0375\, ¶_2 = ¶_1 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$.025\, ¶_1 + .95\, ¶_2 + .025\, ¶_3 = ¶_2 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

---

1 J.J. Martin Baysian, Decision Problems and Markov Chains (New York : R.E. Krieger Publishing Company, 1975) P.62

$$.0967\pi_2 + .8533\pi_3 + .05\pi_5 = \pi_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$.15\pi_3 + .80\pi_4 + .05\pi_5 = \pi_4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$.80\pi_4 + .20\pi_5 = \pi_5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

จากการแก้สมการ จะได้

$$\pi_1 = .2366$$

$$\pi_2 = .3552$$

$$\pi_3 = .1836$$

$$\pi_4 = .1795$$

$$\pi_5 = .0449$$

หรือเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง ณ ภาวะอยู่ตัว จะเป็น

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{pmatrix} .2366 & .3552 & .1836 & .1795 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1795 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1795 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1795 & .0449 \\ .2366 & .3552 & .1836 & .1795 & .0449 \end{pmatrix}$$

ซึ่งก็สามารถหาได้เช่นเดียวกับวิธีใช้เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงมายกกำลัง ส่วนรายละเอียดจะได้อธิบายในบทต่อไป