

บทที่ 2

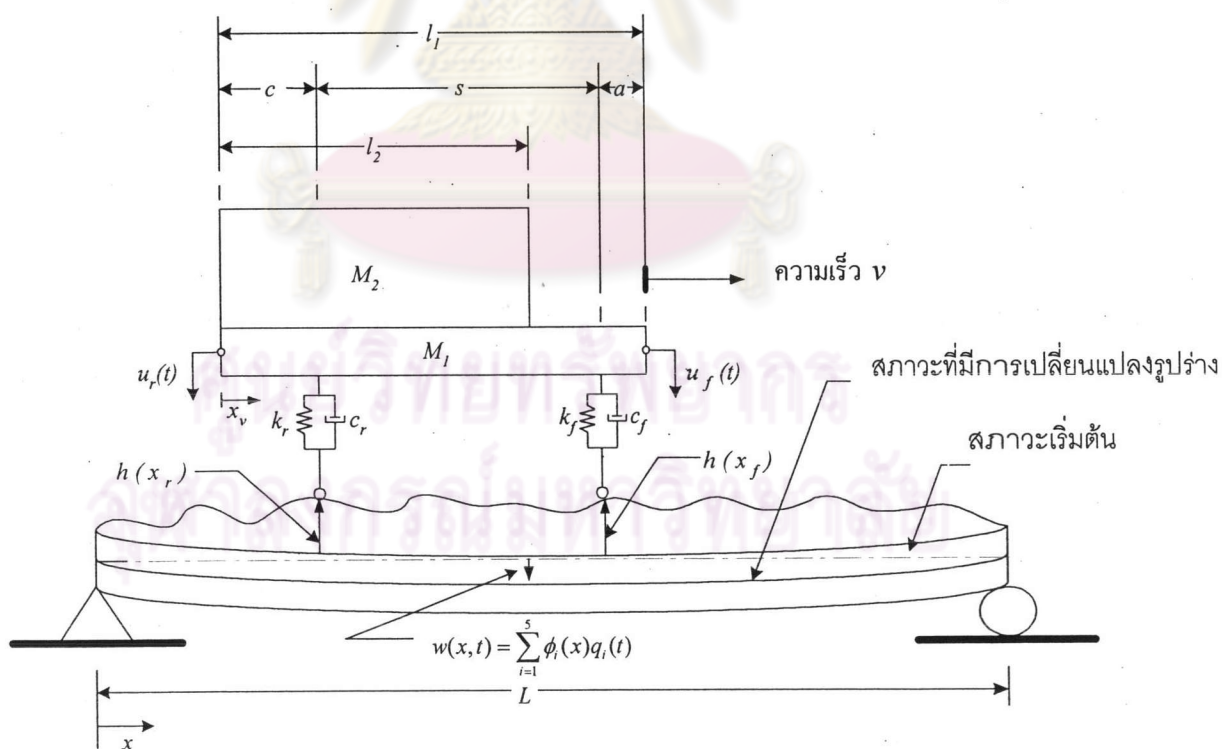
หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 การสร้างรูปแบบจำลองเพื่อจำลองความเครียด

2.1.1 การจำลองรูปแบบปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

แบบจำลองของสะพานกับรถบรรทุก จะถูกนำมาพิจารณาพร้อมกันเพื่อให้ได้ปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุก มีความใกล้เคียงกับความจริงมากขึ้นความขรุขระของผิวถนนบนสะพานจึงถูกนำมาพิจารณาด้วย

ซึ่งแบบจำลองของสะพานกับรถบรรทุกนั้นได้แสดงในรูปที่ 2.1 โดยสะพานจะถูกจำลองรูปแบบเป็น 2 มิติ โดยมีจุดรองรับเป็นแบบธรรมดา และมี 5 องศาอิสระ (degree of freedom) คือ โหมดเนื่องจากการดัด (bending mode) จำนวน 5 โหมด ผลของความหน่วง (damping) จะถูกรวมเข้าไปในการวิเคราะห์ด้วย โดยจะคิดเป็นความหน่วงเชิงเส้นในรูปแบบโหมด (linear modal damping) L คือ ความยาวของสะพาน การสั่นไหวของสะพานสามารถเขียนได้เป็น $w(x,t)$ ซึ่งถูกสมมติให้เป็นผลรวมของโหมดของการสั่นไหว 5 โหมด



รูปที่ 2.1 รูปแบบจำลองระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^5 \phi_i(x)q_i(t) \quad i = 1,2,\dots,5 \quad (2.1)$$

โดยที่

$$\phi_i(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1,2,\dots,5 \quad (2.2)$$

ส่วนรบบรรทุกจะพิจารณาในรูปแบบให้อยู่ในระนาบ โดยมี 2 องศาความอิสระ (degree of freedom) ซึ่งลักษณะแบบจำลองของรบบรรทุก สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.1 โดยที่เพลาคู่หลังของรบบรรทุกจะถูกสมมติให้เสมือนเป็นเพลาคู่เดียว

ระบบการสั่นไหวของเพลารถสามารถแทนได้ด้วยชุดของความหน่วงและสปริง โดยมีสมมติฐานว่า พฤติกรรมอยู่ในช่วงอีลาสติกเชิงเส้น ดังนั้นค่าสติเฟนสของสปริงจึงสมมติให้เป็นค่าคงที่

การจำลองรูปแบบมวลของรบบรรทุก จะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นมวลของรถและส่วนที่เป็นมวลของการบรรทุกสิ่งของ มวลของรถจะแทนด้วย M_1 และมวลส่วนที่บรรทุกสิ่งของจะแทนด้วย M_2

จากรูปที่ 2.1 จะแสดงระยะต่าง ๆ ของตัวรถ โดยที่ a คือ ระยะทางที่ยื่นออกไปด้านหน้า c คือ ระยะทางที่ยื่นออกไปด้านหลัง s คือ ระยะห่างระหว่างเพลาลำดับที่ 1, คือ ความยาวของตัวรถทั้งหมด l_2 คือ ความยาวของส่วนที่ใช้บรรทุกของ k_f และ k_r คือ สติเฟนสของสปริงที่เพลาด้านหน้าและเพลาด้านหลังตามลำดับ c_f และ c_r คือ ความหน่วงที่เพลาด้านหน้าและเพลาด้านหลังตามลำดับ

จากการจำลองรูปแบบของรบบรรทุกให้มี 2 องศาความอิสระ จะทำให้รบบรรทุกสามารถสั่นไหวได้เฉพาะในแนวตั้งเท่านั้น โดยที่องศาความอิสระแรกจะอยู่ที่ปลายด้านหน้าของตัวรถและองศาความอิสระที่สองจะอยู่ที่ปลายด้านหลังของตัวรถ

2.1.2 การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน ระหว่างสะพานกับรบบรรทุก

สมการการเคลื่อนที่ของปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน สามารถหาได้จากสมการของลากรางจ์ (Lagrange equation) การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งของสะพานในโหมดของการตัดจำนวน 5 โหมด จะถูกเลือกเป็นพิกัดทั่วไป (generalized coordinates) q_1, q_2, q_3, q_4 และ q_5 ขณะที่ทำการเปลี่ยนตำแหน่งสัมบูรณ์ของรถที่ตำแหน่งด้านหน้าและด้านหลัง จะกำหนดให้เป็น u_f และ u_r ตามลำดับ ซึ่งทฤษฎีและหลักการในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน ได้อ้างอิงมาจากงานวิจัยของ Polakit Phanapavudhikul, 2003

