บทที่ 3

การดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยดังนี้

การสร้างเครื่องมือในการวิจัย

ผู้วิจัยได้สร้างเครื่องมือในการวิจัยครั้งนี้ คือ สร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อนสำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม เหตุที่ผู้วิจัยเลือกสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากได้พิจารณาองค์ประกอบหลายอย่างเป็นหลักในการเลือกบทเรียนดังนี้ คือ

1. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญต่อวิทยาการต่างๆเป็นอันมาก ทั้งนี้เพราะความเจริญอย่างรวดเร็วของวิทยาการต่างๆเป็นผลสืบเนื่องมาจากความเจริญทางด้านคณิตศาสตร์ แม้นักวิทยาศาสตร์สมัยปัจจุบันก็เชื่อว่าผลงานใหม่ๆทางวิทยาศาสตร์ได้รับความสำเร็จ เพราะมีรากฐานทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ ดังนั้นในประเทศไทยจึงมีการเคลื่อนไหวเกี่ยวกับการปฏิรูปหลักสูตรและวิธีสอนคณิตศาสตร์ โดยการจัดตั้งสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีขึ้น เพื่อจะได้ศึกษาค้นคว้าวิจัยและปรับปรุงหลักสูตร จัดทำแบบเรียน อุปกรณ์ตลอดจนอบรมครูเกี่ยวกับการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ขึ้น ซึ่งขณะนี้กำลังอยู่ในโครงการทดลองใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์แผนใหม่อยู่

จากความสำคัญดังกล่าว ผู้วิจัยจึงเห็นว่าควรจะได้ศึกษาวิธีการสอนแบบใหม่ๆ เพื่อเป็นการส่งเสริมการสอนคณิตศาสตร์ให้ได้ผลดียิ่งขึ้น จึงได้สร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเพื่อเป็นการศึกษาว่าการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมจะได้ผลดีเพียงไร

2. ผู้วิจัยเคยศึกษาวิชาคณิตศาสตร์มาก่อน จึงมีความสนใจและมีประสบการณ์ในเรื่องนี้ เมื่อเขียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์จะเขียนได้ดีกว่าเรื่องอื่นๆ และจะช่วยให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้ดียิ่งขึ้น

3. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเนื้อหาต่อเนื่องกัน มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอน คงตัวไม่เปลี่ยนแปลง ง่ายแก่การจัดแบ่งบทเรียนให้เป็นกรอบย่อยๆ และคำตอบของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ก็เป็นคำตอบที่เฉพาะเจาะจงง่ายที่จะตัดสินว่าคำตอบใดผิดคำตอบใดถูก ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาที่เหมาะสมจะนำมาสร้างเป็นบทเรียนแบบโปรแกรม

4. บทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" ยังไม่มีผู้ใดสร้างมาก่อน

5. บทเรียนเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" นี้เนื้อหาวิชาพอเหมาะกับเวลาที่ใช้ในการวิจัย โดยคาดว่าจะสามารถสร้างเสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด คือ ประมาณ 4 เดือน

6. วัตถุประสงค์ในบทเรียนเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" ที่สร้างขึ้นนี้สามารถเป็นไปได้จริง เพราะเขียนเป็นวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่สามารถวัดได้และเป็นไปได้

การเลือกชนิดของบทเรียน

บทเรียนแบบโปรแกรมที่สำคัญและนิยมแพร่หลายมี 2 ชนิด คือ บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงและบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขา ผู้วิจัยได้พิจารณาเลือกสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงประเภทให้นักเรียนตอบเองโดยการเติมคำตอบในช่องว่าง ซึ่งเป็นแบบของสกินเนอร์ (Skinner) สาเหตุที่เลือกสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดนี้ เพราะ

1. เทคนิคการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงเป็นแบบที่นิยมกันมากที่สุด และสร้างง่ายที่สุด จึงเป็นวิธีการที่เหมาะสมแก่ผู้วิจัยเป็นอย่างมาก เพราะผู้วิจัยยังไม่เคยสร้างบทเรียนมาก่อน ในการริเริ่มสิ่งใดก็ตามควรทำจากสิ่งที่ง่ายก่อน การที่จะใช้เทคนิคการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขาอาจจะก่อให้เกิดความยุ่งยากสับสน เนื่องจากการเขียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขาต้องอาศัยการศึกษาค้นคว้ามาก และต้องมีความชำนาญเป็นพิเศษอีกด้วย

2. บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงเป็นชนิดที่ใช้ได้ง่าย โดยให้นักเรียนเติมคำตอบด้วยตนเอง ซึ่งจะช่วยย้ำความเข้าใจให้แน่นแฟ้น ทำให้เกิดการเรียนรู้มากขึ้นและจำได้นาน ซึ่งตรงกันข้ามกับบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขาที่อาจก่อให้เกิดความยากลำบากแก่นักเรียนที่จะต้องเปิดย้อนกลับไปกลับมาเพื่อหาคำตอบ และเป็นสาเหตุที่จะทำให้นักเรียนสับสนจนเป็นผลกระทบกระเทือนต่อการเรียนรู้ของนักเรียนได้

3. จากผลการวิจัยต่างๆที่ศึกษามาปรากฏว่า บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงและชนิดสาขาใช้สอนให้ผลไม่แตกต่างกัน และบางท่านยังกล่าวว่าบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงให้ผลดีกว่าด้วย เช่น

ปี ค.ศ. 1962 โดนัล โจเซฟ เดสสาร์ท[1] (Donald Joseph Dessart) ได้วิจัยการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมตอนต้น โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 7 กลุ่ม สอนด้วยครูกลุ่มหนึ่ง นอกนั้นให้เรียนจากบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดต่างๆ เขาสรุปผลว่า นักเรียนเข้าใจได้ไม่แตกต่างกันมากนัก แต่การสอนโดยครูกินเวลามากกว่า และครูไม่สามารถช่วยนักเรียนเป็นรายบุคคลได้ วิธีสอนที่ได้ผลดีที่สุด คือ การสอนด้วยบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงซึ่งประกอบด้วยกรอบย่อยๆเรียงจากง่ายไปหายาก

ปี ค.ศ. 1965 บีน ดี. จี.[2](Beane, D.G.)ได้ทำการวิจัยเรื่อง "A

---

[1]Donald Joseph Dessart."A Study of Programmed Learning with Superior Eighth Grade Student," <u>AV Communication Review</u>, 14(Fall,1966),p.53-57

[2]Beane, D.G. "A Comparison of Linear and Branching Techniques of Programmed Instruction in Plane Geometry," <u>Journal of Education Research</u>,LVIII(March,1965),319-326

Comparison of Linear and Branching Techniques of Programmed Instruction in Plane Geometry โดยการศึกษาเปรียบเทียบบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงกับบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขา โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 12 คน กลุ่มแรกเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขาเป็นเวลา 2 สัปดาห์ กลุ่มที่สองเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขาหนึ่งสัปดาห์แล้วเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงในหนึ่งสัปดาห์ต่อมา กลุ่มที่สามเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงหนึ่งสัปดาห์แล้วเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขาในอีกสัปดาห์ต่อมา ส่วนกลุ่มที่สี่เรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรงเป็นเวลาสองสัปดาห์ ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนทั้ง 4 กลุ่ม ให้สัมฤทธิผลทางการเรียนไม่แตกต่างกัน และพวกที่มีความสามารถสูงในกลุ่มที่สองและกลุ่มที่สามจะชอบเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรง

การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม

หลังจากที่ผู้วิจัยได้พิจารณาวิชาและเลือกชนิดของบทเรียนที่จะสร้างแล้ว ได้ดำเนินการสร้างบทเรียนดังนี้ คือ

1. ศึกษาเนื้อหาวิชาเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" อย่างละเอียดจากตำราทั้งภาษาไทยและต่างประเทศ เพื่อตรวจสอบเนื้อหาและขอบข่ายของเนื้อหา และกำหนดขอบข่ายของเนื้อหาวิชาให้เหมาะสมกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม ที่จะเรียนได้

2. วางโครงเรื่องที่จะเขียนบทเรียนเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 2 ตอน ดังนี้ คือ

2.1 จำนวนจินตภาพ

2.2 จำนวนเชิงซ้อน

3. สร้างวัตถุประสงค์ของบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" โดยแบ่งวัตถุประสงค์ของบทเรียนนี้ออกเป็น 2 ชนิด คือ วัตถุประสงค์ทั่วไปและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม การสร้างได้เขียนวัตถุประสงค์ทั่วไปของการสอนเรื่อง

"จำนวนเชิงซ้อน"ขึ้นก่อน เพื่อจะกำหนดได้ว่าจะสอนให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องใดบ้าง หลังจากนั้นจึงสร้างวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยระบุพฤติกรรมที่จะให้นักเรียนแสดงออกในการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในวัตถุประสงค์ทั่วไป โดยการกำหนดคำกิริยาที่เฉพาะเจาะจงลงไปให้สามารถสังเกตและวัดผลการกระทำได้

4. สร้างแบบทดสอบ ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" เป็นแบบปรนัย โดยการแบ่งแบบทดสอบออกเป็น 2 ตอน ตอนที่ 1 เป็นแบบเลือกตอบ (Multiple choice) มีจำนวน 30 ข้อ และกำหนดไว้ 30 คะแนน และตอนที่ 2 เป็นแบบเติมข้อความ (Short Answer)มีจำนวน 20 ข้อ กำหนด 70 คะแนน การสร้างแบบทดสอบได้ยึดวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมเป็นหลัก ซึ่งแสดงว่ามีความแม่นตรงตามโครงสร้าง (Construct Validity)และให้ครอบคลุมเนื้อหาวิชาตามที่ได้กำหนดไว้ ซึ่งแสดงว่าแบบทดสอบมีความแม่นตรงตามเนื้อหา (Content Validity) ข้อทดสอบที่สร้างขึ้นมิได้นำไปทดลองสอบกับนักเรียนโรงเรียนใดเพื่อนำมาหาความเชื่อถือได้ของแบบทดสอบ เพราะเนื้อหาวิชาในแบบทดสอบเป็นเนื้อหาวิชาใหม่ที่นำมาสอนนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ **สาม** จึงไม่สามารถจะหากลุ่มตัวอย่างมาทดลองทำข้อทดสอบได้

5. สร้างบทเรียนแบบโปรแกรมให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ทั่วไปและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม และให้ถูกต้องตามหลักวิธีการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม โดยแบ่งเนื้อหาวิชาออกเป็นกรอบย่อยๆ ซึ่งประกอบด้วยกรอบให้ความรู้ กรอบฝึกหัด กรอบทดสอบ และกรอบทบทวน เป็นดังนี้ตั้งแต่ต้นจนจบ

การเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ในการเลือกกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งออกเป็น 3 ขั้น คือ

ขั้นทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามของโรงเรียนสหะพาณิชย์ สังกัดกรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ โดยการสุ่มนักเรียนจำนวน 3 คน จากนักเรียนที่เรียนในห้องที่อ่อนที่สุดของโรงเรียนมาทำแบบทดสอบก่อนเรียนบทเรียน (Pretest) และคัดเลือกคนที่ได้คะแนนแบบทดสอบน้อยเป็นผู้เรียนบทเรียนแบบโปรแกรมที่สร้างขึ้น เพื่อจะได้ทราบข้อบกพร่องของบทเรียนและศึกษาหาแนวทางในการปรับปรุงแก้ไขบทเรียน

ขั้นทดลองแบบกลุ่มเล็ก ใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามของโรงเรียนเดิม โดยการคัดเลือกจากนักเรียนที่มีผลการเรียนค่อนข้างอ่อน โดยถือเอาคะแนนสอบประจำภาคกลางเป็นเกณฑ์ ใช้นักเรียนจำนวน 10 คน เป็นกลุ่มทดลองในครั้งนี้

ขั้นทดลองภาคสนาม ใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามทั้งหมดของโรงเรียนสหะพาณิชย์ โดยคัดนักเรียนที่เคยทดลองในขั้นหนึ่งต่อหนึ่งและขั้นกลุ่มเล็กออก นักเรียนที่ทดลองในขั้นนี้มีจำนวน 100 คน ซึ่งเป็นชาย 76 คน และเป็นหญิง 24 คน

