

## บทที่ 3

### ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับการวิเคราะห์โหมดเจาะจงในท่อนำคลื่นไบแอนไอโซทรอปิก

#### 3.1 บทนำ

บทนี้เป็นการกล่าวถึงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่นำเสนอในงานวิทยานิพนธ์นี้เพื่อวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไบแอนไอโซทรอปิก วิธีการที่นำเสนอใช้องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง  $\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{H}_x, \vec{H}_y$  จำนวน 4 ตัวในสมการไฟไนต์อีลีเมนต์ ยังผลให้ได้ระบบสมการค่าเจาะจงที่มีลักษณะเชิงเส้นซึ่งทำให้สามารถคำนวณหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์โดยใช้โปรแกรมจากคลังโปรแกรมคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตาม การใช้องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าถึง 4 ตัว ทำให้จำนวนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าที่ใช้มากกว่าวิธีที่ใช้องค์ประกอบของสนามไฟฟ้า  $\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z$  หรือสนามแม่เหล็ก  $\vec{H}_x, \vec{H}_y, \vec{H}_z$  ดังที่กล่าวถึงในบทที่ 1 ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงได้พยายามหาวิธีลดจำนวนตัวแปรที่ใช้ในการประมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในบริเวณอีลีเมนต์สามเหลี่ยม 1 ชิ้นให้ลดลงเหลือ 6 ตัว เพื่อให้เท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าใช้ในวิธีองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้า 3 ตัว [10] ผู้วิจัยได้นำวิธีประมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางแบบอีลีเมนต์ขอบ (edge element) [15] เข้ามาแทนที่การใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ (vector shape function) ซึ่งเคยใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางเพื่อวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแอนไอโซทรอปิก ในหัวข้อ 3.2 เป็นการแสดงรายละเอียดและที่มาของการสร้างระบบสมการตามระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้วิธีการเลอว์คินเป็นฐาน ต่อจากนั้นในหัวข้อ 3.3 จะกล่าวถึงการประมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางภายในอีลีเมนต์ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์และอีลีเมนต์ขอบ และในตอนท้ายของบทนี้จะแสดงผลการคำนวณเพื่อทดสอบความถูกต้องและข้อดีของการใช้อีลีเมนต์ขอบเพื่อลดจำนวนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า

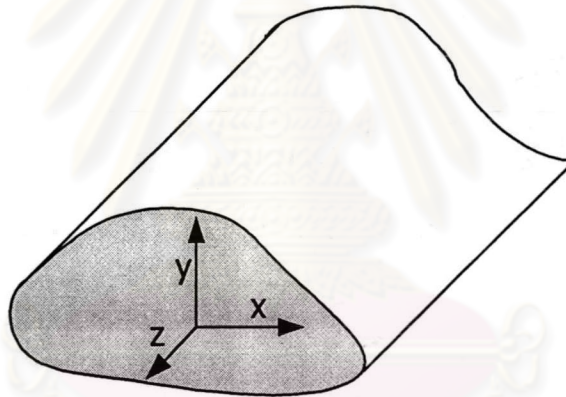
### 3.2 ระเบียบวิธีไฟน์ดัสตีเมนต์ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไบแอนไอโซทรอปิก

#### 3.2.1 สมการคลื่น

ท่อนำคลื่นที่พิจารณาในงานวิทยานิพนธ์มีหน้าตัดสม่ำเสมอตลอดความยาว การวิเคราะห์ได้กำหนดให้หน้าตัดของท่อนำคลื่นมีรูปร่างแบบไม่เจาะจง และอยู่ในระนาบ x-y ของระบบโคออดิเนตคาร์ทีเซียนดังในรูปที่ 3.1 การพิจารณาถือว่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นแปรตามเวลาแบบฮาร์มอนิกด้วยความถี่เชิงมุม  $\omega$  rad/s สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นสามารถอธิบายได้ด้วยสมการแมกซ์เวลล์ดังนี้

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega\vec{B} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega\vec{D} \quad (3.2)$$



รูปที่ 3.1 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นรูปร่างไม่เจาะจงและมีความเอกรูป (uniform)

ตลอดแนวแกน z

เมื่อแทนความสัมพันธ์ปรุ้งแต่งของตัวกลางไบแอนไอโซทรอปิกตามสมการ (2.3) ลงในสมการแมกซ์เวลล์ผลที่ได้คือ

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega(\vec{\zeta} \cdot \vec{E} + \vec{\mu} \cdot \vec{H}) \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} + \vec{\xi} \cdot \vec{H}) \quad (3.4)$$

ในที่นี้  $\bar{\mu}$  คือ เทนเซอร์ความซึมได้  $\bar{\epsilon}$  คือ เทนเซอร์สภาพยอม  $\bar{\zeta}$  และ  $\bar{\zeta}$  คือ เทนเซอร์ที่เป็นตัวเชื่อมระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก เทนเซอร์ทั้ง 4 ตัวสามารถแสดงได้ด้วยเมทริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  เพื่อความสะดวกในการแสดงรูปของสมการเราจะเขียนเทนเซอร์ที่ใช้ในความสัมพันธ์ปรงแต่งให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบบนระนาบตัดขวางของท่อนำคลื่น และองค์ประกอบตามแกนของท่อนำคลื่นดังนี้

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{\parallel} & \bar{\mu}_{\perp z} \\ \bar{\mu}_{\perp z} & \bar{\mu}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{\parallel} & \bar{\epsilon}_{\perp z} \\ \bar{\epsilon}_{\perp z} & \bar{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

$$\bar{\zeta} = \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_{\parallel} & \bar{\zeta}_{\perp z} \\ \bar{\zeta}_{\perp z} & \bar{\zeta}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.5c)$$

$$\bar{\zeta} = \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_{\parallel} & \bar{\zeta}_{\perp z} \\ \bar{\zeta}_{\perp z} & \bar{\zeta}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.5d)$$

ในที่นี้ครรชนีล่าง  $\parallel$ ,  $\perp z$ ,  $\perp z$  และ  $zz$  หมายความว่าถึงเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด  $2 \times 2$ ,  $2 \times 1$ ,  $1 \times 2$  และ  $1 \times 1$  ตามลำดับ

เมื่อแยกองค์ประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าและ ความเข้มสนามแม่เหล็กออกเป็น ส่วนประกอบตามขวาง (transverse component) และองค์ประกอบตามยาว (longitudinal component) สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เป็นผลเฉลยของโหมดเจาะจง (eigen mode) ในท่อนำคลื่นสามารถแสดงในรูปดังนี้

$$\bar{e}_t(x, y, z) = (\bar{e}_t(x, y) + e_z(x, y)\bar{a}_z) \exp(+j\beta z) \quad (3.6a)$$

$$\bar{h}_t(x, y, z) = (\bar{h}_t(x, y) + \bar{h}_z(x, y)\bar{a}_z) \exp(+j\beta z) \quad (3.6b)$$

ในที่นี้  $\beta$  คือค่าคงตัวการแพร่กระจาย (propagation constant)  $\bar{e}_t$  และ  $\bar{h}_t$  คือเวกเตอร์สนามไฟฟ้าตามขวางและเวกเตอร์สนามแม่เหล็กตามขวาง ตามลำดับ  $\bar{e}_z$  และ  $\bar{h}_z$  หมายถึงองค์ประกอบตามยาวของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับ  $\bar{a}_z$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตามแกน  $z$

เพื่อความสะดวกในการแสดงสมการให้อยู่ในรูปที่เข้าใจง่าย เราจะแสดงตัวดำเนินการเคลให้อยู่ในรูปของส่วนประกอบตามขวางและตามยาวดังนี้

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_z \quad (3.7)$$

โดยที่

$$\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{a}_y$$

ดังนั้นเมื่อแทนความเข้มสนามไฟฟ้า ความเข้มสนามแม่เหล็ก และตัวดำเนินการเคล ในสมการ (3.6a) , (3.6b) และ (3.7) ลงในสมการที่ (3.3) และ (3.4) ผลที่ได้จะเป็น

$$\nabla_t \times e_z \bar{a}_z + j\beta \bar{a}_z \times \bar{e}_t - j\omega(\bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t + \bar{\epsilon}_{tz} \cdot e_z \bar{a}_z + \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{h}_t + \bar{\mu}_{tz} \cdot h_z \bar{a}_z) = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla_t \times h_z \bar{a}_z - j\beta \bar{a}_z \times \bar{h}_t + j\omega(\bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t + \bar{\epsilon}_{tz} \cdot e_z \bar{a}_z + \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{h}_t + \bar{\epsilon}_{tz} \cdot h_z \bar{a}_z) = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla_t \times \bar{e}_t - j\omega(\bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t + \bar{\epsilon}_{zz} \cdot e_z \bar{a}_z + \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{h}_t + \bar{\mu}_{zz} \cdot h_z \bar{a}_z) = 0 \quad (3.10)$$

$$\nabla_t \times \bar{h}_t + j\omega(\bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t + \bar{\epsilon}_{zz} \cdot e_z \bar{a}_z + \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{h}_t + \bar{\epsilon}_{zz} \cdot h_z \bar{a}_z) = 0 \quad (3.11)$$