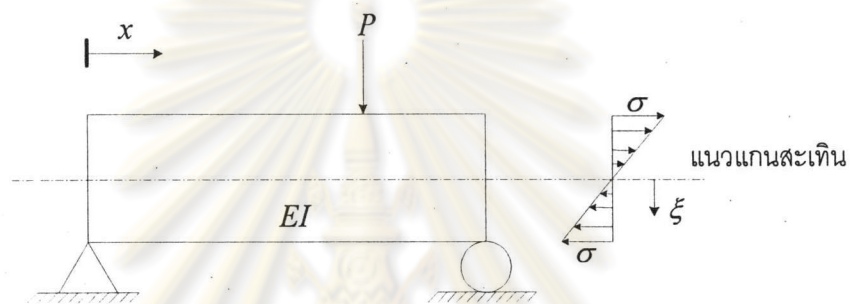
ซึ่งจากการแก้สมการการเคลื่อนที่ของปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน ก็จะสามารถหาการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวตั้งของสะพานซึ่งเป็นพิกัดทั่วไป ในแต่ละโหมดของการตัดได้ และจะสามารถหาการสั่นไหวของสะพาน ได้จากสมการที่ 2.1

2.1.3 การหาความเครียดจากแบบจำลอง

จากกฎของฮุคส์ (Hook 's Law) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ดังสมการ

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.3)$$

โดยที่ σ คือ ค่าความเค้น (stress)
 ε คือ ค่าความเครียด (strain)
 E คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (elastic modulus) ของวัสดุ



รูปที่ 2.2 ความเค้นที่หน้าตัดใด ๆ ของคาน เนื่องจากน้ำหนักบรรทุก

พิจารณาคานเมื่อรับน้ำหนักบรรทุก P ดังรูป 2.2 จะเกิดความเค้นขึ้นที่หน้าตัดใด ๆ ของคานที่ระยะ ξ จากแนวแกนสะเทินซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\sigma = \frac{M\xi}{I} \quad (2.4)$$

$$M = -EI\kappa \quad (2.5)$$

$$\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

โดยที่ M คือ โมเมนต์ดัด (bending moment) เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกที่หน้าตัดใด ๆ ของคาน
 I คือ โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) รอบแกนที่ถูกดัด
 ξ คือ ระยะที่วัดจากแนวแกนสะเทินถึงจุดที่พิจารณา
 κ คือ ความโค้ง (curvature) เนื่องจากการดัด
 w คือ การโก่งตัวของคานที่ระยะทาง x ใดๆ

จากสมการ (2.3), (2.4), (2.5) และ (2.6) จะได้

$$\varepsilon = -\xi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

แทนสมการ (2.1) และ (2.2) ลงใน (2.7) จะได้ความเครียดที่ตำแหน่ง x และเวลา t ใดๆ ของสะพาน

2.2 การหาน้ำหนักรถขณะที่เคลื่อนที่

แรงที่กระทำซึ่งกันและกันระหว่างรถกับสะพานเป็นข้อมูลที่สำคัญสำหรับการออกแบบสะพาน เพราะจะนำมาใช้ในการพิจารณาน้ำหนักจร (live load) ที่ใช้ในมาตรฐานของการออกแบบสะพาน การวัดแรงดังกล่าวโดยตรงด้วยการใช้เครื่องมือที่ติดตั้งไว้กับรถจะเสียค่าใช้จ่ายสูงและมีความเอนเอียง (bias) ในการเก็บข้อมูล ในขณะที่ผลที่ได้จากการคำนวณจากการจำลองรูปแบบสามารถทำได้สะดวก แต่ก็มีความผิดพลาดเนื่องจากแบบจำลองที่คลาดเคลื่อน การรวมผลของตัวแปรต่างๆ เข้าไปในแบบจำลองจะทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากขึ้น ระบบต่างๆ ที่ได้พัฒนาขึ้นมาสำหรับ weight-in-motion นั้นจะวัดเฉพาะน้ำหนักรถทางสถิตเท่านั้น เทคนิคที่ใช้ในการหาน้ำหนักรถจากปฏิกิริยาตอบสนองของการสั่นไหวของสะพานนั้นจึงมีความจำเป็น โดยตัวแปรต่างๆ ของสะพานและของรถจะถูกนำมาคิดรวมด้วยสำหรับปฏิกิริยาตอบสนองที่ถูกวัด ซึ่งค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับวิธีนี้จะมีค่าน้อยกว่าการวัดโดยตรง

งานวิจัยต่างๆ ในปัจจุบันที่เกี่ยวข้องกับการหาน้ำหนักรถที่กำลังเคลื่อนที่ จะมีวิธีการหลักๆ ที่ใช้กันอยู่ 3 วิธีคือ

1. วิธีโดเมนของเวลา (Time Domain Method) เป็นการจำลองรูปแบบโครงสร้างและแรง ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง โดยที่แรงจะถูกจำลองให้เป็นฟังก์ชันที่เป็นช่วง (step functions) ในช่วงเวลาเล็กๆ สมการการเคลื่อนที่นี้อาจจะแสดงในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมด (modal coordinate) และจะทำการแก้สมการในโดเมนของเวลา ซึ่งแรงจะสามารถหาได้โดยการใช้หลักของซูเปอร์โพสิชันที่เชิงโหมด (modal superposition principle)
2. วิธีโดเมนของความถี่และเวลา (Frequency and Time Domain Method) จะทำฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม (Fourier transforms) ในสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมดเช่นเดียวกัน ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของปฏิกิริยาตอบสนองและของแรงจะถูกเชื่อมโยงอยู่ในโดเมนของความถี่ (frequency domain) และแกนพิกัดเวลา (time histories) ของแรงจะสามารถหาได้โดยตรงโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least-squares method)
3. วิธีเชิงโหมด (Modal Approach) เป็นการหาแรงในพิกัดเชิงโหมด การเปลี่ยนตำแหน่งที่วัดได้จะถูกเปลี่ยนเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงโหมด (modal displacement) โดยทำการสมมติฟังก์ชันประมาณ (shape function) ซึ่งความเร็วเชิงโหมด (modal velocities) และความเร่งเชิงโหมด (modal acceleration) สามารถหาได้

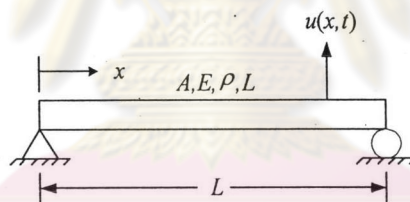
จากการหาอนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงโหมด หลังจากนั้นจะหาแรงโดยการแก้สมการ (uncoupled equation) ใน พิกัดเชิงโหมด

ทั้ง 3 วิธีที่กล่าวถึงนี้ต้องทำการคำนวณเกี่ยวกับอินเวอร์สของเมตริกซ์ ซึ่งจะใช้เวลาในการคำนวณนาน และเกิดสภาวะบกพร่อง (ill-conditioned) ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของแกนเวลา

