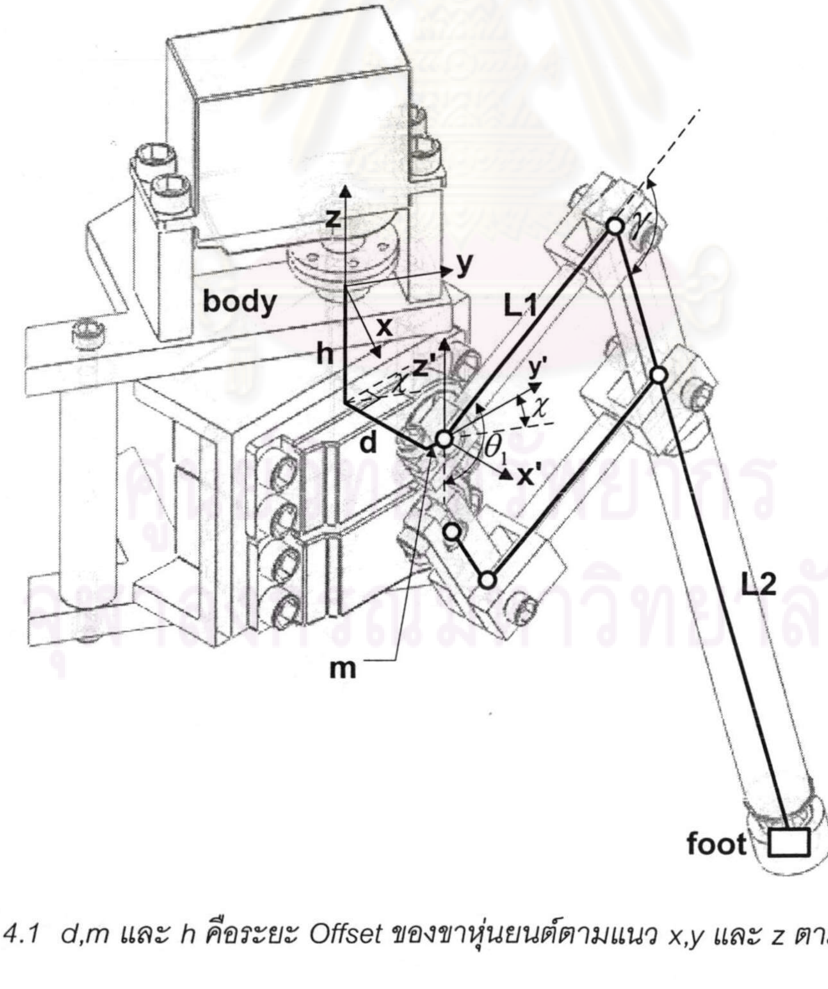
บทที่ 4
คิเนแมติกส์ (Kinematics)

ในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ สามารถแบ่งการคำนวณการเคลื่อนที่ได้เป็นสองส่วนคือ

- **ฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์** (Forward Kinematics) หรือสมการการเคลื่อนที่ไปข้างหน้า เป็นสมการที่ใช้คำนวณตำแหน่งปลายขาของหุ่นยนต์ เมื่อกำหนดตำแหน่งมุมของอาร์ซีเซอร์โวมอเตอร์
- **อินเวิร์สคิเนแมติกส์** (Inverse Kinematics) หรือสมการการเคลื่อนที่ผกผัน เป็นสมการที่ใช้คำนวณ ตำแหน่งมุมของอาร์ซีเซอร์โว เมื่อกำหนดตำแหน่งปลายขาของหุ่นยนต์