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ขั้นการทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ผู้วิจัยได้นำบทเรียนแบบโปรแกรมที่สร้างขึ้นซึ่งเนื้อหาวิชาแบ่งเป็น 2 ตอน ตอนที่ 1 มี 81 กรอบ 186 คำตอบ ตอนที่ 2 มี 74 กรอบ 190 คำตอบ ไปทดลองกับนักเรียนแบบหนึ่งต่อหนึ่ง วิธีทำได้ดำเนินการดังต่อไปนี้ คือ ผู้วิจัยได้อธิบายวัตถุประสงค์ในการทดลองเรียนด้วยบทเรียนและขอความร่วมมือในการทดลองเรียนด้วยบทเรียนพร้อมทั้งอธิบายวิธีเรียนบทเรียนแบบโปรแกรม ก่อนเรียนบทเรียนผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบ เพื่อวัดความ

รู้พื้นฐานของนักเรียนก่อนเรียนบทเรียน แล้วให้นักเรียนเริ่มเรียนบทเรียน โดยให้เอากระดาษแข็งปิดคำเฉลยไว้ แล้วลงมืออ่านบทเรียนทีละกรอบ และตรวจคำตอบโดยการเลื่อนกระดาษแข็งลงไป เพื่อให้ดูคำตอบที่เฉลยไว้ ขณะที่นักเรียนทำบทเรียน ถ้าปรากฏว่าทำบทเรียนผิด ผู้วิจัยจะอภิปรายค้นหาสาเหตุที่นักเรียนตอบเช่นนั้น และจดบันทึกคำตอบที่นักเรียนตอบไว้ ดำเนินเช่นนี้จนจบบทเรียน เมื่อนักเรียนทำบทเรียนจบจึงให้ทำแบบทดสอบอีกครั้ง เพื่อวัดความรู้หลังจากเรียนบทเรียน แล้วจึงนำบทเรียนและแบบทดสอบมาปรับปรุงแก้ไขตามวิธีการเขียนบทเรียนในด้านเทคนิคการเขียน ในด้านความเรียง และการจัดลำดับเนื้อหา และความถูกต้องตามหลักวิชา

ขั้นการทดลองแบบกลุ่มเล็ก ผู้วิจัยได้อธิบายวัตถุประสงค์ในการทดลองเรียนบทเรียน และขอความร่วมมือในการทดลองเรียนบทเรียนครั้งนี้ พร้อมทั้งอธิบายวิธีการเรียนบทเรียนนี้เช่นเดียวกับการทดลองครั้งแรก บทเรียนแบบโปรแกรมที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้แบ่งเป็น 2 ตอน ตอนที่ 1 มี 90 กรอบ 202 คำตอบ ตอนที่ 2 มี 79 กรอบ 209 คำตอบ การทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบทั้งก่อนและหลังเรียนบทเรียนเช่นกัน แต่บทเรียนแบบโปรแกรมที่นำมาใช้ทดลองในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้เว้นช่องว่างไว้ทางขวามือของทุกกรอบ เพื่อให้นักเรียนเขียนเหตุผลสำหรับกรอบที่นักเรียนทำผิด เพื่อผู้วิจัยจะได้นำมาวิเคราะห์ดูว่ากรอบใดที่นักเรียนทำผิดพลาดมาก และรู้สาเหตุของการผิดพลาด จะได้เป็นแนวทางในการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนแบบโปรแกรมให้ดีขึ้น และการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยได้บันทึกเวลาในการทำแบบทดสอบของนักเรียนแต่ละคนไว้ด้วย

ขั้นการทดลองภาคสนาม ผู้วิจัยได้อธิบายวัตถุประสงค์ในการทดลองเรียนบทเรียน และขอความร่วมมือเหมือนการทดลองครั้งที่หนึ่งและครั้งที่สองที่ผ่านมา ส่วนการอธิบายวิธีการเรียนบทเรียนนั้นเนื่องจากผู้วิจัยได้พิมพ์คำแนะนำในการเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมไว้ที่บทเรียนแบบโปรแกรมแล้ว จึงมีการอธิบายเพิ่มเติม

อีกเพียงเล็กน้อย วัตถุประสงค์ในการทดลองครั้งนี้จะแตกต่างจากการทดลองครั้งที่หนึ่งและครั้งที่สอง เพราะการทดลองสองครั้งแรกมีวัตถุประสงค์เพื่อหาข้อบกพร่องที่ควรแก้ไข ส่วนการทดลองภาคสนามเป็นการทดลองเพื่อจะทราบว่าบทเรียนที่สร้างขึ้นนี้ได้มาตรฐานที่วางไว้หรือไม่ ในการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยได้แบ่งบทเรียนซึ่งมีทั้งหมด 175 กรอบ 417 คำตอบ ออกเป็น 2 ตอน ตอนที่ 1 มี 97กรอบ 211 คำตอบ ตอนที่ 2 มี 78 กรอบ 206 คำตอบ โดยให้นักเรียนทำตอนที่ 1 ก่อน เมื่อทำเสร็จแล้วให้หยุดพักแล้วจึงให้ทำตอนที่ 2 ใช้เวลาหนึ่งวันในการทดลองครั้งนี้ ก่อนเรียนและหลังเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมได้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบชุดเดียวกันเพื่อจะนำข้อมูลมาวิเคราะห์ดูความก้าวหน้าในการเรียนบทเรียน

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยได้นำข้อมูลที่ได้จากการทดลองไปวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติต่าง ๆ ดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยของคะแนนคำนวณจากสูตร[3]

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$$

$\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยของคะแนน

$\sum x$ = ผลรวมของคะแนนทั้ง N จำนวน

N = จำนวนคะแนนทั้งหมด

2. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของมัชฌิมเลขคณิต ใช้สูตร[4]

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S.D.}{\sqrt{N-1}}$$

เมื่อ $S.D. = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$

---

[3]ประคอง กรรณสูต , <u>สถิติศาสตร์ประยุกต์สำหรับครู</u> (พระนคร: ไทยวัฒนาพานิช,2515),หน้า 40

[4]ประคอง กรรณสูต , <u>เรื่องเดียวกัน</u> หน้า 51,82

S.D. = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง

$\sigma_{\bar{x}}$ = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของมัชฌิมเลขคณิต

3. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) ใช้สูตร[5]

$$r_{xy} = \frac{N\sum xy - \sum x\sum y}{\sqrt{[N\sum x^2-(\sum x)^2][N\sum y^2-(\sum y)^2]}}$$

N = จำนวนนักเรียนทั้งหมด

r_{xy} = สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนของข้อทดสอบก่อนเรียนบทเรียนกับคะแนนของข้อทดสอบหลังเรียนบทเรียน

x = คะแนนของข้อทดสอบก่อนเรียนบทเรียนของนักเรียนแต่ละคน

y = คะแนนของข้อทดสอบหลังเรียนบทเรียนของนักเรียนแต่ละคน

4. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างระหว่างคะแนนทั้งสองชุด ใช้สูตร[6]

$$\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}} - 2r_{xy}\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}}$$

$\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}$ = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างมัชฌิมเลขคณิตระหว่างคะแนนทั้งสองชุด

$\sigma_{\bar{x}}$ = ความคลาดเคลื่อนของมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน

$\sigma_{\bar{y}}$ = ความคลาดเคลื่อนของมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน

---

[5]ประคอง กรรณสูต , เรื่องเดียวกัน, หน้า 106

[6]ประคอง กรรณสูต , เรื่องเดียวกัน, หน้า 87

5. ทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างคะแนนของนักเรียนก่อนเรียนบทเรียนและหลังเรียนบทเรียน โดยการทดสอบซี (Z-test)[7]

$$z = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}}$$

$\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยของคะแนนข้อทดสอบก่อนเรียนบทเรียน

$\bar{y}$ = ค่าเฉลี่ยของคะแนนข้อทดสอบหลังเรียนบทเรียน

$\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}$ = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างระหว่างมัชฌิมเลขคณิต

6. การหาความเชื่อถือได้ (Reliability)ของแบบทดสอบใช้สูตรของ Hoyt[8]

$$\text{ความเชื่อถือได้} = 1 - \frac{\text{ความแปรปรวนคลาดเคลื่อน}}{\text{ความแปรปรวนระหว่างนักเรียนแต่ละคน}}$$

$$\text{ความแปรปรวนระหว่างนักเรียน} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} t_i)^2}{nN}}{N-1}$$

$$\text{ความแปรปรวนคลาดเคลื่อน} = \frac{SS_E}{(n-1)(N-1)}$$

$$SS_E = SS_{total} - SS_t - SS_p$$

$$SS_{total} = \frac{(\sum_{i=1}^{N} t_i)(nN - \sum_{i=1}^{N} t_i)}{nN}$$

---

[7] ประคอง กรรณสูต, เรื่องเดียวกัน. หน้า 87

[8] Robert L. Thorndike, "Reliability" Educational Measurement (Wisconsin: George Banta Publishing Co.,1961), p.590-591

$$SS_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} t_i)^2}{nN}$$

$$SS_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} p_i)^2}{nN}$$

เมื่อ t_i = คะแนนที่นักเรียนคนที่ i ทำได้

p_i = ข้อสอบคำตอบที่ i ที่นักเรียนตอบได้

n = จำนวนคำตอบของข้อสอบทั้งหมด

N = จำนวนนักเรียนทั้งหมด

SS_E = Error sum of Square

SS_{total} = Total sum of Square

SS_t = The sum of Square among student

SS_p = The sum of Square among item

7. การหาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการวัด (Standard Error of Measurement) ใช้สูตร[9]

$$\sigma_{meas} = \sigma_1\sqrt{1-r_{11}}$$

σ_{meas} = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการวัด

σ_1 = ความคลาดเคลื่อนของคะแนนของข้อทดสอบ

r_{11} = ความเชื่อถือได้ของแบบทดสอบ

---

[9] Jum C. Nurmally, Jr. "Reliability of Measurements" <u>Test and Measurement</u> (New York: McGraw-Hill Book Co., 1959) p. 101

8. ทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างนักเรียนและความแตกต่างระหว่างคำตอบของแบบทดสอบใช้การทดสอบแบบเอฟ (F-test)[10]

Source of variation	SS	d.f.	MS	F
Student	SS_t	N-1	MS_t	$\frac{MS_t}{MS_E}$
Item	SS_i	n-1	MS_i	$\frac{MS_i}{MS_E}$
Error	SS_E	(N-1)(n-1)	MS_E	
Total	SS_{total}	Nn-1		

เมื่อ $MS_t = \frac{SS_t}{N-1}$

$$MS_i = \frac{SS_i}{n-1}$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{(N-1)(n-1)}$$

MS_t = Mean of Square among Student

MS_i = Mean of Square among item

MS_E = Error mean of Square

[10] B.J. Winner "Design and Analysis of Single-Factor Experiment" Statistical Principals in Experimental Design (New York: McGraw-Hill Book Co., 1971), p.241

วัตถุประสงค์ทั่วไปและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

การสอนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน เริ่มต้นด้วยเรื่องต่อไปนี้

1. จำนวนเต็ม
2. จำนวนที่เขียนในรูปเศษส่วน
3. จำนวนที่เขียนในรูปทศนิยม
4. จำนวนบวกและจำนวนลบ
5. จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปของรากกำลังใด ๆ ของจำนวนบวก
6. ลักษณะของจำนวนจริง

วัตถุประสงค์ทั่วไปที่เขียนไว้จะเป็นหัวข้อใหญ่ วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมเป็นหัวข้อย่อย และมี (ก) แทนความรู้แต่ละกรอบที่สนองวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมในข้อนั้น

วัตถุประสงค์ทั่วไปและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมของบทเรียนมีดังนี้

1. ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องจำนวนจริง

1.1 นักเรียนบอกลักษณะของจำนวนจริงได้ (ก. 9)

1.2 นักเรียนยกตัวอย่างจำนวนจริงได้ (ก.10-13)

2. ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องจำนวนจินตภาพ

2.1 นักเรียนบอกนิยามของจำนวนจินตภาพได้ (ก. 15)