ในงานวิจัยครั้งนี้จะทำการหาแรงที่กำลังเคลื่อนที่โดยการใช้วิธีการของไดนามิกโปรแกรมมิง (dynamic programming) ซึ่งสามารถหาแรงได้ในโดเมนของเวลาจากการใช้รีเคอร์ซีฟฟอร์มูลา (recursive formula) โดยมีสมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณดังนี้

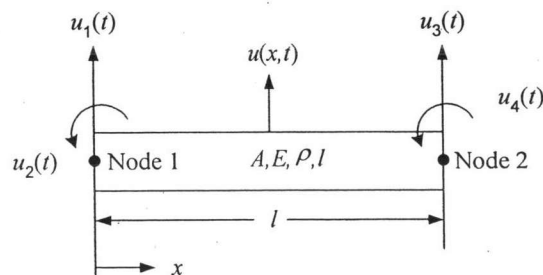
1. การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของระบบ เช่น สติฟเนส, ความหน่วง (damping) และมวล ภายใต้แรงภายนอกจะไม่นำมาพิจารณา
2. ความหน่วง (damping) ของโครงสร้างจะถูกนำมาวิเคราะห์ในการคำนวณ
3. โครงสร้างไม่จำเป็นจะต้องอยู่ในสภาวะหยุดนิ่งก่อนที่จะมีแรงภายนอกมากกระทำ
4. ไม่จำกัดประเภทของแรงที่จะหา

2.2.1 การจำลองสะพานด้วยชิ้นส่วนคาน



รูปที่ 2.3 แบบจำลองคานของฮอยเลอร์-เบอร์นูลี

เราจะใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ในการจำลองรูปแบบคาน ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.4 โดยที่ A คือ พื้นที่หน้าตัดของคาน E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของคาน ρ คือ มวลต่อหน่วยความยาวของคาน l คือ ความยาวของชิ้นส่วนคาน ซึ่งแต่ละชิ้นส่วนของคานจะประกอบด้วย 2 ขั้ว (node) และแต่ละขั้วของชิ้นส่วนคานจะมี 2 องศาอิสระคือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง และการเปลี่ยนตำแหน่งในการหมุน



รูปที่ 2.4 แบบจำลองชิ้นส่วนของคาน

การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งของชิ้นส่วนคานที่ระยะทาง x และเวลา t ใดๆ จะต้องสอดคล้องตามสมการ (2.8)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.8)$$

สำหรับในกรณี EI มีค่าคงที่ สมการ (2.8) จะกลายเป็น $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0$ ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้เป็น

$$u(x,t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) \quad (2.9)$$

โดยที่ $c_i(t)$ คือ ค่าคงที่ของการอินทิเกรต

สมการ (2.9) สามารถใช้ในการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวตั้งของชิ้นส่วนคานได้ ซึ่งมีเงื่อนไขที่ขอบ (boundary condition) ดังนี้

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1(t) & u(l,t) &= u_3(t) \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u_2(t) & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= u_4(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้น เมื่อแทนลงในสมการ (2.47) จะสามารถหาค่าคงที่ของการอินทิเกรตได้ คือ

$$c_4(t) = u_1(t)$$

$$c_3(t) = u_2(t)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{l^2} [3(u_3 - u_1) - l(2u_2 + u_4)]$$

$$c_1(t) = \frac{1}{l^3} [2(u_1 - u_3) - l(u_2 + u_4)] \quad (2.11)$$

แทนสมการ (2.11) ลงในสมการ (2.9) และทำการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในเทอมของการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงขั้ว (nodal displacement) จะได้สมการการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนคานที่ระยะ x และเวลา t ใดๆ ดังนี้

$$u(x,t) = \left[1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right] u_1(t) + l \left[\frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right] u_2(t) \\ + \left[\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right] u_3(t) + l \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right] u_4(t) \quad (2.12)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ที่อยู่ข้างหน้า $u_i(t)$ คือฟังก์ชันประมาณ (shape function) ของการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนคาน

เมตริกซ์มวล (mass matrix) ของชิ้นส่วนคานสามารถคำนวณได้จากการแทนสมการ (2.12) ลงไปในสมการของพลังงานจลน์

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (2.13)$$

และสมการ (2.13) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้ คือ

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.14)$$

โดยที่ \mathbf{M} คือ เมตริกซ์มวล (mass matrix) และเวกเตอร์ $\dot{\mathbf{u}}$ คืออนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\mathbf{u}(t)$ เทียบกับเวลาซึ่งเวกเตอร์ $\mathbf{u}(t)$ สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

หลังจากทำการอินทิเกรตและจัดรูปแบบเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ซ้ำ (nodal displacement) จะได้เมตริกซ์มวลสำหรับชิ้นส่วนคานดังนี้

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

ในการทำงานเดียวกัน เราสามารถหาเมตริกซ์สติฟเนส (stiffness matrix) ได้จากการแทนสมการ (2.12) ลงในสมการพลังงานความเครียด (strain energy) ซึ่งกำหนดโดย

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (2.17)$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.18)$$

โดยที่ \mathbf{u} ได้กำหนดไว้ข้างต้น ดังนั้นเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนคาน คือ

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

เมื่อเราได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วนคานแล้ว เราจะรวม (assembly) ชิ้นส่วนคานแต่ละชิ้นส่วนเข้าด้วยกันตามองศาความอิสระที่ตรงกัน ซึ่งจะได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสของระบบ

2.2.2 การหาเมตริกซ์ความหน่วง (damping matrix) ของระบบ

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่อิสระ

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (2.20)$$

เมื่อเรานำ \mathbf{M}^{-1} คูณตลอดสมการ (2.20) จะได้

$$\ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{โดยที่ } \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

กำหนดให้

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{q} \quad (2.22)$$

โดยที่ \mathbf{V} คือ โยเกนเวคเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์ $\bar{\mathbf{K}}$

แทนสมการ (2.22) ลงใน (2.21) และคูณตลอดด้วย V^{-1} จะได้

$$I\ddot{q} + V^{-1}\bar{C}V\dot{q} + V^{-1}\bar{K}Vq = 0 \quad (2.23)$$

$$I\ddot{q} + C^*\dot{q} + K^*q = 0 \quad (2.24)$$

โดยที่ $K^* = V^{-1}\bar{K}V$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

ซึ่งหากสมมติให้มีคุณสมบัติ orthogonality เช่นเดียวกับ K^* จะได้

$$C^* = V^{-1}\bar{C}V$$

$$= \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ξ_i คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดที่ i

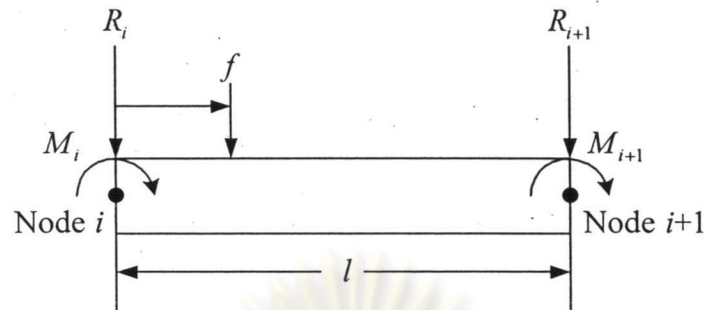
ω_i คือ ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโหมดที่ i