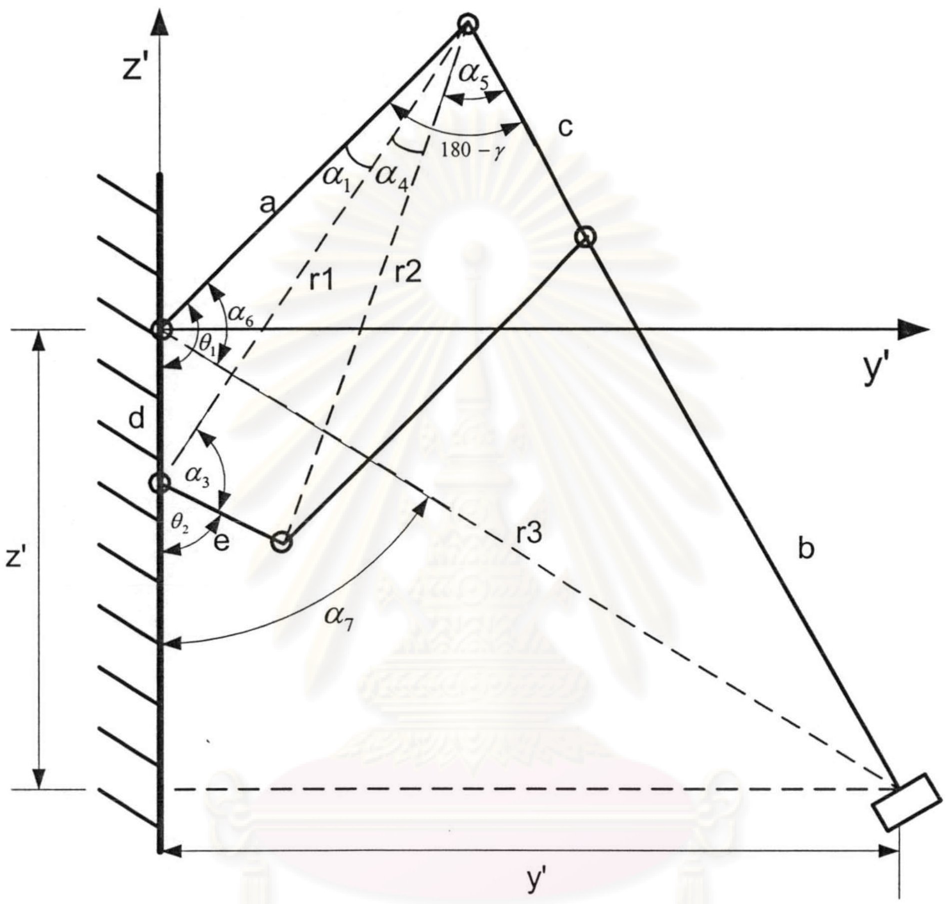
การกำหนดตำแหน่งปลายขาของหุ่นยนต์ กำหนดโดย ตัวแปร (x, y, z)และตำแหน่งมุมของอาร์ซีเซอร์โว กำหนดโดยตัวแปร $(\theta_1, \theta_2, \chi)$ ดังแสดงในรูป 4.1



รูปที่ 4.1 d,m และ h คือระยะ Offset ของขาหุ่นยนต์ตามแนว x,y และ z ตามลำดับ

4.1 ฟอร์เวิร์ดคิแนเมติกส์

เพื่อความสะดวกในการสร้างสมการ จะเริ่มวิเคราะห์คำนวณจากสมการการเคลื่อนที่ไปข้างหน้าก่อน แล้วจึงวิเคราะห์หาสมการการเคลื่อนที่ผกผันเป็นลำดับต่อไป



รูปที่4.2 ขาหุ่นยนต์ในระนาบ y'z' ซึ่งเป็นระนาบที่ทำมุม χ กับระนาบ yz

จากรูปที่ 4.2

$$r_1 = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos(\theta_1)} \tag{4.1}$$

$$\alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{d\sin(\theta_1)}{r_1}\right) \tag{4.2}$$

เนื่องจาก

$$\alpha_3 = \theta_1 - \theta_2 + \alpha_1 \tag{4.3}$$

จะได้

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + e^2 - 2er_1\cos(\alpha_3)} \tag{4.4}$$

$$\alpha_4 = \sin^{-1}\left(\frac{e\sin(\alpha_3)}{r_2}\right) \tag{4.5}$$

และ

$$\alpha_5 = \cos^{-1}\left(\frac{r_2^2 + c^2 - a^2}{2r_2c}\right) \tag{4.6}$$

เนื่องจาก

$$180 - \gamma = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 \tag{4.7}$$

จะได้

$$r_3 = \sqrt{a^2 + (b+c)^2 - 2a(b+c)\cos(180-\gamma)} \tag{4.8}$$

$$\alpha_6 = \sin^{-1}\left(\frac{(b+c)\sin(180-\gamma)}{r_3}\right) \tag{4.9}$$

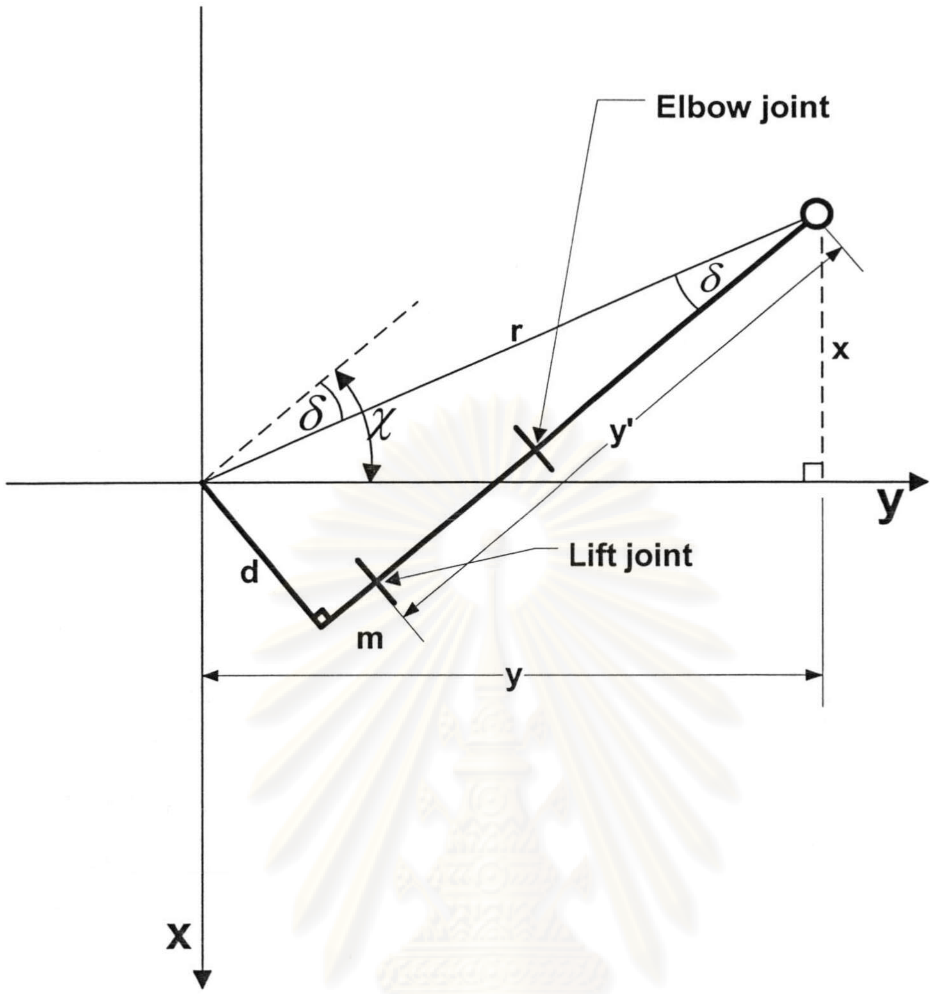
เนื่องจาก

$$\alpha_7 = \theta_1 - \alpha_6 \tag{4.10}$$

เพราะฉะนั้น

$$y' = r_3\sin(\alpha_7) \tag{4.11}$$

$$z' = r_3\cos(\alpha_7) \tag{4.12}$$



รูปที่ 4.3 ขาหุ่นยนต์ในระนาบ xy

จากรูปที่ 4.3

$$r = \sqrt{(y'+m)^2 + d^2} \tag{4.13}$$

$$\delta = \sin^{-1}\left(\frac{d}{r}\right) \tag{4.14}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ตำแหน่งปลายขาของหุ่นยนต์ (x, y, z) คือ

$$x = r\sin(\chi - \delta) \qquad (4.15)^*$$

$$y = r\cos(\chi - \delta) \qquad (4.16)^*$$

และจากรูปที่ 4.1

$$z = -z' - h \qquad (4.17)^*$$

4.2 อินเวิร์ดคิเนแมติกส์

หามุมของ Swing servo (χ)

จากรูปที่ 4.3

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.18}$$

และ

$$\chi = \sin^{-1}\left(\frac{-x}{r}\right) + \delta \tag*{(4.19)*}$$

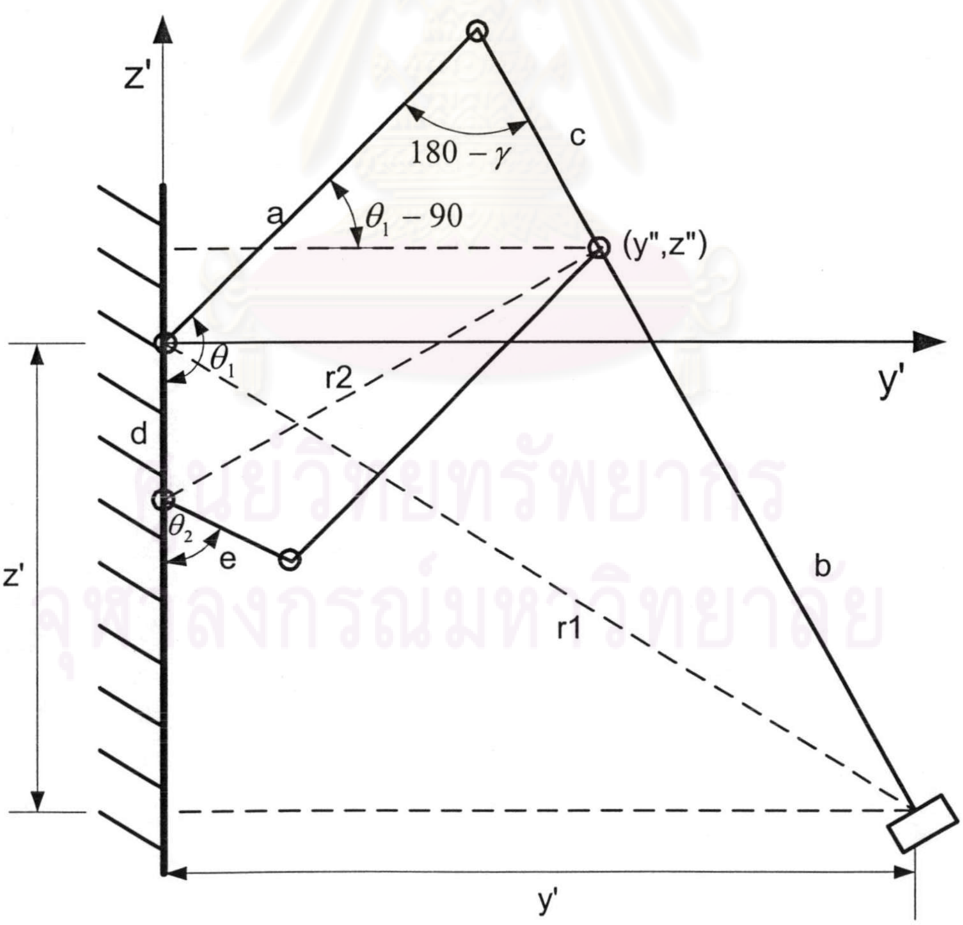
ซึ่ง

$$\delta = \sin^{-1}\left(\frac{d}{r}\right) \tag{4.20}$$

จะได้

$$y' = r\cos(\delta) - m \tag{4.21}$$

$$z' = -z - h \tag{4.22}$$



รูปที่4.4 ขาหุ่นยนต์ในระนาบ y'z' ซึ่งเป็นระนาบที่ทำมุม χ กับระนาบ yz

หามุมของ Lift servo (θ_1)

จากรูปที่ 4.4

$$r_1 = \sqrt{z'^2 + y'^2} \tag{4.23}$$

เพราะฉะนั้น

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + r_1^2 - (b+c)^2}{2ar_1}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{z'}{r_1}\right) \tag{4.24*}$$

หามุมของ Elbow servo (θ_2)

โดยเริ่มจากหาจุด (y",z") :

จาก

$$r_1^2 = a^2 + (b+c)^2 - 2a(b+c)\cos(180-\gamma)$$
$$2a(b+c)\cos(180-\gamma) = a^2 + (b+c)^2 - r_1^2$$
$$\cos(180-\gamma) = \frac{a^2 + (b+c)^2 - r_1^2}{2a(b+c)}$$

จะได้

$$180 - \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + (b+c)^2 - r_1^2}{2a(b+c)}\right) \tag{4.25}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y'' &= a\cos(\theta_1 - 90) + c\cos(180 - (180-\gamma) - (\theta_1 - 90)) \\ &= a\cos(\theta_1 - 90) + c\cos(\gamma - \theta_1 - 90) \\ &= a\sin(\theta_1) - c\sin(\gamma - \theta_1) \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} z'' &= a\sin(\theta_1 - 90) - c\sin(180 - (180-\gamma) - (\theta_1 - 90)) \\ &= a\sin(\theta_1 - 90) - c\sin(\gamma - \theta_1 - 90) \\ &= -a\cos(\theta_1) - c\cos(\gamma - \theta_1) \end{aligned} \tag{4.27}$$

จาก

$$r_2 = \sqrt{(z''+d)^2 + y''^2} \tag{4.28}$$

$$180 - \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{z''+d}{r_2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{e^2 + r_2^2 - a^2}{2er_2}\right)$$

เพราะฉะนั้น

$$\theta_2 = 180 - \cos^{-1}\left(\frac{z''+d}{r_2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{e^2 + r_2^2 - a^2}{2er_2}\right) \tag{4.29*}$$

จากสมการที่ 4.19 ,4.24 และ 4.29 จะได้ตำแหน่งมุมของอาร์ซีเซอร์โว $(\theta_1, \theta_2, \chi)$