2.2 นักเรียนยกตัวอย่างจำนวนจินตภาพได้ (ก. 17)

2.3 เมื่อกำหนดจำนวนมาให้ นักเรียนบอกได้ว่าจำนวนใดเป็นจำนวนจินตภาพ (ก. 18-22)

2.4 นักเรียนใช้สัญลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$ ได้ (ก.24-32)

2.5 นักเรียนเขียนรูปทั่วไปของจำนวนจินตภาพได้ (ก.33)

2.6 นักเรียนทำจำนวนจินตภาพที่ยังไม่ได้อยู่ในรูปผลสำเร็จให้อยู่ในรูปผลสำเร็จได้ (ก.34-52)

3. ให้นักเรียนรู้วิธีแก้สมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนจินตภาพ

3.1 เมื่อกำหนดสมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนจินตภาพมาให้นักเรียนคำนวณหารากของสมการกำลังสองนั้นได้ (ก.53-58)

4. ให้นักเรียนเข้าใจเรื่องการยกกำลังของจำนวนจินตภาพ i

4.1 นักเรียนแทนค่า i ที่ยกกำลังให้อยู่ในรูปผลสำเร็จได้ (ก.59-75)

5. ให้นักเรียนรู้วิธีบวกและลบจำนวนจินตภาพ

5.1 เมื่อกำหนดจำนวนจินตภาพ 2 จำนวนให้ นักเรียนหาผลบวกของจำนวนจินตภาพทั้งสองได้ (ก.76-78)

5.2 เมื่อกำหนดจำนวนจินตภาพจำนวนหนึ่งให้ นักเรียนเขียนจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของจำนวนจินตภาพนั้นได้ (ก.79-82)

5.3 เมื่อกำหนดจำนวนจินตภาพ 2 จำนวนให้ นักเรียนหาผลลบของจำนวนจินตภาพทั้งสองนั้นได้ (ก.83-87)

6. ให้นักเรียนรู้วิธีคูณจำนวนจินตภาพ

6.1 เมื่อกำหนดจำนวนจินตภาพตั้งแต่ 2 จำนวนให้ นักเรียนหาผลคูณของจำนวนจินตภาพเหล่านั้นได้ (ก.88-93)

7. ให้นักเรียนเข้าใจวิธีเปลี่ยนจำนวนใด ๆ ที่มีส่วนเป็นจำนวนจินตภาพให้อยู่ในรูปผลสำเร็จได้

7.1 เมื่อกำหนดเศษส่วนที่มีส่วนเป็นจำนวนจินตภาพให้ นักเรียนทำเศษส่วนนั้นให้อยู่ในรูปผลสำเร็จได้ (ก.94-97)

8. ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

8.1 นักเรียนบอกนิยามของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.100)

8.2 เมื่อกำหนดจำนวนมาให้ นักเรียนบอกได้ว่าจำนวนใดเป็นจำนวนเชิงซ้อน (ก.101-103, ฦ.105-106)

8.3 เมื่อกำหนดจำนวนจริงให้ นักเรียนเขียนจำนวนจริงนั้นให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.107-109)

8.4 เมื่อกำหนดจำนวนจินตภาพให้ นักเรียนเขียนจำนวนจินตภาพนั้นให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.110-112)

8.5 นักเรียนสรุปความหมายของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.113)

9. ให้นักเรียนรู้ความหมายการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

9.1 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนเท่ากันให้ นักเรียนบอกได้ว่าส่วนใดของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองนั้นเท่ากัน (ก.114)

9.2 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ทราบค่าจำนวนหนึ่งให้เท่ากับจำนวนเชิงซ้อนที่ทราบค่าจำนวนหนึ่งให้ นักเรียนต้องนำเรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนมาคำนวณหาส่วนที่ไม่ทราบค่าของจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกต้อง (ก.18-24)

10. ให้นักเรียนรู้วิธีบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน

10.1 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนให้ นักเรียนคำนวณผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.122-128)

10.2 นักเรียนหารูปทั่วไปของการบวกจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.129)

10.3 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่งให้ นักเรียนเขียนจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้ถูกต้อง (ก.130-135)

10.4 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนให้ นักเรียนคำนวณผลลบของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.136-140)

10.5 นักเรียนหารูปทั่วไปของการลบจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.141)

11. ให้นักเรียนรู้วิธีคูณจำนวนเชิงซ้อน

11.1 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนให้ นักเรียนคำนวณผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองนั้นได้ถูกต้อง (ก.143-146)

11.2 นักเรียนหารูปทั่วไปของการคูณจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนได้ (ก.147)

12. ให้นักเรียนรู้ความหมายของคอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน

12.1 นักเรียนบอกนิยามคอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ก.149)

12.2 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่งให้ นักเรียนเขียนคอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้ถูกต้อง (ก.150-156)

13. ให้นักเรียนเข้าใจวิธีหารจำนวนเชิงซ้อน

13.1 เมื่อกำหนดเศษส่วนที่มีส่วนเป็นจำนวนเชิงซ้อนให้ นักเรียนต้องเขียนเศษส่วนนั้นให้อยู่ในรูปง่ายได้ (ก.157-160)

13.2 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนให้ นักเรียนหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองได้ (ก.161-162)

14. ให้นักเรียนมีความรู้เรื่องสมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

14.1 เมื่อกำหนดสมการกำลังสองให้ นักเรียนบอกลักษณะรากของสมการกำลังสองนั้นได้ถูกต้อง (ก.165-168)

14.2 เมื่อกำหนดสมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนให้ นักเรียนคำนวณหารากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการที่กำหนดให้นั้นได้ (ก.169-172)

14.3 เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากของสมการกำลังสองสมการหนึ่งให้ นักเรียนแสดงได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้เป็นรากของสมการกำลังสองที่กำหนดให้ (ก.173-175)

ลักษณะของแบบทดสอบ

แบบทดสอบในตอนที่ 1 เรื่องจำนวนจินตภาพ มีดังนี้ คือ

ข้อ 1-4, 9-10, 12 ทดสอบความรู้เรื่องจำนวนจริง

ข้อ 5,6,11,13-20 ทดสอบความรู้เรื่องจำนวนจินตภาพ

ข้อ 21-22 ทดสอบความรู้เรื่องจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของจำนวนจินตภาพ

ข้อ 31 ทดสอบความรู้เรื่องการแก้สมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนจินตภาพ

ข้อ 32-34 ทดสอบความเข้าใจเรื่องการยกกำลังต่าง ๆ ของจำนวนจินตภาพ i

ข้อ 35-36 ทดสอบความรู้ในการบวกและลบจำนวนจินตภาพ

ข้อ 37-38 ทดสอบความรู้ในการคูณจำนวนจินตภาพ

ข้อ 39-40 ทดสอบความเข้าใจในการเปลี่ยนจำนวนใด ๆ ที่มีส่วนเป็นจำนวนจินตภาพให้อยู่ในรูปง่าย

แบบทดสอบในตอนที่ 2 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน มีดังนี้ คือ

ข้อ 7,8,25-27 ทดสอบความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 28,41 ทดสอบความรู้เรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 23-24 ทดสอบความรู้เรื่องจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 29-30 ทดสอบความรู้เรื่องคอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 42-45 ทดสอบความรู้เรื่องการบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 46-47 ทดสอบความรู้เรื่องการคูณจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 48-49 ทดสอบความเข้าใจเรื่องการหารจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 50 ทดสอบความรู้เรื่องสมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

บทเรียนแบบโปรแกรม

เรื่อง

จำนวนเชิงซ้อน

สำหรับ

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่**สาม**

สร้างโดย

น.ส. วาณี ตรีศิริพิศาล

ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการเรียนบทเรียน

ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นของนักเรียนก่อนที่จะเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมชุดนี้ มีดังนี้ คือ

1. มีความรู้ภาษาไทยในเรื่องการอ่านจับใจความ การตีความหมาย และการเขียนได้ดี

2. มีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในเรื่องการบวก การลบ การคูณ และการหารเลขจำนวนเต็ม

3. สามารถใช้สูตรคูณได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว

4. มีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในเรื่องเศษส่วนและทศนิยม

5. มีความรู้พื้นฐานในเรื่องการแยกตัวประกอบ

6. มีความรู้พื้นฐานในการแก้สมการเส้นตรง และสมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนจริง

คำแนะนำในการใช้บทเรียนแบบโปรแกรม

บทเรียนแบบโปรแกรมนี้ ไม่ใช่เป็นแบบทดสอบ แต่เป็นบทเรียนที่จะช่วยเสริมสร้างความรู้ความเข้าใจให้แก่นักเรียน ดังนั้น ในการเรียนบทเรียนแบบนี้ นักเรียนควรปฏิบัติดังนี้

1. เปิดบทเรียนทีละหน้าตั้งแต่หน้าแรกจนถึงหน้าสุดท้าย นักเรียนไม่ควรเปิดข้ามหน้า เพราะจะทำให้สับสนในเนื้อหาวิชา

2. ใช้กระดาษแข็งหรือสมุดปิดคำตอบทางซ้ายมือ ก่อนที่จะเรียนบทเรียน

3. อ่านคำอธิบายในแต่ละกรอบให้ละเอียด ขณะที่อ่านให้สังเกตและทำความเข้าใจบทเรียนแต่ละกรอบ แล้วเขียนคำตอบลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้

4. ดูคำตอบที่อยู่ทางซ้ายมือในกรอบต่อมา โดยการเลื่อนกระดาษแข็งหรือสมุดแล้วตรวจดูคำตอบ เช่น เมื่อนักเรียนตอบคำถามในกรอบที่ 2 แล้ว ก็ให้ดูคำตอบของกรอบที่ 2 จากทางซ้ายมือของกรอบที่ 3 โดยการเลื่อนกระดาษแข็งหรือสมุดที่บังไว้ เพื่อตรวจสอบคำตอบด้วยตัวนักเรียนเอง

5. ถ้าทำถูกก็ให้ทำกรอบต่อไป แต่ถ้าทำผิดตรงกรอบใด ก็ต้องกลับไปอ่านให้เข้าใจถูกต้องเสียก่อน แล้วแก้คำตอบที่ผิดนั้น เพราะถ้าผ่านเลยไปจะทำให้ไม่เข้าใจกรอบอื่น ๆ

6. ต้องซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่เปิดดูคำตอบก่อนลงมือทำแต่ละกรอบ

7. การเรียนบทเรียนแบบนี้ไม่จำเป็นต้องทำให้เสร็จพร้อมกับเพื่อน ๆ เมื่อนักเรียนเหนื่อยหรือเมื่อยล้าก็ให้หยุดพักผ่อนแล้วกลับมาทำต่อภายหลังจนจบ เสร็จแล้วควรกลับไปอ่านทบทวนอีกครั้งจะทำให้เข้าใจและจดจำในเนื้อหาวิชาได้ดียิ่งขึ้น

บทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม
ตอนที่ 1
จำนวนจินตภาพ

	ก.1 1,2,3,4,5,6,7 จำนวนเหล่านี้เรียก<u>จำนวนเต็มบวก</u>
	ก.2 -1,-2,-3,-4,-5,-6,-7, จำนวนเหล่านี้เรียก จำนวน.........
เต็มลบ	ก.3 $\underbrace{-4,-3,-2,-1}_{\text{จำนวนเต็มลบ}},0,\underbrace{1,2,3,4}_{\text{จำนวนเต็มบวก}}$, จำนวนเหล่านี้เรียก <u>จำนวนเต็ม</u> ดังนั้น จำนวนเต็ม คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปต่อไปนี้ 1. จำนวนเต็ม....... 2. จำนวนศูนย์(0) 3. จำนวนเต็ม.......
ลบ บวก	ก.4 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{8}{12}, \frac{-9}{11}, \frac{-22}{7}$ จำนวนเหล่านี้เป็นจำนวน ที่เขียนอยู่ในรูป.........