เมื่อเราทราบค่า ξ_i และ ω_i แล้ว ก็จะสามารถหาเมตริกซ์ \bar{C} และ C^* ได้ ดังนี้

$$\bar{C} = VC^*V^{-1} \quad (2.27)$$

$$C = M\bar{C} \quad (2.28)$$

2.2.3 การหาแรงที่ข้อจากแรงภายนอกที่มากกระทำ



รูปที่ 2.5 แรงที่ข้อเนื่องจากแรงภายนอกที่มากกระทำ

เมื่อมีแรงภายนอก f มากกระทำบนชิ้นส่วนคาน 2 มิติ ที่มีความยาวเท่ากับ l ระหว่างข้อที่ i กับข้อที่ $i+1$ ที่ระยะ x จากปลายซ้าย แรงที่ข้อที่แต่ละปลายของชิ้นส่วนคานสามารถแสดงได้ดังนี้

$$R_i = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) f$$

$$M_i = \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l}\right) f$$

$$R_{i+1} = \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) f$$

$$M_{i+1} = \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\right) f$$

(2.29)

โดยที่ R_i, R_{i+1} คือ แรงที่ข้อในแนวตั้ง ของข้อที่ i และ $i+1$ ของโครงสร้างตามลำดับ
 M_i, M_{i+1} คือ โมเมนต์ดัด ของข้อที่ i และ $i+1$ ของโครงสร้างตามลำดับ

แรงที่ข้อดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ของแรงโกลบอล (global force vector) ได้ คือ

$$\mathbf{P} = \mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{f}_1 \quad (2.30)$$

โดยที่ \mathbf{P} คือ เวกเตอร์ของแรงที่ข้อ (nodal force vector)

$\mathbf{Y}(x)$ คือ เวกเตอร์ที่แปลงแรงกระทำภายนอกสู่ระบบแรงที่ข้อ

สำหรับกรณีของแรงภายนอกหลายแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนคานเวกเตอร์ของแรงโกลบอล (global force vector) ที่เกิดขึ้นจากแรงที่ i สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Y}(x_i) \cdot f_i \quad (2.31)$$

2.2.4 การสร้างสมการการเคลื่อนที่

ไฟไนต์เอลิเมนต์ของระบบพลศาสตร์ที่มี n องศาของความอิสระ จะเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(x, t) \quad (2.32)$$

โดยที่	$\mathbf{u}(t)$	คือ	เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของแบบจำลอง
	$\dot{\mathbf{u}}(t)$	คือ	อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\mathbf{u}(t)$ เทียบกับเวลา t
	\mathbf{M}	คือ	เมตริกซ์มวลของระบบ (system mass matrix)
	\mathbf{C}	คือ	เมตริกซ์ความหน่วงของระบบ (system damping matrix)
	\mathbf{K}	คือ	เมตริกซ์สติฟเนสของระบบ (system stiffness matrix)
	$\mathbf{P}(x, t)$	คือ	แรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและขนาดของแรงภายนอกที่มากระทำ แสดงในสมการ (2.69)

การใช้สมการเสตทสเปซ (state-space formulation) สมการ (2.32) จะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังแสดง

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (2.33)$$

โดยที่	$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}_{2n \times 1}$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$	
		$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2n \times n_f}$	(2.34)

โดยที่	\mathbf{X}	คือ	เวกเตอร์ของตัวแปร (state variables) ที่มีมิติเท่ากับ $2n$ ซึ่งประกอบด้วย การเปลี่ยนตำแหน่งที่ชั่วและความเร็วที่ชั่ว
	n_f	คือ	จำนวนของแรงภายนอกที่มากระทำ
	\mathbf{f}	คือ	แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่าที่มีมิติเท่ากับ $n_f \times 1$

สมการอนุพันธ์ข้างต้นสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการไม่ต่อเนื่อง (discrete equation) โดยการใช้ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix) เข้ามาเกี่ยวข้อง จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \bar{\mathbf{G}}_{j+1}\mathbf{B}_j\mathbf{f}_j \quad (2.35)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}h} \quad (2.36)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.37)$$

โดยที่ \mathbf{F} คือ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix)

$\bar{\mathbf{G}}$ คือ เมตริกซ์ที่เชื่อมโยงระหว่างแรงกับระบบ

$j+1$ หมายถึง การคำนวณ ณ ชั้นเวลาที่ $j+1$

h คือ ผลต่างของเวลาในการคำนวณตัวแปร (variable state) ระหว่าง \mathbf{X}_j และ

\mathbf{X}_{j+1}

จากการแทนสมการ (2.34) และ (2.37) ลงไปในสมการ (2.35) จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \mathbf{G}_{j+1}\mathbf{f}_j \quad (2.38)$$

โดยที่

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2n \times n_f} \quad (2.39)$$

2.2.5 วิธีการหาเมตริกซ์ \mathbf{F}

จาก $\mathbf{e}^{\mathbf{A}h} = \mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots$ (2.40)

และ $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$ (2.41)

โดยที่ $\mathbf{\Lambda}$ คือ เมตริกซ์ไอเกนแวลู (eigenvalue) ของเมตริกซ์ \mathbf{A}

\mathbf{V} คือ เมตริกซ์ไอเกนเวคเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์ \mathbf{A}

แทนสมการ (2.41) ลงใน (2.40) จะได้

$$\begin{aligned}
 e^{A_h} &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} \\
 &\quad + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} + \dots \\
 &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\Lambda^2\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\Lambda^3\mathbf{V}^{-1} + \dots \\
 &= \mathbf{V}\left(\mathbf{I} + h\Lambda + \frac{h^2}{2!}\Lambda^2 + \frac{h^3}{3!}\Lambda^3 + \dots\right)\mathbf{V}^{-1} \\
 &= \mathbf{V}e^{A_h}\mathbf{V}^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

2.2.6 หลักการหาน้ำหนัก

จุดประสงค์ของปัญหานี้คือ การหาแรง \mathbf{f} ซึ่งทำให้สมการ (2.38) มีความใกล้เคียงกับข้อมูลที่วัดมาได้มากที่สุด แต่ในทางปฏิบัติเราไม่สามารถที่จะวัดการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งและความเร็วได้ทั้งหมด ซึ่งจะมีแค่บางตำแหน่งเท่านั้นที่เราสามารถวัดได้ ดังนั้นข้อมูลที่ี้ได้จากการวัดสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \tag{2.43}$$

โดยที่ \mathbf{d}_j คือ เวกเตอร์ของการวัดมีมิติ $m \times 1$

\mathbf{Q} คือ เมตริกซ์ที่ถูกเลือกเพื่อเชื่อมโยงระหว่างการวัดกับตัวแปร (state variables) มีมิติ $m \times 2n$

\mathbf{X}_j คือ เวกเตอร์ของตัวแปร (state variables) ที่มีมิติเท่ากับ $2n$ ซึ่งประกอบด้วย การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ชั่วและความเร็วที่ชั่ว