สมการ (3.8) และ (3.9) เป็นสมการเวกเตอร์ตามขวาง ที่มีองค์ประกอบ 2 องค์ประกอบ สมการ (3.10) และ (3.11) เป็นสมการของส่วนประกอบตามยาว จากผลที่ได้ในสมการ (3.8) – (3.11) เราสามารถจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของส่วนประกอบตามขวางแต่เพียงอย่างเดียวได้ กล่าวคือเราสามารถจัดรูปสมการ (3.10) และ (3.11) ให้แสดงส่วนประกอบตามยาวให้อยู่ในรูปของส่วนประกอบตามขวาง ผลที่ได้คือ

$$e_z \bar{a}_z = \{-j\omega \bar{\mu}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t + j\omega \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t + j\omega \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{h}_t) - j\omega \bar{\epsilon}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t - j\omega \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{h}_t - j\omega \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t)\} / (\omega^2 \epsilon_c'') \quad (3.12)$$

$$h_z \bar{a}_z = \{-j\omega \epsilon_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t - j\omega \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{h}_t - j\omega \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t) - j\omega \epsilon_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t + j\omega \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{e}_t + j\omega \bar{\epsilon}_{zz} \cdot \bar{h}_t)\} / (\omega^2 \epsilon_{zz}'') \quad (3.13)$$

โดยที่

$$\varepsilon_c'' = (\bar{\varepsilon}_{zz}\bar{\mu}_{zz} - \bar{\xi}_{zz}\bar{\zeta}_{zz})$$

เมื่อนำส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามยาวจากสมการ (3.12) และ (3.13) แทนลงในสมการ (3.8) และ (3.9) ก็จะได้สมการสำหรับพิจารณาส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางจำนวน 2 สมการดังนี้

$$\begin{aligned} & \frac{j\nabla_t \times \bar{\xi}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t)}{\omega\varepsilon_c''} - \frac{\nabla_t \times \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zt} \cdot \bar{e}_t}{\varepsilon_c''} + \frac{\nabla_t \times \bar{\xi}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{zt} \cdot \bar{e}_t}{\varepsilon_c''} \\ & + \frac{\bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t)}{\varepsilon_c''} - \frac{\bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t)}{\varepsilon_c''} - \frac{j\nabla_t \times \bar{\mu}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t)}{\omega\varepsilon_c''} \\ & - \frac{\nabla_t \times \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zt} \cdot \bar{h}_t}{\varepsilon_c''} + \frac{\nabla_t \times \bar{\xi}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{zt} \cdot \bar{h}_t}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t)}{\varepsilon_c''} \\ & - \frac{\bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t)}{\varepsilon_c''} - j\omega\bar{a}_1 \cdot \bar{e}_t - j\omega\bar{b}_1 \cdot \bar{h}_t + j\beta\bar{a}_z \times \bar{e}_t = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

และ

$$\begin{aligned} & -\frac{j\nabla_t \times \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t)}{\omega\varepsilon_c''} - \frac{\nabla_t \times \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{zt} \cdot \bar{e}_t}{\varepsilon_c''} + \frac{\nabla_t \times \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zt} \cdot \bar{e}_t}{\varepsilon_c''} \\ & - \frac{\bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t)}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\xi}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t)}{\varepsilon_c''} - \frac{j\nabla_t \times \bar{\zeta}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t)}{\omega\varepsilon_c''} \\ & - \frac{\nabla_t \times \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{zt} \cdot \bar{h}_t}{\varepsilon_c''} + \frac{\nabla_t \times \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zt} \cdot \bar{h}_t}{\varepsilon_c''} - \frac{\bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t)}{\varepsilon_c''} \\ & + \frac{\bar{\xi}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{h}_t)}{\varepsilon_c''} + j\omega\bar{c}_1 \cdot \bar{e}_t - \omega\mu_0\bar{d}_1 \cdot \bar{h}_t - j\beta\bar{a}_z \times \bar{h}_t = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

ในที่นี้

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \left( \bar{\zeta}_{11} - \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} - \frac{\bar{\mu}_{1z} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\mu}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{z1}}{\varepsilon_c''} \right) \\ \bar{b}_1 &= \left( \bar{\mu}_{11} - \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} - \frac{\bar{\mu}_{1z} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\mu}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} \right) \\ \bar{c}_1 &= \left( \bar{\varepsilon}_{11} - \frac{\bar{\varepsilon}_{1z} \cdot \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\varepsilon}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} - \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{z1}}{\varepsilon_c''} \right) \\ \bar{d}_1 &= \left( \bar{\zeta}_{11} - \frac{\bar{\varepsilon}_{1z} \cdot \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\varepsilon}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{z1}}{\varepsilon_c''} - \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{z1}}{\varepsilon_c''} + \frac{\bar{\zeta}_{1z} \cdot \bar{\zeta}_{zz} \cdot \bar{\zeta}_{z1}}{\varepsilon_c''} \right)\end{aligned}$$

### 3.2.2 การสร้างระบบสมการตามวิธีกาลูร์กิน

ตามระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ พื้นที่หน้าตัดตามขวางของท่อนำคลื่นจะถูกแบ่งออกเป็น ส่วนย่อยหรือที่เรียกว่าอีลิเมนต์ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบริเวณอีลิเมนต์แต่ละชิ้นต้องสอดคล้องกับ ผลเฉลยของสมการ (3.12) – (3.15) และยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่ขอบของอีลิเมนต์ดังต่อไปนี้

กรณีที่ขอบเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ความเข้มสนามไฟฟ้าต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\bar{a}_z \cdot (\bar{n} \times \bar{e}_t) = 0 \quad (3.16a)$$

$$\bar{a}_z \cdot (E_z \bar{a}_z) = 0 \quad (3.16b)$$

กรณีที่ขอบเป็นตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ สนามแม่เหล็กต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\bar{a}_z \cdot (\bar{n} \times \bar{h}_t) = 0 \quad (3.17a)$$

$$\bar{a}_z \cdot (h_z \bar{a}_z) = 0 \quad (3.17b)$$

กรณีที่ขอบเป็นฉนวนต่อระหว่างตัวกลางต่างชนิด สนามแม่เหล็กไฟฟ้าต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\bar{a}_z \cdot (\bar{n} \times \bar{e}_t)_1 = \bar{a}_z \cdot (\bar{n} \times \bar{e}_t)_2 \quad (3.18a)$$

$$\bar{a}_z \cdot (e_z \bar{a}_z)_1 = \bar{a}_z \cdot (e_z \bar{a}_z)_2 \quad (3.18b)$$

$$\vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{h}_1)_1 = \vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{h}_1)_2 \quad (3.18c)$$

$$\vec{a}_z \cdot (h_2 \vec{a}_z)_1 = \vec{a}_z \cdot (h_2 \vec{a}_z)_2 \quad (3.18d)$$

ผลเฉลยของสนามเหล็กไฟฟ้าตามขวางในสมการ (3.14) และ (3.15) ในบริเวณอีทีเมนต์แต่ละชั้นจะถูกประมาณด้วยฟังก์ชันพหุนาม (polynomial) และพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า เมื่อรวมผลเฉลยของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางของอีทีเมนต์แต่ละชั้นเข้าด้วยกัน หรือแสดงในรูปของเครื่องหมายรวมยอด (summation) ดังนี้

$$\vec{e}_i = \sum_{n=1}^N \vec{u}_n \phi_n \quad (3.19)$$

$$\vec{h}_i = \sum_{n=1}^N \vec{v}_n \psi_n \quad (3.20)$$

ในที่นี้  $\vec{u}_n$  และ  $\vec{v}_n$  คือเวกเตอร์ฟังก์ชันฐาน (basis function vector) ของสนามไฟฟ้าตามขวางและสนามแม่เหล็กตามขวางตามลำดับ  $\phi_n$  และ  $\psi_n$  คือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของสนามไฟฟ้าตามขวางและสนามแม่เหล็กตามขวาง จำนวนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่ามีอยู่ทั้งหมด  $N$  ตัว นอกจากนี้เวกเตอร์ฟังก์ชันฐานที่นำมาใช้ตรวจสอบคล้องกับเงื่อนไขขอบของอีทีเมนต์ดังต่อไปนี้

กรณีเงื่อนไขขอบที่ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

$$\vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{u}_n) = 0 \quad (3.21a)$$

กรณีเงื่อนไขขอบที่ตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ

$$\vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{v}_n) = 0 \quad (3.21b)$$

กรณีเงื่อนไขขอบที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางต่างชนิด

$$\vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{u}_1)_1 = \vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{u}_1)_2 \quad (3.21c)$$

$$\vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{v}_1)_1 = \vec{a}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{v}_1)_2 \quad (3.21d)$$