เศษส่วน	ก.5 $1.414,\ 2.97,\ -3.56,\ 0.\dot{1}\dot{7},\ -0.\dot{7}9\dot{8}$ จำนวนเหล่านี้เป็นจำนวนที่เขียนอยู่ในรูป.........
ทศนิยม	ก.6 $1,2,3,4,5,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ 1.414,0.\dot{1}\dot{7}$ จำนวนเหล่านี้ เรียก<u>จำนวนบวก</u>
	ก.7 $-1,-2,-3,-4,-5,-6,-\frac{9}{11},-\frac{22}{7},-3.14,-0.\dot{1}7\dot{7}$ จำนวนเหล่านี้เรียกจำนวน.........
ลบ	ก.8 $2,3,11,7,9,0.17,1.76,\frac{3}{4}$ จำนวนเหล่านี้เรียก <u>จำนวนบวก</u> ดังนั้น $\sqrt{2}$,$\sqrt[3]{3}$,$\sqrt[4]{11}$,$\sqrt[3]{9}$,$\sqrt{0.17}$, $\sqrt{1.76}$,$\sqrt{\frac{3}{4}}$ จึงเป็นจำนวนที่อยู่ในรูปรากกำลังใดๆ ของจำนวน.........(บวก/ลบ)

บวก

ก.9

$\underbrace{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,}_{\text{จำนวนเต็ม}}$ $\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{-9}{11}, \frac{-22}{7}, \frac{5}{7}}_{\text{เศษส่วน}}$

$\underbrace{1.414, -3.56, 0.17}_{\text{ทศนิยม}}$ $\underbrace{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{0.17}, \sqrt{\frac{3}{4}}}$

จำนวนที่อยู่ในรูปรากกำลังใดๆของจำนวนบวก

จำนวนเหล่านี้เรียก <u>จำนวนจริง</u>

ดังนั้น <u>จำนวนจริง</u> คือ จำนวนใดๆที่อยู่ในรูปต่อไปนี้

1. จำนวนเต็ม
2. ....
3. ....
4. รากกำลังใดๆของจำนวนบวก

เศษส่วน

ทศนิยม

ก.10

จงยกตัวอย่างจำนวนจริงที่อยู่ในรูปจำนวนเต็มมา 2 จำนวน

........,........

1, 2

ก.11

จงยกตัวอย่างจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเศษส่วนมา 2 จำนวน

.... , ...

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$

ก.12

จงยกตัวอย่างจำนวนจริงที่อยู่ในรูปทศนิยมมา 2 จำนวน

.... , ...

0.56,2.5	ก.13 จงยกตัวอย่างจำนวนจริงที่อยู่ในรูปรากกำลังใดๆของจำนวนบวกมา 2 จำนวน .... , ...
$\sqrt{5}$, $-\sqrt{21}$	ก.14 -1,-3 ,-4,-9,-11,-1.7,-3.6 จำนวนเหล่านี้เรียกจำนวน.......(บวก/ลบ)
ลบ	ก.15 $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-11}$, $\sqrt{-1.7}$, $\sqrt{-3.6}$ จำนวนเหล่านี้เป็น<u>จำนวนไม่จริง</u> เพราะไม่ได้อยู่ในรูปของจำนวนเต็ม, เศษส่วน, ทศนิยม และรากกำลังใดๆของจำนวนบวก เราเรียกจำนวนเหล่านี้ว่า <u>จำนวนจินตภาพ</u> ดังนั้น <u>จำนวนจินตภาพ</u> คือ จำนวนใดๆที่อยู่ในรูปรากกำลังที่สองของจำนวน........
ลบ	ก.16 1,2,3,4,5 เป็นจำนวนเต็มบวก และ-1,-2,-3,-4,-5 เป็นจำนวนเต็มลบ ในทำนองเดียวกัน $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-11}$ เป็นจำนวนจินตภาพบวก และ $-\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-4}$ $-\sqrt{-9}$, $-\sqrt{-11}$ เป็นจำนวนจินตภาพ.......
ลบ	ก.17 จงยกตัวอย่างจำนวนจินตภาพมา 2 จำนวน ......, ...

$\sqrt{-3}$, $\sqrt{-5}$	ก.18 $-\sqrt{3}$ เป็นจำนวน..........(จริง/จินตภาพ)
จริง	ก.19 $-\sqrt{15}$ เป็นจำนวน..........(จริง/จินตภาพ)
จินตภาพ	ก.20 $\sqrt{1.28}$ เป็นจำนวน........(จริง/จินตภาพ)
จริง	ก.21 $-\sqrt{-1.2}$ เป็นจำนวน........(จริง/จินตภาพ)
จินตภาพ	ก.22 $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ เป็นจำนวน..........(จริง/จินตภาพ)
จินตภาพ	ก.23 เราสามารถเขียน $\sqrt{-4} = \sqrt{4\times(-1)} = \sqrt{4}\times\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$ ได้ เพื่อความสะดวกต่อการคำนวณ เราจึงเขียน i แทนรากกำลังที่สองของ -1 $\therefore$ เราเขียน i แทน $\sqrt{-1}$ เราเขียน 2i แทน $2\sqrt{-1}$ ได้
	ก.24 เราเขียน 3...... แทน $3\sqrt{-1}$

i	ก.25 เราเขียน........ แทน $4\sqrt{-1}$
$4i$	ก.26 เราเขียน........แทน $5\sqrt{-1}$
$5i$	ก.27 เราเขียน.......แทน $-7\sqrt{-1}$
$-7i$	ก.28 เราเขียน......แทน $-29\sqrt{-1}$
$-29i$	ก.29 เราเขียน $5i$ แทน 5....
$\sqrt{-1}$	ก.30 เราเขียน $47i$ แทน......
$47\sqrt{-1}$	ก.31 เราเขียน $-52i$ แทน.....
$-52\sqrt{-1}$	ก.32 เราเขียน $\frac{2}{3}i$ แทน.......

$\frac{2}{3}\sqrt{-1}$	ก.33 3i ,4 i ,-29i ,47i ,-7i ,-52i ,$\frac{2}{3}$i จำนวนเหล่านี้เป็นจำนวนจินตภาพที่อยู่ในรูป i โดยมี 3,4,-29,47,-7,-52,$\frac{2}{3}$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น ถ้าให้ b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่ใช่ 0 รูปทั่วไปของจำนวนจินตภาพเป็น........
bi	ก.34 นักเรียนทราบว่า การถอดรากกำลังที่สอง คือ การนำจำนวนที่ซ้ำกันสองจำนวนภายในเครื่องหมายรากกำลังที่สอง ($\sqrt{\quad}$) ออกมาหนึ่งจำนวน เช่น $\sqrt{9}=\sqrt{3\times 3}$ จะเห็นว่า มี 3 อยู่ภายในเครื่องหมายรากกำลังที่สอง 2 จำนวน จึงนำเอา 3 ออกมาหนึ่งจำนวน $\therefore \sqrt{9} = 3$ การเขียน $\sqrt{-9}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะทำได้ดังนี้ $\sqrt{-9} = \sqrt{9\times(-1)}$ $= \sqrt{9}\times\sqrt{-1}$ $= \sqrt{3\times 3}\times\sqrt{-1}$ $= 3\times\sqrt{-1}$ แต่ $\sqrt{-1} = i$ $\therefore \sqrt{-9} = 3i$

ก.35

จงเขียน $\sqrt{-4}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times (-1)}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{-1}$$
$$= \ldots\ldots \times \sqrt{-1}$$

แต่ $\sqrt{-1} = i$

$\therefore \sqrt{-4} = \ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{4} \times \sqrt{-1}$

$2 \times \sqrt{-1}$

$2\,i$

ก.36

จงเขียน $\sqrt{-16}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\sqrt{-16} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{4 \times 4} \times \sqrt{\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots \times \sqrt{\ldots\ldots}$$

แต่ $\sqrt{-1} = i$

$\therefore \sqrt{-16} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{15 \times (-1)}$

$\sqrt{16} \times \sqrt{-1}$

$\sqrt{4 \times 4} \times \sqrt{-1}$

$4 \times \sqrt{-1}$

$4i$

ก.37

จงเขียน $\sqrt{-25}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\sqrt{-25} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots \times \ldots\ldots} \times \sqrt{-1}$$
$$= \ldots\ldots \times \sqrt{-1}$$
$$= \ldots\ldots i$$

$\sqrt{25 \times (-1)}$ $\sqrt{25} \times \sqrt{-1}$ $\sqrt{5 \times 5} \times \sqrt{-1}$ $5 \times \sqrt{-1}$ $5i$	ก.38 จงเขียน $\sqrt{-49}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ $\sqrt{-49} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$ $= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$ $= \sqrt{\ldots\ldots \times \ldots\ldots} \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots i$
$\sqrt{49 \times (-1)}$ $\sqrt{49} \times \sqrt{-1}$ $\sqrt{7 \times 7} \times \sqrt{-1}$ $7 \times \sqrt{-1}$ $7i$	ก.39 $\because \sqrt{-4} = 2i$ ดังนั้นเราจึงเขียน $2i$ แทน $\sqrt{-4}$ ได้
	ก.40 นักเรียนคิดว่าเราจะเขียน......แทน $\sqrt{-16}$
$4i$	ก.41 นักเรียนคิดว่าเราจะเขียน......แทน $\sqrt{-64}$
$8i$	ก.42 นักเรียนคิดว่าเราจะเขียน......แทน $\sqrt{-81}$
$9i$	ก.43 นักเรียนคิดว่าเราจะเขียน......แทน $\sqrt{-121}$

11 i

ก.44

นักเรียนทราบว่า $\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= 2 \times 2 \times \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

การเขียน $\sqrt{-32}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะทำได้ดังนี้

$\sqrt{-32} = \sqrt{32 \times (-1)}$

$= \sqrt{32} \times \sqrt{-1}$

$= \sqrt{32}\ i$

แต่ $\sqrt{32}$ $4\sqrt{2}$

$\sqrt{-32}$ $4\sqrt{2}\ i$

แต่เนื่องจากการเขียน $4\sqrt{2}\ i$ อาจเขียนผิดพลาดเป็น $4\sqrt{2i}$ ได้ง่าย เราจึงนิยมเขียน $4i\sqrt{2}$

ก.45

จงเขียน $\sqrt{-8}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$\sqrt{-8} = \sqrt{8 \times (-1)}$

$= \sqrt{8} \times \sqrt{\ldots}$

$= \sqrt{2 \times 2 \times 2} \times \sqrt{\ldots}$

$= 2\sqrt{2} \times \sqrt{-1}$

$= 2\sqrt{2} \times \ldots$

$= 2\,i\sqrt{2}$

$\sqrt{8} \times \sqrt{-1}$ $\sqrt{2 \times 2 \times 2} \times \sqrt{-1}$ $2\sqrt{2} \times i$	ก.46 จงเขียน $\sqrt{-12}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ $\sqrt{-12} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$ $= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$ $= \sqrt{\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots} \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots \times i$ $= \ldots i \ldots$
$\sqrt{12 \times (-1)}$ $\sqrt{12} \times \sqrt{-1}$ $\sqrt{2 \times 2 \times 2} \times \sqrt{-1}$ $2\sqrt{3} \times \sqrt{-1}$ $2\sqrt{3} \times i$ $2i\sqrt{3}$	ก.47 จงเขียน $\sqrt{-18}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ $\sqrt{-18} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$ $= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$ $= \sqrt{\ldots \times \ldots \times \ldots} \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots \times i$ $= \ldots i \ldots$
$\sqrt{18 \times (-1)}$ $\sqrt{18} \times \sqrt{-1}$ $\sqrt{3 \times 3 \times 2} \times \sqrt{-1}$ $3\sqrt{2} \times \sqrt{-1}$ $3\sqrt{2} \times i$ $3i\sqrt{2}$	ก.48 จงเขียน $\sqrt{-48}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ $\sqrt{-48} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$ $= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$ $= \sqrt{\ldots \times \ldots \times \ldots} \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots\ldots \times \sqrt{-1}$ $= \ldots\ldots \times i$ $= \ldots\ldots$

$\sqrt{48 \times (-1)}$

$\sqrt{48} \times \sqrt{-1}$

$\sqrt{4 \times 4 \times 3} \times \sqrt{-1}$

$4\sqrt{3} \times \sqrt{-1}$

$4\sqrt{3} \times i$

$4i\sqrt{3}$

ก.49

การเขียน $\sqrt{-6}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ ทำได้ดังนี้

$$\sqrt{-6} = \sqrt{6 \times (-1)}$$
$$= \sqrt{6} \times \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{6} \times i$$
$$= i\sqrt{6}$$ เป็นผลสำเร็จแล้ว