ข้อมูลจากการวัดจริงจะแทนได้ด้วยเวกเตอร์ \mathbf{Z}_j ซึ่งมีมิติเดียวกับ \mathbf{d}_j โดยทั่วไปจำนวนของข้อมูลที่วัดได้ m จะน้อยกว่าจำนวนของตัวแปร (หรือ n องศาอิสระของระบบ) มาก แต่จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนของแรงภายนอกที่กระทำ n_f ในกรณีของ คาน 2 มิติ ที่มีจุดรองรับแบบธรรมดา ซึ่งถูกแบ่งเป็น L อธิเมนต์จะได้ $n = 2(L+1) - 2$ ซึ่งได้รวมการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวตั้งและการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในการหมุนที่แต่ละชั่วไว้แล้ว

เมื่อแรงที่ไม่ทราบค่า \mathbf{f}_j ได้รวมอยู่ในสมการ (2.38) การที่ข้อมูลจากแบบจำลองจะเหมือนกับข้อมูลจากการวัดจึงเป็นไปได้ ทั้งนี้เนื่องจากข้อมูลที่ี้ได้จากการวัดจะมีสิ่งรบกวนรวมอยู่ด้วย จึงทำการหาค่าแรงจากวิธีการยกกำลังสองน้อยที่สุด (least square) ที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน E ดังสมการ (2.44) มีค่าน้อยที่สุด

$$E = \sum_{j=1}^N ((Z_j - QX_j), D(Z_j - QX_j)) \quad (2.44)$$

แต่เนื่องจากมีสภาพบกพร่อง (ill condition) ของระบบในการหาคำตอบ ณ ตำแหน่งจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของข้อมูล เราสามารถที่จะหลีกเลี่ยงได้โดยการเพิ่มเทอมความราบเรียบ (smoothing term) เข้าไปในสมการ (2.44) ดังแสดง

$$E = \sum_{j=1}^N ((Z_j - QX_j), D(Z_j - QX_j) + (f_j, Ef_j)) \quad (2.45)$$

เทอมที่สองคือ regularization parameter และวิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่า Tikhonov method เมตริกซ์ $D(m \times m)$ และเมตริกซ์ $E(n_f \times n_f)$ เป็นเมตริกซ์โพสิทีฟเดฟิไนท์ที่มีความสมมาตร (symmetric positive-definite weighting matrices) ซึ่งให้ความยืดหยุ่นในการถ่วงน้ำหนักของการวัดและการถ่วงน้ำหนักของแรง เมตริกซ์ D โดยทั่วไปจะเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) และ เมตริกซ์ E เป็นเมตริกซ์ทแยง (diagonal matrix) โดยเทอมที่สองค่า E จะมีผลของความราบเรียบของแรงที่หามาได้ โดยถ้า E มีค่ามาก แรงที่หาได้จะมีความราบเรียบแต่จะไม่ใกล้เคียงกับข้อมูล เมื่อ E มีค่าเท่ากับศูนย์ การแก้ปัญหา ก็จะกลายเป็นปัญหายกกำลังสองน้อยที่สุด (least square) แบบธรรมดา และเมื่อ E มีค่าน้อย จะทำให้คำตอบมีความใกล้เคียงกับข้อมูลมาก แต่มีความแปรปรวนสูง

2.2.7 การวัดความเครียด

สำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์ของคาน 2 มิติ ที่ยาว l โดยมีองศาความอิสระ $(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2)$ ที่ปลายทั้งสองข้าง จะได้ว่าความเครียดที่หน้าตัดใด ๆ ระยะทาง x จากปลายซ้ายของชิ้นส่วนคานสามารถเขียนให้อยู่ในรูปขององศาความอิสระที่ปลายทั้งสองข้างได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \left(\frac{-y}{l^3} \right) [(12x - 6l)u_1 - l(6x - 4l)\theta_1 - (12x - 6l)u_2 + l(6x - 2l)\theta_2] \quad (2.46)$$

โดยที่ y คือ ระยะจากแนวแกนสะเทินของคานถึงขอบของคาน

2.2.8 ไดนามิกโปรแกรมมิ่ง (Dynamic Programming)

เพื่อที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน E ของวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด (least square) มีค่าน้อยที่สุด วิธีการไดนามิกโปรแกรมมิ่ง (dynamic programming) และ Bellman's Principle of Optimality (Bellman R., 1967) ได้ถูกนำมาใช้หาค่า E ที่น้อยที่สุดที่ขั้นตอน n (E_n) สำหรับค่าเริ่มต้น X สามารถเขียนได้เป็น

$$g_n(X) = \min_f E_n(X, f) \quad (2.47)$$

จากสมการ (2.47) โดยวิธี Bellman's Principle of Optimality จะสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$g_{n-1}(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_{n-1}} \left((\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{Q}\mathbf{X}), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{Q}\mathbf{X}) + (\mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{E}\mathbf{f}_{n-1}) + g_n(\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}_n\mathbf{f}_{n-1}) \right) \quad (2.48)$$

\mathbf{f}_n และ g_n คือ ค่าแรงที่เหมาะสม (optimal forcing term) และค่าต้นทุนที่เหมาะสม (optimal cost term) ตามลำดับ การแก้ปัญหาสามารถทำได้โดยการเริ่มต้นขั้นตอนที่ $n=N$ และทำย้อนกลับไปจนถึง $n=1$ ที่จุดปลาย ค่าที่น้อยที่สุดสามารถหาได้จาก

$$g_N(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_N} \left[(\mathbf{Z}_N - \mathbf{Q}\mathbf{X}), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_N - \mathbf{Q}\mathbf{X}) + (\mathbf{f}_N, \mathbf{E}\mathbf{f}_N) \right] \quad (2.49)$$

เมื่อ $\mathbf{f}_N = 0$ เราจะได้คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดดังสมการ (2.50) โดยการขยายสมการ (2.49)

$$g_N(\mathbf{X}) = \mathbf{q}_N + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_N) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_N \mathbf{X}) \quad (2.50)$$

โดยที่

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{Z}_N^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_N$$

$$\mathbf{S}_N = -2\mathbf{Q}_N^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_N$$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{Q}_N^T \mathbf{D} \mathbf{Q}_N \quad (2.51)$$

สมการ (2.51) คือค่าเริ่มต้นสำหรับการทำงานย้อนกลับที่ $n=N$ โดยการแทนสมการ (2.50) ด้วยขั้นตอนที่ n และ $n-1$ ลงไปในสมการ (2.48) และขยายเทอมทางด้านขวามือของสมการจะได้

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_{n-1}} \left[(\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n \mathbf{X} + \mathbf{U}_n), \mathbf{H}_n (\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n \mathbf{X} + \mathbf{U}_n) + \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X}) \right]$$

$$\text{โดยที่ } \mathbf{H}_n = \mathbf{E} + \mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{G}_n, \quad 2\mathbf{H}_n \mathbf{V}_n = 2\mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}, \quad \mathbf{V}_n = \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}$$

$$2\mathbf{H}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{G}_n^T \mathbf{S}_n, \quad \mathbf{U}_n = (\mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \mathbf{S}_n) / 2 \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{x}) = & (\mathbf{q}_n + \mathbf{Z}_{n-1}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{n-1}) + \mathbf{X}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}) \mathbf{X} + \mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{S}_n - 2\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{n-1}) \\ & - \mathbf{X}^T \mathbf{V}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{X} - \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{U}_n - 2\mathbf{X}^T \mathbf{V}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{U}_n \end{aligned}$$

$$\text{และ } \mathbf{F} \quad \text{คือ} \quad \text{เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix)} \quad (2.36)$$