เมื่อประมาณผลเฉลยของส่วนประกอบตามขวางของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กดังสมการ (3.19) และ (3.20) จะเห็นได้ว่าผลเฉลยจะแปรตามพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าจำนวน  $2N$  ตัว ดังนั้นปัญหาของการหาผลเฉลยจึงอยู่ที่การสร้างระบบสมการเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า การหาค่าพารามิเตอร์สามารถทำได้โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) ซึ่งเป็นวิธีมาตรฐานแบบหนึ่งตามระเบียบวิธีไฟไนต์อีทีเมนต์ วิทยานิพนธ์นี้เลือกวิธีการถ่วง

น้ำหนักเศษตกค้างแบบกาลอริคินซึ่งใช้การถ่วงน้ำหนักด้วยฟังก์ชันฐาน วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสามารถอธิบายพอสังเขปได้ดังต่อไปนี้ คือ ถ้าสมการของปัญหาซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถแสดงได้เป็น

$$L\phi = 0 \quad (3.22)$$

ในที่นี้  $L$  คือตัวดำเนินการเชิงเส้น  $\phi$  คือฟังก์ชันของผลเฉลยที่ต้องการเมื่อประมาณผลเฉลยในรูปของผลรวม

$$\hat{\phi} = \sum_{n=1}^N a_n c_n \quad (3.23)$$

โดยที่  $a_n$  คือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า และ  $c_n$  คือฟังก์ชันฐาน

เมื่อแทนผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ลงในสมการ (3.22) แล้ว จะเกิดค่าคลาดเคลื่อน (error) หรือที่เรียกว่าเศษตกค้าง  $R = L\hat{\phi}$  ผลเฉลยโดยประมาณที่ดีนั้นควรเป็นผลเฉลยที่ทำให้เศษตกค้างมีค่าเป็นศูนย์ ด้วยเหตุนี้เราจึงอาศัยหลักการของการทำให้เศษตกค้างมีค่าเป็นศูนย์มาเป็นเงื่อนไขในการหาค่าพารามิเตอร์ วิธีการหนึ่งก็คือการหาผลคูณภายในของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักกับเศษตกค้างและบังคับให้ผลคูณภายในเท่ากับศูนย์ กล่าวคือ เราสร้างระบบสมการที่มีจำนวน  $N$  สมการต่อไปนี้

$$\langle w_m, R \rangle = \langle w_m, L\hat{\phi} \rangle = 0 \quad (3.24)$$

ในที่นี้  $\langle w_m, R \rangle$  คือผลคูณภายในระหว่าง  $w_m$  และ  $R$  โดยที่  $m = 1, 2, \dots, N$  เมื่อแทน  $\hat{\phi}$  จากสมการ (3.23) ลงในสมการ (3.24) จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, Lc_n \rangle = 0 \quad (3.25)$$

ระบบสมการ (3.25) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[A] [C] = [0] \quad (3.26)$$

เราสามารถแก้ระบบสมการ (3.26) โดยใช้คอมพิวเตอร์ได้อย่างสะดวก เมื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ (3.26) ได้แล้ว ก็จะทราบค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ต้องการ





$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_e \bar{u}_m \cdot \left( \nabla_l \times \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{zz}}{\omega \epsilon_c''} \cdot (\nabla_l \times \bar{e}_l) \right) + j \bar{u}_m \cdot \left( \nabla_l \times \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zl}}{\epsilon_c''} \right) \cdot \bar{e}_l \right) \\
& - j \bar{u}_m \cdot \left( \nabla_l \times \left( \frac{\bar{\bar{\zeta}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_{zl}}{\epsilon_c''} \right) \cdot \bar{e}_l \right) + j \bar{u}_m \cdot \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zz}}{\epsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{e}_l) \\
& - j \bar{u}_m \cdot \left( \frac{\bar{\bar{\zeta}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_{zz}}{\epsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{e}_l) - \bar{u}_m \cdot \left( \nabla_l \times \left( \frac{\bar{\bar{\zeta}}_{zz}}{\omega \epsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{h}_l) \right) \\
& - j \bar{u}_m \cdot \left( \nabla_l \times \left( \frac{\bar{\bar{\zeta}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zl}}{\epsilon_c''} \right) \cdot \bar{h}_l \right) + j \bar{u}_m \cdot \left( \nabla_l \times \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\mu}}_{zl}}{\epsilon_c''} \right) \cdot \bar{h}_l \right) \\
& + j \bar{u}_m \cdot \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\mu}}_{zz}}{\epsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{h}_l) - j \bar{u}_m \cdot \left( \frac{\bar{\bar{\zeta}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zz}}{\epsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{h}_l) \\
& + \omega \bar{u}_m \cdot \bar{c}_1 \cdot \bar{e}_l + \omega \bar{u}_m \cdot \bar{d}_1 \cdot \bar{h}_l \} ds = \sum_e \int \beta (-\bar{u}_m \bar{a}_z \times \bar{h}_l) ds_e \\
& \qquad \qquad \qquad m = 1, 2, \dots, N \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

โดยที่

$\sum_e$  คือผลรวมอีลีเมนต์ทั้งหมด  
 $\int_e ds_e$  คือการอินทิเกรตพื้นผิวในแตละอีลีเมนต์

จากนั้นแทน  $\bar{e}_l = \sum_{n=1}^N \bar{u}_n \phi_n$  และ  $\bar{h}_l = \sum_{n=1}^N \bar{v}_n \psi_n$  ลงในสมการ (3.27) และ (3.28) และใช้เงื่อนไขขอบที่ขอบของอีลีเมนต์แต่ละชิ้น เมื่อจัดสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่ายแล้ว จะได้

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \sum_e \int_e \{ \omega \bar{u}_m \cdot \bar{c}_1 \cdot \bar{u}_n \phi_n - \frac{(\nabla_l \times \bar{u}_n) \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_{zz} \cdot (\nabla_l \times \bar{u}_m) \phi_n}{\omega \epsilon_c''} + j (\nabla_l \times \bar{u}_m) \cdot \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zl} - \bar{\bar{\zeta}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_{zl}}{\epsilon_c''} \right) \cdot \bar{u}_n \phi_n \\
& + j \bar{u}_m \cdot \left( \frac{(\bar{\bar{\epsilon}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zz} - \bar{\bar{\zeta}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_{zz})}{\epsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{u}_m) \phi_n - \frac{(\nabla_l \times \bar{v}_n) \cdot \bar{u}_m \cdot (\nabla_l \times \bar{u}_m) \psi_n}{\omega \epsilon_c''} \\
& + j (\nabla_l \times \bar{u}_m) \cdot \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\mu}}_{zl} - \bar{\bar{\zeta}}_{zz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zl}}{\epsilon_c''} \right) \cdot \bar{v}_n \psi_n + j \bar{v}_n \cdot \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\mu}}_{zz} - \bar{\bar{\zeta}}_{lz} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_{zz}}{\epsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{u}_m) \psi_n + \omega \bar{u}_m \cdot \bar{d}_1 \cdot \bar{v}_n \psi_n \} ds_e \\
& = \beta \sum_{n=1}^N \int_e -\psi_n (\bar{u}_m \bar{a}_z \times \bar{v}_n) ds_e \\
& \qquad \qquad \qquad m = 1, 2, \dots, N \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \sum_e \int_e \left\{ \omega \bar{v}_m \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{u}_n \phi_n - \frac{(\nabla_l \times \bar{u}_n) \cdot \bar{\xi}_{zz} \cdot (\nabla_l \times \bar{v}_m) \phi_n}{\omega \varepsilon_c''} + j(\nabla_l \times \bar{v}_m) \cdot \left( \frac{\bar{\xi}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zt} - \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zt}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot \bar{u}_n \phi_n \right. \\
& + j(\nabla_l \times \bar{v}_m) \cdot \left( \frac{(\bar{\xi}_{zt} \cdot \bar{\xi}_{zz} - \bar{\mu}_{tz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz})}{\varepsilon_c''} \right) \cdot \bar{u}_n \phi_n - \frac{(\nabla_l \times \bar{v}_n) \cdot \bar{\mu}_{zz} \cdot (\nabla_l \times \bar{v}_m) \phi_n}{\omega \varepsilon_c''} \\
& \left. + j \cdot (\nabla_l \times \bar{v}_m) \cdot \left( \frac{\bar{\xi}_{zz} \cdot \bar{\mu}_{zt} - \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zt}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot \bar{v}_n \psi_n + j \bar{v}_n \cdot \left( \frac{\bar{\xi}_{tz} \cdot \bar{\mu}_{zz} - \bar{\mu}_{tz} \cdot \bar{\xi}_{zz}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{v}_m) \psi_n + \omega \bar{v}_m \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{v}_n \psi_n \right\} ds_e \\
& = \beta \sum_{n=1}^N \int_e \phi_n (\bar{v}_m \bar{a}_z \times \bar{u}_n) ds \\
& \qquad \qquad \qquad m = 1, 2, \dots, N \tag{3.30}
\end{aligned}$$