เพราะ $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3}$ ซึ่งไม่สามารถแยกตัวประกอบซ้ำได้

ก.50

จงเขียน $\sqrt{-39}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\sqrt{-39} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots} \times i$$
$$= i \ldots\ldots$$

$\sqrt{39 \times (-1)}$

$\sqrt{39} \times \sqrt{-1}$

$\sqrt{39} \times i$

$i\sqrt{39}$

ก.51

จงเขียน $\sqrt{-43}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\sqrt{-43} = \sqrt{\ldots\ldots \times (-1)}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots} \times i$$
$$= \ldots\ldots$$

$\sqrt{43 \times (-1)}$

$\sqrt{43} \times \sqrt{-1}$

$\sqrt{43} \times i$

$i\sqrt{43}$

ก.52

จงเขียน $\sqrt{-24}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\sqrt{-24} = \sqrt{24 \times (-1)}$$
$$= \sqrt{\ldots} \times \sqrt{\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots \times \ldots \times \ldots} \times \sqrt{-1}$$
$$= \ldots \times \sqrt{-1}$$
$$= \ldots \times i$$
$$= \ldots\ldots$$

$\sqrt{24 \times (-1)}$

$\sqrt{24} \times \sqrt{-1}$

$\sqrt{2 \times 2 \times 6} \times \sqrt{-1}$

$2\sqrt{6} \times \sqrt{-1}$

$2\sqrt{6} \times i$

$2i\sqrt{6}$

ก.53

เราจะพบว่ารากของสมการกำลังสองอาจจะเป็นจำนวนจริง หรือจำนวนจินตภาพก็ได้

สมการกำลังสองที่มีรากของสมการเป็นจำนวนจริง จะอยู่ในรูป เช่น $x^2 - 4 = 0$ ซึ่งเราสามารถหารากของสมการได้ดังนี้

<u>วิธีทำ</u> $x^2 - 4 = 0$

เอา 4 บวกทั้งสองข้าง

$x^2 - 4 + 4 = 4$

$\therefore x^2 = 4$ ------(1)

แต่นักเรียนรู้ว่า $2^2 = 4$ ------(2)

(1)=(2) $\therefore x^2 = 2^2$

$\therefore x = 2$

และนักเรียนรู้ว่า $(-2)^2 = 4$ ------(3)

(1)=(3) $\therefore x^2 = (-2)^2$

$\therefore x = -2$

$\therefore x = 2$ และ -2

จึงเห็นได้ว่ารากของสมการกำลังสองนี้เป็นจำนวนจริง 2 จำนวน คือ <u>จำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบ</u>

ก.54

รากของสมการกำลังสองที่เป็นจำนวนจินตภาพก็มี 2 จำนวน เช่นกัน คือ จำนวนจินตภาพบวกและจำนวนจินตภาพลบ สมการกำลังสองที่มีรากของสมการเป็นจำนวนจินตภาพจะเขียนอยู่ในรูป เช่น $x^2+9 = 0$ ซึ่งเราจะหารากของสมการได้ดังนี้

วิธีทำ $x^2+9 = 0$

เอา 9 ลบออกทั้งสองข้าง

$$x^2+9-9 = -9$$

$$x^2 = -9$$

ถอดรากกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\therefore x = \sqrt{-9} \text{ และ } -\sqrt{-9}$$

หรือเขียนใหม่ $x = \pm\sqrt{-9}$

$$= \pm\sqrt{9\times(-1)}$$

$$= \pm\sqrt{9}\times\sqrt{-1}$$

$$= \pm\sqrt{3\times 3}\times i$$

$$= \pm 3i$$

รากของสมการนี้ คือ $+3i$ และ $-3i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

ก.55

จงแก้สมการ $x^2 + 4 = 0$

เอา 4 ลบออกทั้งสองข้าง

$$x^2 + 4 - 4 = -4$$

$$\therefore x^2 = \ldots\ldots$$

ถอดรากกำลังที่สองทั้งสองข้าง

$$\therefore x = \ldots\ldots\ \text{และ}\ \ldots\ldots$$

$$= \pm\sqrt{-4}$$

$$= \pm\sqrt{\ldots \times (-1)}$$

$$= \pm\sqrt{\ldots} \times \sqrt{-1}$$

$$= \pm \ldots i$$

$\therefore$ รากของสมการนี้ คือ $+2i$ และ $-2i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

-4

$\sqrt{-4}$ และ $-\sqrt{-4}$

$\pm\sqrt{4 \times (-1)}$

$\pm\sqrt{4} \times \sqrt{-1}$

$\pm 2i$

ก.56

จงแก้สมการ $x^2 + 25 = 0$

เอา 25 ลบออกทั้งสองข้าง

$$x^2 + 25 - 25 = -25$$

$$\therefore x^2 = \ldots\ldots$$

ถอดรากกำลังที่สองทั้งสองข้าง

$$\therefore x = \pm\sqrt{-25}$$

$$= \pm\sqrt{\ldots \times (-1)}$$

$$= \pm\sqrt{\ldots} \times \sqrt{-1}$$

$$= \pm \ldots i$$

รากของสมการนี้ คือ ..... และ .....ซึ่งเป็นจำนวน...

...........(จริง/จินตภาพ)

-25

$\pm\sqrt{25\times(-1)}$

$\pm\sqrt{25}\times\sqrt{-1}$

$\pm 5i$

$+5i$, $-5i$

จินตภาพ

ก.57

จงแก้สมการ $x^2+8 = 0$

เอา 8 ลบออกทั้งสองข้าง

$$x^2+8-8 = -8$$

$$\therefore x^2 = \ldots\ldots\ldots$$

ถอดรากกำลังที่สองทั้งสองข้าง

$$\therefore x = \pm\sqrt{\ldots\ldots}$$

$$= \pm\sqrt{\ldots\times(-1)}$$

$$= \pm\sqrt{8}\times\sqrt{-1}$$

$$= \pm\sqrt{2\times2\times2}\times i$$

$$= \pm\ \ldots\ldots\times i$$

$$= \pm\ 2i\sqrt{2}$$

$\therefore$ รากของสมการนี้ คือ $2i\sqrt{2}$ และ $-2i\sqrt{2}$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

-8

$\pm\sqrt{-8}$

$\pm\sqrt{8\times(-1)}$

$\pm 2\sqrt{2}\times i$

ก.58

จงแก้สมการ $x^2+32 = 0$

เอา 32 ลบออกทั้งสองข้าง

$$x^2+32-32 = -32$$

$$\therefore x^2 = \ldots\ldots$$

ถอดรากกำลังที่สองทั้งสองข้าง

$$\therefore x = \pm\sqrt{\ldots\ldots}$$

$$= \pm\sqrt{\ldots\ldots\times(-1)}$$

$$= \pm\sqrt{\ldots\ldots}\times\sqrt{-1}$$

$$= \pm\sqrt{4\times4\times2}\times i$$

$$= \pm\ \ldots\ldots\ldots\times i$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$\therefore$ รากของสมการนี้ คือ $+4i\sqrt{2}$ และ $-4i\sqrt{2}$ ซึ่งเป็นจำนวน..........(จริง/จินตภาพ)

-32

$\pm\sqrt{-32}$

$\pm\sqrt{32\times(-1)}$

$\pm\sqrt{32}\times\sqrt{-1}$

$\pm 4\sqrt{2}\times i$

$\pm 4i\sqrt{2}$

จินตภาพ

ก.59

ถ้าให้ $a = \sqrt{2}$

$$a^2 = \sqrt{2}\times\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2\times2}$$

$$= 2$$

การยกกำลังสองของจำนวนจินตภาพ i ก็ใช้วิธีเดียวกัน เช่น

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{(-1)\times(-1)}$$

$$= -1$$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง

ก.60

สรุป $\boxed{i^2 = -1}$

ก.61

การหาค่าของ $2i^2$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ ทำได้ดังนี้

$$2i^2 = 2(-1)$$

$$= -2$$

ก.62

จงหาค่าของ $5i^2$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$5i^2 = 5\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

(-1)

-5

ก.63

จงหาค่าของ $-27i^2$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$-27i^2$ = ...

= ....

$-27(-1)$

27

ก.64

การยกกำลัง 3 ของ i จะทำได้ดังนี้

$i^3 = i \times i \times i$

$= i^2 \times i$

แต่ $i^2 = -1$

$i^3 = -1 \times i$

$= -i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

ก.65

การหาค่าของ $7i^3$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ ทำได้ดังนี้

$7i^3 = 7 \times i^2 \times i$

$= 7 \times (-1) \times i$

$= 7 \times (-i)$

$= -7i$

ก.66

จงหาค่าของ $32i^3$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$32i^3 = 32 \times i^2 \times i$

$= 32 \times (-1) \times i$

= 32 × (....)

= ......

$(-i)$

$-32i$

ก.67

จงหาค่าของ $-61i^3$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$
\begin{aligned}
-61i^3 &= -61 \times i^2 \times i \\
&= -61 \times (-1) \times i \\
&= -61 \times (\ldots\ldots) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$(-i)$

$61i$

ก.68

จงหาค่าของ i^4 ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$
\begin{aligned}
i^4 &= i \times i \times i \times i \\
&= i^2 \times \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

แต่ $i^2 = -1$

$$
\begin{aligned}
i^4 &= -1 \times \ldots\ldots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นจำนวนจริง

---

i^2

-1

ก.69

จงหาค่าของ i^5 ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$i^5 = i^4 \times \ldots\ldots$$

แต่ $i^4 = 1$

$$
\begin{aligned}
\therefore i^5 &= \ldots\ldots \times i \\
&= i
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

i

1

ก.70

จงหาค่าของ i^6 ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$i^6 = i^4 \times \ldots\ldots$

แต่ $i^4 = 1$

$i^2 = -1$

$\therefore i^6 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง

---

i^2

1×-1

-1

ก.71

จงหาค่าของ i^7 ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$i^7 = i^4 \times i^2 \times \ldots\ldots$

แต่ $i^4 = 1$

$i^2 = -1$

$\therefore i^7 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

$= -i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

---

i

$1 \times (-1) \times i$

ก.72

จงหาค่าของ i^8 ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$i^8 = i^4 \times \ldots\ldots$

แต่ $i^4 = 1$

$\therefore i^8 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง

i^4 1×1 1	ก.73 $i^1 = i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ $i^3 = -i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ $i^5 = i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ $i^7 = -i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ <u>สรุป</u> i ที่อยู่ในรูปยกกำลังที่เป็นจำนวนคี่จะมีค่าเป็นจำนวน......... (จริง/จินตภาพ)
จินตภาพ	ก.74 $i^2 = -1$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง $i^4 = 1$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง $i^6 = -1$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง $i^8 = 1$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง <u>สรุป</u> i ที่อยู่ในรูปยกกำลังที่เป็นจำนวนคู่จะมีค่าเป็นจำนวน.........(จริง/จินตภาพ)
จริง	ก.75 $i^1 = i$, $i^5 = i$ $i^2 = -1$, $i^6 = -1$ $i^3 = -i$, $i^7 = -i$ $i^4 = 1$, $i^8 = 1$ จะเห็นว่าค่าของ i ยกกำลัง 1,2,3, และ 4 เป็น i ,-1 , -i และ 1 ค่าของ i ยกกำลัง 5,6,7,8, เป็น i ,-1, -i และ 1 เช่นกัน ดังนั้นค่าของ i ยกกำลังต่างๆจะเป็น i , -1, -i และ 1 เรียงสลับกันไปเป็นชุดๆ ชุดละ 4 ตัว ดังนั้นนักเรียนคิดว่า i^9 = ..., i^{10} = ... i^{11} = ..., i^{12} = ...

i , -1 $-i$, 1	ก.76 นักเรียนเคยเรียนการบวกของพจน์ทางพีชคณิตว่า $2x+8x = (2+8)x$ $= 10x$ การบวกจำนวนจินตภาพก็ใช้วิธีเดียวกัน ตัวอย่าง จงหา $2i + 8i$ $2i + 8i = (2+8)i$ $= 10i$
	ก.77 จงหา $6i + 7i$ $6i + 7i = (\ldots + \ldots)i$ $= \ldots\ldots\ldots$
$(6+7)$ $13i$	ก.78 จงหา $23i + 51i$ $23i + 51i = (\ldots + \ldots)i$ $= \ldots\ldots\ldots$
$(23+51)$ $74i$	ก.79 เพราะว่า $3i + (-3i) = 0$ เราจึงเรียก $-3i$ ว่าเป็นจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $3i$ และเรียก $3i$ ว่าเป็นจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $-3i$
	ก.80 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $9i$ คือ ......