การทำให้เทอมทางด้านขวามือของสมการ (2.52) มีค่าน้อยที่สุด จะนำไปสู่ค่าแรงที่เหมาะสม คือ

$$\mathbf{f}_{n-1} = -\mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \left[\mathbf{R}_n \mathbf{F} \mathbf{X}_{n-1} + \frac{\mathbf{S}_n}{2} \right] \quad (2.53)$$

และสมการ (2.52) จะกลายเป็น

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{X}) = \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X}) \quad (2.54)$$

จากการกระจายเทอมในสมการ (2.54) และทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n-1} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \right] \mathbf{R}_n \mathbf{F} \\ \mathbf{S}_{n-1} &= -2\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{n-1} + \mathbf{F}^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \right] \mathbf{S}_n \end{aligned} \quad (2.55)$$

ความคลาดเคลื่อนของแรงที่หาได้สามารถคำนวณได้ตามสมการ

$$Error = \frac{\|\mathbf{f}_{identified} - \mathbf{f}_{true}\|}{\|\mathbf{f}_{true}\|} \times 100\% \quad (2.56)$$

โดยที่ $\|\cdot\|$ คือ นอร์ม (norm) ของเมตริกซ์

แต่ในทางปฏิบัติเราไม่ทราบค่า \mathbf{f}_{true} ดังนั้นเราต้องทำการพล็อตกราฟระหว่างเซมินอร์ม (seminorm) ของแรงที่หาได้กับค่าพารามิเตอร์ \mathbf{E} ซึ่งเซมินอร์มของแรงที่หาได้คือ

$$E1 = \|\mathbf{f}_{j+1}^{(identify)} - \mathbf{f}_j^{(identify)}\| \quad (2.57)$$

โดยที่ $\mathbf{f}_j^{(identify)}$, $\mathbf{f}_{j+1}^{(identify)}$ คือ แรงที่หาได้จากค่าพารามิเตอร์ \mathbf{E}_j และ $\mathbf{E}_j + \Delta \mathbf{E}$ ตามลำดับ

2.2.9 ขั้นตอนการคำนวณ

2.2.9.1 เมตริกซ์ \mathbf{Q} เมตริกซ์ \mathbf{Z} และความเร็วของแรงสามารถหาได้จากการวัดจากภาคสนาม

2.2.9.2 เมตริกซ์ \mathbf{G} และเมตริกซ์ \mathbf{G} สามารถหาได้จากข้อมูลตำแหน่งของแรงจากสมการ (2.37) และ (2.39)

2.2.9.3 ค่าเริ่มต้น \mathbf{q}_N , \mathbf{R}_N และ \mathbf{S}_N จากสมการ (2.51) และค่า \mathbf{H}_N จากสมการ (2.52)

2.2.9.4 ค่า \mathbf{S}_{n-1} และ \mathbf{R}_{n-1} จากสมการ (2.27) ตั้งแต่ค่า $n = N$ จนถึง $n = 1$

2.2.9.5 กำหนดค่าเริ่มต้น \mathbf{X} เท่ากับศูนย์แล้วคำนวณค่าปฏิกิริยาตอบสนอง \mathbf{X}_{j+1} จากสมการ (2.38) ตั้งแต่ค่า $j = 0$ จนถึง $j = N$ และหาแรง \mathbf{f}_{n-1} จากสมการ (2.53) ตั้งแต่ค่า $n = 1$ จนถึง

$n = N$

2.2.9.6 ทำขั้นตอนที่ 1-5 ซ้ำสำหรับค่าพารามิเตอร์ \mathbf{E} ที่แตกต่างกัน โดยค่าพารามิเตอร์ \mathbf{E} ซึ่งทำให้เซมินอร์มตามสมการ (2.57) มีค่าน้อยที่สุดจะเป็นค่าที่เหมาะสม (Law S.S. and Fang Y.L., 2001)

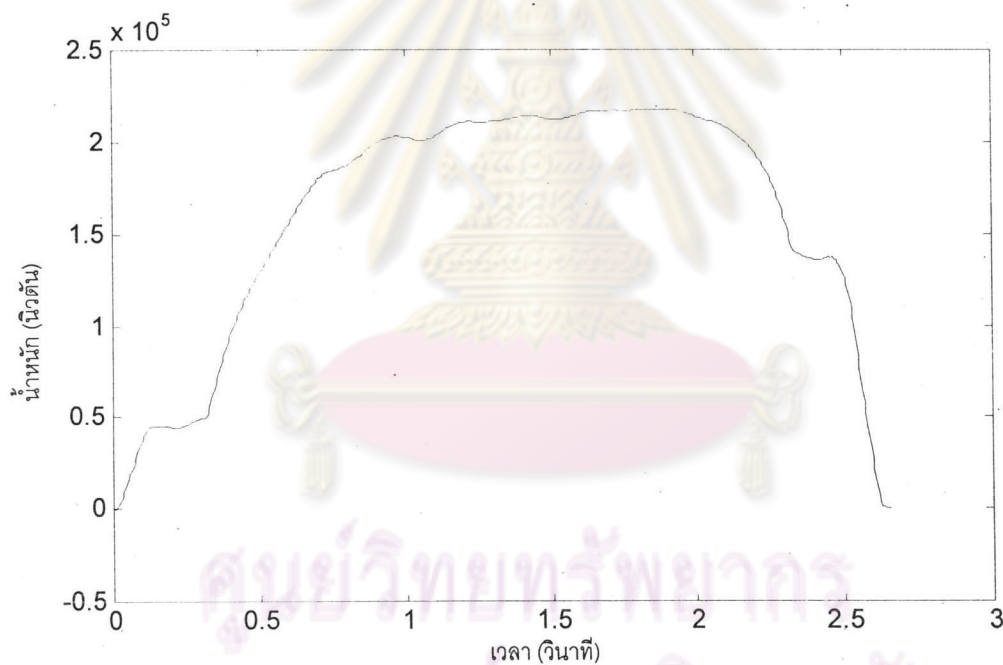
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.3 วิธีการคำนวณซ้ำ (Iteration Method)