สมการ (3.29) และ (3.30) สามารถจัดอยู่ในรูปเมทริกซ์ซึ่งเป็นระบบสมการค่าเฉพาะดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} [p_1] & [p_3] \\ [p_4] & [p_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 & Q_2 \\ Q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
p_{1,mn} = \sum_e \int_e \left\{ \omega \bar{u}_m \bar{c}_1 \cdot \bar{u}_n - \frac{(\nabla_l \times \bar{u}_n) \cdot \bar{\xi}_{zz} \cdot (\nabla_l \times \bar{u}_m)}{\omega \varepsilon_c''} + j(\nabla_l \times \bar{u}_m) \cdot \left( \frac{\bar{\varepsilon}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zt} - \bar{\xi}_{zz} \bar{\varepsilon}_{zt}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot \bar{u}_n \right. \\
\left. + j \bar{u}_n \cdot \left( \frac{\bar{\varepsilon}_{tz} \cdot \bar{\xi}_{zz} - \bar{\xi}_{tz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_l \times \bar{u}_m) \right\} ds \\
\tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,mn} = \sum_e \int_e \left\{ \omega \bar{v}_m \bar{a}_1 \cdot \bar{u}_n - \frac{(\nabla_l \times \bar{u}_n) \cdot \bar{\xi}_{zz} \cdot (\nabla_l \times \bar{v}_m)}{\omega \varepsilon_c''} + j(\nabla_l \times \bar{v}_m) \cdot \left( \frac{\bar{\xi}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zt} - \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zt}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot \bar{u}_n \right. \\
\left. + j(\nabla_l \times \bar{v}_m) \cdot \left( \frac{\bar{\xi}_{zt} \cdot \bar{\xi}_{zz} - \bar{\mu}_{tz} \cdot \bar{\varepsilon}_{zz}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot \bar{u}_n \right\} ds \\
\tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$p_4 = \sum_e \int_e \left\{ \omega \bar{b}_1 \cdot \bar{v}_m \bar{v}_n - \frac{\bar{\mu}_{zz} \cdot (\nabla_t \times \bar{v}_n) \cdot (\nabla_t \times \bar{v}_m)}{\omega \varepsilon_c''} + j \left( \frac{\bar{\xi}_{zz} \bar{\mu}_{zt} - \bar{\mu}_{zz} \cdot \bar{\xi}_{zt}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot \bar{v}_n \cdot (\nabla_t \times \bar{v}_m) \right. \\ \left. + j \bar{v}_n \cdot \left( \frac{\bar{\xi}_{tz} \cdot \bar{\mu}_{zz} - \bar{\mu}_{tz} \cdot \bar{\xi}_{zz}}{\varepsilon_c''} \right) \cdot (\nabla_t \times \bar{v}_m) \right\} ds \quad (3.35)$$

$$Q_1 = \beta \sum_e \int_e -\bar{v}_m \cdot \bar{a}_z \times \bar{u}_n ds \quad (3.36)$$

$$Q_2 = \beta \sum_e \int_e \bar{u}_m \cdot \bar{a}_z \times \bar{v}_n ds \quad (3.37)$$

### 3.3 การประมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางในอีลีเมนต์

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีที่นำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นโดเมนย่อยๆ ความแม่นยำของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขตนอกจากขึ้นอยู่กับจำนวนการแบ่งอีลีเมนต์แล้วการนำฟังก์ชันรูปร่างที่เหมาะสมมาใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยที่ปราศจากผลเฉลยปลอมเทียม (Spurious solution) ยังเป็นส่วนที่สำคัญในการประมาณค่าผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลข ดังนั้นการเลือกใช้ฟังก์ชันรูปร่างจึงเป็นส่วนสำคัญในการนำมาประมาณค่าผลเฉลยโดยที่มิให้เกิดผลเฉลยปลอมเทียม ในวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ที่แก้ไขจากฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นที่เสนอโดย Angkeaw [15] มาใช้ในการประมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง

#### 3.3.1 ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น (Vector linear shape function)

ฟังก์ชันรูปร่างที่เสนอโดย Angkeaw [15] นี้เป็นฟังก์ชันทดลองที่สร้างขึ้นสำหรับการคำนวณความเข้มสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กโดยที่ในหนึ่งอีลีเมนต์จะมีตัวแปรทั้งหมด 6 ตัวแปรดังการประมาณค่าต่อไปนี้

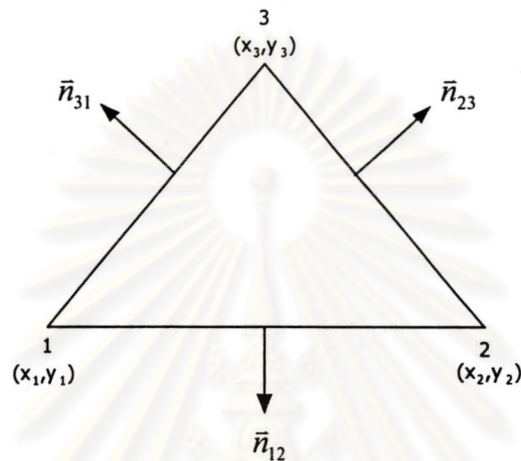
$$\bar{e}_t = \sum_{m=1}^6 \bar{N}_m(x, y) \phi_m \quad (3.38)$$

$$\bar{h}_t = \sum_{m=1}^6 \bar{N}_m(x, y) \psi_m \quad (3.39)$$

โดยที่  $\phi_m$  คือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของสนามไฟฟ้าตามขวาง

$\psi_m$  คือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของสนามแม่เหล็กตามขวาง

$\bar{N}_m(x, y)$  คือฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น โดยฟังก์ชันนี้จะพิจารณาจากฟังก์ชันรูปร่างสเกลาร์



รูปที่ 3.2 ลักษณะฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น

จากอีลีเมนต์สามเหลี่ยมรูปที่ 3.2 ประกอบด้วยโนด (node) ลำดับที่หนึ่ง, สอง และสาม เรียงตามลำดับมีทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกามีพิกัด  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  และ  $(x_3, y_3)$  และกำหนดให้

$\bar{n}_{12}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับด้าน 1-2

$\bar{n}_{23}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับด้าน 2-3

$\bar{n}_{31}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับด้าน 3-1

โดยฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ดังนี้

$$\bar{N}_{2i-1} = \frac{\bar{n}_{ij}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{ki} \times \bar{n}_{ij})} N_i \quad (3.40a)$$

$$\bar{N}_{2i} = \frac{\bar{n}_{ki}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{ij} \times \bar{n}_{ki})} N_i \quad (3.40b)$$

$$N_i = \frac{(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3} \quad (3.40c)$$

โดยที่  $i, j, k$  มีลำดับแบบมอดุโล 3 และ  $N_i$  คือฟังก์ชันรูปร่างสเกลาร์

### 3.3.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์

สนามแม่ไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวางมีการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ดังนี้

$$\bar{e}_i = \sum_{m=1}^3 \bar{N}n_m(x, y)\phi_m \quad (3.41a)$$

$$\bar{h}_i = \sum_{m=1}^3 \bar{N}n_m(x, y)\psi_m \quad (3.41b)$$

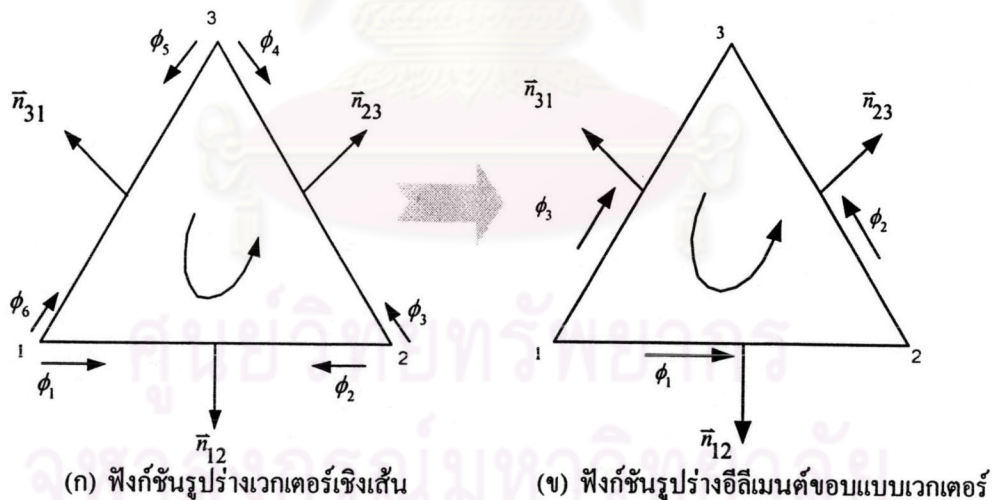
โดยที่  $m = 1, 2, 3$

$\bar{N}n_m$  คือฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์

$\phi_m$  คือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของสนามไฟฟ้าตามขวาง

$\psi_m$  คือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของสนามแม่เหล็กตามขวาง

ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์นี้ปรับปรุงมาจากฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น โดยในแต่ละอีลิเมนต์จะมีตัวแปร 3 ตัวดังรูป



รูปที่ 3.3 ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ที่แก้ไขมาจากฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น

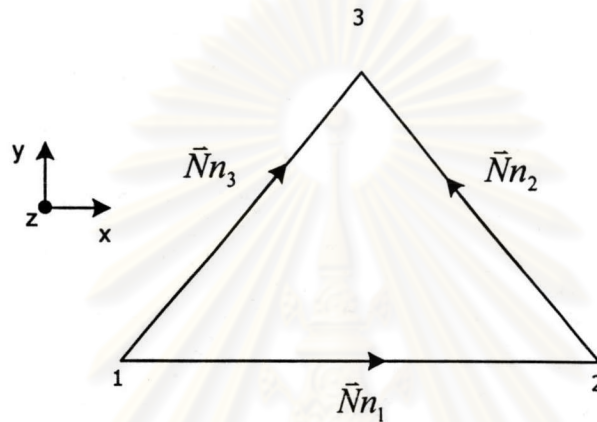
โดยในที่นี้

$\bar{n}_{12}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับด้าน 1-2

$\bar{n}_{23}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับด้าน 2-3

$\bar{n}_{31}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับด้าน 3-1

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ในวิชานิพนธ์นี้จะพิจารณาการรวมกันขององค์ประกอบในแนวสัมผัส (tangential component) ในแต่ละด้านของฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นดังเช่น เมื่อมีสนามมีทิศเข้ามา โหนด 1 และ 2 การประมาณค่าสนามด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบอีลีเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ก็จะเกิดจากการรวมกันแบบเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวสัมผัสของ โหนด 1 และ โหนด 2 ของฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นซึ่งมีค่าเท่ากับการประมาณค่าในด้าน 1-2



รูปที่ 3.4 ลักษณะฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์

โดยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ที่พิจารณาจากฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\bar{N}_{n1} = \bar{N}_2 + \bar{N}_3$$

$$\bar{N}_{n2} = \bar{N}_4 + \bar{N}_5$$

$$\bar{N}_{n3} = \bar{N}_6 + \bar{N}_1$$

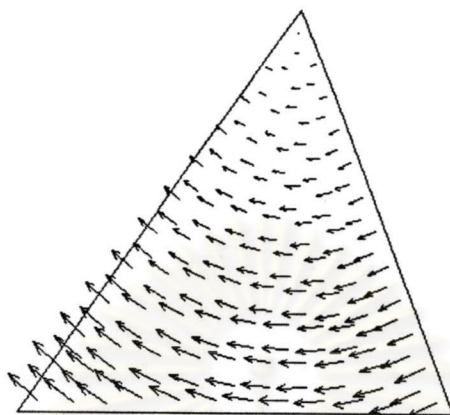
$$\bar{N}_{n1} = \frac{\bar{n}_{31}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{12} \times \bar{n}_{31})} N_1 + \frac{\bar{n}_{23}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{12} \times \bar{n}_{23})} N_2$$

$$\bar{N}_{n2} = \frac{\bar{n}_{12}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{23} \times \bar{n}_{12})} N_2 + \frac{\bar{n}_{31}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{23} \times \bar{n}_{31})} N_3$$

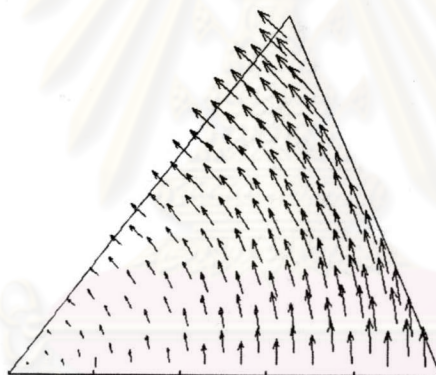
$$\bar{N}_{n3} = \frac{\bar{n}_{23}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{31} \times \bar{n}_{23})} N_3 + \frac{\bar{n}_{12}}{\bar{a}_z \cdot (\bar{n}_{31} \times \bar{n}_{12})} N_1$$

- โดยที่  $\bar{N}_{n1}$  คือฟังก์ชันที่ใช้ประมาณค่าในด้าน 1-2  
 $\bar{N}_{n2}$  คือฟังก์ชันที่ใช้ประมาณค่าในด้าน 2-3  
 $\bar{N}_{n3}$  คือฟังก์ชันที่ใช้ประมาณค่าในด้าน 3-1

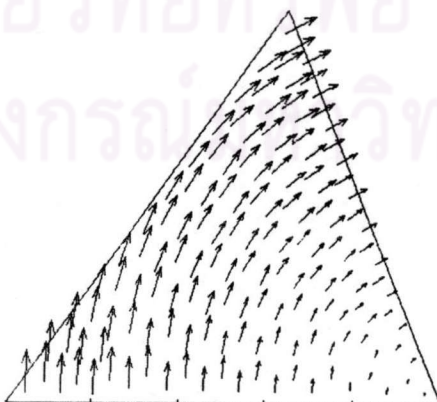
ลักษณะเวกเตอร์ที่สัมผัสในแต่ละด้านของอีลิเมนต์ของฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์



(ก) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_{n_1}$



(ข) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_{n_2}$



(ค) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_{n_3}$

รูปที่ 3.5 (ก)-(ค) ลักษณะเวกเตอร์ในแนวสัมผัสอีลิเมนต์ของแต่ละฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์

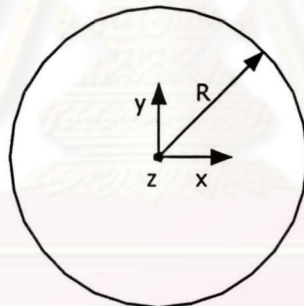


### 3.4 ตัวอย่างผลการทดสอบฟังก์ชันรูปร่าง

ในส่วนนี้ผู้วิจัยได้ทดสอบฟังก์ชันรูปร่างในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้องค์ประกอบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง 4 องค์ประกอบ โดยแสดงผลการวิเคราะห์ตัวอย่าง 2 ตัวอย่างเพื่อทดสอบความแม่นยำของผลเฉลยโมดเจาะจงและการเกิดผลเฉลยปลอมเทียมจากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์อีลีเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์เปรียบเทียบกับฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นและผลเฉลยแม่นยำตรงโดยวิเคราะห์ที่นำคลื่นภาคตัดขวางรูปวงกลมและที่นำคลื่นภาคตัดสี่เหลี่ยมที่บรรจุตัวกลางไดอิเล็กทริก

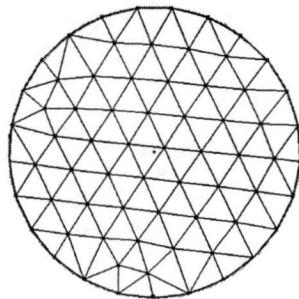
#### 3.4.1 ที่นำคลื่นภาคตัดขวางรูปวงกลม

ที่นำคลื่นภาคตัดขวางรูปวงกลมมีรัศมี  $R$  ภายในที่นำคลื่นเป็นอวกาศว่างโดยมีหน้าตัดที่นำคลื่นดังแสดงในรูปที่ 3.6



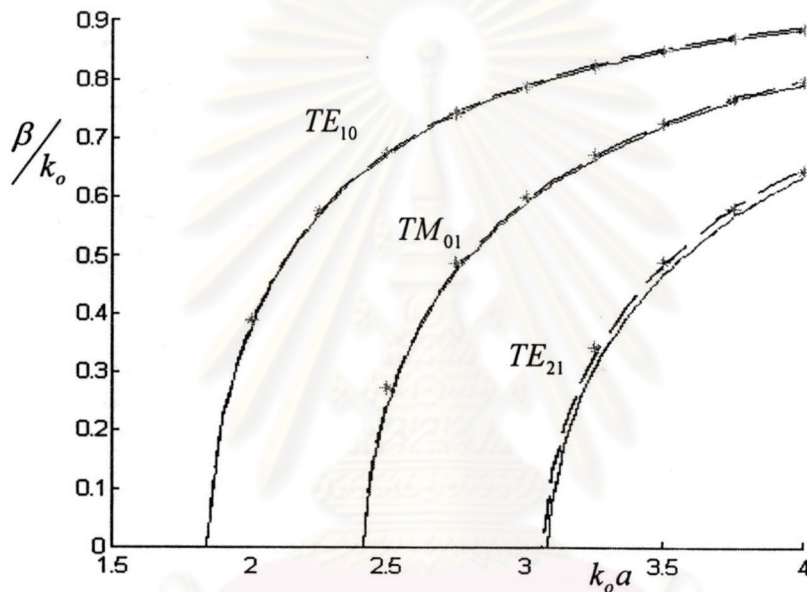
รูปที่ 3.6 ลักษณะที่นำคลื่นภาคตัดวงกลม

ผิวของที่นำคลื่นวงกลมถือว่าเป็นตัวนำสมบูรณ์แบบการคำนวณตามระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ จะแบ่งหน้าตัดของที่นำคลื่นบนระนาบ  $x-y$  ออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 ลักษณะการแบ่งอีลีเมนต์ภาคตัดที่นำคลื่นวงกลม