$-9i$	ก.81 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $-27i$ คือ.......
$27i$	ก.82 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ bi คือ.......
$-bi$	ก.83 การลบจำนวนจินตภาพ 2 จำนวน คือ การบวกจำนวนจินตภาพที่เป็นตัวตั้งกับจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของจำนวนจินตภาพที่เป็นตัวลบ ตัวอย่าง จงหา $7i - 2i$ จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $2i$ คือ $-2i$ $7i - 2i = 7i + (-2i)$ $= \{7+(-2)\}i$ $= 5i$
	ก.84 จงหา $4i - 7i$ จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $7i$ คือ..... $\therefore 4i - 7i = 4i + (.....)$ $= \{4 + (.....)\}i$ $= -3i$

-7 i
-7 i
-7

ก.85

จงหา $-3i - 9i$

จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $9i$ คือ......

$$-3i - 9i = -3i + (\ldots\ldots)$$
$$= \{-3 + (\ldots\ldots)\} i$$
$$= \ldots\ldots$$

-9 i
-9 i
-9
-12 i

ก.86

จงหา $11i - (-5i)$

จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $-5i$ คือ.......

$$11i - (-5i) = 11i + (\ldots\ldots)$$
$$= (11 + \ldots\ldots)i$$
$$= \ldots\ldots\ldots$$

---

5 i
5 i
5
16 i

ก.87

จงหา $-5i - (-3i)$

จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $-3i$ คือ ......

$$-5i - (-3i) = -5i + (\ldots\ldots)$$
$$= (-5 + \ldots\ldots)i$$
$$= \ldots\ldots\ldots$$

$3i$ $3i$ 3 $-2i$	ก.88 นักเรียนเคยเรียนเรื่องการคูณพจน์ในพีชคณิตว่า $4x \times 3x = 4 \times 3 \times x \times x$ $= 12x^2$ ในการคูณจำนวนจินตภาพ 2 จำนวน ก็ใช้วิธีเดียวกัน <u>ตัวอย่าง</u> จงทำ $4i \times 3i$ ให้เป็นผลสำเร็จ $4i \times 3i = 4 \times 3 \times i \times i$ $= 12i^2$ แต่ $i^2 = -1$ $\therefore 4i \times 3i = 12(-1)$ $= -12$
	ก.89 จงทำ $(-5i) \times 3i$ ให้เป็นผลสำเร็จ $(-5i) \times 3i = -5 \times 3 \times i \times i$ $= \ldots\ i^2$ แต่ $i^2 = -1$ $(-5i) \times 3i = \ldots \times (-1)$ $= \ldots\ldots$
-15 -15 15	ก.90 จงทำ $7i \times (-4i)$ ให้เป็นผลสำเร็จ $7i \times (-4i) = \ldots \times \ldots \times i \times i$ $= \ldots i^2$ แต่ $i^2 = -1$ $7i \times (-4i) = \ldots \times (-1)$ $\ldots\ldots$

$7 \times (-4)$

-28

-28

28

ก.91

การทำ $2i \times 3i \times (-i)$ ให้เป็นผลสำเร็จ ทำได้ดังนี้

<u>วิธีทำ</u> $2i \times 3i \times (-i) = 2 \times 3 \times (-1) \times i^2 \times i$

$= -6\, i^2 \times i$

แต่ $i^2 = -1$

$\therefore 2i \times 3i \times (-i) = -6(-1) \times i$

$= 6i$

ก.92

จงทำ $7i \times (-2i) \times 4i$ ให้เป็นผลสำเร็จ

<u>วิธีทำ</u> $7i \times (-2i) \times 4i = \ldots \times \ldots \times \ldots\, i^2 \times i$

$= \ldots\ldots i^2 \times i$

แต่ $i^2 = -1$

$\therefore 7i \times (-2i) \times 4i = \ldots\ldots(-1) \times i$

$= \ldots\ldots\ldots$

$7 \times (-2) \times 4$

-56

-56

$56i$

ก.93

จงทำ $i \times 12i^2$ ให้เป็นผลสำเร็จ

<u>วิธีทำ</u> $i \times 12i^2 = \ldots\ldots \times i \times i^2$

แต่ $i^2 = -1$

$\therefore i \times 12i^2 = \ldots\ldots \times i \times (-1)$

$= \ldots\ldots$

12

12

$-12i$

ก.94

การทำ $\frac{9}{6i}$ ให้เป็นผลสำเร็จ ทำได้ดังนี้

วิธีทำ $\frac{9}{6i} = \frac{9}{6i} \times \frac{i}{i}$

$= \frac{9i}{6i^2}$

$= \frac{3i}{2i^2}$

แต่ $i^2 = -1$

แทนค่า i^2

$\therefore \frac{9}{6i} = \frac{3i}{2(-1)}$

$= \frac{3i}{-2}$

$= -\frac{3}{2}i$

ก.95

จงทำ $\frac{5}{i}$ ให้เป็นผลสำเร็จ

วิธีทำ $\frac{5}{i} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \times \frac{i}{i}$

$= \cdots\cdots\cdots$

แต่ $i^2 = -1$

แทนค่า i^2

$\therefore \frac{5}{i} = \cdots\cdots\cdots$

$\frac{5}{i}$ $\frac{5i}{i^2}$ $-5i$	ก.96 จงทำ $\frac{7}{-i}$ ให้เป็นผลสำเร็จ วิธีทำ $\frac{7}{-i} = \frac{7}{-i} \times \frac{....}{....}$ $= ....$ แต่ $i^2 = -1$ แทนค่า i^2 $\frac{7}{-i} = \frac{7i}{-(...)}$ $= .....$
$\frac{i}{i}$ $\frac{7i}{-i^2}$ $\frac{7i}{-(-1)}$ $7i$	ก.97 จงทำ $\frac{8}{-15i}$ ให้เป็นผลสำเร็จ วิธีทำ $\frac{8}{-15i} = \frac{8}{-15i} \times \frac{....}{....}$ $= ......$ แต่ $i^2 = -1$ แทนค่า i^2 $\frac{8}{-15i} = \frac{8i}{-15(...)}$ $= ......$

$\frac{i}{i}$

$\frac{8i}{-15i^2}$

$\frac{8i}{-15(-1)}$

$\frac{8i}{15}$

สรุป

1. จำนวนจริง คือ จำนวนใดๆที่อยู่ในรูปต่อไปนี้
   1.1 จำนวนเต็ม
   1.2 เศษส่วน
   1.3 ทศนิยม
   1.4 รากกำลังใดๆของจำนวนบวก
2. จำนวนจินตภาพ คือ จำนวนที่อยู่ในรูปรากกำลังใดๆของจำนวนลบ หรืออาจให้อีกความหมายหนึ่งว่า จำนวนจินตภาพ คือ จำนวนที่อยู่ในรูป bi เมื่อ b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่ใช่ 0 และ i แทน $\sqrt{-1}$
3. $i^2 = -1$
4. ค่าของ i ยกกำลังต่างๆจะเป็น i , -1, - i และ 1 เรียงสลับกันไปเป็นชุดๆ ชุดละ 4 ตัว เช่น
   $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$
   และ $i^4 = 1$

ตอนที่ 2

จำนวนเชิงซ้อน

	ก.98 นักเรียนทราบแล้วว่า $2i, -3i, i\sqrt{7}$, $i\sqrt{3}$ เป็นจำนวนไม่จริง จึงทำให้ $1+2i$, $2-3i$, $9+i\sqrt{7}$ และ $4+i\sqrt{3}$ เป็นจำนวนไม่จริงด้วย เราเรียกจำนวนไม่จริงเหล่านี้ว่า <u>จำนวนเชิงซ้อน</u>
	ก.99 $1+2i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้าให้ a แทน 1 และ b แทน 2 ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อนจะเขียนในรูปทั่วไปเป็น............
a+bi	ก.100 <u>สรุป</u> จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่อยู่ในรูปของ $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่ใช่ 0
	ก.101 $3+2i$ เป็นจำนวน........(จริง/เชิงซ้อน)
เชิงซ้อน	ก.102 $\sqrt{9}-2i$ เป็นจำนวน........(จริง/เชิงซ้อน)

เชิงซ้อน	ก.103 $3+5i\sqrt{2}$ เป็นจำนวน.........(จริง/เชิงซ้อน)
เชิงซ้อน	ก.104 $6+2\sqrt{-1}$ เขียนแทนเป็น $6+2i$ ได้ ดังนั้น $6+2\sqrt{-1}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน
	ก.105 $11+3\sqrt{-1}$ เป็นจำนวน........(จริง/เชิงซ้อน)
เชิงซ้อน	ก.106 $15+7\sqrt{-1}$ เป็นจำนวน........(จริง/เชิงซ้อน)
เชิงซ้อน	ก.107 เมื่อ $a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $b=0$ จำนวนเชิงซ้อน คือ $a+0i = a$ ดังนั้น ถ้า $b = 0$ จำนวนเชิงซ้อนก็กลายเป็นจำนวนจริงเพียงอย่างเดียว สรุป จำนวนจริงใดๆสามารถเขียนในรูป $a+0i$ ได้ ดังนั้น จำนวนจริงใดๆเป็นกลุ่มหนึ่งที่เขียนในรูปจำนวนเชิงซ้อนได้
	ก.108 3 จึงเป็นจำนวนเชิงซ้อน เพราะเขียนอยู่ในรูปของ $3+0i$ ได้

ก.109

27 เป็นจำนวน..........เพราะเขียนอยู่ในรูป
ของ 27 + ... ได้

เชิงซ้อน

0i

ก.110

เมื่อ a+bi เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

ถ้า a = 0 จำนวนเชิงซ้อน คือ 0+bi = bi

ดังนั้น ถ้า a = 0 จำนวนเชิงซ้อนก็จะกลายเป็น <u>จำนวนจินตภาพ</u>เพียงอย่างเดียว

<u>สรุป</u> จำนวนจินตภาพใดๆสามารถเขียนอยู่ในรูป 0+bi ได้

ดังนั้น <u>จำนวนจินตภาพ</u>ใดๆเป็นจำนวนกลุ่มหนึ่งที่เขียนอยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อนได้

ก.111

6i เป็นจำนวน<u>เชิงซ้อน</u> เพราะเขียนอยู่ในรูปของ
......+ 6i ได้

ก.112

$i\sqrt{3}$ เป็นจำนวน...........เพราะเขียนอยู่ในรูป
ของ..... $+i\sqrt{3}$ ได้

เชิงซ้อน 0	ก.113 สรุป จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนเชิงซ้อน 1. จำนวน.......เพราะสามารถเขียนในรูป $a+0i$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ 2. จำนวน.......เพราะสามารถเขียนในรูป $0+bi$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่ใช่ 0 3. จำนวนใดๆที่เขียนอยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่ใช่ 0
จริง จินตภาพ	ก.114 การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า a,b,c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆที่ทำให้ $a+bi = c+di$ แล้ว จะได้ $a = c$ และ $b = d$ เช่น ถ้า $2+6i = (4-2)+(3+3)i$ เราจะได้ $2 = (4-2)$ และ $6 = (3+3)$
	ก.115 การหาค่าของ x และ y เมื่อ $2x+yi = 4-3i$ จะทำได้ดังนี้ วิธีทำ เมื่อ $2x+yi = 4-3i$ เขียนใหม่เป็น $2x+yi = 4+(-3i)$ ดังนั้นจะได้ $2x = 4$ $x = 2$ และได้ $y = -3$