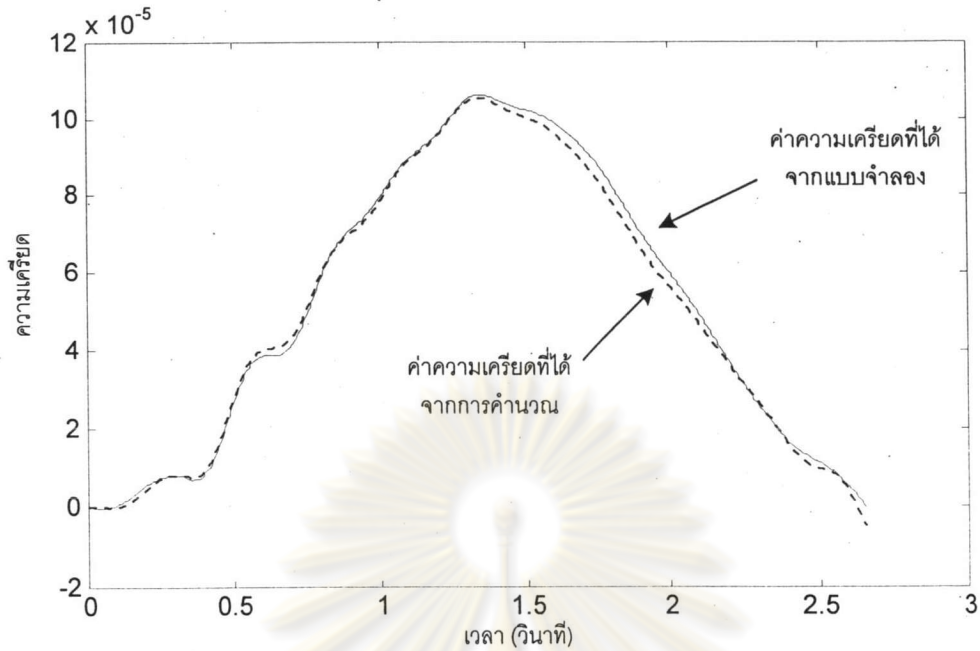
เนื่องมาจากการวิจัยในอดีตที่ผ่านมาได้มีการหาน้ำหนักขณะเคลื่อนที่ โดยเทคนิคไดนามิกโปรแกรมมิ่งนั้นยังมีความคลาดเคลื่อนในการคำนวณอยู่ จึงได้เสนอวิธีการคำนวณซ้ำ (Iteration Method) มาใช้ในการเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณของเทคนิคไดนามิกโปรแกรมมิ่ง

วิธีการคำนวณซ้ำ คือ การนำเอาผลของการคำนวณที่ได้จากไดนามิกโปรแกรมมิ่งมาประมาณหาค่าความเครียดเนื่องจากผลทางพลศาสตร์ แล้วจึงทำการคำนวณในไดนามิกโปรแกรมมิ่งอีกครั้ง เพื่อให้ค่าน้ำหนักเข้าสู่ค่าที่ถูกต้องมากขึ้นกว่าการคำนวณครั้งแรกของไดนามิกโปรแกรมมิ่ง ซึ่งมีหลักการดังนี้

เริ่มจากการนำค่าความเครียดที่วัดได้ (Z) มาทำการคำนวณในไดนามิกโปรแกรมมิ่ง จะได้ค่าน้ำหนักของรถบรรทุก (f') และค่าความเครียดที่ได้จากการคำนวณ (d') ดังเช่นตัวอย่างการทำนายน้ำหนักรถบรรทุกจากผลการตรวจวัดความเครียดของสะพานจำลอง ซึ่งแสดงในรูปที่ 2.6 และ 2.7 ตามลำดับ

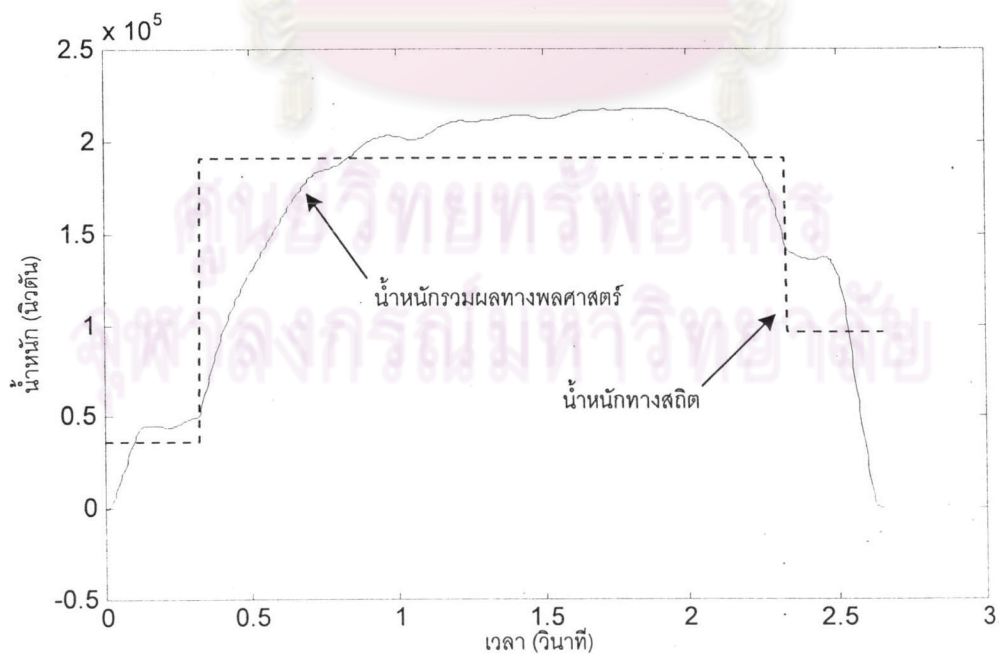


รูปที่ 2.6 ค่าน้ำหนักรถบรรทุกที่ได้จากไดนามิกโปรแกรมมิ่ง



รูปที่ 2.7 ค่าความเครียดที่วัดจริงและค่าความเครียดที่คำนวณจากไดนามิกโปรแกรมมิง

เมื่อได้ค่าน้ำหนักที่มาจากจากการคำนวณในรอบแรกมา จะนำน้ำหนักมาเฉลี่ยเพื่อหาค่าน้ำหนักของรถ เนื่องจากจากผลทางสถิติ (f'_s) เท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 2.8 ซึ่งจะคิดแยกเป็นน้ำหนักของแต่ละเพลลาได้ โดยน้ำหนักของเพลลาหน้าจะคิดจากน้ำหนักเฉลี่ยของเวลาในช่วงแรกซึ่งเพลลาหลังยังไม่ได้เคลื่อนที่เข้ามาในสะพาน ส่วนน้ำหนักของเพลลาหลังจะคิดจากน้ำหนักเฉลี่ยของเวลาในช่วงหลังซึ่งเพลลาหน้านั้นเคลื่อนที่ออกจากสะพานไปแล้ว



รูปที่ 2.8 ค่าน้ำหนักเนื่องจากผลทางสถิติ

จากนั้นจะคำนวณค่าความเครียดเนื่องจากผลทางสถิต (\mathbf{d}_s^i) จากน้ำหนักสถิตดังกล่าว (\mathbf{f}_s^i) ซึ่งจะสามารถหาค่าความเครียดเนื่องจากผลทางสถิตได้จากความสัมพันธ์ในรอบการคำนวณที่ i ดังนี้

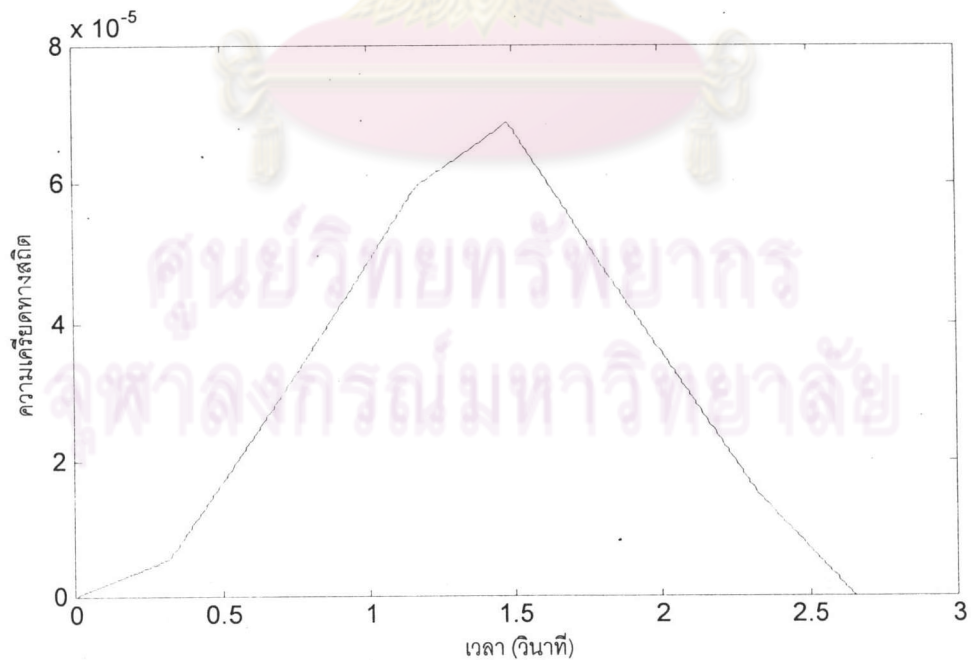
$$\mathbf{P}_s^i = \mathbf{Y}\mathbf{f}_s^i \quad (2.58)$$

$$\mathbf{u}_s^i = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}_s^i \quad (2.59)$$

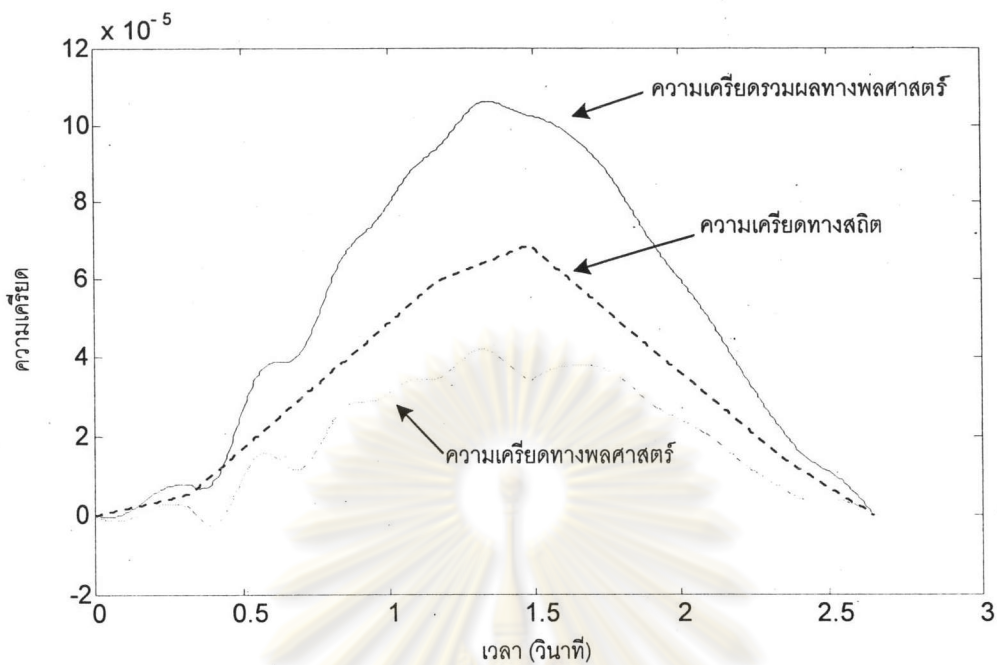
$$\mathbf{d}_s^i = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{u}_s^i \quad (2.60)$$

- โดยที่ \mathbf{P}_s คือ เวกเตอร์ของแรงสถิตที่ขั้ว (nodal force vector)
 \mathbf{Y} คือ เวกเตอร์ที่แปลงแรงกระทำภายนอกสู่ระบบแรงที่ขั้ว
 \mathbf{f}_s คือ แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่ามีมิติเท่ากับ $n_f \times 1$
 \mathbf{d}_s คือ เวกเตอร์ของการวัดมีมิติ $m \times 1$
 $\bar{\mathbf{Q}}$ คือ เมตริกซ์ที่ถูกเลือกเพื่อเชื่อมโยงระหว่างการวัดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง มีมิติ $m \times n$
 \mathbf{u}_s คือ เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของแบบจำลอง
 \mathbf{K} คือ เมตริกซ์สติฟเนสระบบ (system stiffness matrix) (2.32)

โดยเมื่อได้ค่า \mathbf{f}_s^i แล้วนำมาแทนในสมการ (2.58) และใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.59) และสมการ (2.60) จะได้ค่า \mathbf{d}_s^i ดังแสดงในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ค่าความเครียดเนื่องจากผลทางสถิต



รูปที่ 2.10 ค่าความเครียดเนื่องจากผลทางพลศาสตร์

จากนั้นหาค่าความเครียดเนื่องจากผลทางพลศาสตร์ (\mathbf{d}_d^i) โดยคิดจากผลต่างของค่าความเครียดรวมกับค่าความเครียดทางสถิต ดังแสดงในรูปที่ 2.7 แล้วจึงนำค่า \mathbf{d}_d^i มาทำการคำนวณในไดนามิกโปรแกรมมิ่งอีกครั้ง จะได้ค่าน้ำหนักของรถบรรทุกเนื่องจากผลทางพลศาสตร์ในรอบใหม่ (\mathbf{f}_d^{i+1}) และค่าความเครียดเนื่องจากผลทางพลศาสตร์ในรอบใหม่ (\mathbf{d}_d^{i+1}) ซึ่งเมื่อนำไปรวมกับน้ำหนักสถิตก่อนหน้า (\mathbf{f}_s^i) ก็จะทำให้ได้ค่าน้ำหนักบรรทุกรวมใหม่ (\mathbf{f}^{i+1}) ที่ถูกต้องยิ่งขึ้น ส่วนค่า \mathbf{d}_d^{i+1} เมื่อนำไปรวมกับค่าความเครียดเนื่องจากผลทางสถิตก่อนหน้า (\mathbf{d}_s^i) ก็จะทำให้ได้ค่าความเครียดรวมใหม่ (\mathbf{d}^{i+1}) ส่วนขั้นตอนดังกล่าวสามารถสรุปเป็นสมการคณิตศาสตร์ ดังสมการที่ 2.61 และ 2.62

$$\mathbf{d}_d^i = \mathbf{d}^i - \mathbf{d}_s^i \quad (2.61)$$

$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}_s^i + \mathbf{f}_d^{i+1} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{d}_s^i + \mathbf{d}_d^{i+1} \quad (2.63)$$

เมื่อได้ค่าน้ำหนักรถบรรทุกในรอบใหม่ (\mathbf{f}^{i+1}) และค่าความเครียดในรอบใหม่ (\mathbf{d}^{i+1}) มาแล้วก็จะนำไปคำนวณหาค่า \mathbf{f}_s^{i+1} โดยใช้หลักการดังรูป 2.5 อีกครั้ง และนำมาคำนวณซ้ำตามสมการ (2.58) – (2.63) จนกระทั่งผลต่างของค่าน้ำหนักรถบรรทุกในรอบล่าสุดกับรอบก่อนหน้ามีความแตกต่างกันน้อยมากตามเกณฑ์ที่กำหนด