ผลการคำนวณค่าคงตัวเฟส  $\beta$  ที่แปรตามพารามิเตอร์  $k_0 R$  หรือกราฟดิสเพอร์ชันแสดงได้ดังรูปที่ 3.8 ในที่นี้  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  กราฟดิสเพอร์ชันที่ใช้แสดงค่า  $\beta$  ที่แปรตามความถี่หรือรัศมีของท่อนำคลื่นก็ได้ เส้นกราฟหนึ่งเส้นจะหมายถึงค่า  $\beta$  โมดหนึ่งโมด กราฟแต่ละเส้นจะมีชื่อของโมดตามมาตรฐานที่ใช้ในการเรียกชื่อกำกับอยู่ ผลการคำนวณในรูปที่ 3.8 ได้จากการแบ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยม 126 อีลีเมนต์และคำนวณใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นและฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบดังนี้

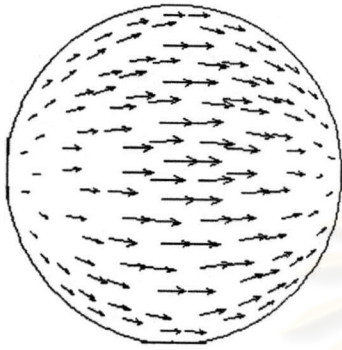


รูปที่ 3.8 กราฟดิสเพอร์ชันของท่อนำคลื่นภาคตัดวงกลมกลวงเมื่อ

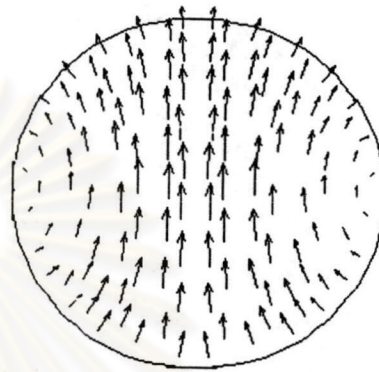
- \* แทนผลเฉลยแม่นยำตรง
- แทนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ
- แทนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น

ผลการคำนวณ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นและฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ ผู้นำเสนอวิทยานิพนธ์ได้นำผลการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงด้วยจุดดาวในรูปที่ 3.8 ผลจากการเปรียบเทียบกราฟในรูปที่ 3.8 พบว่าผลเฉลยของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงเป็นอย่างดีในโมดอันดับต้นแต่จะมีค่าผิดพลาดในโมดอันดับสูงเนื่องจากใช้จำนวนอีลีเมนต์ไม่พอกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งอย่างมากเมื่อความถี่สูงขึ้น

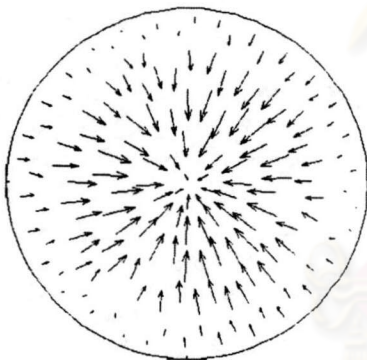
รูปที่ 3.9 แสดงถึงแบบรูปของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางบนหน้าตัดท่อนำคลื่น ณ  $k_0 R = 4.0$  ของโหมด  $TE_{11}$ ,  $TM_{01}$ ,  $TE_{21}$  ตามลำดับ



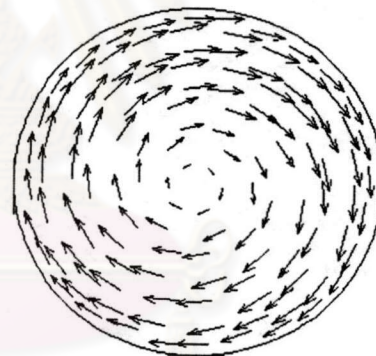
(ก) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TE_{11}$



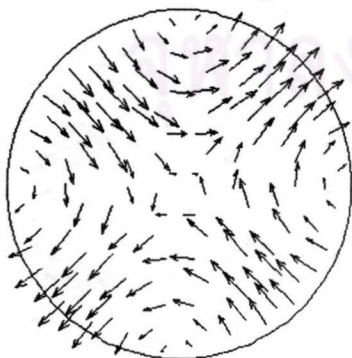
(ข) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TE_{11}$



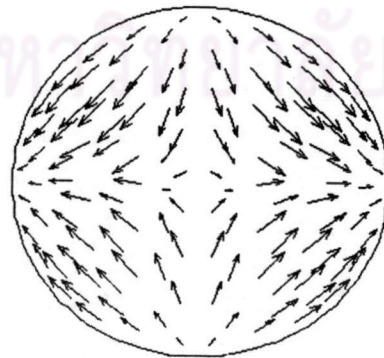
(ค) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TM_{01}$



(ง) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TM_{01}$



(จ) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TE_{21}$



(ฉ) แบบรูปความเข้มแม่เหล็กโหมด  $TE_{21}$

รูปที่ 3.9 แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่  $k_0 a = 4.0$

ตารางที่ 3.1 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  ใน 3 โมดแรกของท่อนำคลื่นภาคตัดขวางรูปวงกลมด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์อีลิเมนต์ขอบเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ

จำนวนอีลิเมนต์	จำนวนพารามิเตอร์ ไม่ทราบค่า	โมด TE11	โมด TM01	โมด TE21
101	126	0.904867	0.808811	0.671695
126	378	0.883696	0.789522	0.614468
167	501	0.889113	0.800865	0.650786
250	750	0.889864	0.800161	0.648784
286	858	0.889763	0.800104	0.648494
ผลเฉลยแม่นยำ		0.88776343	0.79909859	0.64574871

ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  ใน 3 โมดแรกของท่อนำคลื่นภาคตัดขวางรูปวงกลมด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ

จำนวนอีลิเมนต์	จำนวนพารามิเตอร์ ไม่ทราบค่า	โมด TE11	โมด TM01	โมด TE21
101	252	0.882534	0.783977	0.603154
126	756	0.886261	0.795182	0.634938
167	1002	0.886425	0.795583	0.636105
207	1242	0.886497	0.795823	0.636651
250	1500	0.886699	0.796409	0.638386
ผลเฉลยแม่นยำ		0.887763	0.799099	0.645749

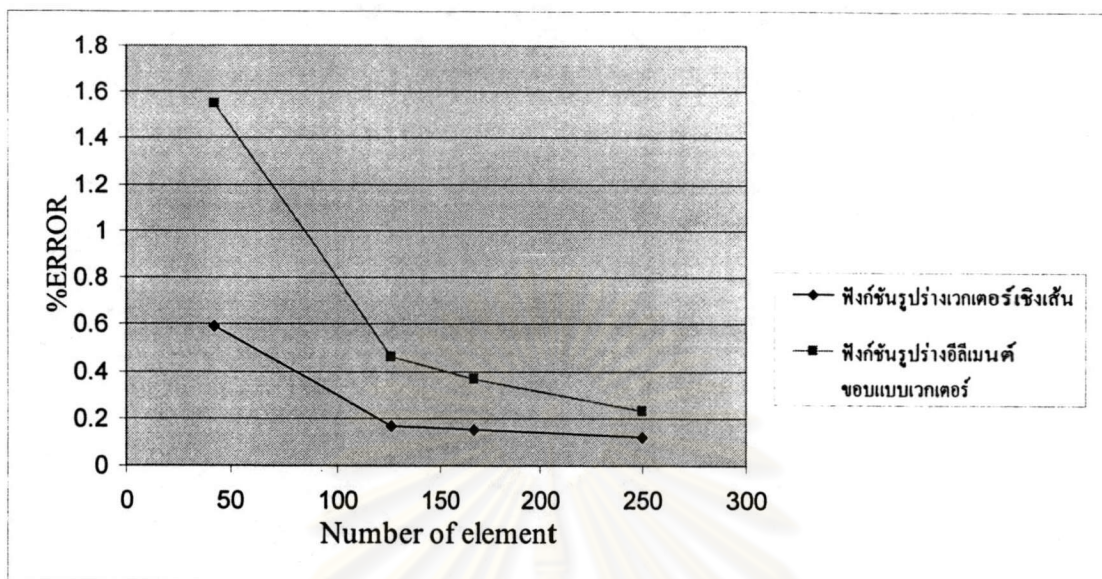
ตารางที่ 3.1 แสดงผลการเปรียบเทียบของค่า  $\beta$  ซึ่งคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น เมื่อเพิ่มจำนวนอีลิเมนต์ตามที่แสดงในตารางค่า  $\beta$  ที่คำนวณได้จะแม่นยำมากขึ้นตามจำนวนอีลิเมนต์ที่เพิ่มขึ้น ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่นำเสนอมีความถูกต้อง