ก.116

จงหาค่าของ x และ y เมื่อ $x+yi = 5+3i$

<u>วิธีทำ</u> เมื่อ $x+yi = 5+3i$

จะได้ $x = ...$

$\therefore y = ...$

---

5 ก.117

3 จงหาค่าของ x และ y เมื่อ $x+yi = 1-2i$

<u>วิธีทำ</u> เมื่อ $x+yi = 1-2i$

ซึ่งเขียนใหม่เป็น $x+yi = 1+(-2i)$

จะได้ $x = ...$

และได้ $y = ...$

---

1 ก.118

-2 จงหาค่าของ x และ y เมื่อ $2x-3yi = 8+9i$

<u>วิธีทำ</u> เมื่อ $2x-3yi = 8+9i$

ซึ่งเขียนใหม่เป็น $2x+(-3yi) = 8+9i$

จะได้ $2x = ...$

$\therefore x = ...$

และได้ $-3y = ...$

$\therefore y = ...$

8 4 9 -3	ก.119 จงหาค่าของ x และ y เมื่อ $x+3yi = 3i$ <u>วิธีทำ</u> เมื่อ $x+3yi = 3i$ ซึ่งเขียนใหม่เป็น $x+3yi = 0+3i$ จะได้ $\therefore x = \ldots\ldots$ และได้ $3y = \ldots\ldots$ $\therefore y = \ldots\ldots$
0 3 1	ก.120 จงหาค่าของ x และ y เมื่อ $-21x+14yi = 42$ <u>วิธีทำ</u> เมื่อ $-21x+14yi = 42$ ซึ่งเขียนใหม่เป็น $-21x+14yi = 42+\ldots\ldots i$ จะได้ $-21x = \ldots\ldots$ $\therefore x = \ldots\ldots$ และได้ $14y = \ldots\ldots$ $\therefore y = \ldots\ldots$
0 42 -2 0 0	ก.121 จงหาค่าของ x และ y เมื่อ $-13x-32yi = -39+128i$ <u>วิธีทำ</u> เมื่อ $-13x-32yi = -39+128i$ ซึ่งเขียนใหม่เป็น $-13x+(\ldots)i = -39+128i$ จะได้ $-13x = \ldots\ldots$ $\therefore x = \ldots\ldots$ และได้ $-32y = \ldots\ldots$ $\therefore y = \ldots\ldots$

$-32y$ -39 3 128 -4	ก.122 การบวกจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน ทำได้ดังนี้ ตัวอย่าง จงหา $(2+3i)+(4+i)$ <u>วิธีทำ</u> $(2+3i)+(4+i) = 2+3i+4+i$ $= (2+4)+(3i+i)$ $= 6+(3+1)i$ $= 6+4i$
	ก.123 จงหา $(12+3i)+(4+2i)$ <u>วิธีทำ</u> $(12+3i)+(4+2i) = 12+3i+4+2i$ $= (\ldots\ldots)+(3i+2i)$ $= \ldots\ldots+(\ldots\ldots)i$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
$(12+4)$ $16+(3+2)i$ $16+5i$	ก.124 จงหา $(2+5i)+(1-3i)$ <u>วิธีทำ</u> $(2+5i)+(1-3i) = 2+5i+1-3i$ $= (2+1)+(\ldots\ldots)$ $= 3+(\ldots\ldots)i$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

5i-3i

(5-3)

3+2i

ก.125

จงหา (8-3i)+(12+i)

<u>วิธีทำ</u> (8-3i)+(12+i) = 8-3i+12+i

= (......)+(-3i+i)

= ....+(.......)i

= ....

---

8 + 12

20+(-3+1)i

20-2i

ก.126

การหา (-3-11i)+(-5-2i) ทำได้ดังนี้

<u>วิธีทำ</u> (-3-11i)+(-5-2i) = -3-11i-5-2i

= -3-5-11i-2i

= (-3-5)+(-11i-2i)

= -8+(-11-2)i

= -8+(-13)i

= -8-13i

ก.127

จงหา (-4-2i)+(-7+3i)

<u>วิธีทำ</u> (-4-2i)+(-7+3i) = -4-2i-7+3i

= (.....)+(-2i+3i)

= ......+(......)i

= ....

(-4-7) -11 + (-2+3) i -11+i	ก.128 ถ้า a,b,c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งทำให้ a+bi และ c+di เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน เราจะหารูปผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนใดๆได้ ดังนี้ (a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (.......)+(........) = (.......)+(.......)i
(a+c)+(bi+di) (a+c)+(b+d)	ก.129 สรุป รูปทั่วไปของการบวกจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน คือ (a+bi)+(c+di) = ...
(a+c)+(b+d)i	ก.130 จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน บวกกันแล้วได้เท่ากับ 0 เราเรียกจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่งว่าเป็นจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของอีกจำนวนหนึ่ง ตัวอย่าง (3+2i)+(-3-2i) = 3+2i-3-2i = 0 ดังนั้น เราเรียก -3-2i ว่าเป็นจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ 3+2i และเรียก 3+2i ว่าเป็นจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ -3-2i

	ก.131 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของจำนวนเชิงซ้อนใด คือ จำนวนลบของจำนวนเชิงซ้อนนั้น เช่น จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ (3+2i)คือ -(3+2i) ซึ่งเท่ากับ -3-2i
	ก.132 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ 3+i คือ -(......) ซึ่งเท่ากับ -3-i
-(3 +i)	ก.133 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ 5+2i คือ -(.....) ซึ่งเท่ากับ ....
-(5 +2i) -5-2i	ก.134 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ -3+i คือ -(.....) ซึ่งเท่ากับ ....
-(-3 +i) 3-i	ก.135 จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ -2-5i คือ -(.....) ซึ่งเท่ากับ ....

$-(-2-5i)$

$2+5i$

ก.136

การลบจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน คือ การบวกจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวตั้งกับจำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวลบนั้น

ตัวอย่าง จงหา $(2+3i)-(3+i)$

<u>วิธีทำ</u> จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $3+i$

คือ $-(3+i) = -3-i$

$$\therefore (2+3i)-(3+i) = (2+3i)+(-3-i)$$
$$= \{2+(-3)\}+\{3+(-1)\}i$$
$$= -1+2i$$

ก.137

จงหา $(12+5i)-(5+2i)$

<u>วิธีทำ</u> จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $5+2i$

คือ -(.....) = ...

∴(12+5i)-(5+2i) = (12+5i)+(.......)

= {12+(...)} + {5+(...)}i

= ....

$-(5+2i)$

$-5-2i$

$(-5-2i)$

$\{12+(-5)\}+\{5+(-2)\}i$

$7+3i$

ก.138

จงหา $(-2-3i)-(-3+i)$

<u>วิธีทำ</u> จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $-3+i$

คือ -(.....) = ...

∴(-2-3i)-(-3+i) = (-2-3i)+(.......)

= (-2+3)+{-3+(...)}i

= ....

$-(-3+i)$

$(3-i)$

$(3-i)$

$(-2+3)+\{-3+(-1)\}i$

$1-4i$

ก. 139

จงหา $(-1+4i)-(2-i)$

<u>วิธีทำ</u> จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $2-i$

คือ $-(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$(-1+4i)-(2-i) = (-1+4i)+(\ldots\ldots)$

$= \{\ldots\ldots\} + \{\ldots\ldots\}i$

$= \ldots\ldots$

$-(2-i)$

$-2+i$

$(-2+i)$

$\{-1+(-2)\}+\{4+1\}i$

$-3+5i$

ก. 140

จงหา $(3+2i)-(-2-5i)$

<u>วิธีทำ</u> จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $-2-5i$

คือ $-(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$(3+2i)-(-2-5i) = (3+2i)+(\ldots\ldots)$

$= \{\ldots\ldots\} + \{\ldots\ldots\}i$

$= \ldots\ldots$

$-(-2-5i)$

$2+5i$

$(2+5i)$

$\{3+2\}+\{2+5\}i$

$5+7i$

ก. 141

ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆซึ่งทำให้ $a+bi$ และ $c+di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน เราจะหารูปทั่วไปของการลบจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนได้ดังนี้

จำนวนตรงกันข้ามสำหรับการบวกของ $c+di$ คือ $-(c+di)$ ซึ่งเท่ากับ $-c-di$

$\therefore (a+bi)-(c+di) = (a+bi)+(\ldots\ldots)$

$= \{a+(-c)\} + \{\ldots\ldots\}i$

$= \ldots\ldots$

$(-c-di)$ $b+(-d)$ $(a-c)+(b-d)i$	ก.142 สรุป รูปทั่วไปของการลบจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน คือ $(a+bi)-(c+di) = \ldots\ldots\ldots$
$(a-c)+(b-d)i$	ก.143 การคูณจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ ทำได้ดังนี้ ตัวอย่าง จงหา $(2+3i)(4-5i)$ <u>วิธีทำ</u> $(2+3i)(4-5i) = (2+3i)4+(2+3i)(-5i)$ (แยกตัวคูณเป็น 4 และ $-5i$) $= (8+12i)+(-10i-15i^2)$ (คูณออกทีละพจน์) $= 8+12i-10i-15i^2$ $= 8+(12i-10i)-15(-1)$ (แทนค่า $i^2=-1$ และรวมพจน์ i) $= 8+(12-10)i+15$ $= 8+15+2i$ $= 23+2i$

ก.144

จงหา $(2+5i)(1+3i)$

<u>วิธีทำ</u> $(2+5i)(1+3i) = (2+5i)(1)+(2+5i)(3i)$

$= (2+5i)+(\ldots\ldots\ldots)$

$= 2+5i+6i+15i^2$

$= 2+(\ldots\ldots\ldots)+15(-1)$

$= 2+\ldots\ldots+(\ldots\ldots\ldots)i$

$= 2-\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots i$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$6i-15i^2$

$(5i+6i)$

$2+15(-1)+(5+6)i$

$2-15+11i$

$-13+11i$

ก.145

จงหา $(1-3i)(-2+i)$

<u>วิธีทำ</u> $(1-3i)(-2+i) = (1-3i)(\ldots\ldots)+(1-3i)(\ldots\ldots)$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1-3i)(-2)+(1-3i)i$

$-2+6i+i-3i^2$

$-2+(6i+i)-3(-1)$

$-2+(6+1)i+3$

$-2+3+7i$

$1+7i$

ก.146

จงหา $(6-i)^2$

<u>วิธีทำ</u> $(6-i)^2 = (6-i)(6-i)$

$= (6-i)6+(6-i)(-i)$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$36-6i-6i+i^2$

$36+(-6i-6i)+(-1)$

$36+(-6-6)i-1$

$36-1+(-12i)$

$35-12i$

ก.147

ถ้า a,b,c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งทำให้ $a+bi$ และ $c+di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน เราจะหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนใดๆได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= (a+bi)(c)+(a+bi)(di) \\
&= ac+\ldots\ldots i+\ldots\ldots i+bdi^2 \\
&= ac+(\ldots\ldots+\ldots\ldots)i+bd(-1) \\
&= ac+(\ldots\ldots+\ldots\ldots)i-bd \\
&= (\ldots\ldots\ldots)+(\ldots\ldots\ldots)i
\end{aligned}
$$

$bci+adi$

$(bci+adi)$

$(bc+ad)$

$(ac-bd)+(bc+ad)i$

ก.148

สรุป รูปทั่วไปของการคูณจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน คือ

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

ก.149

<u>คอนจุเกต (Conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน</u>

จำนวนเชิงซ้อนใดๆ 2 จำนวนที่ต่างกันแต่เฉพาะเครื่องหมายของพจน์ที่เป็นจำนวนจินตภาพ เราเรียกว่า คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อนของกันและกัน เช่น คอนจุเกตของ $-5+6i$ คือ $-5-6i$ และคอนจุเกตของ $-5-6i$ คือ $-5+6i$

ก.150

คอนจุเกตของ $3+4i$ คือ..........