เมื่อนำผลการคำนวณค่า  $\beta$  ซึ่งคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์มาแสดงในตารางที่ 3.2 ผลที่ได้แสดงให้เห็นในทำนองเดียวกันกับตารางที่ 3.1 ว่าเมื่อเพิ่มจำนวนอีลิเมนต์แล้วผลเฉลยที่ได้ยิ่งถูกต้องมากยิ่งขึ้น

เพื่อเป็นการเปรียบเทียบวิธีการคำนวณที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์และฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์จึงแสดงผลการเปรียบเทียบโดยใช้กราฟดังรูปที่ 3.10 ซึ่งเป็นการแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด (percent error) ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (3.42)

$$\%error = \left| \frac{FEM - exact}{exact} \right| \times 100 \quad (3.42)$$

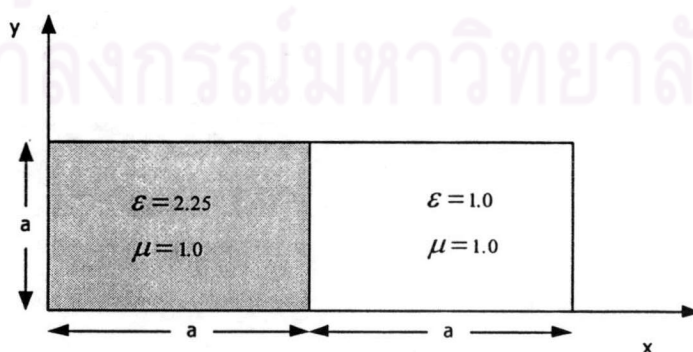
แกนตั้งเป็นแกนของเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด แกนนอนเป็นแกนของจำนวนอีลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณ กราฟเส้นทึบและกราฟเส้นประแสดงผลการคำนวณด้วยวิธีที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นและฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ตามลำดับ ผลจากกราฟในรูปที่ 3.10 แสดงให้เห็นว่าเมื่อใช้จำนวนอีลิเมนต์ไม่มากวิธีที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์เชิงเส้นจะให้ความแม่นยำมากกว่าวิธีที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ และถ้าให้จำนวนอีลิเมนต์มากพอระดับหนึ่งผลการคำนวณด้วยวิธีการทั้งสองจะให้ความแม่นยำใกล้เคียงกัน แต่วิธีที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยกว่าวิธีที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นครึ่งหนึ่งทำให้การคำนวณเร็วขึ้นด้วยเหตุนี้จึงสรุปได้ว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ดีกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นเมื่อใช้จำนวนอีลิเมนต์เป็นจำนวนมาก



รูปที่ 3.10 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่เปลี่ยนแปลงตามจำนวนอีลิเมนต์เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบและฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น

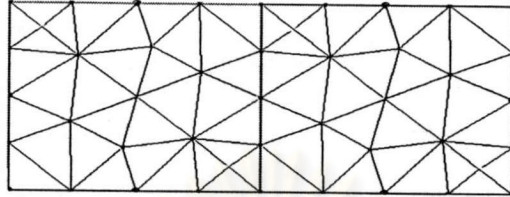
### 3.4.2 ท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริก

ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมที่บรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกและอากาศว่างเป็นอีกตัวอย่างหนึ่งที่ใช้ในการทดสอบความแม่นยำจากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์และฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์เชิงเส้น โดยที่ครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์มีค่า  $\epsilon_r = 2.25$  และมีค่าความขรุขระได้สัมพัทธ์  $\mu_r = 1.0$  และอีกครึ่งหนึ่งเป็นตัวกลางอากาศว่างดังแสดงในรูป 3.11



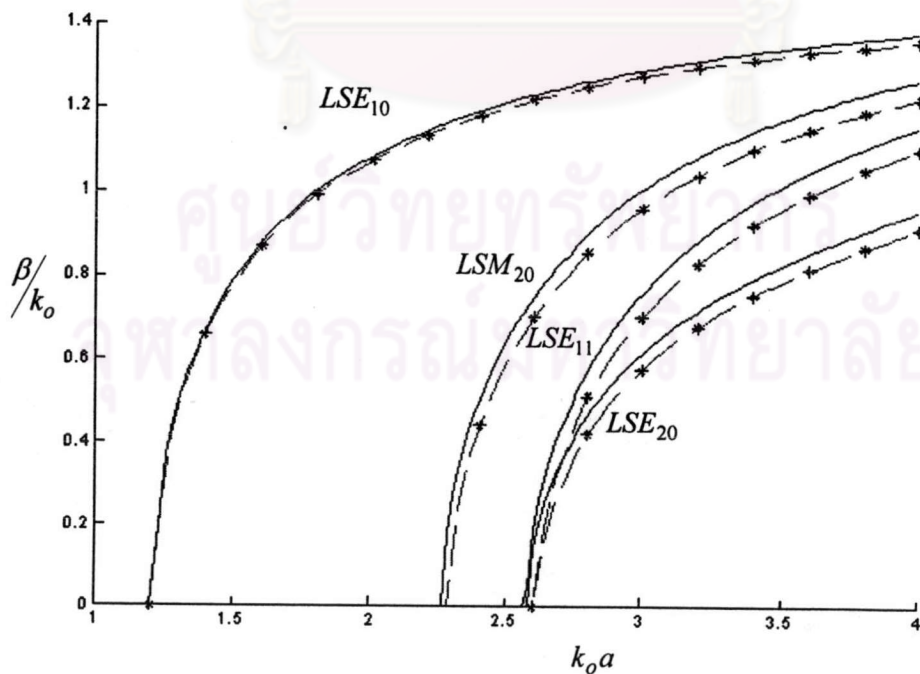
รูปที่ 3.11 ลักษณะท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริก

และเพื่อให้สอดคล้องกับวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ภาคตัดขวางของปัญหาจะถูกแบ่งออกมาเป็นอีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมดังรูป 3.12



รูปที่ 3.12 ลักษณะการแบ่งอีลิเมนต์ท่อนำคลื่นที่บรรจุตัวกลางไดอิเล็กตริก

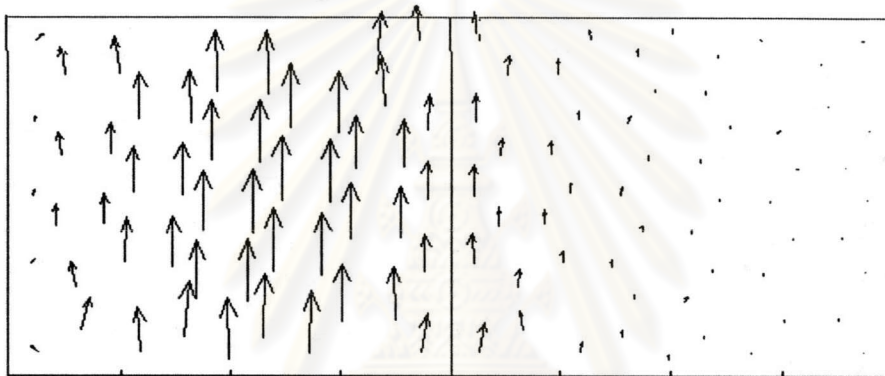
ในการคำนวณตามระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นจะแบ่งออกเป็นอีลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 112 อีลิเมนต์ ผลการคำนวณที่ได้จะแสดงอยู่ในรูปของกราฟดิสเพอร์ชันดังแสดงในภาพที่ 3.13 เส้นกราฟเส้นทึบและเส้นประแสดงถึงผลการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นและฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ตามลำดับ ผลการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์จะถูกนำไปเปรียบเทียบระหว่างผลของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์และผลเฉลยแม่นยำตรงพบว่าสอดคล้องกันดี อย่างไรก็ตามจะเห็นว่าผลการคำนวณค่า  $\beta$  ของโหมดอันดับสูงโดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ให้ความแม่นยำต่ำกว่าวิธีที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น



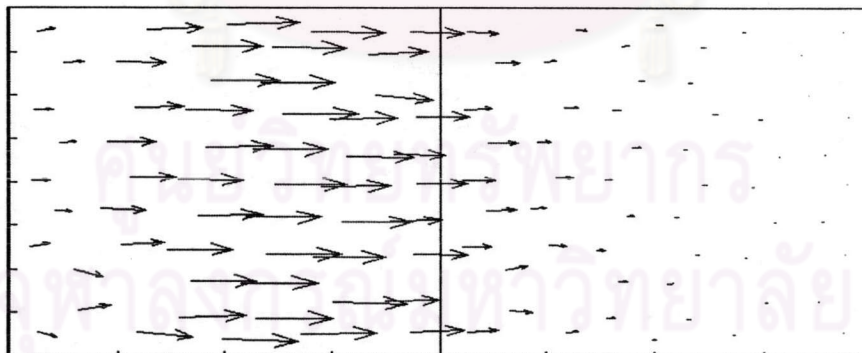
รูปที่ 3.13 กราฟดิสเพอร์ชันของท่อนำคลื่นที่บรรจุตัวกลางไดอิเล็กตริก