3-4i	ก.151 คอนจุเกตของ -1-i คือ..........
-1+i	ก.152 คอนจุเกตของ 3 คือ ....
3	ก.153 คอนจุเกตของ 4i คือ.........
-4i	ก.154 คอนจุเกตของ -6i คือ.........
6i	ก.155 คอนจุเกตของ a+bi คือ.........
a-bi	ก.156 คอนจุเกตของ a-bi คือ........

a+bi

ก.157

เมื่อเศษส่วนใดมีส่วน เป็นจำนวน เชิงซ้อน เช่น $\frac{1}{3-2i}$ ต้องการทำให้เป็นรูปผลสำเร็จ จะต้องทำตัวส่วนให้เป็นจำนวนจริง โดยการหาคอนจุเกตของตัวส่วนมาคูณทั้งเศษและส่วน ซึ่งทำได้ดังนี้

วิธีทำ
$$\frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i}$$
$$= \frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}$$
$$= \frac{3+2i}{(3-2i)3+(3-2i)(2i)}$$
$$= \frac{3+2i}{9-6i+6i-4i^2}$$
$$= \frac{3+2i}{9-4i^2}$$
$$= \frac{3+2i}{9-4(-1)}$$
$$= \frac{3+2i}{9+4}$$
$$= \frac{3+2i}{13}$$
$$= \frac{3}{13} + \frac{2i}{13}$$

ก.158

จงทำ $\frac{1}{1+2i}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i} \times \frac{(\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots)}$$

$$= \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{1-2i}{(\ldots\ldots)+(\ldots\ldots)}$$

$$= \frac{(\ldots\ldots\ldots)}{5}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$\frac{(1-2i)}{(1-2i)}$$

$$\frac{1-2i}{1+4}$$

$$\frac{1-2i}{5}$$

ก.159

จงทำ $\frac{1}{2+3i}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i} \times \frac{(\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots)}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2+3i} \times \frac{(2-3i)}{(2-3i)}$$

$$\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$\frac{2-3i}{4+9}$$

$$\frac{2-3i}{13}$$

$$\frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$$

ก.160

จงทำ $\frac{1}{4-3i}$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ $\frac{1}{4-3i} = \frac{1}{4-3i} \times \frac{(\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots)}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{1}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i}$$

$$\frac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)}$$

$$\frac{4+3i}{16+9}$$

$$\frac{4+3i}{25}$$

$$\frac{4}{25} + \frac{3i}{25}$$

ก.161

การหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน จะต้องทำตัวหารให้เป็นจำนวนจริง จึงจะหาคำตอบที่ต้องการได้

ตัวอย่าง จงหา $(2+i)\div(2-3i)$

วิธีทำ $(2+i)\div(2-3i) = \frac{2+i}{2-3i}$

$= \frac{2+i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$

$= \frac{(2+i)(2)+(2+i)3i}{4-6i+6i+9}$

$= \frac{4+2i+6i+3i^2}{4+9}$

$= \frac{4+(2i+6i)+3(-1)}{13}$

$= \frac{4+(2+6)i-3}{13}$

$= \frac{4-3+8i}{13}$

$= \frac{1+8i}{13}$

$= \frac{1}{13} + \frac{8i}{13}$

ก.162

จงทำ $5i \div (2+i)$ ให้เป็นผลสำเร็จ

<u>วิธีทำ</u> $5i \div (2+i) = \frac{5i}{2+i}$

$= \frac{5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

$\frac{15i(2-i)}{4+1}$

$\frac{30i-15i^2}{5}$

$\frac{30i-15(-1)}{5}$

$\frac{15+30i}{5}$

$3+6i$

ก.163

จงทำ $(7-i) \div 3i$ ให้เป็นผลสำเร็จ

<u>วิธีทำ</u> $(7-i) \div 3i = \frac{7-i}{3i}$

$= \frac{7-i}{3i} \times \frac{i}{i}$

$= \frac{(7-i)i}{3i^2}$

= ....

= ....

= ....

= ....

$\frac{7i-i^2}{3(-1)}$

$\frac{7i-(-1)}{-3}$

$\frac{7i+1}{-3}$

$-\frac{1}{3} - \frac{7i}{3}$

ก.164

จงทำ $(3+2i)\div(4+3i)$ ให้เป็นผลสำเร็จ

วิธีทำ $(3+2i)\div(4+3i) = \frac{3+2i}{4+3i}$

$= \frac{3+2i}{4+3i} \times$ ________

$=$ ....

....

$=$ ....

$=$ ....

$\frac{3+2i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$

$\frac{12-9i+8i-6i^2}{16+9}$

$\frac{12+(-9i+8i)-6(-1)}{16+9}$

$\frac{12+6+(-9+8)i}{25}$

$\frac{18-i}{25}$

$\frac{18}{25} - \frac{i}{25}$

ก.165

ในการแก้สมการกำลังสองที่อยู่ในรูป $ax^2+bx+c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ เราจะใช้สูตร

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

รากของสมการกำลังสองจะมีลักษณะดังนี้

1. ถ้า $b^2-4ac = 0$

   รากทั้งสองของสมการจะเท่ากันและเป็นจำนวนจริง

2. ถ้า $b^2-4ac > 0$

   รากทั้งสองของสมการจะไม่เท่ากันและเป็นจำนวนจริง

3. ถ้า $b^2-4ac < 0$

   รากทั้งสองของสมการจะไม่เท่ากันและเป็นจำนวนไม่จริง จำนวนไม่จริงนี้อาจจะเป็นจำนวนจินตภาพหรือจำนวนเชิงซ้อน

ก.166

การหาลักษณะของรากของสมการ $x^2+2x+7 = 0$ ทำได้ดังนี้

วิธีทำ สมการ $x^2+2x+7 = 0$

จะได้ $a = 1, b = 2, c = 7$

แทนค่า a,b,c ใน b^2-4ac

$b^2-4ac = 2^2-4\times1\times7$

$= 4-28$

$= -24$ ซึ่ง < 0

∴ แสดงว่ารากของสมการนี้เป็นจำนวนไม่จริงและไม่เท่ากัน

ก.167

จงบอกลักษณะของรากของสมการ $x^2-2x+8 = 0$

วิธีทำ สมการ $x^2-2x+8 = 0$

จะได้ a = ..., b = ..., c = ...

แทนค่า a,b,c ใน b^2-4ac

∴ b^2-4ac = ...

= ....

= -28 ซึ่ง.....(< 0/ > 0/ = 0)

รากทั้งสองของสมการนี้เป็นจำนวน........(จริง/ไม่จริง)

$a=1, b=-2, c=8$

$(-2)^2-4\times1\times8$

$4-32$

-28 ซึ่ง < 0

ไม่จริง

ก. 168

จงบอกลักษณะของรากของสมการ $x^2-4x+5 = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมการ $x^2-4x+5 = 0$

จะได้ $a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$, $c = \ldots\ldots$

แทนค่า a, b, c ใน b^2-4ac

$b^2-4ac = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$ ซึ่ง.....(< 0/>0/=0)

รากทั้งสองของสมการนี้เป็นจำนวน........(จริง/ไม่จริง)

$a=1, b=-4, c=5$

$(-4)^2-4\times1\times5$

$16-20$

-4 ซึ่ง < 0

ไม่จริง

ก. 169

การแก้สมการ $x^2-2x+8 = 0$ ซึ่งมีรากเป็นจำนวนไม่จริง ทำได้ดังนี้

สูตร $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a = 1,\quad b = -2,\quad c = 8$

แทนค่า a, b, c ในสูตร

$$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times8}}{2\times1}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{4-32}}{2}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{-28}}{2}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{28}\times\sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{2\times2\times7}\times i}{2}$$

$$= \frac{2\pm2\sqrt{7}\times i}{2} = \frac{2\pm2i\sqrt{7}}{2}$$

$$= \frac{2\,(1\pm i\sqrt{7})}{2} = 1\pm i\sqrt{7}$$

รากของสมการนี้ คือ $1+i\sqrt{7}$ หรือ $1-i\sqrt{7}$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ก.170

จงแก้สมการ $x^2-2x+5 = 0$

สูตร $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

เมื่อ a = ..., b = ..., c = ...

แทนค่า a,b,c ในสูตร

x = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

∴ รากของสมการนี้ คือ .....หรือ..... ซึ่งเป็น

จำนวนเชิงซ้อน

---

a=1, b=−2, c=5

$\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times5}}{2}$

$\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$

$\frac{2\pm4i}{2}$

$\frac{2(1\pm2i)}{2}$

$1\pm2i$

$1+2i, 1-2i$

ก.171

จงแก้สมการ $x^2-4x+5 = 0$

สูตร x = ...

เมื่อ a = ..., b = ..., c = ...

แทนค่า a,b,c ในสูตร

x = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

รากของสมการนี้ คือ $2+i$ หรือ $2-i$ ซึ่งเป็น

จำนวน............(จริง/เชิงซ้อน)

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a=1, b=-4, c=5$

$\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times5}}{2}$

$\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$

$\frac{4\pm2i}{2}$

$\frac{2(2\pm i)}{2}$

$2\pm i$

เชิงซ้อน

ก.172

จงแก้สมการ $x^2-4x+13 = 0$

สูตร x = ...

เมื่อ a = ..., b =....., c = ...

แทนค่า a,b,c ในสูตร

x = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

รากของสมการนี้ คือ $2+3i$ หรือ $2-3i$ ซึ่งเป็น

จำนวน............(จริง/เชิงซ้อน)

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a=1,\ b=-4,\ c=13$

$\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times13}}{2}$

$\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$

$\frac{4\pm6i}{2}$

$\frac{2(2\pm3i)}{2}$

$2\pm3i$

เชิงซ้อน

ก.173

การแสดงว่า $1+i\sqrt{2}$ เป็นรากของสมการ $x^2-2x+3 = 0$

จะทำได้ดังนี้

วิธีทำ ถ้า $1+i\sqrt{2}$ เป็นรากของสมการ $x^2-2x+3 = 0$

จะได้ $x = 1+i\sqrt{2}$

แทนค่า xใน x^2-2x+3

$$
\begin{aligned}
x^2-2x+3 &= (1+i\sqrt{2})^2-2(1+i\sqrt{2})+3 \\
&= 1+2i\sqrt{2}+2i^2-2-2i\sqrt{2}+3 \\
&= 1+2i^2-2+3 \\
&= 1+2(-1)-2+3 \\
&= 1-2-2+3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $1+i\sqrt{2}$ เป็นรากของสมการ $x^2-2x+3 = 0$ จริง

ก.174

จงแสดงว่า $2-i$ เป็นรากของสมการ $x^2-4x+5 = 0$

<u>วิธีทำ</u> ถ้า $2-i$ เป็นรากของสมการ $x^2-4x+5 = 0$

จะได้ $x = 2-i$

แทนค่า x ใน x^2-4x+5

$\therefore x^2-4x+5 = (\ldots\ldots)^2-4(\ldots\ldots)+5$

$= (\ldots\ldots\ldots\ldots)-8+4i+5$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots$

แสดงว่า $2-i$ เป็นรากของสมการ $x^2-4x+5 = 0$ จริง

$(2-i)^2-4(2-i)+5$

$(4-4i+i^2)-8+4i+5$

$4+i^2-8+5$

$4-1-8+5$

0

ก.175

จงแสดงว่า $2+3i$ เป็นรากของสมการ $x^2-4x+13=0$

<u>วิธีทำ</u> ถ้า $2+3i$ เป็นรากของสมการ $x^2-4x+13 = 0$

จะได้ $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

แทนค่า x ใน $x^2-4x+13$

$\therefore x^2-4x+13 = (\ldots\ldots)^2-4(\ldots\ldots)+13$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

แสดงว่า $2+3i$ เป็นรากของสมการ $x^2-4x+13 = 0$ จริง

$2+3i$

$(2+3i)^2-4(2+3i)+13$

$4+12i+9i^2-8-12i+13$

$4+9i^2-8+13$

$4+9(-1)-8+13$

0

สรุป

1. จำนวนไม่จริง คือ จำนวนที่อยู่ในรูปต่อไปนี้

   1.1 จำนวนจินตภาพ เช่น $\sqrt{-3}$, $2i$

   1.2 จำนวนเชิงซ้อน เช่น $5+2i$

2. จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ เช่น $3+2i$, $1+2i$

3. การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า a,b,cและd เป็นจำนวนจริงใดๆที่ทำให้ $a+bi = c+di$ แล้ว จะได้ $a = c$ และ $b = d$

4. คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนเชิงซ้อนที่มีเครื่องหมายของพจน์ที่เป็นจำนวนจินตภาพต่างจากจำนวนเชิงซ้อนที่ต้องการให้หาคอนจุเกตของมัน เช่น คอนจุเกตของ $2+3i$ คือ $2-3i$