- โดยที่
- \* ผลเฉลยจากวิธีแมนตรง
  - ผลเฉลยจากไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างที่ปรับปรุง
  - ผลเฉลยจากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น
- LSE: (Longitudinal Section Electric) คือไฮบริด โมด  
 LSM: (Longitudinal Section Magnetic) คือ ไฮบริด โมด

ผลการคำนวณแบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าและแบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กบน  
 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นในโมด  $LSE_{10}$ ,  $LSM_{20}$ ,  $LSE_{11}$  และ  $LSE_{20}$  แสดงในรูป 3.14 (ก)-(ค)

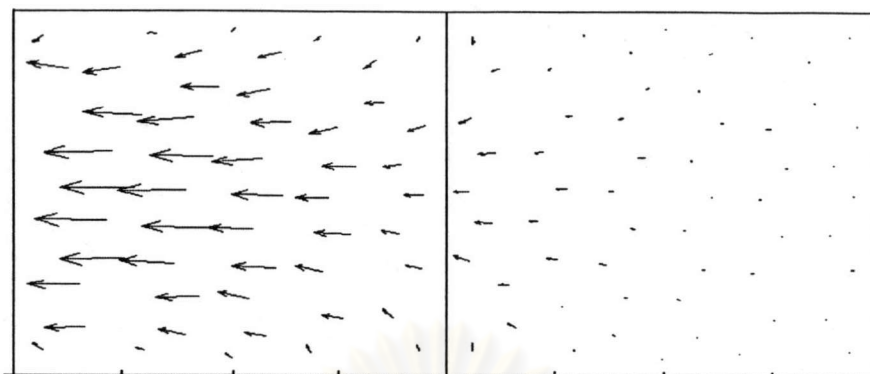


(ก) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้า โมด  $LSE_{10}$

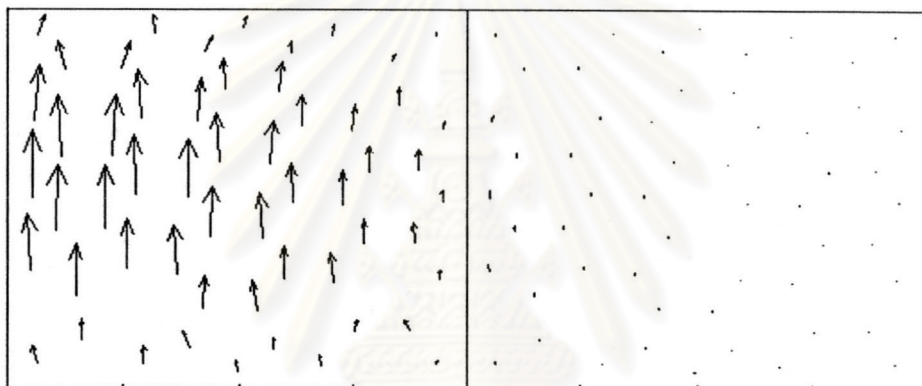


(ข) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็ก โมด  $LSE_{10}$

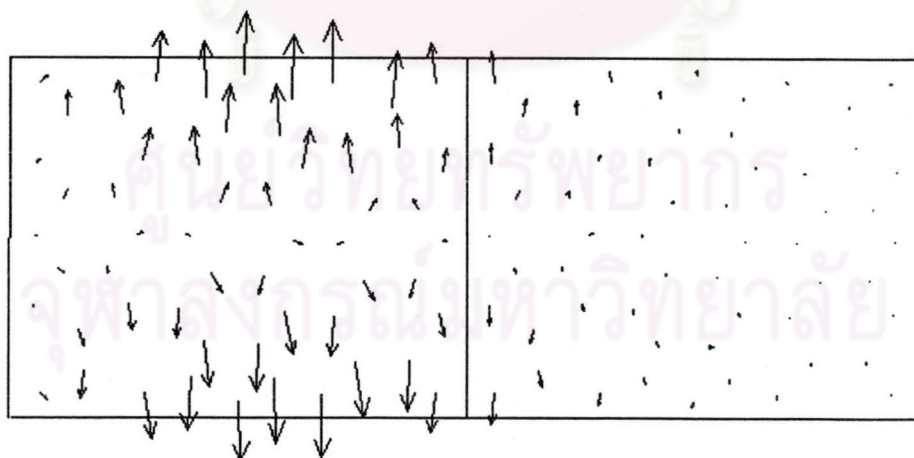




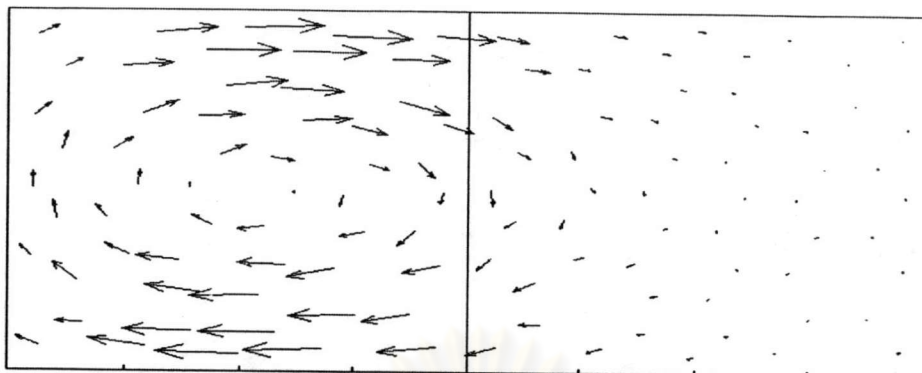
(ค) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้า โมด  $LSM_{11}$



(ง) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็ก โมด  $LSM_{11}$



(จ) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้า โมด  $LSE_{11}$



(จ) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็ก โมด  $LSE_{11}$

รูปที่ 3.14 (ก)-(จ) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่นำคลื่นภาคตัดขวางสี่เหลี่ยม  
ที่บรรจุตัวกลางไดอิเล็กตริก

ตารางที่ 3.3 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุ  
ไดอิเล็กตริกด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์อีลิเมนต์ขอบเปรียบเทียบกับ  
กับผลเฉลยแม่นยำตรง

จำนวนอีลิเมนต์	จำนวนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า	โมด LSE10	โมด LSM11	โมด LSE11	โมด LSE20
20	60	1.484377	1.279286	1.142745	0.723354
44	132	1.345036	1.246075	1.018081	0.964789
64	192	1.388312	1.201391	1.105001	0.986051
112	336	1.36707	1.2166688	1.153287	0.953754
164	492	1.360101	1.2152608	1.126236	0.933055
ผลเฉลยแม่นยำตรง		1.3591312	1.227459	1.1092301	0.92413

ตารางที่ 3.4 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0a = 4.0$  ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง

จำนวนอีลิเมนต์	จำนวนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า	โมด LSE10	โมด LSM11	โมด LSE11	โมด LSE20
20	120	1.346815	1.188477	1.05361	0.856095
44	264	1.352971	1.212188	1.078659	0.885005
64	384	1.355495	1.214016	1.087061	0.899527
112	672	1.357004	1.221237	1.097275	0.908992
164	984	1.357584	1.222237	1.094201	0.918972
ผลเฉลยแม่นยำตรง		1.3591312	1.227459	1.1092301	0.92413

ตารางที่ 3.3 แสดงค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0a = 4.0$  ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์โดยการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์ที่แบ่งพื้นที่หน้าตัดท่อนำคลื่นออกเป็นจำนวนอีลิเมนต์ 20, 44, 64, 112 และ 164 อีลิเมนต์ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเห็นได้ว่าหากจำนวนอีลิเมนต์เพิ่มขึ้นผลลัพธ์ที่ได้จะมีความผิดพลาดลดน้อยลง

ตารางที่ 3.4 แสดงค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0a = 4.0$  ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์โดยการใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นโดยแบ่งพื้นที่หน้าตัดท่อนำคลื่นออกเป็นจำนวนอีลิเมนต์ 20, 44, 64, 112 และ 164 อีลิเมนต์โดยมีจำนวนตัวแปร 120 ถึง 984 ตัวแปร ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเห็นได้ว่าหากจำนวนอีลิเมนต์เพิ่มขึ้นผลลัพธ์ที่ได้จะมีความผิดพลาดลดน้อยลง

### 3.5 สรุป

ผลการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้องค์ประกอบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางโดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์อีลิเมนต์ขอบจะให้ค่าแม่นยำและสอดคล้องกับวิธีการอื่นดังผลเปรียบเทียบการคำนวณดิสเพอร์ชันในกรณีท่อนำคลื่นภาคตัดขวางรูปร่างกลมกลวงและท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริก และเมื่อเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดกับจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในกรณีท่อนำคลื่นภาคตัดขวางรูปร่างกลมกลวงเห็นได้ว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์อีลิเมนต์ขอบแบบเวกเตอร์จะมีการลู่ออกที่เร็วกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์เชิงเส้น



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย