บรรณานุกรม

ภาษาไทย

กระทรวงศึกษาธิการ. คู่มือการประเมินผลการเรียนการสอนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์การค้าสหกรณ์, 2523.

ชูศรี วงศ์รัตนะ. เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์เจริญผล, 2525.

ทรงสถิต กิตติคุณวัจนะ. "ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของการให้นักเรียนสอนกันเอง" วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาจิตวิทยา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522.

บุญธรรม กิจปรีดาบริสุทธิ์. คู่มืออาจารย์การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอน. กรุงเทพมหานคร : การพิมพ์พระนคร, 2524.

ประคอง กรรณสูต. สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์เจริญผล, 2525.

ปรีชา วิเทศวิทยานุศาสตร์. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซ่อมเสริมวิชาทักษะอ่าน 2 ด้วยชุดการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนเป็นกลุ่มโดยครูเป็นผู้ดำเนินการ นักเรียนผู้ช่วยสอนเป็นผู้ดำเนินการ และนักเรียนผู้ช่วยสอนกับครูร่วมกันดำเนินการ". ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2524.

พิศุทธิ์ วิระจิตต์. "การใช้เวลาในการเรียนเพื่อรู้ เรื่อง "อัตราส่วนตรีโกณ" โดยการใช้ชุดการสอนตามเอกัตภาพของนักเรียนที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน". วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2525.

พิสุทธิ์ พฤกษะวัน. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเคมีระหว่างกลุ่มที่สอนเสริมโดยครูกับกลุ่มที่สอนเสริมโดยเพื่อนนักเรียน" วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์. การประเมินผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : วัฒนาพานิช, 2527.

———— "การสอนซ่อมเสริม". เอกสารประกอบการอบรมวิทยากรระดับมัธยมศึกษา ตอนปลาย 2523. (อัดสำเนา)

สนิท ไกรสินธุ์. "การสอนเด็กโดยแบ่งกลุ่มตามความสามารถ". วิทยาสาร 24 (ธันวาคม 2516) : 32 - 33.

สาธร แก่นมณี. "การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทัศนคติที่มีต่อวิชาเรียน และความสนใจในวิชาเรียนจากการสอนซ่อมเสริม 3 วิธี ในกระบวนการเรียนเพื่อรอบรู้ (Mastery Learning)" วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2524.

สุภาพ วาดเขียน. ทำอย่างไรนิสิต นักศึกษาครูจึงจะสอนได้ดี. พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

สุวัฒนา จุทัยรัตน์. "การสอนเด็กอ่อนวิชาคณิตศาสตร์" ครูปริทัศน์ 6 (พฤศจิกายน 2524) : 32 - 38.

เสนีย์ มิทรัพย์. "เด็กเรียนช้า จะช่วยอย่างไร" วิทยาสาร 29 (พฤษภาคม 2521) : 20 - 23.

อุทิน พิทธกุล. การนิเทศการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร, 2527.

———— การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : บพิธการพิมพ์, 2524.

วันทนีย์ ยูคิลป์. สถิติและการวิจัยเบื้องต้น. กรุงเทพมหานคร : อักษรบัณฑิต, 2525.

อนันต์ ศรีโสภา. ทฤษฎีการวัดและการทดสอบ. กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2525.

อนุ ธีรานุวรรตน์. "การจัดชั่วโมงซ่อมเสริมในโรงเรียน". สารพัฒนาหลักสูตร 20 (พฤษภาคม 2526) : 41 - 44.

อรสา กุมารี ปุกหุต. "การสอนตามความสามารถของเด็ก". วิทยาสาร 22 (กรกฎาคม 2514) : 10 - 13.

อรสา ปราชญ์นคร. หลักสูตรและแบบเรียนมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2523.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาษาอังกฤษ

Beggs, Donald L. and Lewis, Ernest L. Measurement and Evaluation in the School. Boston : Houghton Mifflin Co., 1975 : 195.

Bloom, Benjamin S. Mastery Learning : Theory and Practices. ed. by James H. Block, New York : Holt, Rinehart and Winston Inc., 1971 : 47.

Candler, Ann C., Blackburn, Gary M. and Sowell, Virginia "Peer Tutoring as a Strategy Individual Instruction". Education 100 (Spring 1980) : 380 - 383.

Dawson, Leonard Ervin. "The Effect of a Program of Counseling and Tutoring on Academic Achievement of Black College Freshman". Dissertation Abstracts International. 11 (May 1974) : 7646 - A.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York : McGraw - Hill Book Co., 1966.

Good, Carter V. Dictionary of Education. 3d ed. New York : McGraw - Hill Book Co., 1973.

Hufnagel, Pamela Piateski. "Effect of Tutoring on Tutors". Dissertation Abstracts International. 1984 : 463 - A.

McCracken, Sarah Jane. "The Effect of a Peer Tutoring Program Utilizing Data - Based Instruction on the World Recognition and Reading Comprehension Skills of Secondary Age Level Handicapped Students." Dissertation Abstracts International 40 (February 1980) 4516 - 4517 - A.

McKethan, Lillian Dolores. " An Attitudinal and Achievement Comparisón of Mathematics Deficient Lincoln University Freshmen Resulting from Structured Peer Tutoring Versus no Peer Tutoring in Mathematics. "Dissertation Abstracts International, 1982 : 710 - A.

Mehrens, Willian A. and Lehmann, Irvin J. Standardized Tests in Education. 2d ed. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1975.

Ostle, Bernard. Statistics in Research : Basic Concepts and Techniques for Research Workers. 2d ed. Calcutta : The Iowa State University Press, 1966.

Page, Terry G., Thomas, J.B and Marshall, Alan R. International Dictionary of Education. New York : Nicholus Publishing Co., 1977 : 348.

Ronshausen, Nina L. "Programed Tutoring : An Instructional Method for Primary School Mathematics". Educational Technology 15 (January 1975) : 22 - 27.

Sensor, Marian Carol. "Students Tutoring Students : A Junior High Peer Tutoring Project." Dissertation Abstracts International, 1983 : 2098 - A.

Smith, Edward W., Krouse, Stanley W., Jr and Atkinson, Mark M. The Educator's Encyclopedia. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice - Hall Inc., 1961.

Stewart, Thomas J. "The Effects of Using Eighth Grade High - Achievers Versus Eighth Grade Low - Achievers as Tutors on Reading Achievement and Attitude of Urban Fourth Grade Students." Dissertation Abstracts International, 41 (May 1981) : 4669 - A.

Thiagarajan, Sivasailam. "A New Structure for Peer Tutoring". Educational Technology 13 (December 1973) : 10 - 13.

Thomas, Jerry Leon. "Tutoring Strategies and Effectiveness : A Comparison of Elementary Age Tutors and College Age Tutors." Dissertation Abstracts International. 32 (January 1972) : 3580 - A.

Walpole, Ronald E. Introduction to Statistics. 2d ed. New York : MacMillan Publishing Co., 1974.

Yeomans, K.A. Statistics for the Social Scientist : 2 Applied Statistics. Penguin Book, 1968 : 102 - 107.

Young Carolyn. "Team Learning." The Arithmetic Teacher. (December 1972) : 603.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาความตรงตามเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ภิญโญอนันตพงศ์	ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. อาจารย์ช้องมาศ มหาพานิช	หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเทพศิรินทร์
3. อาจารย์ถาวร อาลิงสมานันท์	หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม
4. อาจารย์อรษา เจริญพร	ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

เอกสารประกอบการสอนใน 12 คาบ

แต่ละคาบมีส่วนประกอบดังนี้

1. จุดประสงค์ปลายทาง
2. จุดประสงค์นำทาง
3. เนื้อหาเป็นเอกสารแนะแนวทาง และเฉลยสำหรับนักเรียนผู้ช่วยสอน นำไปศึกษาก่อนที่จะดำเนินการสอน สำหรับนักเรียนเก่งที่เหลือ และนักเรียนปานกลางไปศึกษาที่ห้องสมุด
4. กิจกรรมการเรียนการสอนสำหรับครูและนักเรียนผู้ช่วยสอนดำเนินการสอนเสริมแก่นักเรียนอ่อน
5. แบบทดสอบย่อย และเฉลยสำหรับนักเรียนอ่อน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 1

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ บวก ลบ คูณ และบอกคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนได้

จุดประสงค์นำทาง

1. หาผลบวก และผลคูณได้เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน มาให้
2. ใช้ความรู้เรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนได้
3. อธิบายเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนได้
4. ใช้เรื่องคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนไปแก้โจทย์ปัญหาได้
5. หาผลต่างได้เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน มาให้
6. เขียนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ในรูป Rectangular form, a + bi ได้
7. เขียนจำนวนเชิงซ้อน a + bi ในรูปคู่สำดับของจำนวนจริง (a, b) ได้
8. บอกค่าของจำนวนจินตภาพแท้ได้
9. เปรียบเทียบจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนว่ามากกว่า, น้อยกว่า, มากกว่าเท่ากับ หรือน้อยกว่าเท่ากับ ได้
10. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เนื้อหา ประวัติย่อ ๆ ของระบบจำนวนเชิงซ้อน

ในราวปี ค.ศ. 276 ไดโอฟันตุส (Diophantus) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกเริ่มเห็นว่าระบบจำนวนจริงนั้นไม่สมบูรณ์ ท่านต้องแก้ปัญหาอย่างง่ายมากคือหาด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีเส้นรอบรูปเท่ากับ 12 หน่วย และมีพื้นที่เท่ากับ 7 หน่วยกำลังสอง ปัญหานี้ก่อให้เกิดสมการ $6x^2 - 43x + 84 = 0$

โดยที่ x เป็นความยาวของด้าน ๆ หนึ่ง แต่สมการนี้ไม่สามารถแก้ได้ในระบบจำนวนจริง เพื่อให้ระบบจำนวนสมบูรณ์ยิ่งขึ้น นักคณิตศาสตร์ได้สร้างจำนวนขึ้นใหม่ และเกาส์ (Gauss) ได้ให้ชื่อจำนวนใหม่นี้ว่า "จำนวนเชิงซ้อน" (Complex Number)

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 1

นิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป (a, b) เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

โดยที่ a เป็นส่วนจำนวนจริง (Real Part)

b เป็นส่วนจินตภาพ (Imaginary Part)

นิยามการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

(1) $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

(2) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

(3) $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

1. จงหาค่าต่อไปนี้ในรูป (a, b)

(1) $(2, 5) + (3, 1) =$ .....

(2) $(0, 0) + (3, -1) =$ .....

(3) $(2, 1) + (2, 1) + (2, 1) =$ .....

ข้อสังเกต $(2, 1) + (2, 1) + (2, 1) = 3(2, 1) = (6,3)$

$$\underbrace{Z + Z + Z + \ldots + Z}_{\text{Z บวกกัน n ครั้ง}} = nZ$$

(4) $3(1, 2) + 5(0, -1) =$ .....

(5) $(3, 0)(0, 3) =$ .....

(6) $(5, 0)(-1, 0) =$ .....

(7) $(2, 1)(4, -1) =$ .....

(8) $(2, 1)(2, 1)(2, 1) =$ .....

ข้อสังเกต นิยามเลขยกกำลัง $Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \cdot Z \ldots Z}_{\text{คูณกัน n ครั้ง}}$

2. จงหาค่า x, y จากสมการต่อไปนี้

(1) $(2x - y, 5) = (1, x + y)$

จากกฎการเท่ากัน จะได้

$2x - y = 1$ (1)

$x + y = 5$ (2)

แก้สมการ (1), (2) จะได้

$x =$_____, $y =$ _____

(2) $(x, -3y) + (-4y, 2x) = (-2, 1)$

..... $= (-2, 1)$ นิยามการบวก

จากกฎการเท่ากัน จะได้

..... = ... (1)

..... = ... (2)

แก้สมการ (1), (2) จะได้

$x =$ _____, $y =$ _____

(3) $(x, y)(3, -4) = (15, 0)$

นิยามการคูณ

..... = ...

..... = ...

..... = ...

(4) $(x, y)(y, x) = (0, 2)$

_____

_____

_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน $Z_1, Z_2, Z_3 \in C$

1. คุณสมบัติปิด (Closer Law)

$Z_1 + Z_2 \in C \quad , \quad Z_1 \cdot Z_2 \in C$

2. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative law)

$Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3 \quad , \quad Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3$

3. คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์ (Identity law)

มี $(0, 0) = 0$ ตัวเดียวที่ทำให้ $Z + 0 = 0 + Z = Z$

มี $(1, 0) = 1$ ตัวเดียวที่ทำให้ $Z \cdot 1 = 1 \cdot Z = Z$

4. คุณสมบัติอินเวอร์ส (Inverse law)

$Z + (-Z) = 0 = (-Z) + Z$

$Z \cdot Z^{-1} = Z^{-1} \cdot Z = 1$

5. คุณสมบัติสลับที่ (Commutative Law)

$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

$Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$

6. คุณสมบัติการแจกแจง (Distributative law)

$Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$

หมายเหตุ $-Z = (-1)Z$

3. จงแสดงว่าเซตของ $\{(1, 0), (-1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$ มีคุณสมบัติปิดการคูณ

$\times$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$
$(1, 0)$				
$(-1, 0)$				
$(0, 1)$				
$(0, -1)$				

ตอบ _____

เหตุผล _____

_____

_____

4. จงพิสูจน์คุณสมบัติการจัดหมู่ของการบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

พิสูจน์ $(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$

$(a, b) + (c + e, d + f) = (a + c, b + d) + (e, f)$ นิยามการบว

_____ = _____ _____

_____ = _____ _____

สรุป จำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติการจัดหมู่การบวก

$(a, b)[(c, d)(e, f)] = [(a, b)(c, d)](e, f)$

_____ = _____ นิยามการคูณ

_____ = _____

_____ = _____

สรุป _____

5. จงพิสูจน์คุณสมบัติการสลับที่การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

_____

_____

_____

_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6. จงหาอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	อินเวอร์สการบวก	อินเวอร์สการคูณ
(2, 1)		
(-2, 3)		
(0, 0)		
(5, 0)		

สรุป

1. อินเวอร์สการบวกของ (a, b) คือ (-a, -b)
2. อินเวอร์สการคูณของ (a, b) คือ $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$

7. จงหาค่า z ในรูป (a, b) จาก

(1) $z = (1, -2)(3, 4) + (1, -2)(-2, 1) + (1, -2)(-5, -4)$

$= (1, -2)\left[(3, 4) + (-2, 1) + (-5, -4)\right]$ คุณสมบัติ_____

$= (1, -2)(__, __)$ นิยามการบวก

$= (__, __)$ นิยามการคูณ

(2) $z(1, 3) = (2, 1)(1, -3) + (2, 1)(0, 6)$

$=$ _____ _____

$=$ _____ _____

$z =$ _____ _____

นิยาม ผลต่าง คือ การบวกด้วยอินเวอร์สการบวกของตัวลบ

$(a,b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

8. จงหาผลต่างของจำนวนเชิงซ้อน

(1) $(5, 3) - (2, 1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) $3(2, 1) - (-1, 3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป Rectangular form, a + bi</u>

โดยที่ (0, 1) = i และ (0, b) = (b, 0)(0, 1)

<u>นิยาม</u> จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนในรูปคู่ลำดับ (a, b)

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$
$$= (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$
$$= a + bi$$

นั่นคือ $(a, b) = a + bi$

โดยที่ a เป็นส่วนจำนวนจริง

b เป็นส่วนจินตภาพ

ถ้า $b \neq 0$, bi เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้

ถ้า $b \neq 0$, $a + bi$ เรียกว่า จำนวนจินตภาพ

9. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป a + bi

(1) (4, 3) =.....

(2) (0, -2) =.....

(3) (5, 0) = ...

(4) $(-\sqrt{3}, 1)$ =.....

10. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)

(1) 3 + 4i =.....

(2) 7i =.....

(3) $-\sqrt{5}x$ =.....

(4) -1 -i =.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

11. จงหาส่วนจำนวนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจำนวนจริง	ส่วนจินตภาพ
$3 + 4i$		
$-\sqrt{2}i$		
0		
$2 - 5xi$		
$(2 - \sqrt{3}i)^2$		

12. จงหาค่า x, y ในกรณีต่อไปนี้

(1) $x - 2yi = 4 + i$

จากกฎการเท่ากัน จะได้

$x = 4$ (1)

$-2y = 1$ (2)

แก้สมการ (1), (2) จะได้

$x =$ _____, $y =$ _____

(2) $-3i = x + 3yi$

จากกฎการเท่ากัน

_____ (1)

_____ (2)

แก้สมการ (1), (2) จะได้ $x =$ _____, $y =$ _____

(3) $(x - 2i)^2 = 3x + yi$

$x^2 - 4 - 4ix = 3x + yi$ นิยามการคูณ

จากกฎการเท่ากันจะได้

_____

_____

_____

$x =$ _____, $y =$ _____

13. จงหาค่าต่อไปนี้ในรูป a + bi

(1) $(3 + 4i) + (2 - i)$ = _____

(2) $2 - (3 - 2i)$ = _____

(3) $(\sqrt{5} - i) - i(\sqrt{5}i + 2)$ = _____

(4) $-2i(5i)$ = _____

(5) $5i(1 + i)(2 + i)$ = _____

(6) $(1 + i)^7(1 + 2i)^2$ = _____

<u>นิยาม</u> $x \in R$ $\sqrt{-x^2} = |x|\, i$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $\sqrt{-1} = i$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

<u>สรุป</u>

$$i^n = \begin{cases} 1 , & n = 4k \\ i , & n = 4k + 1 \\ -1 , & n = 4k + 2 \\ -i , & n = 4k + 3 \end{cases}$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

<u>นิยาม</u> $x, y \in R^+$, $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$

14. จงหาค่าต่อไปนี้

(1) i^7 = _____

(2) i^{13} = _____

(3) i^{785} = _____

(4) $i^{10} + i^8 + i^6 + i^4 + i^2$ = _____

(5) $i^{12n + 3}$ = _____

15. จงหาค่าต่อไปนี้

(1) $\sqrt{-6}\sqrt{-24}$ =

(2) $\sqrt{-6}\sqrt{24}$ =

16. จงหาอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	อินเวอร์สการบวก	อินเวอร์สการคูณ
$2 + 3i$		
$-4 + 3i$		
$(1 + 2i)^2$		
0		

17. จงเติมข้อความต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

(1) ผลคูณของจำนวนจินตภาพแท้ 2 จำนวน จะเป็นจำนวน_____

(2) จำนวนจินตภาพแท้_____(มี/ไม่มี)คุณสมบัติปิดการบวกและการคูณเพราะ_____

_____

(3) จำนวนจินตภาพแท้_____(มี/ไม่มี)เอกลักษณ์การบวกและการคูณ

ถ้ามีโปรดระบุ_____

18. จงเปรียบเทียบจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ว่ามากกว่า น้อยกว่า มากกว่าเท่ากับ หรือน้อยกว่าเท่ากับ

(1) $2 + 3i$ _____ $10 + 7i$

(2) 17 _____ $5 - 2i$

(3) $(1 + i)^5$ _____ 5

(4) $2i$ _____ $10 - 3i$

_____

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. จงหาค่า x, y ที่ลอดคล้องกับสมการ

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคำบที่ 1

1. 1) (5, 6)

2) (3, -1)

3) (6, 3)

4) (3, 1)

5) (0, 9)

6) (-5, 0)

7) (9, 2)

8) (2, 11)

2. 1) $x = 2, \quad y = 3$

2) $x = 2, \quad y = 1$

3) $x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{12}{5}$

4) รากสมการ x, y สอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$\left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 2 \right\}$$

3. มีคุณสมบัติปิดการคูณ เพราะสมาชิกทุกตัวอยู่ในเซตที่กำหนดให้

6. อินเวอร์สการบวก คือ (-2, -1), (2, -3), (0, 0), (-5, 0)

อินเวอร์สการคูณ คือ $(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5})$, $(\frac{-2}{13} \quad \frac{-3}{13})$, — , $(\frac{1}{5}, 0)$

7. 1) (-2, 9)

2) (2, 1)

8. 1) (3, 2)

2) (7, 0)

9. 1) 4 + 3i

2) -2i

3) 5

4) $-\sqrt{3} + i$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

10. 1) (3, 4)

2) (0, 7)

3) $(-\sqrt{5}x, 0)$

4) (-1, -1)

11. ส่วนจำนวนจริง 3, 0, 0, 2, 1

ส่วนจินตภาพ 4, $-\sqrt{2}$, 0, $-5x$, $-4\sqrt{3}$

12. 1) $x = 4, \quad y = -\frac{1}{2}$

2) $x = 0, \quad y = -1$

3) $x = 4, -1 \quad y = -16, 4$

13. 1) $5 + 3i$

2) $-1 + 2i$

3) $2\sqrt{5} - 3i$

4) 10

5) $-15 + 5i$

6) $8 + 56i$

14. 1) $-i$

2) i

3) i

4) -1

5) $-i$

15. 1) -12

2) $12i$

16. อินเวอร์สการบวก $-2 - 3i, \quad 4 - 3i, \quad 3 - 4i, \quad 0$

อินเวอร์สการคูณ $\frac{2}{13} - \frac{3i}{13}, \quad \frac{-4}{25} - \frac{3i}{25}, \quad \frac{-3}{25} - \frac{4i}{25}, \quad —$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

17. 1) จำนวนจริง

    2) ไม่มี, เพราะ $2i + (-2i) = 0$, $(5i)(3i) = -15$

    3) ไม่มี

18. เปรียบเทียบจำนวนจินตภาพไม่ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 1

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน ครูทบทวนโดยเรียกนักเรียนถาม - ตอบ ทีละคน 1. นิยามการบวก ลบ และคูณ จำนวนเชิงซ้อน 2. คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนเกี่ยวกับการบวกและการคูณ 3. การเขียนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ในรูป a + bi และ (a + bi) ในรูป (a, b) 4. การหาค่าเลขยกกำลังของจำนวนจินตภาพแท้ $i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}$ 5. การเปรียบเทียบจำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพ หรือจำนวนจินตภาพกับจำนวนจินตภาพ	ขั้นที่ 1 ทบทวน นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนของตนเหมือนกลุ่มควบคุม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 2	- ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3	- ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อพร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4	- ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป	- ครูให้นักเรียนสรุปสูตรและนิยามอีกครั้ง

ขั้นที่ 2	- ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคนใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3	- ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4	- ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป	- นักเรียนผู้ช่วยสอนกับผู้เรียนช่วยกันสรุปสูตร และนิยาม

ปัญหาที่ควรเน้น

- เอกลักษณ์ มีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น
- อินเวอร์สภายในหนึ่งตัวจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 1

คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1. $(3 + 5i) + (7 - 2i) + (1 + i)(1 - i)$ มีค่าเท่ากับ_____

2. สมการ $(x + yi)(3 - 4i) = 15$ จงหาค่า $x =$ _____, $y =$ _____

3. จงหาค่า $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots + i^{398}$ มีค่าเท่ากับ _____

4. จงเขียน $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i)$ ในรูป $a + bi$ คือ_____

5. จงพิจารณาข้อความ $-2 + 10i > 5 + 12i$ เป็นจริงหรือเท็จ_____

เพราะเหตุใด_____

6. จงหา

(ก) อินเวอร์สการบวกของ $2 - 3i$ คือ _____

(ข) อินเวอร์สการคูณของ $3 + 4i$ คือ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>เฉลย</u> 1. $12 + 3i$

2. $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{12}{5}$

3. $-1 + i$

4. $0 + (-2)i$

5. เท็จ, จำนวนเชิงซ้อนไม่สามารถเปรียบเทียบ $>$, $<$, $\geqslant$ หรือ $\leqslant$ ได้

6. (ก) $-2 + 3i$

(ข) $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 2

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ หาร เขียนกราฟ และหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงได้

จุดประสงค์นำทาง

1. หาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้
2. หาผลคูณ ผลบวก และผลต่างระหว่างจำนวนเชิงซ้อนกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้
3. หาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ โดยใช้คุณสมบัติของอินเวอร์สการคูณ หรือสังยุคเข้าช่วยได้
4. เขียนจุดซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ลงในระนาบเชิงซ้อนได้
5. เขียนเวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ลงในระนาบเชิงซ้อนได้
6. เขียนเวกเตอร์แทนผลบวกผลต่างของจำนวนเชิงซ้อนลงในระนาบเชิงซ้อนได้
7. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
8. บอกความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมบูรณ์กับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้
9. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 2

เนื้อหา

นิยาม สังยุค (Conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน $Z = a + bi$ คือ $\bar{Z} = a - bi$

1. จงหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. สังยุคของ $Z = (3, -2)$ คือ $\bar{Z}$ = ...
2. สังยุคของ $Z = -5 + 3i$ คือ $\bar{Z}$ = ...
3. สังยุคของ $Z = -3x$ คือ $\bar{Z}$ = ...
4. สังยุคของ $Z = 2i$ คือ $\bar{Z}$ = ...
5. สังยุคของ $(2 + i)(3 - 2i)$ คือ $\bar{Z}$ = ...
6. สังยุคของ $Z = \frac{3e^{i\theta}}{1 - i}$ คือ $\bar{Z}$ = ...
7. $Z = \bar{Z}$ เมื่อใด _____ (Hint : จากข้อ 3)

สรุป _____

2. จงหาผลคูณในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $(5 + i)(5 - i)$ = _____

2. $(1 + \sqrt{-4})(1 - \sqrt{-4})$ = _____

3. $(-3 + 4i)(-3 - 4i)$ = _____

4. $(1, -1)(1, 1)$ = _____

สรุป "ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเท่ากับจำนวนจริงเสมอ"

$(a + bi)(a - bi)$ = _____

ส่วนจำนวนจริง และส่วนจำนวนจินตภาพ

3. จงหาส่วนจำนวนจริงและส่วนจินตภาพของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $z + \bar{z} = 4$ (1)

$z - \bar{z} = 10i$ (2)

(1) + (2) $2z$ = _____

z = _____

ส่วนจำนวนจริง $R(z)$ = _____, ส่วนจินตภาพ $Im(z)$ = _____

2. $z + \bar{z} = 8$ (1)

$z - \bar{z} = 6i$ (2)

_____

_____

_____

ส่วนจำนวนจริง $Re(z)$ = _____, ส่วนจินตภาพ $Im(z)$ = _____

สรุป "ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $\bar{z}$ เป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว ผลบวกของ z กับ $\bar{z}$ หารด้วยสองจะเท่ากับส่วนจำนวนจริง ผลต่างระหว่าง z กับ $\bar{z}$ หารด้วย $2i$ จะเท่ากับส่วนจินตภาพ"

$Re(z)$ =

$Im(z)$ =

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การหารจำนวนเชิงซ้อน

วิธีที่ (1) โดยอาศัยอินเวอร์สการคูณ

ทบทวน อินเวอร์สการคูณของ $Z = c + di$ คือ $\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d\,i}{c^2+d^2} = Z^{-1}$

$$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}\,i\right)$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

วิธีที่ (2) โดยอาศัยสังยุค

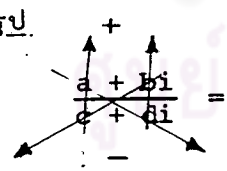
ทบทวน (1) สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $Z = c + di$ คือ $\bar{Z} = c - di$

(2) $(c+di)(c-di) = c^2 + d^2$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

สรุป



$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $\frac{(2, 0)}{(1, -1)} =$ _____

2. $\frac{2 + 3i}{-3 + 4i} =$ _____

3. $\frac{5}{2i} =$ _____

4. $\frac{2 + i}{1 + i} + \frac{2 - i}{1 + i} - \frac{4i}{1 + i} =$ _____

5. $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i} =$ _____

6. $(2 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + 2i) - \frac{4(3 - i)}{3i + 1} =$ _____

7. $\cfrac{i}{1 + i + \cfrac{i}{1 + i + \cfrac{i}{1 + i}}} =$ _____

8. $\frac{1}{(1 + i)^3} =$ _____

9. $\frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7} =$ _____

10. $\frac{5}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)} =$ _____

สรุป การหารจำนวนเชิงซ้อน

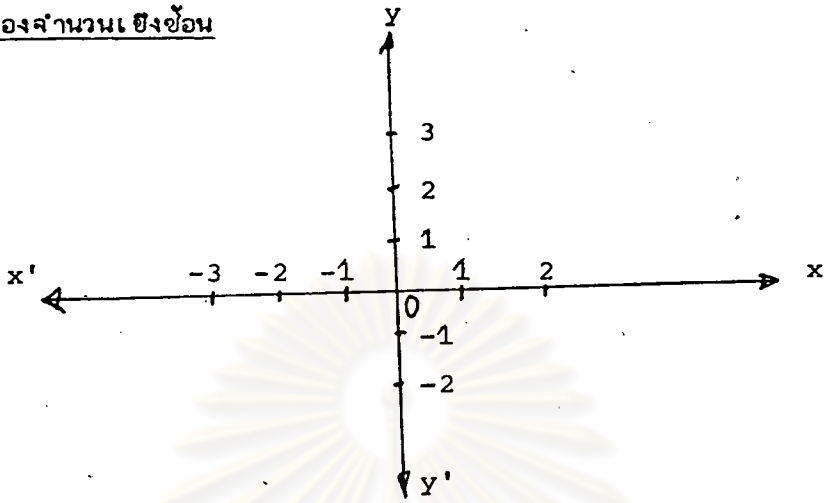
(1) $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$

(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$

(3) $\frac{z_1}{z_4} + \frac{z_2}{z_4} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_4}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กราฟของจำนวนเชิงซ้อน



จำนวนเชิงซ้อน $Z = x + yi$ แทนด้วยจุด (x, y) บนระนาบแกนมุมฉาก โดยที่

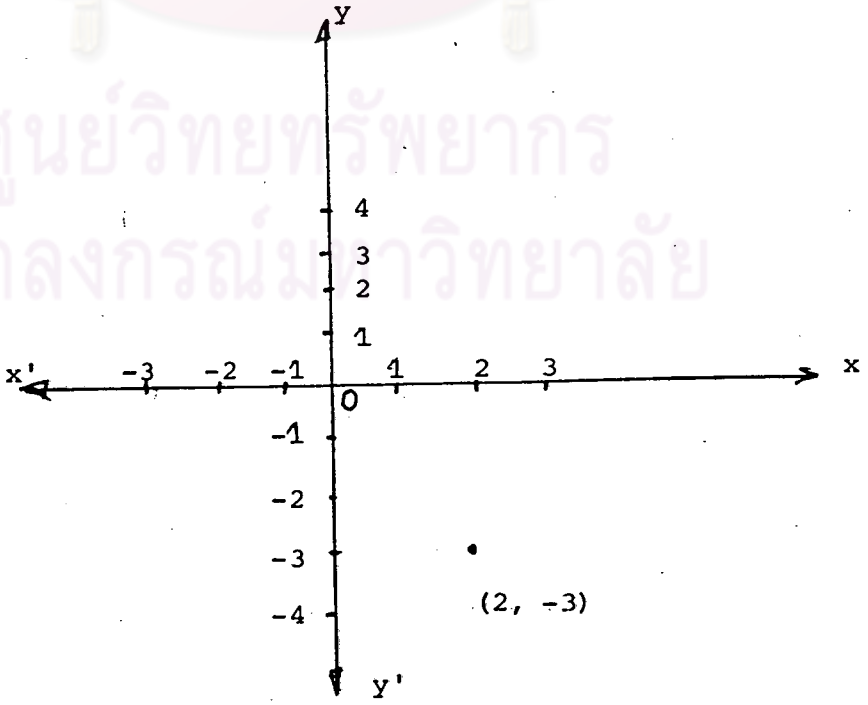
แกน x เป็นแกนจำนวนจริง (Real axis)

แกน y เป็นแกนจินตภาพ (Imaginary axis)

และเรียกระนาบที่เกิดจากแกนทั้งสองนี้ว่า "ระนาบเชิงซ้อน"

5. ลงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ลงในระนาบ

$(2, -3)$, $2 + 3i$, $2i$, -4

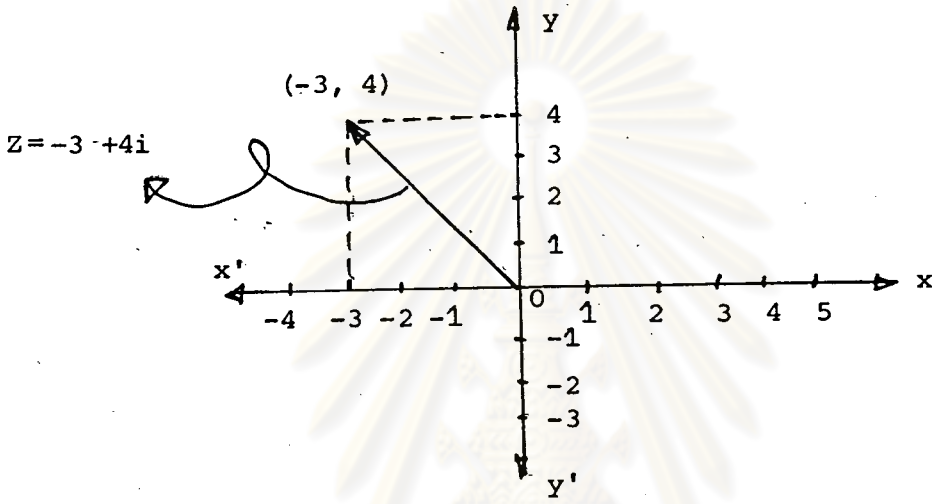


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การเขียนเวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม ถ้า $Z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เวกเตอร์ของ Z คือเวกเตอร์เริ่มจาก $(0, 0)$ ไปยังจุด (x, y) บนระนาบเชิงซ้อน

6. จงเขียนเวกเตอร์ $-3 + 4i$, $5 + i$, 3, $-2i$ บนระนาบเชิงซ้อน

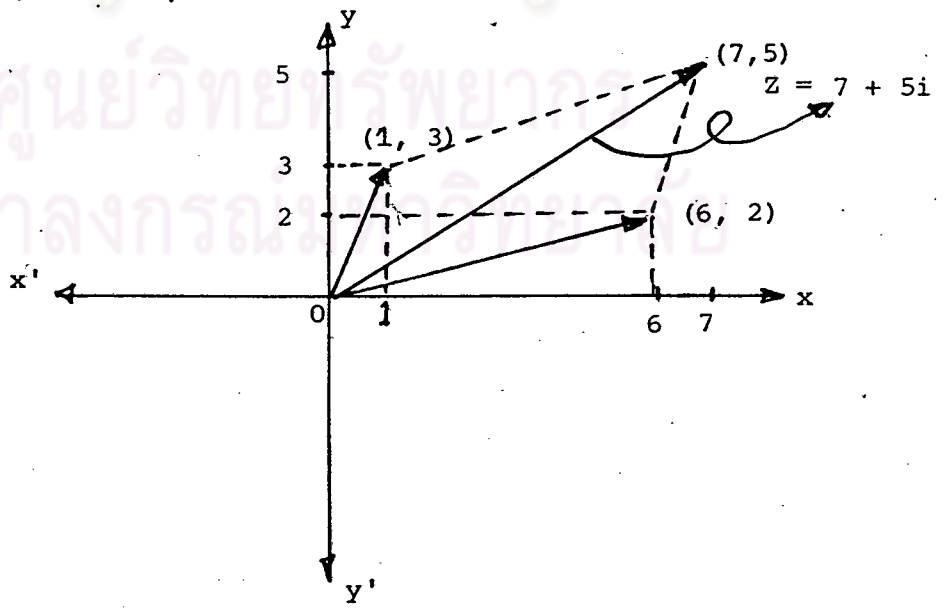


การบวก - ลบจำนวนเชิงซ้อน จะกระทำเช่นเดียวกับการบวก - ลบ เวกเตอร์

7. จงเขียนผลบวกของเวกเตอร์ต่อไปนี้

(1) $1 + 3i$, $6 + 2i$

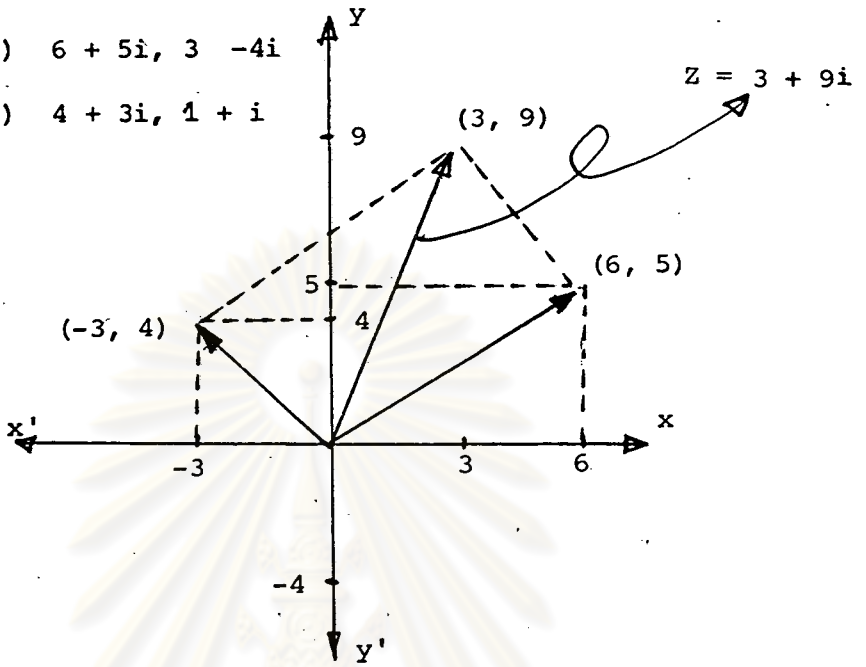
(2) $4 - 3i$, $1 + i$



8. จงเขียนผลต่างของเวกเตอร์ต่อไปนี้

(1) $6 + 5i,\ 3 - 4i$

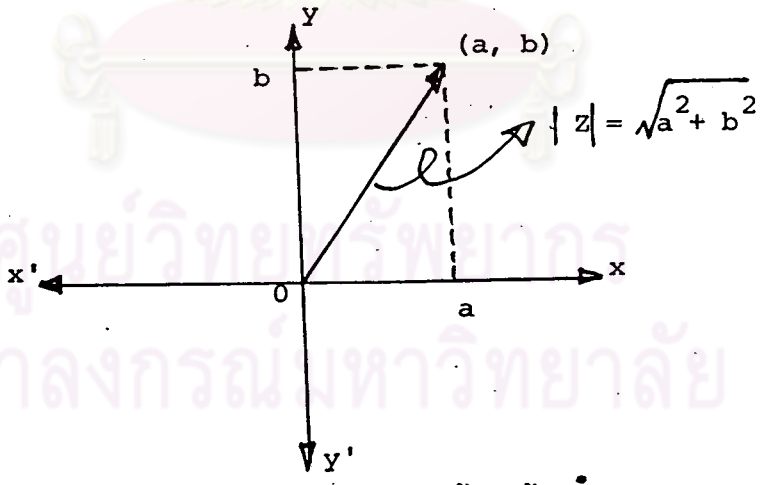
(2) $4 + 3i,\ 1 + i$



ข้อสังเกต การลบคือการบวกด้วยอินเวอร์สการบวกของตัวลบนั่นคือ

$$(6 + 5i) - (3 - 4i) = (6 + 5i) + (-3 + 4i)$$

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)



นิยาม ถ้า $Z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว

ค่าสัมบูรณ์ $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

คุณสมบัติบางประการของค่าสัมบูรณ์

1. $z\bar{z} = |z|^2$

2. $|\bar{z}| = |z| = |-z|$

3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

   $|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdots |z_n|$

   $|z^n| = |z|^n$, $|\bar{z}^n| = |\bar{z}|^n$

4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

5. $|z| \geq 0$ เสมอ

6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

   $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

   "ผลบวกของด้าน 2 ด้านของสามเหลี่ยมย่อมยาวกว่าด้านที่สาม"

   (Triangle Inequation)

9. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $z = 3 - 4i$, $|z| =$ _____
2. $z = 5$, $|z| =$ _____
3. $z = -8i$, $|z| =$ _____
4. $z = (2 + 3i)(2 - 3i)$, $|z| =$ _____
5. $z = \frac{(1 + i)(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)(3 - 4i)}{(-5 + 12i)}$, $|z| =$ _____
6. $z = -4i^{140} + 3i^{51}$, $|z| =$ _____
7. $z = (\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$, $|z| =$ _____
8. $z = -8(1 - i)^5(\sqrt{3} - i)^3$, $|z| =$ _____
9. $z^3 = 2 - 2i$, $|\bar{z}| =$ _____
10. $\bar{z} = 2 + \sqrt{3} + i$, $|z| =$ _____

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหา $|z|$ จาก $z^2 = \frac{1+i}{1+2i} + \frac{i(1+3i)}{10}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 2

1. 1) (3, 2)

   2) $-5 - 3i$

   3) $-3x$

   4) $-2i$

   5) $8 + i$

   6) $\frac{3e^{-i\theta}}{2}$ $(1 - i)$

   7) z, $\bar{z}$ เป็นจำนวนจริง

2. 1) 26

   2) 5

   3) 25

   4) 2

3. 1) 2, 5

   2) 4, 3

4. 1) (1, 1)

   2) $\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$

   3) $\frac{-5i}{2}$

   4) $-4i$

   5) $-\frac{2}{5}$

   6) $11i$

   7) $\frac{3}{8} + \frac{3i}{8}$

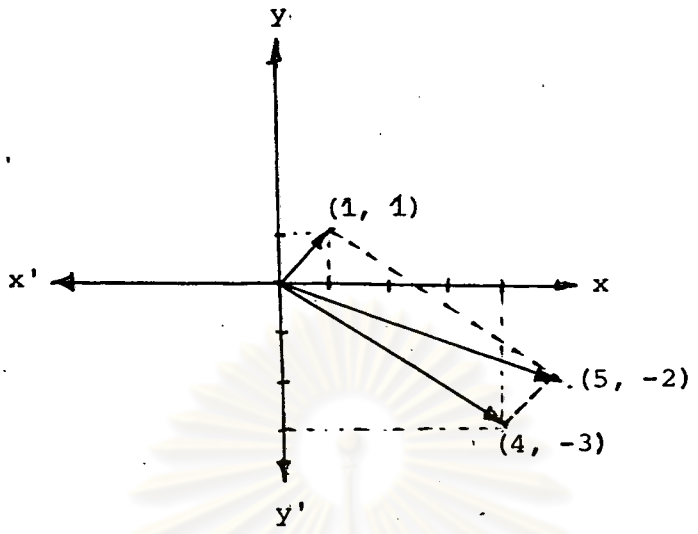
   8) $\frac{1}{4} - \frac{1i}{4}$

   9) 2

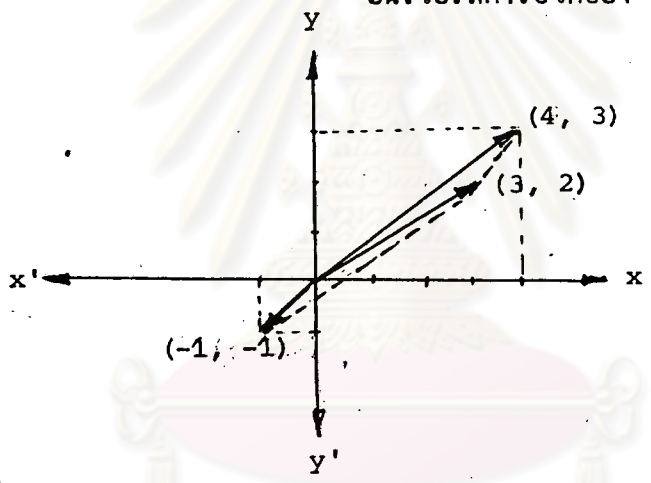
   10) $\frac{1}{2}i$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7. 2)



8. 2) อินเวอร์สการบวกของ 1 + i คือ - 1 -i



9. 1) 5,

2) 5

3) 8

4) 13

5) $\frac{20\sqrt{2}}{13}$

6) 5

7) 1

8) $256\sqrt{2}$

9) $\sqrt{2}$

10) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 2

กลุ่มควบคุม		กลุ่มทดลอง	
ขั้นที่ 1 ทบทวน	- ครูทบทวนนักเรียนโดยเรียกถาม-ตอบทีละคน ดังนี้ 1. นิยามของสังยุค 2. การหารโดยวิธีใช้สังยุคและวิธีลัด 3. การเขียนกราฟบนระนาบเชิงซ้อน 4. นิยามค่าสัมบูรณ์, กฎเกณฑ์ต่าง ๆ ของค่าสัมบูรณ์ และความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมบูรณ์กับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	ขั้นที่ 1 ทบทวน	- นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนโดยการซักถาม (เหมือนกลุ่มควบคุม)
ขั้นที่ 2	- ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2	- ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคนใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3	- ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อ พร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3	- ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสูตรและนิยามอีกครั้ง	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและผู้เรียนแต่ละคู่ช่วยกันสรุปสูตร และนิยาม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 2

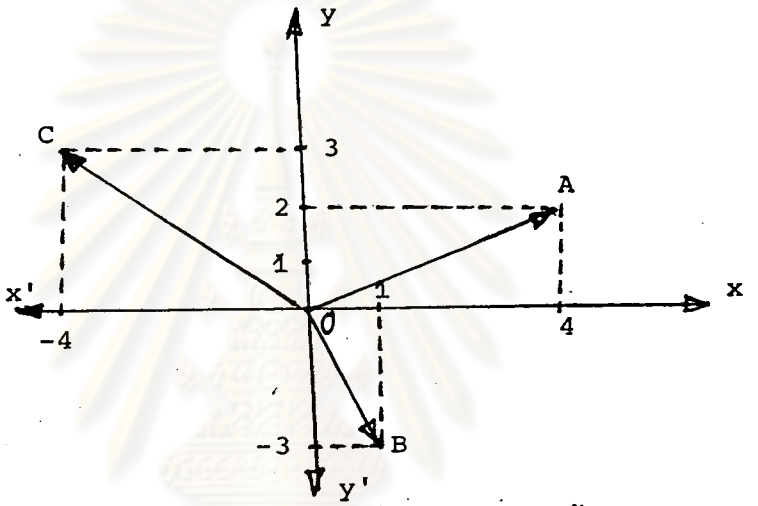
คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1. สังยุคของ $2 + \sqrt{3} - 4i$ เท่ากับ _____

2. จงหาค่า $(\sqrt{3} + 4i)(\sqrt{3} - 4i)$ เท่ากับ _____

3. จงหาค่า $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i}$ มีค่าเท่ากับ _____

4.



กำหนดให้ A, B, C เป็นเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อน

จงหา

(ก) $2A + B - C$ เท่ากับ _____

(ข) สังยุคของ B เท่ากับ _____

(ค) ค่าสัมบูรณ์ของ C เท่ากับ _____

5. $\left| \frac{2i(3 + 4i)(12 - 5i)}{\sqrt{4}(-4 + 3i)(5 + 12i)} \right|$ มีค่าเท่ากับ _____

6. กำหนดให้ $\overline{(2 + i)^4} = -7 - 24i$

จงหาค่า $(2 + i)^4 + (1 + i)$ เท่ากับ _____

เฉลย

1. $2 + \sqrt{3} + 4i$

2. 19

3. $\frac{-2}{5}$

4. (ก) $13 - 2i$

   (ข) $1 + 3i$

   (ค) 5

5. 1

6. $-6 + 25i$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 3

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถแก้สมการเมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนเชิงซ้อนได้

จุดประสงค์นำทาง

1. แก้สมการโดยวิธีแยกตัวประกอบได้
2. แก้สมการโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ได้
3. แก้สมการโดยใช้สูตร $Z = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$ ได้

   เมื่อ $aZ^2 + bZ + c = 0$
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 3

เนื้อหา

การแก้สมการมี 3 วิธี ดังต่อไปนี้

1. **การแก้สมการโดยวิธีการแยกตัวประกอบ**

   สูตร $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

   $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$

   $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$

   $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

   ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $Z^2 - 6Z + 11 = 0$

   วิธีทำ

   $Z^2 - 6Z + 9 + 2 = 0$

   $(Z - 3)^2 + 2 = 0$

   $(Z - 3)^2 = -2$

   $Z - 3 = \pm\sqrt{-2}$

   $Z = 3 \pm 2i$

   เซตคำตอบ $3 + 2i, 3 - 2i$ **ตอบ**

จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $z^2 + 2z = -3$

(2) $z^2 + 3z + \frac{29}{4} = 0$

(3) $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$

วิธีทำ

ตอบ $z =$ ____, ____, ____

(4) $z^4 - 4z^3 - z^2 + 22z = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. <u>การแก้สมการโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์</u>

จาก $Z^n = a + bi$ --------*

เมื่อ $Z = x + yi$

แทนค่า * จะได้

$(x + yi)^n = a + bi$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงแก้สมการ $Z^2 = 3 - 4i$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $Z = x + yi$ เป็นรากหนึ่งของสมการ แทนค่าจะได้

$(x + yi)^2 = 3 - 4i$

$x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i$

<u>เทียบสัมประสิทธิ์จะได้</u>

$x^2 - y^2 = 3$ ——— (1)

$2xy = -4$ ——— (2)

แก้สมการ (1), (2) จะได้ $x = -2, 2$, $y = 1, -1$

รากสมการ คือ $-2 + i$, $2 - i$

<u>ตอบ</u>

<u>หมายเหตุ</u> x, y ต้องเป็นจำนวนจริงเท่านั้น

(5) $Z^2 = -8i$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(6) $z^2 = -15 + 8i$

(7) $z = \sqrt{4 + i} + \sqrt{4 - i}$

(8) $z^4 = -1$ พร้อมทั้งเขียนกราฟคำตอบ

ข้อสังเกต รากที่ n ของจำนวนจริง a จะแบ่งวงกลมที่มีรัศมียาว $\sqrt[n]{|a|}$ หน่วย ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน

3. การแก้สมการโดยใช้สูตร $z = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$ เมื่อ $az^2 + bz + c = 0$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $z^2 - 3z + 6 = 0$

วิธีทำ $a = 1, b = -3, c = 6$

$b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(6)$

$= 9 - 24 = -15$

จากสูตร $z = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{15}i}{2}$

ตอบ เซตคำตอบ $\left\{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}\right\}$

จงแก้สมการต่อไปนี้

(9) $2z^2 + z + 2 = 0$

(10) $z^2 - 3z + 10i = 0$

(11) $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$

(12) $z^4 + 2z^2 - 15 = 0$

(13) จงสร้างสมการให้มี -1, $1 + i$, i เป็นรากคำตอบของสมการ

วิธีทำ $(x + 1)(x - i)\left(x - (1 + i)\right) = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(14) จงหาผลบวกค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โจทย์พิเศษท้ายข้อโมง

จงแก้สมการ $3z^2 - (1 - i)z + 1 = 0$

เฉลยคาบที่ 3

1. $-1 \pm \sqrt{2}i$
2. $\frac{-3}{2} \pm \sqrt{5}i$
3. $1, 1 \pm i$
4. $0, -2, 3 \pm \sqrt{2}i$
5. $\pm(2 - 2i)$
6. $\pm(1 + 4i)$
7. $\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17} + 4}$
8. $\pm 1, \pm i$
9. $-\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}i}{4}$
10. $4 - 2i, -1 + 2i$
11. $2 + i, 1 - 3i$
12. $\pm\sqrt{5}i, \pm\sqrt{3}$
13. $x^3 - 2ix^2 - (2 + i)x + i - 1 = 0$
14. 10

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 3

กลุ่มควบคุม		กลุ่มทดลอง	
ขั้นที่ 1 ทบทวน	- ครูทบทวนวิธีการแก้สมการโดยซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. การแก้สมการโดยวิธีแยกตัวประกอบ โดยวิธีทำกำลังสอง-สมบูรณ์บางส่วน 2. การแก้สมการโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ 3. การแก้สมการโดยใช้สูตร	ขั้นที่ 1 ทบทวน	- นักเรียนผู้ช่วยสอนซักถามผู้เรียนเหมือนกับกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2	- ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่าน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2	- ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคนใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3	- ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อ พร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3	- ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปวิธีแก้สมการ	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนกับผู้เรียนช่วยกันสรุปวิธีแก้สมการ 3 แบบ

<u>กิจกรรมเพิ่มเติม</u> การแก้สมการโดยการใช้วิธี "เดอร์มัว" (De' Moir)

$$z^n = a + bi$$

แก้สมการจะได้

$$z = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right)$$

โดยที่ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n - 1$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยตอนที่ 3

คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1) จงแก้สมการ

(ก) $x^2 + 2x + 4 = 0$ จะได้ $x =$ _____, _____

(ข) $z^2 - 2iz + 1 = 0$ จะได้ $z =$ _____, _____

(ค) $z^3 = 8i$ จะได้ $z =$ _____, _____, _____

2) $2, 1 + i$ เป็นรากของสมการ จงหาสมการนั้น คือ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1) (ก) $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$

(ข) $(1 + \sqrt{2})i$, $(1 - \sqrt{2})i$

(ค) $-2i, \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i$

2) $x^2 - (3 + i)x + 2 + 2i = 0$.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 4

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้นักเรียนสามารถแสดงได้ว่า เซตและโอเปอเรชันที่กำหนดให้เป็นกรุป

จุดประสงค์นำทาง

1. แก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับโอเปอเรชันตามที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. หาอินเวอร์ส และเอกลักษณ์ภายใต้โอเปอเรชันที่กำหนดให้ได้
3. เมื่อโจทย์กำหนดเซตมาให้ บอกได้ว่าเซตใดเป็นกรุปหรืออะบีเลี่ยนกรุปภายใต้โอเปอเรชันที่กำหนด
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 4

เนื้อหา

บทนำ การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน นอกจากจะมุ่งให้นักเรียนมีทักษะในการคำนวณแล้ว ยังมุ่งให้เข้าใจโครงสร้าง (Structure) ของคณิตศาสตร์อีกด้วย และมีโครงสร้างที่น่าสนใจซึ่งกำหนดโดยคุณสมบัติ 4 ประการ เรียกระบบนี้ว่า "กรุป" (Group) และทฤษฎีกรุปมีประโยชน์มาก ทั้งนี้เนื่องจากในระบบต่าง ๆ เช่น

เซตของจำนวนเต็มกับการบวก

เซตของจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนบวกกับการคูณ

เซตของเวกเตอร์กับการบวกในระนาบกับการบวก

ทั้งหมดที่กล่าวข้างต้นต่างก็เป็นกรุป ทฤษฎีบทใดที่เป็นจริงในระบบหนึ่ง ๆ ระบบใดที่เป็นกรุปจะสามารถนำไปอ้างอิงในระบบอื่น ๆ ที่เป็นกรุปได้โดยไม่ต้องพิสูจน์อีก ทำให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหาต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ชัดเจนยิ่งขึ้น

นิยาม 1 ระบบคณิตศาสตร์ประกอบด้วย

(1) เซตของสมาชิก

(2) ความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิก

(3) โอเปอเรชัน + และ x

(4) ประพจน์เกี่ยวกับสมาชิก, ความสัมพันธ์และโอเปอเรชัน

ตัวอย่าง ระบบจำนวนเต็มบวก ประกอบด้วย

(1) เซตของจำนวนเต็มบวก $I^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(2) ความสัมพันธ์ =

(3) โอเปอเรชัน + และ x

(4) พจน์เกี่ยวกับสมาชิก ความสัมพันธ์และโอเปอเรชัน

ถ้า $a \in I^+$ และ $a + x = a$ แล้ว x ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มบวก

นิยาม 2 ระบบคณิตศาสตร์ $\{G ; *\}$ ประกอบด้วยเซต $G \neq \emptyset$ และไบนารีโอเปอเรชัน * จะเรียกว่า กรุป เมื่อมีคุณสมบัติต่อไปนี้เมื่อ $a, b, c \in G$ ใด ๆ

(1) คุณสมบัติปิด $\forall a, b \in G : a*b \in G$

(2) คุณสมบัติการจัดหมู่ $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

(3) มีเอกลักษณ์ $\forall a \in G$ จะมี $e \in G$ หนึ่งตัว ซึ่งทำให้

$$a * e = a = e * a$$

(4) มีอินเวอร์ส เมื่อพิจารณาแต่ละ $a \in G$ จะมี a^{-1} หนึ่งตัวสำหรับ a แต่ละตัว อาจจะมี a^{-1} ซ้ำกันได้ และ $a^{-1} \in G$ จะทำให้ $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$ โดย e เป็น e ตัวเดียวกับข้อ (3)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. กำหนด $\{I\ ;\ *\}$ ภายใต้โอเปอเรชัน $x * y = 2x + y - 5$

จงหา $8*(-2)$

2. จงหาอินเวอร์สของ 8 ภายใต้โอเปอเรชัน $a \Delta b = a + b + 5$

เมื่อ $\{R\ ;\Delta\}$ เป็นกรุป

3. กำหนด $\{I,\ *\}$ เป็นกรุป กำหนดโอเปอเรชัน *

โดยที่ $a * b = a + b + 10$ จงหา

(ก) เอกลักษณ์ภายใต้โอเปอเรชัน *

(ข) ถ้า $x * 4^{-1} = 5$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

(4^{-1} คืออินเวอร์สของ 4 ภายใต้โอเปอเรชัน *)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. ถ้า I เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ + เป็นโอเปอเรชัน จงแสดงว่า $\{I; +\}$ เป็นกรุป

วิธีทำ 1. เนื่องจาก ผลบวกของจำนวนเต็มเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด

ดังนั้น + มีคุณสมบัติปิดและเป็นไบนารีโอเปอเรชันใน I

2. ถ้า $a, b, c \in I$ แล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$

ดังนั้น $\{I; +\}$ มีคุณสมบัติการจัดหมู่การบวก

3. 0 เป็นจำนวนเต็ม และ $0+a = a = a + 0, \forall\ a \in I$

ดังนั้น $\{I; +\}$ มี 0 เป็นเอกลักษณ์

4. ถ้า a เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มมี $-a \in I$ ที่ทำให้ $a +(-a) = 0 = (-a)+a$

ดังนั้น $\{I; +\}$ มีอินเวอร์สสำหรับแต่ละสมาชิกใน I

นั่นคือ $\{I; +\}$ เป็นกรุป

5. ถ้า A เป็นจำนวนเต็มคี่ กับการโอเปอเรชัน + แล้ว จงแสดงว่า $\{A; +\}$ เป็นกรุป หรือไม่ เพราะเหตุใด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6. ถ้า $A = \{1, 2\}$ และ นิยามโดยตารางดังนี้, $\{A ; \Delta\}$ เป็นกรุปหรือไม่

Δ	1	2
1	1	2
2	2	1

วิธีทำ 1) จากตารางสังเกตทุกตัวอยู่ในเซต A ทั้งหมด จึงมีคุณสมบัติปิด

ดังนั้น Δ เป็นไบนารีโอเปอเรชัน

2) ตรวจสอบการจัดหมู่ 8 กรณี

$1\Delta(1\Delta 1) = (1\Delta 1)\Delta 1$

$1\Delta(1\Delta 2) = (1\Delta 1)\Delta 2$

$1\Delta(2\Delta 1) = (1\Delta 2)\Delta 1$

$1\Delta(2\Delta 2) = (1\Delta 2)\Delta 2$

$2\Delta(2\Delta 1) = (2\Delta 2)\Delta 1$

$2\Delta(2\Delta 2) = (2\Delta 2)\Delta 2$

$2\Delta(1\Delta 1) = (2\Delta 1)\Delta 1$

$2\Delta(1\Delta 2) = (2\Delta 1)\Delta 2$

จากการตรวจสอบผลลัพธ์ทั้งหมดจะพบว่า

ระบบนี้มีคุณสมบัติการจัดหมู่.

3) 1 เป็นเอกลักษณ์

4) อินเวอร์สของ 1 คือ 1

อินเวอร์สของ 2 คือ 2

สรุป แสดงว่า $\{A ; \Delta\}$ เป็นกรุป

นิยาม ถ้ากรุป $\{G ; *\}$ มีคุณสมบัติการสลับที่แล้วเราเรียก $\{G ; *\}$ ว่า "อะบีเลียนกรุป" (Abelian หรือ Commutative group)

7. ถ้ากำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็มภายใต้โอเปอเรชัน * โดยที่

a * b = a + b + 2 เป็นกรุปหรืออะบีเลียนกรุปหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> 1) ถ้า $a \in I$ และ $b \in I$ แล้ว a, b ต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น

a + b + 2 เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $a * b \in I$ มีคุณสมบัติปิด

2) ให้ $a, b, c \in I$ ดังนั้น

$$(a * b) * c = (a + b + 2) * c$$
$$= a + b + 2 + c + 2$$
$$= a + b + c + 4$$
$$a * (b * c) = a * (b + c + 2)$$
$$= a + b + c + 2 + 2$$
$$= a + b + c + 4$$

ดังนั้น $(a * b) * c = a * (b * c)$

แสดงว่า I มีคุณสมบัติการจัดหมู่

3) ถ้า $-2 \in I$ และสำหรับทุก ๆ สมาชิก $a \in I$ จะได้ว่า

$$(-2) * a = (-2) + a + 2 = a$$
$$a * (-2) = a + (-2) + 2 = a$$

แสดงว่า -2 เป็นเอกลักษณ์ใน I

4) ให้ $a \in I$ จะพบว่า x เป็นอินเวอร์สของ a ก็ต่อเมื่อ

$$a * x = x * a = -2$$
$$a + x + 2 = x + a + 2 = -2$$

- ดังนั้น $x = -a - 4$

จะได้ว่าถ้า $a \in I$ $x = -a-4 \in I$ จะเป็นอินเวอร์สของ a

เพราะ $a * x = a+(-a -4) + 2 = -2$

$x * a = (-a -4) + a + 2 = -2$

จากข้อ (1) - (4) สรุปได้ว่า I เป็นกรุปภายใต้โอเปอเรชัน *

5) และ $\forall a \in I$ และ $\forall b \in I$

$$a * b = a + b + 2$$

$$b * a = b + a + 2$$

ดังนั้น I มีคุณสมบัติการสลับที่

จากข้อ (1) - (5) จะได้ว่า I เป็นอะบีเลียนกรุปภายใต้ *

8. ให้ P เป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และมีโอเปอเรชัน Ⓐ โดยที่ $a Ⓐ b = a^b$ โดยที่ $a, b \in R^+ + \{0\}$ แล้ว P ภายใต้โอเปอเรชัน Ⓐ เป็นกรุปหรืออะบีเลียนกรุปหรือไม่

9. จงแสดงว่า $\{V ; +\}$ ในระนาบ xy เป็นอะบีเลียนกรุปเมื่อ V เป็นเซตของเวกเตอร์ภายใต้โอเปอเรชันบวก

10. เซต $A = \{1, -1, i, -i\}$ ภายใต้โอเปอเรชัน $\times$ $\{A ; \times\}$ เป็นกรุปหรืออะบีเลียนกรุปหรือไม่

11. ถ้ากำหนดให้ $A = \{e, a, b\}$ ภายใต้โอเปอเรชัน * ดังตาราง, $\{A ; *\}$ เป็นกรุปหรืออะบีเลียนกรุปหรือไม่

*	e	a	b
e	b	e	a
a	e	a	b
b	a	b	e

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

ถ้า $M = \{0, 1, 2, 3\}$ ภายใต้โอเปอเรชัน $\oplus$ ดังตาราง ; $\{M ; \oplus\}$ เป็นกรุปหรืออะบีเลียนกรุปหรือไม่

$\oplus$	0	1	2	3
0	1	2	3	0
1	2	3	0	1
2	3	0	1	2
3	0	2	3	1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 4

1. 9

2. -18

3. (ก) -10

   (ข) 19

5. ไม่, ขาดคุณสมบัติปิด

8. ไม่

9. -

10. เป็นอะบีเลียนกรุป

11. เป็นอะบีเลียนกรุป

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 4

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนภายใต้การบวกและการคูณ 2. นิยามของกรุป 3. นิยามของอะบีเลียนกรุป	ขั้นที่ 1 ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนโดยซักถามเหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2 - ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2 - ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคนใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3 - ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อพร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3 - ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสูตรอีกครั้ง	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปบทเรียนในคาบนี้อีกครั้ง

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 4

คำสั่ง : จงเติมข้อความให้สมบูรณ์

1. กำหนดให้ $\{A ; \oplus\}$ โดยที่ A เป็นเซตของจำนวนเต็มภายใต้โอเปอเรชัน

   $\oplus$ คือ $a \oplus b = a + b + 2$

   จงหา

   (ก) $5 \oplus 2 =$ _____

   (ข) เอกลักษณ์ของ $\{A ; \oplus\}$ คือ _____

   (ค) อินเวอร์สของ 5 คือ _____

   (ง) $\{A ; \oplus\}$ เป็นกรุปหรือไม่ เพราะเหตุใด _____

   _____

2. $\{P ; *\}$ โดยที่ $P = \{2, 4\}$ ภายใต้ * นิยามโดยตาราง

*	2	4
2	2	4
4	4	2

   $\{P ; *\}$ เป็นกรุปหรือไม่ เพราะเหตุใด

   _____

   _____

   _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>เฉลย</u>

1. (ก) 9

(ข) -2

(ค) -9

(ง) เป็นกรุป เพราะมีคุณสมบัติ

(1) ปิด

(2) จัดหมู่

(3) เอกลักษณ์

(4) อินเวอร์ส

2. เป็นกรุป เพราะมีคุณสมบัติ

(1) ปิด

(2) จัดหมู่

(3) เอกลักษณ์

(4) อินเวอร์ส

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 5

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนสำดับในรูปแจงพจน์ได้เมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปของสำดับให้
2. เขียนพจน์ทั่วไปของสำดับจำกัดได้เมื่อกำหนดสำดับในรูปแจงพจน์
3. หาพจน์ต่าง ๆ ของสำดับเลขคณิตได้
4. หาพจน์ต่าง ๆ ของสำดับเรขาคณิตได้
5. บอกได้ว่าสำดับที่กำหนดให้สำดับใดเป็นสำดับเลขคณิตหรือสำดับเรขาคณิตได้

จุดประสงค์นำทาง

1. บอกได้ว่าเป็นสำดับจำกัดหรือสำดับอนันต์ได้
2. เขียนสำดับโดยการแจงพจน์เมื่อกำหนดสำดับโดยพจน์ทั่วไปให้ได้
3. เขียนพจน์ทั่วไปของสำดับจำกัดเมื่อกำหนดสำดับในรูปแจงพจน์ให้ได้
4. บอกพจน์แรก และผลต่างร่วมของสำดับเลขคณิตที่กำหนดให้ได้
5. หาพจน์ต่าง ๆ ของสำดับเลขคณิตที่กำหนดให้ได้
6. บอกพจน์แรก และอัตราส่วนร่วมของสำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ได้
7. หาพจน์ต่าง ๆ ของสำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ได้
8. บอกได้ว่าสำดับที่กำหนดให้สำดับใดเป็นสำดับเลขคณิตหรือสำดับเรขาคณิตได้
9. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 5

เนื้อหา

สำดับ

ความสัมพันธ์ $f = \{(x, y) \in I^+ \times R \mid y = f(x)\}$

สำดับจำกัด คือ ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกและ

สำดับอนันต์ คือ ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

การเขียนลำดับ นิยมเขียนเพียงสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน ดังนี้

f(1), f(2), f(3), ... ,f(n) ลำดับจำกัด

f(1), f(2), f(3), ... ,f(n),... ลำดับอนันต์

เรียก f(n) ว่าพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป (General term) ของลำดับ และใช้สัญลักษณ์ a_n แทนพจน์ทั่วไป

หมายเหตุ วิธีง่ายที่สุดในการสร้างลำดับคือ การใช้กฎหรือสูตรสำหรับพจน์ที่ n เช่น

1. กำหนด $a_n = n^2 + 1$ จะได้ลำดับซึ่ง 5 พจน์แรกคือ 2, 5, 10, 17, 26
2. ให้สูตร 2 สูตรหรือมากกว่านั้น เช่น $a_{2n-1} = 1$ และ $a_{2n} = 2n^2$ จะได้ลำดับซึ่ง 8 พจน์แรก คือ 1, 2, 1, 8, 1, 18, 1, 32.
3. กำหนดพจน์ข้างหน้าแล้วใช้สูตรหาพจน์ถัดไป เช่น กำหนด $a_1 = a_2 = 1$ และ $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ สำหรับ $n \geq 2$ จะได้ลำดับซึ่ง 8 พจน์แรก คือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. ลำดับใดต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์

1. 75, 15, $\frac{3}{5}$, ... _____

2. 2, 4, 6, ... , 2n,... _____

3. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, ... , $\sqrt{n}$ _____

4. $a_n = \frac{n}{n+2}$ เมื่อ n = 1, 2, 3, 4, 5 _____

5. $\{(x, y) \in I^+ \times R \mid y = 2x + 1\}$ _____

6. จำนวนเต็มตั้งแต่ -10 ถึง 32 _____

7. เซตของจำนวนเต็ม _____

8. $a_n = (-1)^{n+1} \sin n\frac{\pi}{2}$ _____

9. $\{(x, y) \mid y = x(x + 3), x \in I^+, x < 7\}$ _____

10. -5, -4, -3 -2, -1 _____

สรุป ลำดับจำกัด คือ _____

ลำดับอนันต์ คือ _____

2. จงเขียนลำดับอนันต์ต่อจากที่กำหนดอีก 3 พจน์ลงในช่องว่างที่กำหนด

1. 1, 3, 5, 7, _____, _____, _____,...

2. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, _____, _____, _____,...

3. 0.5, 0.05, 0.005, _____, _____, _____,...

4. $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, _____, _____, _____,...

5. 2×5, 4×10, 8×20, 16×40, _____, _____, _____,...

3. จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1. $a_n = n(n - 1)$

a_1 = _____

a_2 = _____

a_3 = _____

a_4 = _____

4 พจน์แรกของลำดับ คือ _____, _____, _____, _____.

2. $a_n = 1 + 4(2^{n+1} - 1)$

3. $f = \{(x, y) \mid y = x(x + 1), x \in I^+ \text{ และ } x \leq 10\}$

4. $a_n = n\left[1 + (-1)^{n+1}\right]$

4. จงหาพจน์ที่ n (a_n) ของลำดับต่อไปนี้

1. 3, 6, 12, 24,...

$a_1 = 3 \times 2^0$

$a_2 = 3 \times 2^1$

$a_3 = 3 \times 2^2$

.

.

.

$a_n =$ _____

2. 2, 0, 6, 0, 10,...

$a_1 = 1\left[1-(-1)^1\right]$

$a_2 = 2\left[1-(-1)^2\right]$

$a_3 =$ _____

$a_4 =$ _____

.

.

.

$a_n =$ _____

3. -1, 3, 11, 27,...

_____

_____

_____

_____

_____

4. 2, -5, 8, -11, 14,...

_____

_____

_____

_____

_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สรุป 1. จากฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะเป็นลำดับได้เมื่อ

$$D_f = \{x \mid x \in I^+\}$$

$$R_f = \{y \mid y = f(x)\}$$

2. เขียนในรูป a_n เป็นลำดับอนันต์

3. ถ้าเขียนในรูปเซตของความสัมพันธ์

3.1 ไม่กำหนดจำนวนของโดเมนเป็นลำดับอนันต์

เช่น $f = \{(x, y) \in I^+ \times R \mid y = 3^x - 2\}$

3.2 กำหนดจำนวนโดเมนเป็นลำดับจำกัด

เช่น $f = \{(x, y) \in I^+ \times R \mid y = 5x + 1, x < 10\}$

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence)

ได้แก่ลำดับที่ผลต่างระหว่างพจน์ที่ n+1 และพจน์ที่ n มีค่าคงที่ ค่าคงที่นี้เราเรียกว่า "ผลต่างร่วม" (Common difference)

ใช้สัญลักษณ์ ผลต่างร่วม = d

เช่น $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \quad a_n - a_{n-1} = d$$

ดังนั้น $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad = a_1 + (n - 1)d$$

นั่นคือ พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\, d}$$

จาก $a_n = a_1 + nd - d$

$= nd + \underbrace{a_1 - d}_{c}$ ให้ $c = a_1 - d$ เป็นค่าคงที่ใด,

จะได้ $a_n = nd + c$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต

$$\boxed{a_n = nd + c}$$

โดยที่ a_1 เป็นพจน์แรก

d ผลต่างร่วม

n จำนวนพจน์

ถ้า a, M, b เรียงเป็นลำดับเลขคณิต

$$M = \frac{a + b}{2}$$

นั่นคือ

$$\boxed{\text{ตัวกลางเลขคณิต} = \frac{\text{พจน์แรก} + \text{พจน์ที่สาม}}{2}}$$

1. จากลำดับเลขคณิตต่อไปนี้ จงหาค่า x และ y

1. 2, 7, 12, x, y x = _____, y = _____

2. 5, x, 1, -1, y x = _____, y = _____

3. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, x, y x = _____, y = _____

4. $x, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$, y x = _____, y = _____

2. จากลำดับเลขคณิตต่อไปนี้ จงหา

1. พจน์ที่ 8 ของ 2, -2, -6, ... คือ _____
2. พจน์ที่ 10 ของ $3\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$, $9\sqrt{3}$, ... คือ _____
3. พจน์ที่ 15 ของ $-5\sqrt{11}$, $-\sqrt{11}$, $3\sqrt{11}$, ... คือ _____
4. พจน์ที่ 20 ของ $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, 3, ... คือ _____

3. กำหนดให้พจน์ที่ 7 และพจน์ที่ 12 ของลำดับเลขคณิตคือ 22 และ 37 จงหาพจน์แรก ผลต่างร่วม และพจน์ที่ 10 ของลำดับนี้

<u>วิธีทำ</u> ลำดับ : $22, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, 37$

$\underset{d}{\vee}\ \underset{d}{\vee}\ \underset{d}{\vee}\ \underset{d}{\vee}\ \underset{d}{\vee}$

$5d = 37 - 22$

$d =$ _____

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$

_____

$a_1 =$ _____

_____

_____

_____

พจน์ที่ 10 ของลำดับนี้ คือ _____

4. ลำดับเลขคณิต 3 พจน์เรียงกันได้ 18 ถ้าคูณกันจะได้ 120 จงหาลำดับเลขคณิต

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $\underline{a_1 - d}$, $\underline{a_1}$, $\underline{a_1 + d}$

_____

_____

_____

_____

5. จำนวนเต็มซึ่งอยู่ระหว่าง 100 กับ 500 มีกี่จำนวนที่ 7 หารไม่ลงตัว

_____

_____

_____

_____

(342 จำนวน)

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)

ได้แก่ลำดับที่มีอัตราส่วนร่วมระหว่างพจน์ที่ n + 1 กับพจน์ที่ n มีค่าคงที่ ค่าคงที่นี้เราเรียกว่า "อัตราส่วนร่วม" (Common ratio)

สัญลักษณ์ ใช้ r แทนอัตราส่วนร่วม

เช่น $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

ดังนั้น $a_2 = a_1 r$

$a_3 = a_2 r = (a_1 r)r = a_1 r^2$

$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2)r = a_1 r^3$

.

.

.

$a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}$

.

นั่นคือ $\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$

โดยที่ a_1 - เป็นพจน์ที่ 1

a_n - พจน์ที่ n (General term)

r - อัตราส่วนร่วม

n - จำนวนพจน์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถ้า a, G.M. b เรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

$$G.M. = \pm\sqrt{ab}$$

ตัวกลางเรขาคณิต $= \pm\sqrt{ab}$

1. ลำดับต่อไปนี้ ลำดับใดเป็นลำดับเรขาคณิต และถ้าเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาอัตราส่วนร่วมด้วย

   1. 1, -2, 4, -8, 16, ...
   2. 5, -5, 5, -5, ...
   3. 0.01, 0.001, 0.0001, ...
   4. -8, -4, 0, 4, 8, ...
   5. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$, 1, -2, 4, -8, ...

2. จงหาพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ m ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

   1. 1, 4, 16, 64, ...
   2. 4, 2, 1, ...
   3. $-\sqrt{3}, \sqrt{6}, -2\sqrt{3}, \ldots$
   4. 12, 4, $\frac{4}{3}$, ...

3. จงหาพจน์แรก และอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต ซึ่งกำหนดพจน์ต่าง ๆ ดังนี้

   1. $a_3 = -8$, $a_6 = 1$

<u>วิธีทำ</u> $-8, \underset{r}{a_4}, \underset{r}{a_5}, \underset{r}{1}$

$$r^3 = \frac{1}{-8}$$

$$\therefore r = ____$$

จากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$

_____

_____

$$a_1 = _____$$

2. $a_2 = \frac{1}{9}$, $a_7 = 27$

4. ลำดับเรขาคณิต $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ จงหาว่า $\frac{243}{32}$ เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับนี้

5. ถ้า 3 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตรวมกันได้ 19 และคูณกันได้ 216 จงหาลำดับนี้

6. ลำดับต่อไปนี้ ลำดับใดเป็นลำดับเลขคณิต หรือลำดับเรขาคณิต และจงหา 2 พจน์ถัดไป

1. $2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, \ldots$

เป็นลำดับ _____

2 พจน์ถัดไป _____

2. $15, 9, 3, -3, \ldots$

เป็นลำดับ _____

2 พจน์ถัดไป _____

3. $27, 3\sqrt{3}, 1, \ldots$

4. $16, 24, 36, 54, \ldots$

5. $3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, \ldots$

สรุป 1. ลำดับมี 2 ชนิด

1. ลำดับจำกัด

2. ลำดับอนันต์

2. แต่ละลำดับในข้อ 1 แยกเป็น 2 ชนิด

1. ลำดับเลขคณิต

2. ลำดับเรขาคณิต

3. ตรวจสอบว่า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับชนิดใด

3.1 ถ้า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ หรือ $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ เป็นลำดับเลขคณิต

3.2 ถ้า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ หรือ $a_2^2 = a_1 a_3$ เป็นลำดับเรขาคณิต

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. จงหาค่า A, B, C, D, E เมื่อ -1, A, B, C, D, E, -31 เรียงเป็นลำดับเลขคณิต

เฉลยคาบที่ 5

1. ลำดับจำกัดข้อ 3, 4, 6, 9, 10 ลำดับอนันต์ข้อ 1, 2, 5, 8 ไม่เป็นลำดับข้อ 7

ลำดับจำกัด คือ ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก

ลำดับอนันต์ คือ ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม

2. 1) 9, 11, 13

2) $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

3) 0.0005, 0.00005, 0.000005

4) $4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}$

5) $32 \times 80, 64 \times 160, 128 \times 320$

3. 1) 0, 2, 6, 12

2) 13, 29, 61, 125

3) 2, 6, 12, 20

4) 2, 0, 6, 0

4. 1) $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

2) $a_n = n\left[1 - (-1)^n\right]$

3) $a_n = 2^{n+1} - 5$

4) $a_n = (-1)^{n+1}(3n - 1)$

ลำดับเลขคณิต

1. 1) $x = 17, y = 22$

2) $x = 3, y = -3$

3) $x = 1, y = \frac{5}{4}$

4) $x = 0, y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. 1) -26

   2) $30\sqrt{3}$

   3) $51\sqrt{11}$

   4) $\frac{43}{3}$

3. $a_1 = 4$, $d = 3$, $a_{10} = 31$

4. 2, 6, 10 และ 10, 6, 2

5. 342 จำนวน

<u>ลำดับเรขาคณิต</u>

1. 1) เป็น, $r = -2$

   2) เป็น, $r = -1$

   3) เป็น, $r = 0.1$

   5) เป็น, $r = -2$

2. 1) 256, 4^{m-1}

   2) $\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-3}$

   3) $-4\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\,(\sqrt{2})^{m-1}(-1)^m$

   4) $\frac{4}{27}$, $12(\frac{1}{3})^{m-1}$

3. 1) $a_1 = -32$, $r = -\frac{1}{2}$

   2) $a_1 = \frac{1}{27}$, $r = 3$

4. พจน์ที่ 7

5. 9, 6, 4, และ 4; 6, 9

6. 1) เลขคณิต, $10\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$

   2) เลขคณิต, -9, -15

   3) เรขาคณิต, $\frac{\sqrt{3}}{9}$, $\frac{1}{27}$

   4) เรขาคณิต, 81, $\frac{243}{2}$

   5) เรขาคณิต, $12\sqrt{2}$, 24

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 5

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยการซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์ 2. การเขียนพจน์ทั่วไปและการแจกแจงพจน์เมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปให้ 3. สูตรลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต	ขั้นที่ 1 ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนเหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2 - ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อนใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2 - ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบสอบย่อยให้นักเรียนทุกคน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3 - ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อ พร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3 - ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทเรียนตอนที่ 5	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปบทเรียนตอนที่ 5

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบตอนที่ 5

คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1. ก) $\sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{3\pi}{3}, \sin\frac{4\pi}{3}, \ldots$

   ข) $a_n = 2n + 1$

   ค) $-5, -4, -3, -2, -1$

   ง) $1, 2, 3, 4, \ldots, n$

   จงพิจารณาข้อ ก) - ง) ดังนี้

   1.1 ลำดับจำกัด _____

   1.2 ลำดับอนันต์ _____

2. 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 2^n - n$ คือ $a_1 =$ ___, $a_2 =$ ___, $a_3 =$ ___, $a_4 =$ ___

3. จงเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับ 4, 7, 10, 13, ... คือ $a_n =$ _____

4. ลำดับ 16, x, 8 เป็น 3 พจน์เรียงเป็นลำดับเลขคณิต

   จงหาพจน์ที่ 4 คือ _____

5. จงเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ คือ _____

6. จงหาค่า x, y ซึ่งทำให้ $-1, x, y, -216$ เรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

7. ลำดับเรขาคณิตสามพจน์แรกรวมกันได้ 13 และคูณกันได้ 27 จงหาลำดับนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1. 1.1 ค, ง

   1.2 ก, ข

2. $a_1 =$ 1 , $a_2 =$ 2 , $a_3 =$ 5 , $a_4 =$ 12

3. $a_n = 3n + 1$

4. $x = 12$, $d = -4$ $\therefore$ พจน์ที่ 4 = 4

5. $a_n = \frac{1}{3^n - 1}$

6. $x = -6$, $y = -36$

7. 1, 3, 9, ...

   9, 3, 1, ...

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 6

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถบอกได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์สามารถหาลิมิตของลำดับนั้นได้

จุดประสงค์นำทาง

1. บอกความหมายของลิมิตได้
2. บอกลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ได้โดยอาศัยกราฟ หรือตำแหน่งของพจน์ต่าง ๆ ของลำดับนั้นบนเส้นจำนวน
3. บอกลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ได้โดยอาศัยทฤษฎีลิมิต
4. บอกได้ว่าลำดับใดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เนื้อหา

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 6

ลิมิตของลำดับ (Limit of Sequence)

ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัดค่าของ a_n ของลำดับจะเข้าใกล้จำนวนคงที่จำนวนหนึ่ง คือ L จำนวนเดียวเท่านั้น

สัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ โดยที่ L แทนค่าลิมิตของลำดับ a_n

ลำดับที่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์

ลำดับที่ไม่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์

วิธีหาลิมิต ดังนี้

(1) หาจากกราฟหรือเส้นจำนวน

(2) หาจากลำดับที่ทราบลิมิตแล้ว

(3) ทฤษฎีลิมิต

<u>ทฤษฎีลิมิต</u>

กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

(1) ลำดับ c, c, c, ... , c, ... จะได้ $a_n = c$

$\lim_{n\to\infty} c = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงที่

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n) = A \cdot B$

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n^n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^n$

(6) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^c} = 0$ ถ้า $c > 0$

(7) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ ถ้า $|x| < 1$

(8) $\lim_{n\to\infty} c\,a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ (โดยอาศัยกราฟ)

<u>วิธีทำ</u> จากลำดับ $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน f ดังนี้

$$f = \left\{ (n, a_n) \mid a_n = 1 + \frac{1}{n} , n \in I^+ \right\}$$

เขียนแจกแจงพจน์ได้ดังนี้ $f = \{(__,__),(__,__),(__,__),\ldots\}$

กราฟของฟังก์ชัน f คือ

จะเห็นว่า a_n มีแนวโน้มว่าจะเข้าใกล้ 1 เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$ และกล่าวว่าลำดับนี้ซึ่ง $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ (Convergent Sequence) ซึ่งมีลิมิตเท่ากับ 1 <u>ตอบ</u>

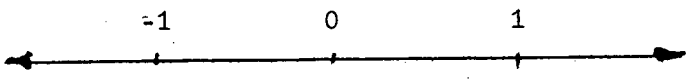
2. จงหาลิมิตของลำดับอนันต์ $a_n = \cos (n - 1)\pi$ (แสดงบนเส้นจำนวน)

<u>วิธีทำ</u> จากลำดับ $a_n = \cos(n - 1)\pi$ สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน f ดังนี้

$f =$ _____

เขียนแจกแจงได้ดังนี้ $f =$ _____

เขียน a_n บนเส้นจำนวน จะได้



สรุปได้ว่า _____

_____

_____

_____

3. จงหาว่าลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือลำดับไดเวอร์เจนต์

(ก) โดยแสดงบนเส้นจำนวน

(ข) โดยอาศัยกราฟ

(ก) _____

_____

_____

(ข) _____

_____

_____

4. จงหาค่าลิมิตของลำดับต่อไปนี้ โดยอาศัยทฤษฎีลิมิต และบอกด้วยว่าลำดับใดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์

โจทย์ตัวอย่าง

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1}$$

วิธีทำ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right]$, หารทั้งเศษและส่วนด้วย n^2

$$= \frac{1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1 - 0}{1 + 0 + 0} = 1$$ ตอบ

1. $a_n = \frac{6n - 4}{6n}$

2. $a_n = \frac{3n^3 - n}{7 - 4n^2}$

3. $a_n = \frac{5n + 7}{2}$

4. $a_n = \frac{2n^2 + 9\sqrt{n} + n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^4 - n^2 + 1}}$

5. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \frac{1 + (-1)^n}{2}$

6. $a_n = \frac{1}{2n} \cos n - \frac{n}{5n + 1}$

7. $a_n = \sqrt[n]{1 + 5^n}$

8. $a_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 2^n}$

9. $a_n = \log \left[1 + \frac{1}{10^n}\right]^3$

10. $a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n$

สรุปเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

1. ลำดับอนันต์เท่านั้นที่จะนำมาพิจารณาค่าลิมิตของลำดับได้

2. ลำดับที่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์ (Convergent Sequence) ลำดับไดเวอร์เจนต์ (Divergent Sequence) คือลำดับที่ไม่ใช่ลำดับคอนเวอร์เจนต์

3. ถ้า "L เป็นลิมิตของลำดับ a_n" เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

หมายความว่า เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด (∞ Infinity) ค่าของ a_n จะใกล้เคียงกับ L

4. ค่าลิมิตของลำดับจะมีได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

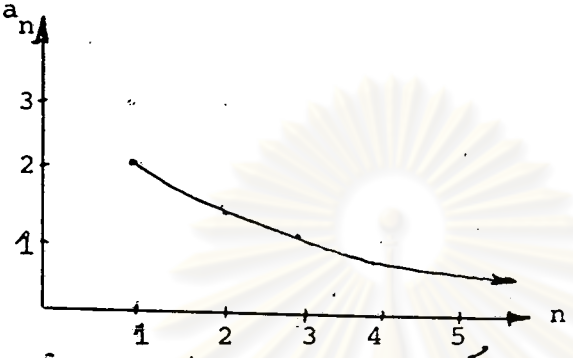
โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} + \frac{(-1)^n}{2n}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

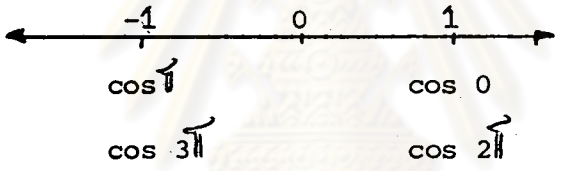
เฉลยคาบที่ 6

1. $(1, 2), (2, \frac{3}{2}), (3, \frac{4}{3}), \ldots$



2. $f = \{(n, a_n) \mid a_n = \cos(n-1)\pi, n \in I^+\}$

$f = \{(1, \cos 0°), (2, \cos \pi), (3, \cos 2\pi), \ldots\}$



สรุปได้ว่า a_n มีค่าเข้าสู่ 1 และ -1 ลิมิตของลำดับ $\cos(n-1)\pi$ จึงไม่มีลิมิต เราเรียกว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์

3. ลำดับคอนเวอร์เจนต์

4. 1) 1

2) ∞

3) ∞

4) 2

5) ไม่มีลิมิต

6) $-\frac{1}{5}$

7) 5

8) 1

9) 0

10) 1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 6

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยการซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. วิธีหาลิมิตของลำดับ มี 3 วิธี (1) โดยอาศัยกราฟ (2) ตำแหน่งของพจน์ที่ n ของลำดับบนเส้นจำนวน (3) ทฤษฎีของลิมิต 2. ความหมายของลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์	ขั้นที่ 1 ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนโดยการซักถามนักเรียนเหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2 - ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2 - ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคนใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3 - ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อพร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3 - ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาในคาบที่ 6	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนกับผู้เรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาในคาบที่ 6

<u>ปัญหาที่ควรเน้น</u> ในกรณีที่แยกลิมิตออกเป็น 2 กรณี ค่าลิมิตที่ได้ไม่เท่ากัน เราเรียกว่าไม่มีลิมิต

<u>ตัวอย่าง</u> $a_n = \begin{cases} 2, & n \geq 1 \\ -\frac{5}{n}, & n < 1 \end{cases}$

จงหา $\lim_{n \to \infty} a_n$

<u>ตอบ</u> ไม่มีลิมิต เพราะเมื่อ $n \geq 1$ ลิมิต $a_n = 2$

และ $n < 1$ ลิมิต $a_n = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 6

คำสั่ง : จงเติมข้อความให้สมบูรณ์

1. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \ldots, \frac{n+2}{n+3}, \ldots$

   ลิมิตของลำดับนี้ คือ _____

2. ลิมิตของลำดับ $\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ มีค่าเท่ากับ _____

3. $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{3n^2 + 7}{2 - 5n + 6n^2}\right]$ มีค่าเท่ากับ _____

4. $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{3n}{6n+1}\right]$ มีค่าเท่ากับ _____ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
   หรือลำดับไดเวอร์เจนต์ _____

5. $\lim_{n\to\infty} (\sin n\pi)$ มีค่าเท่ากับ _____, เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือ
   ลำดับไดเวอร์เจนต์ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>เฉลย</u>

1. 1
2. 0
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{2}$, คอนเวอร์เจนต์
5. ไม่มีลิมิต, ไดเวอร์เจนต์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 7

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาผลบวกของอนุกรมที่กำหนดให้ โดยใช้คุณสมบัติของซิกมา (Sigma)
2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิตได้

จุดประสงค์นำทาง

1. เขียนอนุกรมที่กำหนดให้โดยใช้สัญลักษณ์ $\sum$ (Sigma)
2. ใช้คุณสมบัติของซิกมาคำนวณหาผลบวกของจำนวนต่าง ๆ ได้
3. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้
4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตได้
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 7

เนื้อหา

อนุกรม คือ รูปที่แสดงการบวกพจน์ทุกพจน์ของลำดับ

เช่น $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับ

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ เรียกว่าอนุกรม

บางครั้งอาจจะใช้สัญลักษณ์แทนการบวกซิกมา ($\sum$) แทนอนุกรม ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

ในการใช้สัญลักษณ์ซิกมา ($\sum$) มีคุณสมบัติที่ควรจดจำ ดังนี้

1. $\sum c = cn$, c เป็นค่าคงที่
2. $\sum ca_n = c\sum a_n$
3. $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$
4. $\sum n = \frac{n}{2}(n+1)$

   $\sum n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

   $\sum n^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2 = (\sum n)^2$

ข้อสังเกต อนุกรมมาจากลำดับแต่นำมาเขียนให้อยู่ในรูปผลบวก

ดังนั้น อนุกรมที่มาจากลำดับจำกัด เรียกว่า อนุกรมจำกัด

อนุกรมที่มาจากลำดับอนันต์ เรียกว่า อนุกรมอนันต์

อนุกรมที่มาจากลำดับเลขคณิต เรียกว่า อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมที่มาจากลำดับเรขาคณิต เรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต

1. จงเขียนอนุกรมต่อไปนี้ในรูป Σ

(1) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 15$ = _____

(2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}$ = _____

(3) $1^3 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 7^3 + \ldots + n(2n - 1)^3 + \ldots$ = _____

2. จงกระจายอนุกรมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลบวก

(1) $\sum_{i=1}^{15} i$ $= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 15$

(2) $\sum_{k=1}^{10} (k - 2)$ = _____

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ $= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots$

(4) $\sum_{j=1}^{5} j^3$ = _____

(5) $\sum_{k=1}^{5} k^3$ = _____

ข้อสังเกต $\sum_{j=1}^{5} j^3$, $\sum_{k=1}^{5} k^3$ _____ เท่า/ไม่เท่า

(6) $\sum_{k=1}^{4} (2k - 1) = 16$

(7) $\sum_{i=1}^{4} i^2(i - 3)$ = _____

(8) $\sum_{k=1}^{5} (k^2 + 3)$ = _____

(9) $\sum_{k=4}^{8}(k+2)$ = _____

(10) $\sum_{i=-2}^{1} 2^{i} + 3$ = _____

ข้อสังเกต การเขียน ไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นด้วย 1 (จากข้อ 9, 10)

3. จงหาค่า $\sum$ ต่อไปนี้

(1) ถ้า $g(x) = 3x - 2$ จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{3} g(i^2 + 2)$

วิธีทำ $g(x) = 3x - 2$

$g(i^2 + 2) = 3(i^2 + 2) - 2$

$= 3i^2 + 4$

$\sum_{i=1}^{3} g(i^2 + 2) = \sum_{i=1}^{3}(3i^2 + 4) = 3\sum_{i=1}^{3} i^2 + \sum_{i=1}^{3} 4$

$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2) + (4 \times 3) =$ _____

4. ถ้า $f(x) = 4x - 3$ จงหาค่า $\sum_{i=1}^{4} f(i^2 + 2)$

_____

_____

_____

_____

_____

5. $\sum_{n=1}^{5}(n^2 + n - 3) = \sum_{n=1}^{5} n^2 + \sum_{n=1}^{5} n - \sum_{n=1}^{5} 3$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (3 \times 5)$

= _____

= _____

6 $\sum_{i=4}^{7}[(n-1)(n+2)]$

7 $\sum[2n(n+1)(2n+1)] = \sum(4n^3 + 6n^2 + 2n)$

$= 4\sum n^3 + 6\sum n^2 + 2\sum n$

<u>อนุกรมเลขคณิต</u>

ลำดับเลขคณิต $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1+(n-1)d, \ldots$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต, S_n มีสูตร

ดังนี้

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

โดยที่ a_1 เป็นพจน์แรก

d ผลต่างร่วม

n จำนวนพจน์

a_n พจน์สุดท้าย $(a_n = a_1 + (n-1)d)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

8. จงหาผลบวกของลำดับเลขคณิตเมื่อ $a_1 = 6,\ d = 4,\ a_n = 26$

9. จงหาผลบวก 100 พจน์แรกของจำนวนเต็มคี่บวก

ลำดับ :- $\underbrace{1, 3, 5, 7, \ \ldots\ , 199}_{\text{100 พจน์แรก}}$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

10. จงหาค่า n เมื่อ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 153$

11. ถ้า $\log\left[\frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{3^{\frac{11}{3}}} \cdot \frac{1}{3^{\frac{10}{3}}} \cdots \cdot \frac{1}{3^{\frac{12-n}{3}}}\right] = 0$

จงหาค่า n

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

12. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 84 และ 719 ซึ่งหารด้วย 5 ลงตัว

อนุกรมเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต : $a_1, a_1r, a_1r^2 \ldots , a_1r^{n-1}, \ldots$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต, S_n มีสูตรดังนี้

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}, \quad r \neq 1$$

โดยที่ a_1 พจน์แรก

r อัตราส่วนร่วม

n จำนวนพจน์

a_n พจน์ที่ n และ $a_n = a_1r^{n-1}$

13. จงหา S_7ของลำดับ 8, 4, 2, 1,...

$$S_7 = 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$a_1 = 8, \ r = \frac{1}{2}, \ n = 7$

จาก $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}$

$$S_7 = \frac{a_1 - a_7r}{1 - r}$$

$$= \text{_____}$$

$$= \text{_____}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

14. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \ldots$

15. จงหา S_5 เมื่ออนุกรมเรขาคณิตมีผลบวก 2 พจน์แรกเท่ากับ 3 และผลบวกของพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 6 เท่ากับ $\frac{3}{16}$

16. ในอนุกรมเรขาคณิต $8 + 24 + 72 + \ldots$

จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $S_n > 6,000,000$ ถ้ากำหนดให้

$\log 3 = 0.4771$ และ $\log 1.5 = 0.1761$

$8 + 24 + 72 + \ldots$

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ โดยที่ $a_1 = 8$, $r = 3$

จากโจทย์ $S_n > 6,000,000$ จะได้ว่า

17. จงหาผลบวก n พจน์แรกของลำดับ 6, 7, 9, 13, 21,... $,(2^{n-1}+5),...$

$$S_n = 6 + 7 + 9 + 13 + 21 + ... + (2^{n-1}+5)$$

$$= (2^0 + 5) + (2^1 + 5) + (2^2 + 5) + (2^3 + 5) + ... + (2^{n-1} + 5)$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

1. จงหาผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรม 9 + 98 + 997 + 9996 + 99995 +...

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 7

1. 1) $\sum_{i=1}^{8} (2i - 1)$

   2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$

   3) $\sum_{n=1}^{2} n(2n - 1)^3$ (อนุกรมอนันต์)

2. 2) $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

   4) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$

   5) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$

   7) 10

   8) 70

   9) 40

   10) 30

3. 54

4. 140

5. 55

6. 140

7. $n(n+1)(n^2 + 3n + 2)$

8. 96

9. 10000

10. $n = 17$

11. $n = 24$

12. 50800

13. $\frac{127}{8}$

14. $121(\sqrt{3} + 1)$

15. $\frac{31}{8}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

16. $n = 13$

17. $(2^n - 1) + 5n$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 7

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. การเขียนอนุกรมอนันต์ในรูปซิกมา และอนุกรมจำกัดในรูปซิกมา 2. คุณสมบัติของซิกมา 3. $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$, $\sum_{i=1}^{n} i^3$ มีค่าเท่ากับเท่าใด 4. สูตรการหาอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต	ขั้นที่ 1 ทบทวน- นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนเนื้อหาคาบที่ 7 เหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2 - ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2 - ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคนใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3 - ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อ พร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3 - ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสูตร และนิยามอีกครั้ง	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปสูตรและนิยามอีกครั้ง

<u>ปัญหาที่ควรเน้น</u> ไม่มีการกระจายซิกมาในรูปผลคูณ และผลหาร

<u>ตัวอย่าง</u> เช่น $\sum(ab) \neq (\sum a)(\sum b)$

$$\sum\left(\frac{a}{b}\right) \neq \frac{\sum a}{\sum b}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 7

คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1. จงเขียน $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 32$ ในรูปซิกมา = _____

2. กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1$

$g(x) = x^2$

$\sum_{k=1}^{6} (g(k) + f(k))$ มีค่าเท่ากับ _____

3. จากสมการ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 136$ จงหาค่า n = _____

4. จงหาผลบวก 18 พจน์แรกของอนุกรม $1 + 9 + 25 + 49 + \ldots$

เท่ากับ _____

5. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $2 + 5 + 8 + \ldots$

มีค่าเท่ากับ

6. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \ldots$

มีค่าเท่ากับ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1. $\sum_{i=1}^{5} i2^i$

2. 127

3. n = 16

4. 7770

5. $\frac{n}{2}(3n + 1)$

6. $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}^n - 1)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 8

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ และสามารถหาผลบวกบวกของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ได้
2. เขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วนโดยอาศัยอนุกรมอนันต์

จุดประสงค์นำทาง

1. หาผลบวกย่อยของอนุกรม และลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้ได้
2. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์โดยใช้ทฤษฎีลิมิตได้
3. บอกได้ว่าอนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์
4. เขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วนโดยอาศัยอนุกรมอนันต์ได้
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 8

เนื้อหา

ผลบวกอนุกรมอนันต์ อนุกรมอันนต์ไม่อาจหาผลบวกที่แน่นอนทั้งหมดได้ เพราะไม่ทราบค่าพจน์สุดท้าย แต่ในบางอนุกรมอนันต์บางประเภทอาจหาผลบวกใกล้เคียงหรือผลบวกโดยประมาณได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผลบวกย่อยของอนุกรมนั้น กล่าวคือ ถ้าลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์มีลิมิต ลิมิตของลำดับคือ ผลบวกของอนุกรมนั้นนั่นเอง

โจทย์ อนุกรม $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$ จงหาลำดับผลบวกย่อยและผลบวกอนันต์

แนวคิด : ถ้า $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ เป็นลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม (Partial Sum of Sequence) แต่ S_1 หรือ S_2 หรือ $S_3 \ldots$ หรือ S_3 เรียกว่าผลบวกย่อยของอนุกรม (Partial Sum of Series)

<u>วิธีทำ</u> ดังนั้น $S_1 = \frac{1}{10}$

$$S_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$$

$$S_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{111}{1000}$$

$$S_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{10^n - 1}{9 \times 10^n}$$

ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \cdots, \frac{10^n - 1}{9 \times 10^n}, \cdots$

<u>ลิมิตของลำดับ</u> จะได้แก่

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{9 \times 10^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9 \times 10^n}\right) = \frac{1}{9}$$

<u>สรุป</u> ลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ $\frac{1}{9}$ และอนุกรมนี้ เรียกว่า อนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$$

$\therefore$ ผลบวกอนันต์ $= \frac{1}{9}$ □

1. อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \cdots$

จงหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมและผลบวกอนันต์

หาผลบวกย่อย

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

2. อนุกรม $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots + 3(2^{n-1}) + \ldots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ด้วย

3. อนุกรม $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ จงหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

4. อนุกรม $5 + 5 + 5 + \ldots + \ldots$

เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

5. อนุกรม $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

จงหา

(ก) ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

(ข) เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์

(ค) ผลบวกอนันต์ของอนุกรม (ถ้ามี)

หาผลบวกย่อย

$S_1 =$

$S_2 =$

$S_3 =$

$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

<u>ลำดับผลบวกย่อย</u>

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ คือ .....

<u>ผลบวกอนันต์</u>

ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r = \neq 1$$

$$= \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 r^n}{1 - r}$$

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$

ดังนั้น

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 r^n}{1 - r} \right]$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}, \quad |r| < 1}$$

6. จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม $16 + 12 + 9 + \ldots$

7. อนุกรม $\log 2 + \log \frac{2}{100} + \log \frac{2}{1000} + \ldots + \log \frac{2}{10^n} + \ldots$

จงหาผลบวกอนันต์

8. จงหาผลบวกอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 2^n - 1}{8^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \ldots\right)$$

$$= _____$$

$$= _____$$

$$= _____$$

9. จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม $8 + 24 + 72 + \ldots$

_____

_____

_____

_____

_____

<u>ประโยชน์ที่ได้รับจากอนุกรมอนันต์</u> คือ การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน

<u>สูตร</u> $S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$, $|r| < 1$

10. $0.\dot{3}\dot{1}$ จงเขียนในรูปเศษส่วน

$$0.\dot{3}\dot{1} = 0.313131\ldots$$

$$= 0.31 + 0.0031 + 0.000031 + \ldots$$

$$= \frac{0.31}{1 - 0.01}$$

$$= \frac{31}{99}$$

11. $0.6\dot{1}0\dot{4}$ จงเขียนในรูปเศษส่วน

$$0.6\dot{1}0\dot{4} = 0.6 + (0.0104 + 0.0000104 + \dots)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{0.0104}{1 - 0.001}$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{104}{999}$$

$$= \frac{6098}{9990}$$

$$= \frac{3049}{4995}$$

12. $0.2\dot{5}6$ จงเขียนในรูปเศษส่วน

13. $3.0\dot{1}7$ จงเขียนในรูปเศษส่วน

14. ถ้า $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{3}{5}$ จงหาค่า x

สรุปเกี่ยวกับเรื่องผลบวกอนันต์

1. อนุกรมอนันต์เท่านั้นที่จะนำมาพิจารณาค่าลิมิตของอนุกรมได้
2. ลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์ คือ ผลบวกอนันต์ของอนุกรม
3. ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมมีลิมิตเรียกลิมิตนี้ว่า ผลบวกของอนุกรมอนันต์ และกล่าวว่าอนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ถ้าลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมไม่มีลิมิตกล่าวว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมไดเวอร์-เจนต์
4. ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต ใช้สูตร

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}, \quad |r| < 1$$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. อนุกรม $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \cdots\cdots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์-เจนต์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 8

1. ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots, 2(1 - \frac{1}{2^n}), \ldots$

   ผลบวกอนันต์ = 2

2. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ผลบวกอนันต์ $= \infty$

3. ลำดับผลบวกย่อย, 1, 0, 1, 0, ... , ผลบวกอนันต์ — , เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

4. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

5. ก) $\frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{9}{12}, \ldots, 1 - \frac{1}{n+1}, \ldots$

   ข) เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

   ค) 1

6. 64

7. ∞

8. $1\frac{10}{21}$

9. ∞

12. $\frac{127}{495}$

13. $3\frac{17}{990}$

14. $\frac{-2}{3}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 8

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ (1) ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม (2) ลิมิตของลำดับ 2. หาผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต 3. การเปลี่ยนทศนิยมแบบซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วนโดยอาศัยผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต	ขั้นที่ 1 ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนเหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2 - ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2 - ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3 - ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อพร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3 - ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทเรียนคาบที่ 8	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและนักเรียนช่วยกันสรุปบทเรียนคาบที่ 8

<u>ปัญหาที่ควรเน้น</u>

สูตร $S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}$

จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อเป็นอนุกรมอนันต์เรขาคณิตและ $|r| < 1$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบคาบที่ 8

คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1. อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

   จงหา

   (ก) ลำดับผลบวกย่อย คือ _____

   (ข) ลิมิตของลำดับมีค่าเท่ากับ _____

2. กำหนดให้ k เป็นค่าคงที่ และ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

   $= \lim_{n\to\infty} \frac{(3kn - 2)^2}{n^2}$ ค่า k มีค่าเท่ากับ _____

3. จงเขียน $2.0\dot{1}\dot{3}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนคือ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1. (ก) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots, 2(1 - \frac{1}{2^n}), \ldots$

   (ข) 2

2. $k = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

3. $\frac{1993}{990}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 9

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาลิมิตของฟังก์ชันได้
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงได้

จุดประสงค์นำทาง

1. หาลิมิตของฟังก์ชันได้
2. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วงที่กำหนดให้ได้
3. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในขณะ x ใด ๆ ก็ได้
4. หาความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาที่กำหนดให้ได้
5. หาความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ ได้
6. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงถูกต้อง 80%

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 9

ประวัติ แคลคูลัส มีแนวคิดเบื้องต้นตั้งแต่สมัยของอาร์คีมีดิส (Archemidis) พ.ศ. 256-331 และได้ปรับปรุงแนวความคิดนั้นเรื่อยมาจนกระทั่งในศตวรรษที่ 17 Fermat นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ได้ค้นพบความรู้เกี่ยวกับเรื่องของอนุพันธ์ (Derivative) และสามารถนำอนุพันธ์ไปใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับ ความเร็ว ความเร่ง อัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ และได้ค้นคว้าปรับปรุงวิชาแคลคูลัสเรื่อย ๆ มาจนถึงปัจจุบันนี้

สำหรับผู้ให้กำเนิดวิชาแคลคูลัสคือ Sir Issac Newton พ.ศ. 2185 - 2270 ชาวอังกฤษ และ Gottfried Wilhelm Leibnitz พ.ศ. 2189 - 2259 ชาวเยอรมัน

นิวตันค้นพบวิชาแคลคูลัสในปี พ.ศ. 2213 และได้ลงพิมพ์เผยแพร่ผลงานครั้งแรกในปี พ.ศ. 2230 ในหนังสือ "Philosophiae Naturalis Principia Mathematiea" ส่วนไลบ์นิตซ์ ได้ค้นพบแคลคูลัสและเผยแพร่ผลงานของเขาในวารสาร Acta Fruditorum ในปี พ.ศ. 2227 สัญลักษณ์ที่ใช้ในแคลคูลัสในปัจจุบันนี้ผู้คิดคือ ไลบ์นิตซ์ นั่นเอง

ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of Functions)

ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

นิยาม $\lim_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึง ทุกค่าของ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ย่อมมีจำนวน $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x - a| < \delta$

ทฤษฎีของลิมิต

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันของ x

c เป็นค่าคงที่

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

(1) $\lim_{x \to a} c = c$

(2) $\lim_{x \to a} c\,f(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cA$

(3) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$

(4) $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = AB$

(5) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$

(6) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$

เมื่อหาลิมิตของฟังก์ชันโดยการแทนค่าแล้วพบว่าอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$, , $\frac{\infty}{\infty}$, ยังสรุปไม่ได้ ต้องจัดรูปฟังก์ชันใหม่ก่อนแทนค่าหาลิมิต

<u>จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้</u>

1. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2) = 6$

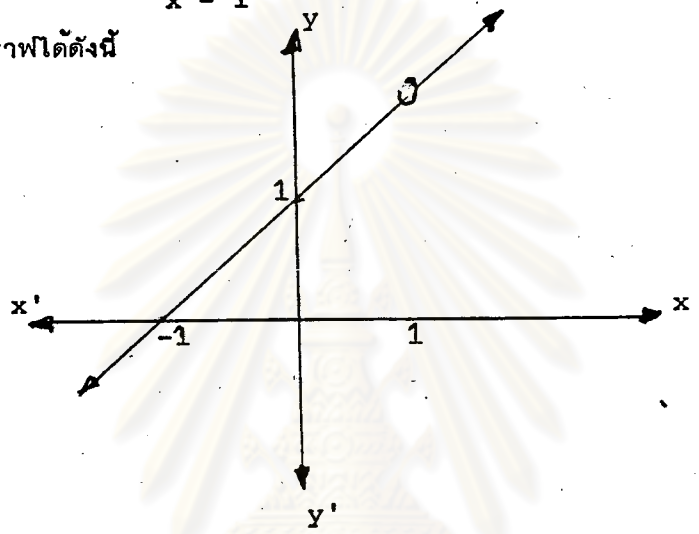
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$ เมื่อแทนค่า $x = 1$ แล้วจะได้ $\frac{0}{0}$ และจะพบว่า

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = x + 1$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ก็คือฟังก์ชัน $y = x + 1$ เมื่อ $x \neq 1$

เขียนกราฟได้ดังนี้



นั่นคือ

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) \quad \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

3. $\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3}\right)$ = _____

4. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$ = _____

5. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{5 - x^2 + 7x^3}$ = _____

6. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2 + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} \right]$, นำ x^2 หารทั้งเศษและส่วน

$= \frac{2 + 0 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0}} = 2$

7. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \to 2} 5x$ = _____ (10)

(2) $\lim_{x \to 1} (2x + 3)$ = _____

(3) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4x + 1)$ = _____

(4) $\lim_{x \to -2} (\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4})$ = _____ (0)

(5) $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$ = _____ $(\frac{1}{10})$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(6) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x - 6}\right)$ = _____

(7) $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}\right)$ = _____

(8) $\lim_{x \to 3} \sqrt{25 - x^2}$ = _____

(9) $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{6x^3 - 5x^2 + 3}{2x^3 + 4x - 7}\right]$ = _____

(10) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x + 8} - 2}{x}$ = _____ (Hint $t = \sqrt[3]{x + 8}$)

(11) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\right)$ = _____ (0)

(12) $\lim_{x \to -1} \left[\frac{\sqrt{2 + x} - 1}{x + 1}\right]$ = _____ $(\frac{1}{2})$

(13) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$ = _____

(14) $\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}\right)$ = _____

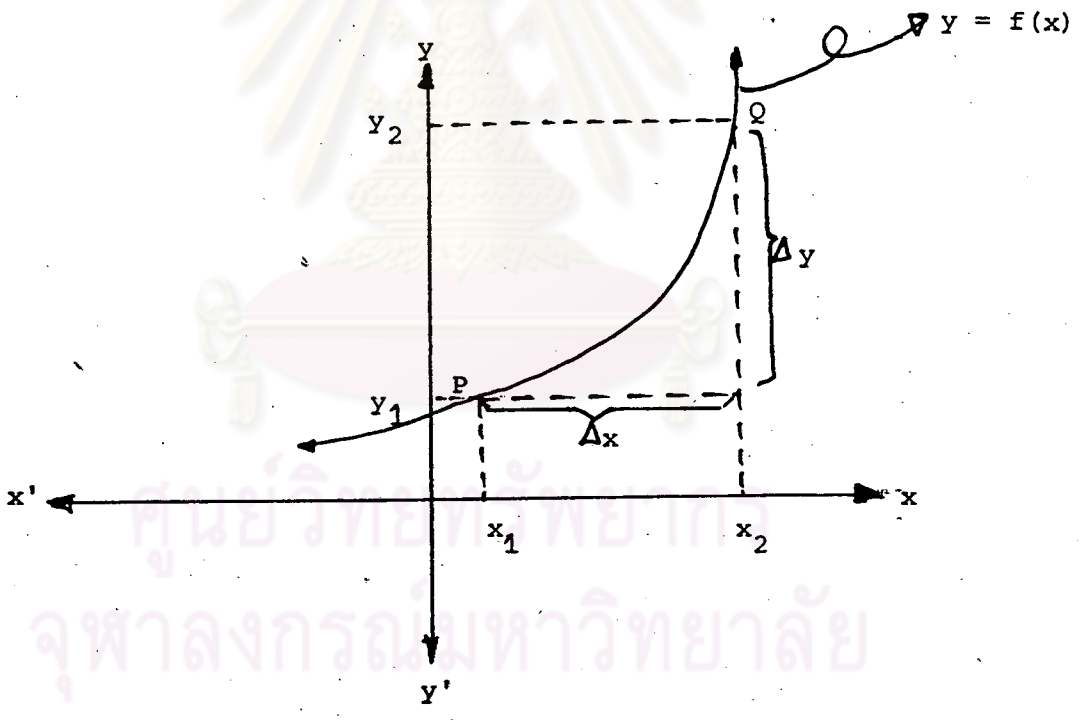
(15) $\lim_{x \to 64} \left(\frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}\right)$ = _____ (3)

อัตราการเปลี่ยนแปลง

$y = f(x)$ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไปค่าของ y จะเปลี่ยนตามไปด้วย ค่า x ที่เปลี่ยนไปจาก $x_2 - x_1$ เขียนแทนด้วย Δx บางทีใช้ h ซึ่ง เรียกว่า Increment ของ x

ถ้า $y = f(x)$ และ x เปลี่ยนไป Δx คือเพิ่มขึ้นเป็น $x + \Delta x$ ค่าของ y จะเปลี่ยนไปเป็น $f(x + \Delta x)$ นั่นคือ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ และ เรียก Δy ว่า Increment ของ y

2.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย



ถ้า x_1 และ x_2 คือจำนวนจริงอยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f โดย $y = f(x)$ และ $y_2 = f(x_2)$

ดังนั้น $\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เรียกว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x โดยเทียบกับ x ในย่าน $(x_1, x_1 + \Delta x)$ "

นั่นคือ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ (Δx บางครั้งใช้ h)

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f(x) เมื่อเทียบกับ x ในช่วง x ถึง x + h

คือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ข้อสังเกต อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ คือความชันของเส้นตรง PQ นั่นเอง

2.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f(x) เมื่อ x มีค่าใด ๆ

จากอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f(x) ในช่วง x_1 และ x_2

$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ หรือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ถ้า x_2 กับ x_1 มีค่าต่างกันมาก อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f(x) ก็อยู่ในช่วงกว้างมาก แต่ถ้า x_2 กับ x_1 มีค่าแตกต่างกันน้อยลง ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f(x) ก็อยู่ในช่วงแคบลง จนกระทั่ง x_2 กับ x_1 ต่างกันน้อยที่สุดจนเกือบใกล้เคียงกัน $x_2 - x_1 = h$ เข้าใกล้ศูนย์จะพบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยระหว่างจุด x_2 กับ x_1 นั้นแทบจะไม่มีเลย

ดังนั้น ถ้าต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุด x_1 สามารถทำได้โดยเลือกค่า x_2 ให้แตกต่างจาก x_1 น้อยที่สุดจนเกือบจะเป็นศูนย์ คือ h เข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือสามารถตัด h ได้เพราะมีค่าน้อยมาก

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f(x) เมื่อ x มีค่าใด ๆ คือ

$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \to 0$

ข้อสังเกต (1) ค่าของอัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นปริมาณสเกลาร์ จะต้องตอบเป็นบวกเสมอ

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงถ้าเครื่องหมายออกมาเป็นบวก หมายถึง

x เพิ่ม, y เพิ่มด้วย

x ลด , y ลดด้วย

อัตราการเปลี่ยนแปลง ถ้าเครื่องหมายออกมาเป็นลบ หมายถึง

x เพิ่ม, y ลด

x ลด , y เพิ่ม

<u>อัตราเร็วเฉลี่ยและความเร็วเฉลี่ย</u>

สมการการเคลื่อนที่ $S = f(t)$

โดยที่ S เป็นระยะทาง

t เป็นเวลา

f(t) เป็นฟังก์ชันของเวลา

อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t ถึง t + h คือ $\frac{f(t + h) - f(t)}{h}$

<u>หมายเหตุ</u> อัตราเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้นอัตราเร็วไม่คิดเครื่องหมาย

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง t + h คือ $\frac{f(t + h) - f(t)}{h}$ ในทำนองเดียวกัน ความเร็วเฉลี่ยในขณะ t ใด ๆ คือ $\frac{f(t + h) - f(t)}{h}, h \to 0$

<u>หมายเหตุ</u> ความเร็วเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้นความเร็วเฉลี่ยจึงเป็นได้ทั้งบวกและลบ กล่าวคือ

- ถ้าความเร็วเฉลี่ยเป็นบวก แสดงว่าในช่วงเวลาหนึ่งถึงเวลาหนึ่งวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเพิ่มขึ้น
- ถ้าความเร็วเฉลี่ยเป็นลบ แสดงว่าในช่วงเวลาหนึ่งถึงเวลาหนึ่งวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วลดลง

โจทย์ จากการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่ง เป็นไปตามสมการ $S = 2t^2 - 3$

จงหา

(ก) อัตราความเร็วเฉลี่ยเป็นฟุตในช่วงวินาทีที่ 3 และ 5

(ข) ความเร็วเฉลี่ยในวินาทีที่ 6

วิธีทำ $S = f(t) = 2t^2 - 3$

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{[2(t+h)^2 - 3] - (2t^2 - 3)}{h}$$

$$= \frac{2t^2 + 4th + 2h^2 - 3 - 2t^2 + 3}{h} = \frac{4th + 2h^2}{h}$$

$$= 4t + 2h$$

เมื่อเวลาเปลี่ยนจาก $t = 3$ เป็น $t = 5$ จะได้

$$t = 3,\ h = 5 - 3 = 2$$

(ก) $\therefore$ อัตราเร็วเฉลี่ยของ $= |4(3) + 2(2)| = 16$ ฟุต/วินาที

(ข) ความเร็วเฉลี่ยในวินาทีที่ 6 คือ $4t + 2h$, $h \to 0$

$= 4(6)$

$= 24$ ฟุต/วินาที

1. สมการการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง $y = 3x^2 + 1$

จงหา

(ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 4

(ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อ $x = 6$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ เมื่อ x เป็นความยาวของด้านสามเหลี่ยม จงหา

(ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่เทียบกับด้านเมื่อด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่าเปลี่ยนจาก 8 เซนติเมตร เป็น 6 เซนติเมตร

(ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ขณะด้านยาว 6 เซนติเมตร

3. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่เป็นไปตามสมการ $S = at^2 + bt$

ถ้า t = 2 วินาที อนุภาคนี้จะมีความเร็วเป็น 8 เมตร/วินาที

ถ้า t = 4 วินาที อนุภาคนี้จะมีความเร็วเป็น 20 เมตร/วินาที

จงหาค่า a, b และจงหาว่าในวินาทีที่ 10 อนุภาคจะมีความเร็วเท่าใด

<u>ข้อสังเกต</u>

1. คำว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในที่นี้หมายรวมถึง ความเร็ว, พื้นที่ และปริมาตร ฯลฯ"

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงมีได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ นั่นคือ

ถ้ามีค่าบวก หมายความว่า x มีค่าเพิ่มขึ้น f(x) มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย

แต่ถ้ามีค่าลบ หมายความว่า x มีค่าเพิ่มขึ้น f(x) มีค่าลดลงหรือกลับกัน

3. $h \neq 0$ เพราะว่าถ้า $h = 0$ แล้วจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ ดังนั้นในกรณีที่ $h \longrightarrow 0$ ให้ถือว่า h มีค่าเกือบจะเป็น 0 นั่นเอง

4. คำว่า Increment หมายถึง ค่าที่เปลี่ยนแปลงเป็นได้ทั้ง เพิ่มขึ้น หรือลดลง

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงหา

(ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก r เซนติเมตร เป็น $r + h$ เซนติเมตร

(ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก 3 เซนติเมตร เป็น 2 เซนติเมตร

(ค) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมีขณะรัศมียาว 5 เซนติเมตร

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 9

1. 6

3. -6

4. 12

5. $\frac{2}{7}$

7. 1) 10

2) 5

3) -2

4) 0

5) $\frac{1}{10}$

6) $-\frac{1}{3}$

7) $\frac{1}{2}$

8) 4

9) 3

10) $\frac{1}{12}$

11) 0

12) $\frac{1}{2}$

13) 2

14) $\frac{\sqrt{x}}{2x}$

15) 3

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

1. ก) 18

ข) 36

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ก) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

ข) $3\sqrt{3}$

3. a = .3, b = -4, 56 เมตร/วินาที

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 9

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยการซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. วิธีหาลิมิตของฟังก์ชั่น (1) แทนค่าลิมิต (2) ถ้าแทนค่าแล้วค่าลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ให้ทำดังนี้ - แยกตัวประกอบ - สังยุค - การล่มมติค่า 2. หาอัตราการเปลี่ยนแปลง (1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในช่วง x ที่กำหนดให้ (2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ (3) ความเร็ว	ขั้นที่ 1 ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนเหมือนกลุ่มควบคุม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 2	- ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3	- ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อพร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4	- ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป	- ครูให้นักเรียนสรุปสูตรและนิยามอีกครั้ง

ขั้นที่ 2	- ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3	- ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4	- ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป	- ผู้ช่วยสอนกับผู้เรียนช่วยกันสรุปสูตร และนิยาม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยตอนที่ 9

คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1. จงหา $\lim_{n \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$ _____

2. $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{2 + x} - 1}{x + 1} =$ _____

3. อนุภาคหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปตามสมการ $S = ct^2 + dt$

   เมื่อ $t = 2$ วินาที อนุภาคนี้จะมีความเร็วเป็น 8 เมตร/วินาที

   และ $t = 4$ วินาที อนุภาคนี้จะมีความเร็วเป็น 20 เมตร/วินาที

   จงหาค่า c, d และจงหาความเร็วในวินาทีที่ 10

   $c =$ ___, $d =$ ___, ความเร็วในวินาทีที่ 10 _____

4. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมีในช่วง $r = 2$ ซม. เป็น $r = 6$ ซม. มีค่าเท่ากับ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1. 4

2. $\frac{1}{2}$

3. c = 3, d = -4, ความเร็วขณะวินาทีที่ 10 คือ 56 เมตร/วินาที

4. 8π

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 10

<u>จุดประสงค์ปลายทาง</u> เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ (ต่อ)

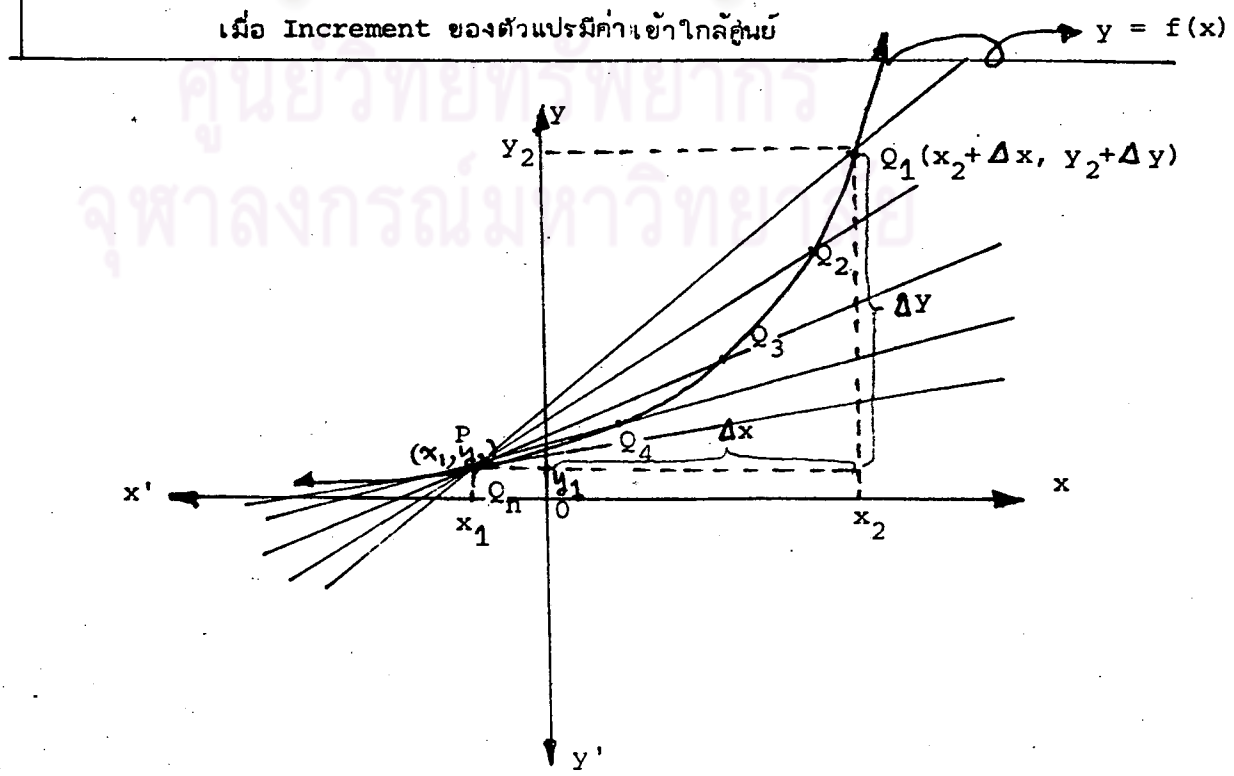
<u>จุดประสงค์นำทาง</u>

1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโพลิโนเมียลอย่างง่าย ๆ โดยใช้นิยามได้
2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตอย่างง่าย โดยใช้สูตรได้
3. หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้
4. หาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้
5. หาจุดสัมผัสเมื่อกำหนดความชันและสมการของเส้นโค้งมาให้ได้
6. หาความเร็ว และความเร่งในขณะเวลา t ใด ๆ ได้
7. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

<u>เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 10</u>

<u>เนื้อหา</u>

<u>นิยาม</u> อนุพันธ์ของฟังก์ชันใด หมายถึง ค่ายึดจำกัดของอัตราส่วนของค่าเปลี่ยนแปลง (Increment) ของฟังก์ชันกับค่าเปลี่ยนแปลงของตัวแปร (Variables) เมื่อ Increment ของตัวแปรมีค่าเข้าใกล้ศูนย์



จากรูป อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันกับค่าเปลี่ยนแปลงของตัวแปร คือ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ถ้าให้ $\frac{dy}{dx}$ แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

จากนิยาม จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{(บางครั้งใช้ h แทน } \Delta x\text{)}$$

ดังนั้น $$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

สัญลักษณ์ $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$, $D_x y$ หรือ y'

หมายเหตุ

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในขณะ x ใด ๆ ก็คือ อนุพันธ์ของ y เมื่อเทียบกับ x

(2) อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ ความชันเส้นสัมผัสของเส้นโค้งใด ๆ

(3) อนุพันธ์ของ S เทียบกับ t คือ ความเร็วในขณะ t ใด ๆ

(4) อนุพันธ์ของ v เทียบกับ t คือ ความเร่งในขณะ t ใด ๆ

โจทย์ จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^2$

จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$= 2x$$

<u>คำสั่ง</u> จงหาอนุพันธ์

1. $y = \frac{4}{x^2}$

2. $y = x^2 - 2x + 1$

3. $y = 3x^2 - 5x - 2$, $x = 1$ จงหาอนุพันธ์ของ f ต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนดให้

<u>จากนิยาม</u> $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x + h)^2 - 5(x + h) - 2] - [3x^2 - 5x - 2]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h - 2 - 3x^2 + 5x + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h - 5)$$

$$= 6x - 5$$

ที่ $x = 1$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 6(1) - 5 = 1$

4. จงหาอนุพันธ์ $y = (x - 3)^2$, $x = 2$

สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์

c เป็นค่าคงที่

(1) $\frac{dc}{dx} = 0$

(2) $\frac{dx}{dx} = 1$

(3) $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

(4) $\frac{de^x}{dx} = e^x$

(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

(6) $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

(7) $\frac{du^n}{dx} = n\,u^{n-1}\,\frac{du}{dx}$

(8) $\frac{de^u}{dx} = e^u\,\frac{du}{dx}$

(9) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

(10) $\frac{da^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

(11) $\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จงหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ

1. $y = 2x^3 + 5x^2 - x + 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2x^3)}{dx} + \frac{d(5x^2)}{dx} - \frac{dx}{dx} + \frac{d4}{dx}$$

$$= \frac{2dx^3}{dx} + \frac{5dx^2}{dx} - \frac{dx}{dx} + \frac{d4}{dx}$$

$$= 2(3x^2) + 5(2x) - 1 + 0$$

$$= 6x^2 + 10x - 1$$

2. $y = x^5 + x^{-4} + x^{-3} + x^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^5}{dx} + \frac{dx^{-4}}{dx} + \frac{dx^{-3}}{dx} + \frac{dx^{-1}}{dx}$$

$$= 5x^4 + (-4x^{-5}) + (-3x^{-4}) + (-x^{-2})$$

$$= 5x^4 - \frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{5x^9 - 4 - 3x - x^3}{x^5}$$

3. $y = 5x^4 + 3x^2 - 2x + 10$

4. $S = 32 - 8t^2$

5. $s = \frac{t + 4}{t}$

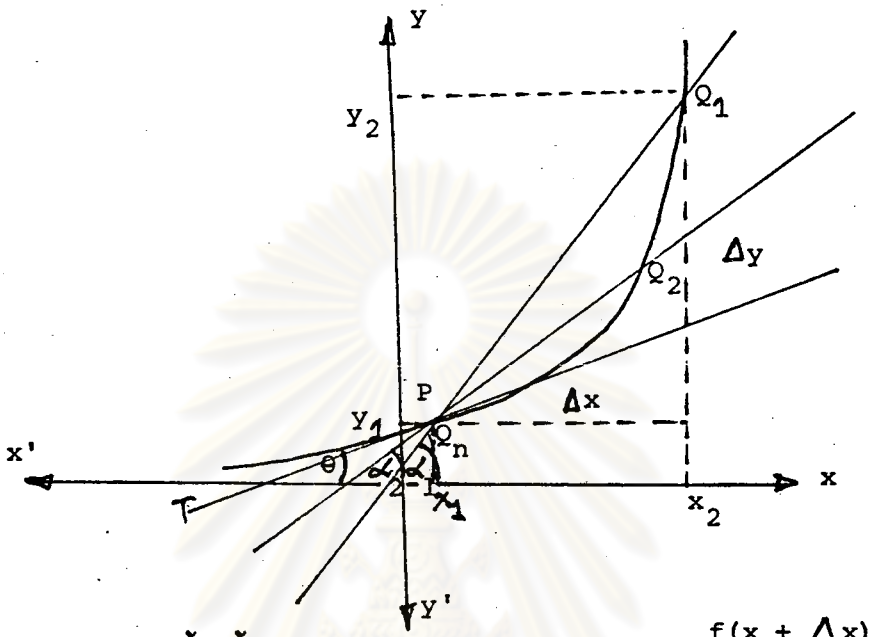
6. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

7. $y = (5x^2 + 3)^3 (x^3 - 1)^5$

8. $y = x\sqrt{2x + 3}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. <u>เส้นสัมผัสและเส้นปกติ</u> (Tangent lines and Normal lines)



จากสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ ความชัน $PQ = \tan\theta = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ถ้าเลื่อนจุด Q ไปยังจุด $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ ให้เข้าใกล้จุด P เข้าไป

ดังรูป จะพบว่า ($\Delta x \to 0$) Δx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และมุม α ก็จะเลื่อนไปเป็น

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ และใกล้เคียงมุม θ เข้าไปเช่นกัน

ดังนั้น $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = \theta$ จะได้ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \tan\alpha = \tan\theta$

แสดงว่า ถ้า θ เลื่อนใกล้จุด P เข้าไปมากขึ้น ๆ PQ จะทับเส้น PT หรือกลายเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

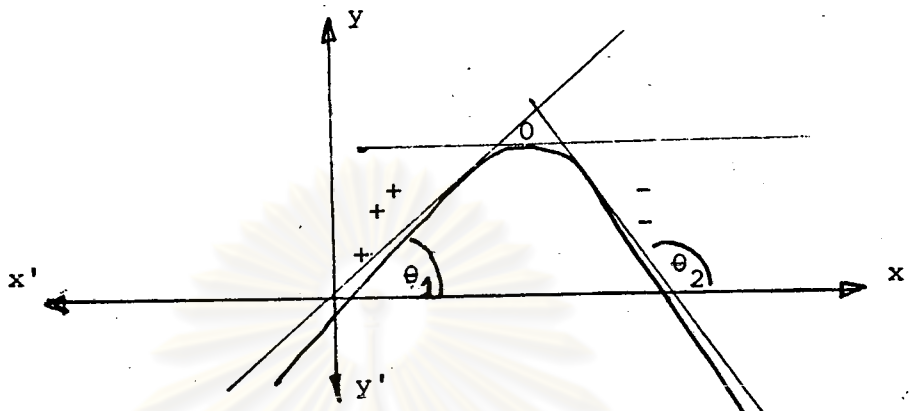
แต่ $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \tan\alpha = \tan\theta$

นั่นคือ

"ความชันของส่วนโค้งที่จุดใด ๆ บนส่วนโค้งคืออนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุดนั้น ๆ และคือความชันของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้น"

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือ $\dfrac{d}{dx} f(x)$

หมายเหตุ (1) ความชันของส่วนโค้งเป็นได้ทั้งบวก, ลบและศูนย์ จากรูป



$0^\circ < \theta_1 < 90^\circ$ ความชันเป็นบวก

$\theta = 180^\circ$ ความชัน = 0

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ ความชันเป็นลบ

(2) สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x_1, y_1) คือ

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

1. สมการเส้นโค้ง $y = x^2 - 2$

จงหา (1) ความชัน ณ จุด (0, -2)

(2) สมการเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = 3$

(3) สมการเส้นปกติ ณ จุดซึ่ง $x = 3$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จากสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงที่ที่จุด $(1, -\frac{1}{2})$ กราฟมีความชัน = 2 และที่จุด (2, 1) กราฟมีความชัน = 1

3. ถ้า (a, b) เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ และเส้นสัมผัสที่จุด (a, b) นี้ขนานกับเส้นตรง $y = 6x + 8$ จงหาจุด (a, b)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. กราฟรูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$ จงหาความสัมพันธ์ของเส้นตรงสัมผัสกราฟนี้ที่จุด (1, 2) เส้นหนึ่ง และอีกเส้นหนึ่งสัมผัสที่จุด (-2, 1)

<u>วิธีทำ</u> จาก $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 1 - \frac{3dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\qquad\qquad}$$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (1, 2) คือ _____

สมการเส้นสัมผัส ณ จุด (1, 2) คือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

_____

_____

สมการเส้นสัมผัส ณ จุด (-2, 1) คือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

_____

_____

_____

3. <u>ความเร็วและความเร่ง</u> (Velocity and Acceleration)

สมการการเคลื่อนที่ $S = f(t)$

โดยที่ S เป็นระยะทาง

$f(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา

ถ้าให้ $v(t)$ เป็นความเร็ว ณ t ใด ๆ จะได้

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

ถ้าให้ $a(t)$ เป็นความเร่งขณะ t ใด ๆ จะได้

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

<u>สรุป</u> ถ้า $S = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่

(1) อนุพันธ์สมการ $S = f(t)$ ครั้งแรก จะได้ความเร็ว ณ เวลา t ใด ๆ

คือ $\frac{ds}{dt} = v = f'(t)$

(2) อนุพันธ์ครั้งที่สอง จะได้ความเร่งคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็ว หรือความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปในหนึ่งหน่วยเวลา

คือ $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = f''(t)$

(3) ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t คือ $\frac{ds}{dt}$ หรือ $f'(t) = v$

ถ้า $v > 0$ แสดงว่าวัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ทำให้ได้ระยะทางเพิ่มขึ้น

ถ้า $v < 0$ แสดงว่าวัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ทำให้ได้ระยะทางน้อยลง

ถ้า $v = 0$ แสดงว่าในขณะนั้นวัตถุอยู่ในสภาพหยุดนิ่ง

(4) ความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ คือ $a = \frac{dv}{dt}$ หรือ $f''(t)$

ถ้า $a > 0$ แสดงว่าขณะนั้นวัตถุมีความเร็วเพิ่มขึ้น

ถ้า $a < 0$ แสดงว่าขณะนั้นวัตถุมีความเร็วลดลง

ถ้า $a = 0$ แสดงว่าขณะนั้นวัตถุมีความเร็วคงที่

(5) ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับความเร่ง

ถ้า v และ a มีเครื่องหมายเหมือนกัน แสดงว่าอัตราเร็ว (speed) ของวัตถุเพิ่มขึ้น

ถ้า v และ a มีเครื่องหมายต่างกัน แสดงว่าอัตราเร็ว (speed) ของวัตถุลดลง

1. จงหาความเร็วและความเร่งจากสมการ $S = 32 - 8t^2$ ณ $t = 1$ วินาที

วิธีทำ จาก $S = 32 - 8t^2$

$\frac{ds}{dt} =$ _____

ความเร็วขณะ $t = 1$ วินาที คือ _____

$\frac{dv}{dt}$ = _____

ความเร่งขณะ $t = 1$ วินาที คือ _____

_____

2. จากสมการการเคลื่อนที่ $S = 4t^2 - 6t$

จงหา (ก) ความเร็วขณะ $t = 2$ วินาที

(ข) ความเร่งขณะ $t = 2$ วินาที

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

3. สมการเคลื่อนที่ $S = at^2 + bt$ ถ้า $t = 2$ วินาที จะมีความเร็ว 8 เมตร/วินาที ถ้า $t = 4$ วินาที จะมีความเร็ว 20 เมตร/วินาที จงหาค่า a, b และวินาทีที่ 6 อนุภาคจะมีความเร็วเท่าใด

_____

_____

_____

_____

_____

_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 6 + 5x - x^2$ ณ จุด $x = 5$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 10

1. $\frac{-8}{x^3}$

2. $2x - 2$

4. -2

อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

3. $20x^3 + 6x - 2$

4. $-16t$

5. $\frac{t^2 - 4}{t^2}$

6. $\frac{x(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^2}$

7. $15x(5x^2 + 3)^2(x^3 - 1)^4(7x^3 + 3x - 2)$

8. $\frac{3(x + 1)\sqrt{2x + 3}}{2x + 3}$

2. เส้นสัมผัสและเส้นปกติ

1. 1) 0

   2) $6x - y - 11 = 0$

   3) $x + 6y - 45 = 0$

2. $y = \frac{-1}{2}x^2 + 3x - 3$

3. (3, 10)

4. $\{(x, y) \mid 3x + y - 5 = 0\}$ และ $\{(x, y) \mid 3x + y + 5 = 0\}$

3. ความเร็วและความเร่ง

1. $-16, -16$

2. ก) 10 เมตร/วินาที

   ข) 8 เมตร/วินาที

3. $a = 3, \ b = -4, \ 32$ เมตร/วินาที

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 10

กลุ่มควบคุม		กลุ่มทดลอง	
ขั้นที่ 1	ทบทวน - ครูทบทวนโดยซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. นิยามอนุพันธ์ และสูตรของอนุพันธ์ 2. ประยุกต์อนุพันธ์ (1) ความชัน, สัมการเส้นสัมผัส และจุดสัมผัส (2) ความเร็ว, ความเร่ง	ขั้นที่ 1	ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนเหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2	- ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2	- ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3	- ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อ พร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3	- ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4	- ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4	- ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาคาบที่ 10	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาคาบที่ 10

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 10

คำสั่ง : จงเติมข้อความให้สมบูรณ์

1. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^2(2x + 1)$, $\frac{dy}{dx} =$ _____

2. $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$ จงหา $f''(2)$ = _____

3. จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = x^2 + 3$ ณ $x = 1$ คือ _____

4. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{x} + 4$ ณ $x = 9$ คือ_____

5. จุด (a, b) อยู่บนเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ มีเส้นสัมผัสผ่านจุดนี้ และมีความชันเท่ากับ 6 จงหาจุด (a, b) คือ_____

6. สมการการเคลื่อนที่ $s = t^2 + 3t - 1$

   จงหา

   (ก) ความเร็วขณะ $t = 1$

   (ข) ความเร่งขณะ $t = 1$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x$

2. $\frac{1}{2}$

3. 2

4. $x - 6y + 33 = 0$

5. (3, 8)

6. ก) $v = 5$

   ข) $a = 2$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 11

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถหาค่าสูงสุด (สัมพัทธ์) หรือค่าต่ำสุด (สัมพัทธ์) ของฟังก์ชัน และแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดได้

จุดประสงค์นำทาง

1. หาค่าสูงสุด (สัมพัทธ์) ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. หาค่าต่ำสุด (สัมพัทธ์) ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. แก้ปัญหาที่เกี่ยวกับค่าต่ำสุดหรือสูงสุดได้
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

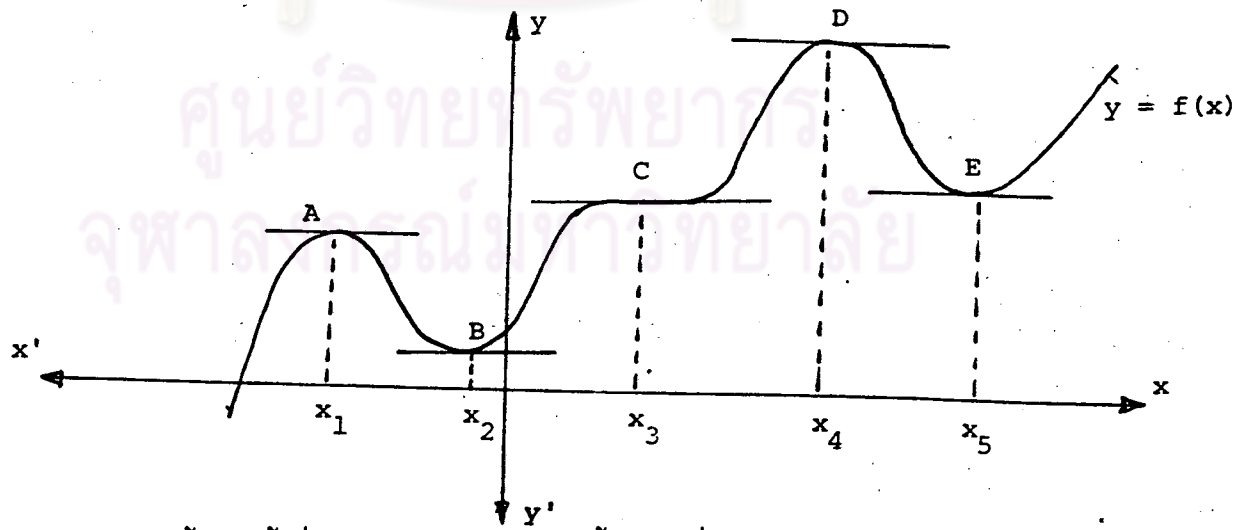
เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 11

เนื้อหา

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

(Maximum and Minimum Value)

พิจารณาจากกราฟ



กราฟข้างบนนี้เมื่อพิจารณาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด A, B, C, D และ E เห็นได้ชัดว่ามีค่าเท่ากับศูนย์ (ขนานกับแกน x) ดังนั้น $\frac{df(x)}{dx} = 0$

ที่จุด A และ D ให้ค่า $f(x_1)$ และ $f(x_4)$ มีค่ามากกว่า $f(x)$ ใด ๆ ในบริเวณใกล้เคียง

นิยาม คือ "ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน" ที่จุดเหล่านี้มีข้อสังเกตได้ง่าย ๆ คือ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ กำลังเปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่มเป็นฟังก์ชันลด ค่าหา $f'(x)$ จะเปลี่ยนความชันเป็น +, 0, -

ที่ B และ E ให้ $f(x_2)$ และ $f(x_5)$ มีค่าน้อยกว่า $f(x)$ ใด ๆ ในบริเวณใกล้เคียง

นิยาม "คือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f" ที่จุดเหล่านี้มีข้อสังเกตได้ว่า ฟังก์ชัน $y = f(x)$ กำลังเปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ค่า $f'(x)$ จะเปลี่ยนความชันเป็น - , 0, +

ที่จุด D สูงที่สุดในบรรดาทั้งหมด เรียกจุด D ว่าจุดสูงสุดสัมบูรณ์

ที่จุด B ต่ำที่สุดในบรรดาทั้งหมด เรียกจุด B ว่าจุดต่ำสุดสัมบูรณ์

สำหรับจุด C เป็นจุดที่เส้นสัมผัสขนานกับแกน x หรือ $f'(x) = 0$ แต่ $f(x_3)$ ไม่ได้เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ถ้าสังเกตค่า $f'(x)$ บริเวณใกล้เคียงแล้วจะพบว่า $f'(x)$ ไม่ได้เปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ หรือเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวกแต่อย่างใด จุดนี้ เรียกว่าจุด "Inflexion"

หลักการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

1. เปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ ($y = f(x)$)
2. หาอนุพันธ์ $(\frac{dy}{dx})$
3. $\frac{dy}{dx} = 0$ แก้สมการหาค่า x, ตรวจสอบค่า x
4. นำค่า x ไปแทนค่าในข้อ 1 จะได้ค่า y

วิธีตรวจสอบจุดใดให้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

สมมติค่า ค่าหนึ่งน้อยกว่าค่าวิกฤต (ค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$) เล็กน้อย อีกค่าหนึ่งมากกว่าค่าวิกฤตเล็กน้อย แทนค่า x ในค่าอนุพันธ์ ($\frac{dy}{dx} = 0$)

1. ค่าน้อยให้ค่า $\frac{dy}{dx}$ เป็นค่าลบ ค่ามากให้ $\frac{dy}{dx}$ เป็นค่าบวก แสดงว่าค่าวิกฤตนั้นให้ค่าต่ำสุด (Minimum) ของฟังก์ชัน
2. ค่าน้อยให้ค่า $\frac{dy}{dx}$ เป็นค่าบวก ค่ามากให้ $\frac{dy}{dx}$ เป็นค่าลบ แสดงว่าค่าวิกฤตนั้นให้ค่าสูงสุด (Maximum) ของฟังก์ชัน

หมายเหตุ ในบางครั้ง การทดสอบจะพบว่าเครื่องหมายไม่มีการเปลี่ยนแปลงคือได้เครื่องหมายเหมือนกันทั้ง 2 ค่า แสดงว่าที่จุดนั้นไม่ให้ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชัน จุดนั้น เรียกว่าจุด Inflexion

1. สมการ $y = x^3$ ให้ค่าสูงสุด(สัมพัทธ์) หรือต่ำสุดสัมพัทธ์

2. จงหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$

3. ในการจัดทัศนาจรครั้งหนึ่ง เก็บค่าบริการดังนี้ ถ้ามีผู้โดยสารไม่เกิน 150 คน เก็บค่าบริการคนละ 15 บาท แต่ถ้ามีผู้โดยสารเกิน 150 คน เก็บค่าบริการลดลงคนละ 0.05 บาท/คนที่เกิน 1 คน

จงหาว่าจะต้องมีผู้โดยสารกี่คนจึงจะเก็บค่าบริการได้มากที่สุด

4. นายเลิศฤทธิ์ยิงปืนขึ้นสู่ท้องฟ้าในแนวดิ่ง ลูกปืนเคลื่อนที่ด้วยสมการ $s = 1280t - 16t^2$ เมตร

จงหา (ก) ความเร็วต้นของลูกปืน

(ข) ใช้เวลานานเท่าใดลูกปืนจึงไปได้สูงสุด

(ค) ลูกปืนขึ้นไปได้สูงสุดกี่เมตร

(ง) ความเร็วในปลายวินาทีที่ 20

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 2) และตัดแกน x กับแกน y ทำให้เกิด Δ มุมฉากภายในควอดรันต์ที่ 1 ให้มีพื้นที่น้อยที่สุด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 11

1. ไม่มีค่าสูงสุด และไม่มีค่าต่ำสุด

2. ค่าสูงสุด = 1.01 , ค่าต่ำสุด = -3

3. 375 คน

4. ก) 1,280 เมตร/วินาที

ข) 40 วินาที

ค) 25,600 เมตร

ง) 640 เมตร/วินาที

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 11

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. วิธีหาค่าสูงสุด, ต่ำสุดของสมการควอดราติก 2. วิธีหาค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุดของสมการโพลิโนเมียล 3. วิธีแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด	ขั้นที่ 1 ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนเหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2 - ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2 - ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3 - ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อ พร้อมกับให้นักเรียนนักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3 - ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง
ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาในคาบที่ 11	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาในคาบที่ 11

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 11

คำสั่ง : จงเติมข้อความให้สมบูรณ์

1. จากสมการ $y = x^2 - 2x + 5$

   จงหาค่าสูงสุด = _____

   ค่าต่ำสุด = _____

2. จงหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดซึ่งบรรจุในครึ่งวงกลมรัศมี 7 หน่วย โดยฐานด้านหนึ่งอยู่บนเส้นผ่าศูนย์กลาง

   _____

3. โยนก้อนหินขึ้นไปด้วยความเร็วต้น 34.3 เมตร/วินาที

   สมการระยะทาง $S = 34.3t - 4.9t^2$

   จงหา

   ความเร็วเมื่อ $t = 3$ วินาที _____

   ระยะทางที่ก้อนหินขึ้นไปสูงสุด _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1. 4, ค่าต่ำสุด

2. 4.95 ตารางหน่วย

3. ก) 4.9 เมตร/วินาที

   ข) 60.025 เมตร

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คาบที่ 12

จุดประสงค์ปลายทาง เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถหาฟังก์ชันเมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นได้ และแก้ปัญหาที่ต้องใช้โอเปอเรชันตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. หาฟังก์ชันเมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นได้
2. แก้ปัญหาโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ ความเร็ว, ความเร่ง ระยะทาง และเส้นโค้ง โดยใช้โอเปอเรชันตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้
   2.1 หาความเร็วขณะใด ๆ เมื่อกำหนดความเร่งในขณะ t ใด ๆ ให้ได้
   2.2 หาสมการของการเคลื่อนที่ได้เมื่อกำหนดความเร็วในขณะ t ใด ๆ ให้
   2.3 หาฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้ง ซึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชัน f และกำหนดจุดหนึ่งบนเส้นโค้งให้ได้
3. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%

เอกสารแนะแนวทางคาบที่ 12

เนื้อหา

ในแคลคูลัส นอกจากจะมีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นหัวใจสำคัญแล้ว ยังมีโอเปอเรชันตรงข้ามกับอนุพันธ์ ซึ่งเราเรียกว่า อินทิกรัล หรืออินทิเกรท มีประโยชน์ในการหาฟังก์ชัน ความเร็ว ความเร่ง ระยะทาง และเส้นโค้ง เมื่อกำหนดอนุพันธ์มาให้ นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้ในการประมาณค่าตัวเลขได้

อินทิเกรท (Integrate)

เป็นการกระทำตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ หรือการแก้สมการอนุพันธ์ (หาค่า y ในรูป x จากสมการอนุพันธ์)

สัญลักษณ์ "$\int$" แทนเครื่องหมายอินทิเกรท

สูตร

(1) $\int ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$

(2) $\int a\,dx = ax + c$

(3) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

(4) $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

ข้อสังเกต นิยมใช้ c เป็นสัญลักษณ์แทนค่าคงที่ใด ๆ บวกต่อท้ายฟังก์ชันหลังจากอินทิเกรทเสมอ

1. จงหาฟังก์ชัน y จากอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) $\frac{dy}{dx} = 12x^3 - x$, $y =$ _____

(2) $\frac{dy}{dx} = a - \frac{b}{x^2}$, $y =$ _____

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, $y =$ _____

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $y =$ _____

2. จาก $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$ และกราฟนี้ผ่านจุด (1, 2) และ (-2, 5) จงหาฟังก์ชัน y

3. จงหาสมการเส้นโค้งที่มีความชัน $6x - 6$ ที่จุด (-1, 4) และจงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุด (-1, 4)

4. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามสมการ $S = at^4 + bt^2 + c$

ในวินาทีที่ 3 วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 60 เมตร

ในวินาทีที่ 1 วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที

ในวินาทีที่ 2 วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง 24 เมตร/วินาที^{2}

จงหาสมการการเคลื่อนที่

5. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่ง $a = 9 - 6t$ และเมื่อ $t = 0$ $v = 0$ และ $S = 0$ จงหาระยะทางที่ห่างจากจุดเริ่มต้นในทิศทางบวกที่มีค่ามากที่สุด

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

ถ้าวัตถุยืนหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง 6 เมตร/วินาที^{2} เมื่อเคลื่อนที่ในวินาทีที่ 4 ความเร็วเป็น 19 เมตร/วินาที และได้ระยะทาง 31 เมตร

จงหาสมการการเคลื่อนที่

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยคาบที่ 12

1. 1) $y = 3x^4 - \frac{x^2}{2} + c$

   2) $y = ax + \frac{b}{x} + c$

   3) $y = x^{\frac{4}{3}} + c$

   4) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} + c$

2. $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 9$

3. $x - 12y + 49 = 0$

4. $s = \frac{7}{22}t^4 + \frac{48}{11}t^2 - \frac{111}{22}$

5. 13.5 หน่วย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนการสอนคาบที่ 12

กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง
ขั้นที่ 1 ทบทวน - ครูทบทวนโดยซักถามนักเรียนทีละคน ดังนี้ 1. สูตรอินทิเกรท 2. การแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้วิธีอินทิเกรท - หาฟังก์ชันเมื่อกำหนดอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x - ความเร็วเมื่อกำหนดความเร่ง - ระยะทางเมื่อกำหนดความเร็ว - หาสมการเส้นโค้งเมื่อกำหนดความชัน	ขั้นที่ 1 ทบทวน - นักเรียนผู้ช่วยสอนทบทวนผู้เรียนเหมือนกลุ่มควบคุม
ขั้นที่ 2 - ครูแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนอ่อน ใช้เวลา 15 นาที	ขั้นที่ 2 - ครูผู้ช่วยสอนแจกแบบทดสอบย่อยให้นักเรียนทุกคน ใช้เวลา 15 นาที
ขั้นที่ 3 - ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ - ครูอธิบายแบบทดสอบย่อยทีละข้อ พร้อมกับให้นักเรียนแก้ไขข้อบกพร่อง	ขั้นที่ 3 - ครูผู้ช่วยสอนเฉลยคำตอบบนกระดานดำ นักเรียนผู้ช่วยสอนตรวจให้กับผู้เรียนของตน - นักเรียนผู้ช่วยสอนอธิบายและช่วยผู้เรียนแก้ไขข้อบกพร่อง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	ขั้นที่ 4 - ให้นักเรียนทุกคนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง
ขั้นที่ 5 สรุป - ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาคาบที่ 12	ขั้นที่ 5 สรุป - นักเรียนผู้ช่วยสอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาคาบที่ 12

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบย่อยคาบที่ 12

คำสั่ง : จงเติมข้อความให้สมบูรณ์

1. $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$ มีค่าเท่ากับ _____

2. เมื่อ $\frac{dy}{dx} = x + 2$ และเส้นโค้งนี้ผ่านจุด (1, 2) จงหาสมการเส้นโค้ง

   $f(x)$ = _____

3. บอลลูนลูกหนึ่งถูกปล่อยในระดับสูงจากพื้นดิน 196 เมตร ถ้าบอลลูนถูกปล่อยให้ตกลงมาด้วยความเร็วต้น 14.7 เมตร/วินาที

   จงหาความเร็วของบอลลูนเมื่อตกกระทบพื้นดิน _____

   (กำหนดให้ค่า $g = 9.8$ เมตร/วินาที^{2})

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลย

1. $\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + c$

2. $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}$

3. 63.7 เมตร/วินาที

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์

ฉบับที่ 1 เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"

ฉบับที่ 2 เรื่อง "ลำดับ-อนุกรม"

ฉบับที่ 3 เรื่อง "แคลคูลัสเบื้องต้น"

ฉบับที่ 4 เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" "ลำดับ-อนุกรม" และ "แคลคูลัสเบื้องต้น"

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ฉบับที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

1. หาผลบวก ผลลบ และผลคูณได้ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนมาให้ (ข้อ 1 - 4)
2. ใช้ความรู้เรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ข้อ 5, 7)
3. ใช้เรื่องคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนมาแก้ปัญหาได้ (ข้อ 6, 7)
4. หาลักษณะของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้ (ข้อ 9, 11)
5. หาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้ (ข้อ 8, 10)
6. เขียนเวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้บนระนาบจำนวนเชิงซ้อนได้ (ข้อ 12 - 15)
7. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ข้อ 16 - 18)
8. แก้สมการเมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ (ข้อ 19 - 21)
9. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับโอเปอเรชันได้ (ข้อ 22, 23)
10. บอกเซตที่กำหนดว่าเป็นกรุปหรืออะบีเลียนกรุปภายใต้โอเปอเรชันที่กำหนด (ข้อ 24, 25)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉบับที่ 1

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"

เวลา 1 ชั่วโมง คะแนนเต็ม 25 คะแนน

คำสั่ง จงเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว แล้วให้แรเงาลงในช่องว่างที่กำหนดให้ในกระดาษคำตอบ

1. ข้อใดเป็นจำนวนจินตภาพแท้

   1. $(-\sqrt{-7} + 3)\ (-\sqrt{-7} - 3)$
   2. $\sqrt{6}\ \sqrt{-3}$
   3. $\sqrt{-5}\ \sqrt{-15}$
   4. $3\sqrt{-2}\ (\sqrt{-2} + 1)$
   5. $(5i)^2$

2. $(1 - \sqrt{-4}) - [(3 - \sqrt{-16}) + (5, -6)]$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   1. $4 - 4i$
   2. $4 + 4i$
   3. $-7 + 8i$
   4. $-7 - 4i$
   5. $[(1 - 2i) - (3 - 4i)] + (5 - 6i)$

3. เขียน $\left[\frac{4i^{15} + i^3}{1 + 2i}\right]^2$ ในรูป $a + bi$ ได้ดังข้อใด

   1. $-3 + 4i$
   2. $-4 + 3i$
   3. $3 - 4i$
   4. $4i + 3$
   5. $-3 - 4i$

4. ถ้า $z_1 = (1, 2)$ $z_2 = (0,-3)$ แล้ว $3z_1 + z_2^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. (12, 6)
2. (-6, 6)
3. 6 + 6i
4. 3 + 15i
5. 3 - 3i

5. ค่า z จากสมการ $z(2, -3) = (-3, 4)$ เป็นเท่าใด

1. $(\frac{-3}{2}, \frac{-4}{3})$
2. $(\frac{-6}{25}, \frac{-12}{25})$
3. $(\frac{-6}{25}, \frac{-1}{25})$
4. $(\frac{-18}{13}, \frac{-1}{13})$
5. $(\frac{-6}{13}, \frac{-1}{13})$

6. อินเวอร์สการบวกของ $[(3, -4) -2(1 - i)]$ เป็นเท่าใด

1. (1, 2)
2. (-1, -2)
3. (-1, 2)
4. (3, 4) -2(1, -1)
5. (-3, 4) +2(-1, 1)

7. ถ้า $(2x, -y) = \frac{(-8, 0)}{1 - 2i}$ ข้อใดเป็นอินเวอร์สการคูณของ $(\frac{5x}{2}, -\frac{5y}{4})$

1. $(\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$
2. $(\frac{1}{10}, \frac{-1}{5})$
3. $(\frac{-10}{20}, \frac{-1}{10})$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. $(\frac{1}{20}, \frac{1}{10})$

5. $(\frac{-1}{10}, \frac{1}{5})$

8. ข้อใดเป็นสังยุคของ $\frac{2 - 3i}{1 + 3i}$

1. $\frac{-7}{10} - \frac{9i}{10}$

2. $\frac{9i}{10} - \frac{7}{10}$

3. $\frac{7}{10} - \frac{9i}{10}$

4. $(\frac{-7}{10}, -\frac{9i}{10})$

5. $\frac{7}{10} + \frac{9i}{10}$

9. กำหนดให้ $z + \bar{z} = 8$

$\bar{z} - z = 10i$

$\bar{z}$ คือข้อใด

1. $4 + 5i$

2. $-4 + 5i$

3. $4 - 5i$

4. $8 + 10i$

5. $-8 - 10i$

10. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $(3, -5)$ หารด้วยจำนวนเชิงซ้อน $(2a, b)$ ได้ผลลัพธ์เป็น $-1 - 4i$ แล้ว $(2a, b)$ ตรงกับข้อใด

1. $-i$

2. i

3. $1 + i$

4. $1 - i$

5. $1 + 2i$

11. กำหนดให้ $\overline{(2 + i)^4} = -7 - 24i$

ค่า $(2 - i)^4 + (2 + i)$ เป็นเท่าใด

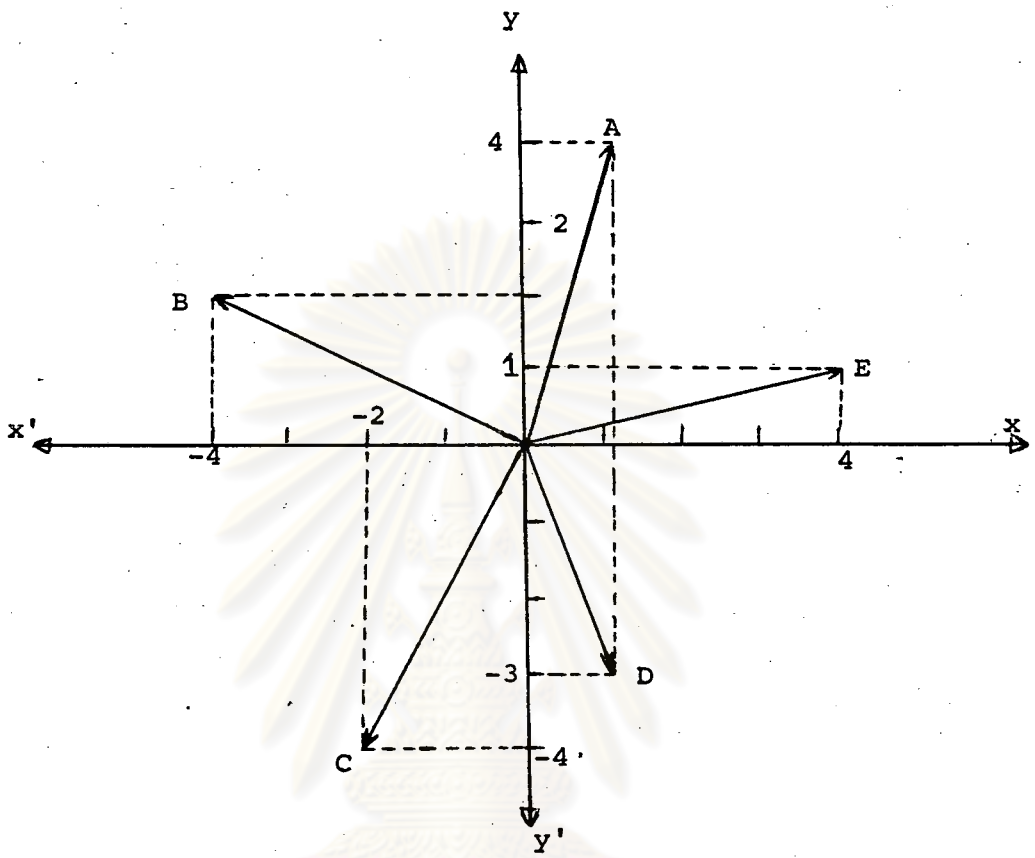
1. 2i
2. 4
3. -5 -23i
4. -5 +25i
5. 9 + 25i

12. เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a>0$, $b>a$, $c<0$ และ $c - d > 0$

จุดซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อน $(\frac{ab}{cd}, \frac{ac}{db})$ จะอยู่ในควอดรันต์ใด

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. บนแกน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



<u>กำหนดให้</u> A, B, C, และ E เป็นเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อน

(ใช้ตอบคำถามข้อ 13 - 15)

13. จากกราฟ ข้อใดเป็นกราฟแทนเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน $(3, 2) + [(2 - 5i) - (4, -7)]$

1. A
2. B
3. C
4. D
5. E

14. ถ้า C แทนเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน (3, 8) + (2 - i) + (-2, -5) + $(x, -2y)$ = C แล้ว x, y ตรงกับข้อใด

1. -5, -3
2. 5, -3
3. 5, 3
4. -5, 3
5. 3, 5

15. จากกราฟค่าสัมบูรณ์ของ 2A + B - C + 2D เป็นเท่าใด

1. $2\sqrt{17}\,i$
2. $2\sqrt{17}$
3. $3\sqrt{17}$
4. $4\sqrt{17}$
5. $5\sqrt{17}$

16. ค่าสัมบูรณ์ของ $[(3 + i)(2 - i)]$ เป็นเท่าใด

1. $5\sqrt{2}$
2. 7
3. 26
4. 49
5. 50

17. ข้อใดให้ผลลัพธ์แตกต่างจากข้ออื่น

1. $|i\bar{z}|$
2. $|-z|$
3. $|\bar{\bar{z}}|$
4. $|\frac{z}{i}|$
5. $|\frac{i}{z}|$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

18. ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{(3 + 4i)^2(12 - 5i)}{-7 + 24i}$ เท่ากับข้อใด

1. 5
2. 8
3. 13
4. 26
5. 105

19. ค่า Z จากสมการ $iz^2 + 7z - 10i = 10$ เป็นเท่าใด

1. $-2i, -5i$
2. $2i, -5i$
3. $-2i, +5i$
4. $2i, 5i$
5. $-2i, 2i$

20. ค่า Z จากสมการ $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ เป็นเท่าใด

1. $1, -1, 1 - i$
2. $1, 1 - i, 1 + i$
3. $1, -1, 1 + i$
4. $-1, 1 - i, 1 + i$
5. $1, 1, 1 + i$

21. ผลบวกค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$ เป็นเท่าใด

1. 4
2. $4\sqrt{2}$
3. 8
4. 16
5. $8\sqrt{2}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

22. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงภายใต้โอเปอเรชัน $\oplus$ โดยที่ $a \oplus b = a + b + \sqrt{2ab}$ อินเวอร์สของ 8 ตรงกับข้อใด

1. -8
2. $\frac{1}{8}$
3. $\frac{-8}{17}$
4. $\frac{8}{17}$
5. 0

23. จากตาราง $\{A ; \oplus\}$ โดยที่ $A=\{a, b, c\}$ ภายใต้โอเปอเรชัน $\oplus$ จำนวนใดเป็นเอกลักษณ์

$\oplus$	a	c	b
a	c	b	a
c	b	a	c
b	a	c	b

1. a
2. b
3. c
4. 0
5. 1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

24. เซตของโอเปอเรชันในข้อใดเป็นกรุป

1. $A = \{0, 1, -1\}$ กับการคูณ
2. เซตของจำนวนจินตภาพแท้กับการบวก
3. เซตของจำนวนจินตภาพแท้กับการคูณ
4. เซตของจำนวนเต็มคู่กับการบวก
5. เซตของ $\{x / (x + 3)\ (x - 1)\ (3x - 1) = 0\}$ กับการคูณ

25. การเป็นกรุป ไม่จำเป็นต้องมีคุณสมบัติข้อใด

1. การปิด
2. การสลับที่
3. อินเวอร์ส
4. การจัดหมู่
5. เอกลักษณ์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยฉบับที่ 1

ข้อ	คำตอบ
1.	2
2.	3
3.	4
4.	2
5.	4
6.	3
7.	5
8.	2
9.	1
10.	3
11.	3
12.	1
13.	1
14.	4
15.	2
16.	1
17.	5
18.	3
19.	4
20.	2
21.	2
22.	3
23.	2
24.	4
25.	2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ฉบับที่ 2 เรื่อง ลำดับ - อนุกรม

1. บอกลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ได้ (ข้อ 1, 2)
2. เขียนลำดับในรูปแจกแจงพจน์ได้เมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปให้ (ข้อ 3)
3. เขียนพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดได้เมื่อกำหนดลำดับในรูปแจกแจงพจน์ (ข้อ 4)
4. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิตได้ (ข้อ 5 - 7) และ (ข้อ 10, 11)
5. บอกลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์ได้ เมื่อกำหนดลำดับอนันต์ให้ (ข้อ 12)
6. หาลิมิตของลำดับอนันต์ได้ (ข้อ 13, 14)
7. หาผลบวกของอนุกรมที่กำหนดให้โดยใช้คุณสมบัติช่วยมาได้ (ข้อ 15, 16, 22)
8. หาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตได้ (ข้อ 17 - 20)
9. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้เมื่อกำหนดอนุกรมอนันต์เรขาคณิตให้ (ข้อ 23, 24)
10. เขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วนโดยอาศัยสูตรอนุกรมอนันต์ได้ (ข้อ 25)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉบับที่ 2

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง "ลำดับ-อนุกรม"

เวลา 1 ชั่วโมง คะแนนเต็ม 25 คะแนน

คำสั่ง จงเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว แล้วให้แรเงาลงในช่องว่างที่กำหนดให้ในกระดาษคำตอบ

1. 1, -10, 19, -28, ...
2. -5, -4, -3, -2, -1
3. $a_n = 2^{n+1} - n$
4. เซตของจำนวนเต็ม
5. $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5, x \in I^+, x < 10\}$

(ใช้ตอบคำถามข้อ 1, 2)

1. ลำดับใดเป็นลำดับจำกัด
   1. ข้อ 1, 5
   2. ข้อ 2, 3
   3. ข้อ 2, 4
   4. ข้อ 3, 4
   5. ข้อ 2, 5
2. ลำดับใดเป็นลำดับอนันต์
   1. ข้อ 1, 2
   2. ข้อ 1, 3
   3. ข้อ 1, 5
   4. ข้อ 3, 4
   5. ข้อ 1, 3, 4

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = \frac{n}{2n + 1}$ คือข้อใด

1. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$
2. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}$
3. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}$
4. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}, \ldots, \frac{n}{2n + 1}$
5. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n + 1}$

4. พจน์ทั่วไปของลำดับ 0, 4, 0, 8, 0, 12, 0,... คือข้อใด

1. $1 + (-1)^n$
2. $1 + n(-1)^n$
3. $2\left[1 + (-1)^n\right]$
4. $n\left[1 + (-1)^n\right]$
5. $n\left[1 - (-1)^n\right]$

5. ถ้าพจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 7 ของลำดับเลขคณิตคือ 18 และ 16 พจน์ที่ 1 และผลต่างร่วมของลำดับนี้เป็นเท่าใด

1. $-20, \frac{-2}{3}$
2. $-20, \frac{2}{3}$
3. $20, \frac{2}{3}$
4. $20, \frac{-2}{3}$
5. $10, \frac{4}{3}$

6. ถ้า x, 5x และ 6x + 9 เรียงเป็นลำดับเลขคณิตแล้วเป็นเท่าใด

1. 3
2. 12
3. 15
4. 27
5. 39

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7. เกษม วรชาติ และพจณรงค์ มีอายุ 10, 18 และ 30 ปี ตามลำดับ อยากทราบว่าอีกกี่ปีอายุของคนทั้งสามจะเรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

1. 6
2. 8
3. 10
4. 12
5. 14

8. ถ้าผลบวกสามพจน์แรกเท่ากับ -3 และผลคูณสามพจน์แรกเท่ากับ 8 แล้วเขียน 4 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตได้ดังข้อใด

1. $-1, 2, -4, 6$
2. $-4, 2, -1, \frac{1}{2}$
3. $-4, 2, -1, 2$
4. $-1, 2, -4, 6, \ldots$
5. $-1, 2, -4, 8, \ldots$

9. พจน์ที่ 7 ของลำดับ $24, 8, \frac{8}{3}, \ldots$ คือข้อใด

1. $\frac{8}{9}$
2. $\frac{8}{27}$
3. $\frac{8}{81}$
4. $\frac{8}{243}$
5. $\frac{8}{729}$

10. พจน์ทั่วไปของลำดับ $-24, 12, -6 \ldots$ คือข้อใด

1. $(-1)^n \frac{24}{2n}$
2. $(-1)^{n-1} \frac{24}{2^n}$
3. $(-1)^{n+1} \frac{24}{2^{n+1}}$
4. $(-1)^n \frac{24}{2^{n-1}}$
5. $(-1)^{n+1} \frac{24}{2n+1}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

11. ถ้า a, b, c, d,... เรียงเป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วมเท่ากับ x แล้ว ข้อใดเป็นข้อสรุปที่ถูกต้องของลำดับ ka, kb, kc, kd,...

1. เป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วม = x
2. เป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วม = x + k
3. เป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วม = xk
4. เป็นลำดับเรขาคณิต มี k เป็นอัตราส่วนร่วม
5. เป็นลำดับเรขาคณิต เมื่อ x เป็นอัตราส่วนร่วม

12. ลำดับใดเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

1. $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots$
2. 5, 5, 5, 5, ...
3. 6, 4, 2, 0, -2, ...
4. $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$
5. 0.1, 0.01, 0.001, ...

13. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5 + 2n - 8n^2}{2n^2 - 3} \right)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. -4
2. +2
3. 4
4. 16
5. ∞

14. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2n} \cos n^3 - \frac{3n}{6n - 1}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{2}$
2. 0
3. 1
4. $\frac{1}{2}$
5. ∞

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

15. ข้อใดเป็น<u>เท็จ</u> (เมื่อ k เป็นค่าคงที่)

1. $\sum(x + y + z) = \sum x + \sum y + \sum z$
2. $\sum(x - k) = \sum x - nk$
3. $\sum kx = k\sum x$
4. $\sum(x - y + k) = \sum x - \sum y + nk$
5. $\sum(xy) = \sum x \sum y$

16. กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1$

$g(x) = x^2$

$\sum_{k=1}^{4} gof(k)$ เป็นเท่าใด

1. 96
2. 84
3. 75
4. 68
5. 55

17. จำนวนพจน์น้อยที่สุดซึ่งทำให้อนุกรมเลขคณิต $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots$ มีผลบวกเท่ากับ 100 คือข้อใด

1. 8
2. 9
3. 10
4. 12
5. 15

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

18. กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

และอนุกรม

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14 & 15 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} + \ldots$$

ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเป็นเท่าใด

1. 520
2. 410
3. 380
4. 375
5. 230

19. ไม้กองหนึ่งวางซ้อนกันในแนวระดับเป็นชั้น ๆ แต่ละชั้นมีจำนวนไม้มากกว่าชั้นถัดขึ้นไปอยู่ 3 ท่อน ถ้าชั้นติดพื้นดินมี 217 ท่อน และชั้นบนสุดมีไม้ 70 ท่อน กองไม้นี้มีไม้ทั้งหมดเท่าใด

1. 6165 ท่อน
2. 7175 ท่อน
3. 8000 ท่อน
4. 8712 ท่อน
5. 8912 ท่อน

20. ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \ldots$ เป็นเท่าใด

1. $\frac{\sqrt{3}^n - 1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
2. $\frac{\sqrt{3}^n - 1}{2}(\sqrt{3} + 1)$
3. $\frac{\sqrt{3}^n + 1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
4. $\frac{\sqrt{3}^n + 1}{2}(\sqrt{3} + 1)$
5. คำตอบเป็นอย่างอื่น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

21. จำนวนจุลินทรีย์จะเพิ่มเป็น 2 เท่าของปริมาณที่มีอยู่เดิมในทุก ๆ 3 ชั่วโมง ถ้าเดิมมีจุลินทรีย์อยู่ x ตัว เมื่อเวลาผ่านไป 1 วัน จะมีจุลินทรีย์เท่าไร

1. 256x ตัว
2. 510x ตัว
3. 512x ตัว
4. 524x ตัว
5. 625x ตัว

22. ข้อใดเป็นเท็จ

1. $2^3 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^3 = \sum_{k=2}^{n} k^3$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - x)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2$
3. $2 + 3 + 4 + \ldots + k = \sum_{m=2}^{k} m$
4. $a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^k = \sum_{m=1}^{k} a^m$
5. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

23. ค่า a จากสมการ $1 + 2a + 2a^2 + 2a^3 + \ldots = \frac{3}{2}$ คือข้อใด

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{1}{5}$
3. $\frac{2}{5}$
4. $\frac{3}{5}$
5. $\frac{4}{5}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

24. ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 2
2. 1
3. 0
4. $\frac{1}{2}$
5. ∞

25. $0.6\dot{1}0\dot{4}$ ในรูปเศษส่วนได้ตังข้อใด

1. $\frac{7034}{9900}$
2. $\frac{6110}{9990}$
3. $\frac{7098}{9900}$
4. $\frac{3049}{4995}$
5. $\frac{3049}{4950}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉบับที่ 2

ข้อ	คำตอบ
1.	5
2.	2
3.	3
4.	4
5.	4
6.	5
7.	1
8.	2
9.	4
10.	4
11.	3
12.	3
13.	4
14.	1
15.	5
16.	2
17.	1
18.	2
19.	2
20.	2
21.	1
22.	4
23.	2
24.	5
25.	4

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ฉบับที่ 3 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น</u>

1. หาลิมิตของฟังก์ชันได้ (ข้อ 1, 7, 8)
2. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วงที่กำหนดให้ได้ (ข้อ 2 - 6)
3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ (ข้อ 9)
4. หาความเร็วและความเร่งในขณะเวลา t ใด ๆ ได้ (ข้อ 10 - 12)
5. หาจุดสัมผัสความชัน และสมการเส้นสัมผัสได้ เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งใด ๆ มาให้ (ข้อ 13 - 17)
6. หาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ (ข้อ 18, 19)
7. แก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดได้ (ข้อ 20 - 22)
8. หาฟังก์ชันได้ เมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันให้ (ข้อ 23)
9. หาสมการเส้นโค้งได้ เมื่อกำหนดความชัน ณ จุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้งให้ (ข้อ 24)
10. หาสมการการเคลื่อนที่ และสมการความเร็วเมื่อโจทย์กำหนดสมการความเร่งในขณะ t ใด ๆ ให้ (ข้อ 25)

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉบับที่ 3

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง "แคลคูลัสเบื้องต้น"

เวลา 1 ชั่วโมง คะแนนเต็ม 25 คะแนน

คำสั่ง จงเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว แล้วให้แรเงาลงในช่องว่างที่กำหนดให้ในกระดาษคำตอบ

1. $\lim_{x \to 3} \left(\frac{2x^2 - 6x}{x - 3} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   1. 6
   2. 3
   3. 1
   4. 0
   5. ∞

2. สมการเคลื่อนที่ของวัตถุหนึ่งเป็น $S = 3 + 2t - t^2$ โดยที่

   S - เป็นระยะทาง (เมตร)

   t - เวลา (วินาที)

   อัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุในช่วง 1 วินาทีถึง 5 วินาที เป็นเท่าใด

   1. -4
   2. 4
   3. -3
   4. 2
   5. 0

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามสมการ $S = 5t^2$ ความเร็วขณะ t ใด ๆ เป็นเท่าใด

1. $\frac{(5t + h)^2 - 5t^2}{h}$, $h \to 0$

2. $\frac{5(t + h)^2 - 5t^2}{h}$, $h \to 0$

3. $\frac{(5t^2 + h) - 5t^2}{h}$, $h \to 0$

4. $\frac{(5t + h)^2 - 5h^2}{h}$, $h \to 0$

5. $\frac{5(t + h)^2 - 5h^2}{h}$, $h \to 0$

4. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $S = at^2 + bt + c$ ถ้าอัตราเร็วเฉลี่ยในวินาทีที่ 3 เป็น 5 เท่ากับ 7 เมตร/วินาที และถ้าอัตราเร็วเฉลี่ยในวินาทีที่ 6 เป็น 9 เท่ากับ 21 เมตร/วินาที ค่า a, b เป็นเท่าใด

1. 2, 9
2. 2, -9
3. -2, 9
4. -2, -9
5. 9, -2

5. ถ้าปริมาณน้ำในถังเมื่อเวลาผ่านไป t วินาที เป็นไปตามสมการ $Q = 15 - 2t$ อยากทราบว่าในช่วงวินาทีที่ 3 เป็น 7 อัตราเปลี่ยนแปลงของน้ำในถังเป็นเท่าใด

1. ลดลง 2
2. เพิ่มขึ้น 2
3. เพิ่ม 1.25
4. ลดลง 1.25
5. เพิ่ม 7

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6. กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x^2$

อัตราเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $gof(x)$ ในขณะ $x = 3$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 30
2. 28
3. 24
4. 20
5. 18

7. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ ค่า $\frac{df(x)}{dx}$ เป็นเท่าใด

1. $\lim_{h\to 0} \frac{(x^3 + h) - h^3}{h}$
2. $\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^3 - h^3}{h}$
3. $\lim_{h\to 0} \frac{(x^3 + h) - x^3}{h}$
4. $\lim_{h\to 0} \frac{3(x + h)^3 - x^3}{h}$
5. $\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

8. กำหนดให้ $h(x) = 5x^2 - 2x + 13$

$\lim_{k\to 0} \frac{h(x + k) - h(x)}{k}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $10x - 2$
2. $5x - 2$
3. $10 + 2$
4. $5x + 2$
5. $2x + 5$

9. อนุพันธ์ที่สองของ $y = (x^3 + 2x)(x^2 - 1)$ เมื่อ $x = -1$ คือข้อใด

1. -38
2. -26
3. 0
4. 18
5. 26

10. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามสมการ $S = t^3 - 3t$

โดยที่ S - เป็นระยะทาง (เมตร)

t - เป็นเวลา (วินาที)

ความเร็วของอนุภาคขณะวินาทีที่ 2 เป็นเท่าใด

1. 1 เมตร/วินาที
2. 2 เมตร/วินาที
3. 5.5 เมตร/วินาที
4. 8.5 เมตร/วินาที
5. 9 เมตร/วินาที

11. จากข้อ 10 ความเร่งของอนุภาคขณะวินาทีที่ 5 เป็นเท่าใด

1. 10 เมตร/วินาที^{2}
2. 12 เมตร/วินาที^{2}
3. 25 เมตร/วินาที^{2}
4. 30 เมตร/วินาที^{2}
5. 32.5 เมตร/วินาที^{2}

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

12. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามสมการ $S = at^2 + bt + c$

โดยที่ S - เป็นระยะทาง (เมตร)

t - เป็นเวลา (วินาที)

ในขณะวินาทีที่ 4 วัตถุมีความเร็วเฉลี่ย 32 เมตร/วินาที

ในขณะวินาทีที่ 6 วัตถุมีความเร็วเฉลี่ย 84 เมตร/วินาที

ความเร็วขณะวินาทีที่ 10 เป็นเท่าใด

1. 156 เมตร/วินาที
2. 172 เมตร/วินาที
3. 188 เมตร/วินาที
4. 192 เมตร/วินาที
5. 198 เมตร/วินาที

13. กำหนดสมการเส้นโค้ง $y = x^{3/2} + 1$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) เป็นเท่าใด

1. $\frac{3\sqrt{x}}{2}$
2. $\frac{3x}{2}$
3. $\frac{2x}{3}$
4. $3x$
5. $3\sqrt{x}$

14. สมการเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x - 15$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่ตัดแกน x เป็นเท่าใด

1. -3, 3
2. -4, 4
3. -5, 5
4. -7, 7
5. -8, 8

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

15. สมการเส้นโค้ง $y = 1 - x^2$

สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $x = 2$ คือข้อใด

1. $x + 4y + 5 = 0$
2. $x - 4y + 5 = 0$
3. $4x + y - 5 = 0$
4. $4x - y + 5 = 0$
5. $4x + y + 5 = 0$

16. จุด (a, b) ที่ทำให้ความชันของเส้นโค้ง $y = 18x - 3x^2$ มีค่าเท่ากับศูนย์คือข้อใด

1. (3, 27)
2. (3, -27)
3. (2, 13)
4. (2, -13)
5. (27, -3)

17. กำหนดความชันเส้นตั้งฉาก ณ จุดสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x$ มีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{4}$ จุดสัมผัสเส้นโค้งเป็นเท่าใด

1. (-1, 3)
2. (1, 3)
3. (2, 5)
4. (-2, 5)
5. (-1, 5)

18. ค่า x ซึ่งทำให้เส้นโค้ง $y = 3x - x^2$ มีค่าสูงสุด เป็นเท่าใด

1. $-\frac{4}{3}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{9}{4}$
4. $\frac{9}{2}$
5. 3

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

19. กำหนดให้ a มากกว่าสองเท่าของ b อยู่ 1

a รวมกับสองเท่าของ b เท่ากับ 5

ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของกราฟพาราโบลา $y = ax^2 + bx + 5$ เป็นเท่าใด

1. ค่าสูงสุด $= -\frac{1}{6}$
2. ค่าต่ำสุด $= -\frac{1}{6}$
3. ค่าสูงสุด $= \frac{59}{12}$
4. ค่าต่ำสุด $= \frac{59}{12}$
5. ค่าสูงสุด $= -\frac{59}{12}$

20. โยนก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งตามสมการ $S = 16t - 2t^2$ ก้อนหินจะขึ้นไปได้สูงสุดเท่าใด

1. 22 เมตร
2. 28 เมตร
3. 32 เมตร
4. 40 เมตร
5. 42 เมตร

21. ถังรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด มีพื้นที่ด้านนอกเท่ากับ 96 ตารางเมตร และมีด้านฐานยาวเท่ากับส่วนสูงเสมอ

ถังใบนี้จะมีปริมาตรมากที่สุดเท่าใด

1. 83 ลูกบาศก์เมตร
2. 84 ลูกบาศก์เมตร
3. 85 ลูกบาศก์เมตร
4. 85.33 ลูกบาศก์เมตร
5. 123.66 ลูกบาศก์เมตร

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

22. ในการปลูกพืชไร่ ณ ที่แห่งหนึ่ง ปรากฏว่าปริมาณพืชผลที่ได้มีความสัมพันธ์กับปุ๋ยที่ใช้ ดังสมการ $y = 40 + 22x - x^2$ เมื่อ

x แทนจำนวนปุ๋ย (กิโลกรัมต่อไร่)

y แทนปริมาณพืชผลที่ได้ (ถังต่อไร่)

ถ้าใส่ปุ๋ยให้เหมาะสมแล้วจะได้พืชผลมากที่สุดเท่าใด

1. 22 ถัง/ไร่
2. 40 ถัง/ไร่
3. 84 ถัง/ไร่
4. 161 ถัง/ไร่
5. 210 ถัง/ไร่

23. กำหนดให้ $\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 4x - 1$ และกราฟนี้ผ่านจุด (0, 1)

ค่า f(1) ตรงกับข้อใด

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2
5. 4

24. สมการเส้นโค้งผ่านจุด (1, 2) มีความชันตั้งฉากผ่านเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด สัมผัสเท่ากับ $-\frac{1}{2x}$ สมการเส้นโค้งตรงกับข้อใด

1. $x^2 - y + 1 = 0$
2. $x^2 - y + 3 = 0$
3. $x^2 + y - 1 = 0$
4. $x^2 + y - 3 = 0$
5. $x^2 - y - 1 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

25. กำหนดให้ในเวลา t วินาที วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง $a = 12t^2 + 6t + 10$ ฟุต/วินาที^{2} ถ้า t = 0 วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วศูนย์ฟุตต่อวินาที ระยะทาง S (ฟุต) ขณะวินาทีที่ 5 เป็นเท่าใด

1. 650 ฟุต
2. 720 ฟุต
3. 750 ฟุต
4. 875 ฟุต
5. 885 ฟุต

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉบับที่ 3

ข้อ	คำตอบ
1.	1
2.	2
3.	2
4.	2
5.	1
6.	2
7.	5
8.	1
9.	2
10.	5
11.	4
12.	3
13.	1
14.	5
15.	3
16.	1
17.	2
18.	2
19.	4
20.	3
21.	4
22.	4
23.	1
24.	1
25.	4

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ฉบับที่ 4 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ลำดับ - อนุกรม แคลคูลัสเบื้องต้น</u>

1. หาผลบวก ผลลบ และผลคูณได้เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนมาให้ (ข้อ 1, 3, 10)
2. หาลังยุค และผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้ (ข้อ 2, 4, 5)
3. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ (ข้อ 6 - 8)
4. แก้สมการเมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ (ข้อ 9, 11)
5. บอกเซตที่กำหนดว่าเป็นกรูปหรืออะบีเลียนกรูปภายใต้โอเปอเรชันที่กำหนด (ข้อ 12)
6. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิตได้ (ข้อ 13 - 16)
7. หาลิมิตของลำดับอนันต์ได้ (ข้อ 22, 24 - 26)
8. หาผลบวกของอนุกรมที่กำหนดให้โดยใช้คุณสมบัติซิกมาได้ (ข้อ 17)
9. หาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตได้ (ข้อ 18 - 21)
10. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้ เมื่อกำหนดอนุกรมเรขาคณิตให้ได้ (ข้อ 23, 27)
11. หาลิมิตของฟังก์ชันได้ (ข้อ 28, 29)
12. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วงที่กำหนดให้ได้ (ข้อ 38)
13. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ (ข้อ 31 - 37)
14. แก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดได้ (ข้อ 38)
15. หาฟังก์ชันได้ เมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ (ข้อ 38 - 40)

ฉบับที่ 4

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คะแนนเต็ม 40 คะแนน เวลา 2 ชั่วโมง

ตอนที่ 1

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วแรเงาลงในช่องว่างที่กำหนดให้ในกระดาษคำตอบ

1. ผลลัพธ์ของ $i(3 + 2i) - (1 - 4i)$ คือข้อใด

   1. $-i - 3$
   2. $1 + 7i$
   3. $-3 + 7i$
   4. $7i - 1$
   5. $3 + i$

2. ผลลัพธ์ของ $\dfrac{i}{\dfrac{1 + i}{1 + i}}$ คือข้อใด

   1. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$
   2. $\frac{i}{5} + \frac{2}{5}$
   3. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$
   4. $1 + i$
   5. $1 - i$

3. ถ้า $z = 1 + i$ แล้ว ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน $(z^2 + 3i - 10)$ คือข้อใด

   1. $5i$
   2. 5
   3. $-10i$
   4. -10
   5. $-3i$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. กำหนดให้ $(a, b) = \frac{1 + i}{1 - i} + 5i(2 - 3i^7)$ อินเวอร์สการบวกของ (a, b) เป็นเท่าใด

1. (15, -11)
2. (-14, -10)
3. (-14, 9)
4. (15, -9)
5. (9, -15)

5. สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $(3 - 5i) - 2(1 - 3i)^2$ คือข้อใด

1. 19 + 7i
2. 19 - 7i
3. -7 + 13i
4. -5 + 10i
5. 13 - 5i

6. ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{(7 - 24i)(1 + i)^2}{-8 - 6i}$ คือข้อใด

1. 5
2. 7
3. 10
4. 12
5. 23

7. ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{(1 - i)(2 - i)(3 - i)}{(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)}$ คือข้อใด

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

8. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ข้อใดเป็นจริง

1. $\overline{i} > i$
2. $i > 0$
3. $|z_1| - |z_2| \geq |z_1 - z_2|$
4. $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$
5. $i = \frac{1}{i}$

9. ค่า z ในข้อใดที่ทำให้สมการ $iz^2 - 7z - 6i = 0$ เป็นจริง

1. i, 6i
2. 6, i
3. 5i, 2i
4. -6, -6i
5. -i, -6i

10. ถ้า $(a, b)(2, -3) = (-1, -5)$

ค่าของ (a, b) เป็นเท่าใด

1. (1, -1)
2. (1, 1)
3. (-1, -2)
4. (1, -2)
5. $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$

11. เซตคำตอบของสมการ $(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$ คือข้อใด

1. $\{1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}\}$
2. $\{-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}\}$
3. $\{1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}\}$
4. $\{-1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}\}$
5. $\{-1, 1 \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}\}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

12. ข้อใดเป็นจริง

1. $\{-1, 0, 1\}$ มีคุณสมบัติปิดภายใต้การบวก
2. $\{-1, 1, -i, i\}$ มีเอกลักษณ์การบวกคือ 0
3. เซตของจำนวนจริงภายใต้การคูณเป็นกรุป
4. เซตของจำนวนเชิงซ้อนภายใต้การคูณเป็นอะบีเลี่ยนกรุป
5. ข้อ 1 - 4 ไม่ถูกต้อง

13. ถ้า a, 5a, 6a + 9 เป็น 3 พจน์เรียงกันในลำดับเลขคณิตแล้ว พจน์ที่ 4 จะมีค่าเท่าใด

1. 27
2. 39
3. 41
4. 49
5. 57

14. ค่า A, B, C ซึ่งทำให้ลำดับ 4, A, B, C, 64 เป็นลำดับเลขคณิตคือข้อใด

1. 15, 30, 45
2. 18, 38, 49
3. 19, 34, 49
4. 20, 36, 52
5. ข้อ 2, 4 ถูกต้อง

15. พจน์ทั่วไปของลำดับ $2, -2\sqrt{2}, 4, -4\sqrt{2}, \ldots$ คือข้อใด

1. $(-\sqrt{2})^{n+1}$
2. $(\sqrt{2})^{n-1}$
3. $(-1)^{n+1}\ 2^{n+1}$
4. $\sqrt{2}^{n-1}$
5. $(-1)^{n+1}\ (\sqrt{2})^{n+1}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

16. ถ้าพจน์ที่ n ของลำดับ 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{243}$ แล้ว n มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 7
2. 8
3. 9
4. 10
5. 12

17. $\sum_{k=1}^{5}(k^2 + 1)$ มีค่ามากกว่า $\sum_{j=-2}^{10}(2j - 7)$ อยู่เท่าใด

1. -31
2. 47
3. 51
4. 91
5. 112

18. ถ้าผลบวกของพจน์ที่ n ของลำดับเท่ากับ $n^2 - n$ แล้ว พจน์ที่ 15 ของลำดับนี้คือข้อใด

1. 20
2. 28
3. 35
4. 38
5. 45

19. ถ้าพจน์แรกของลำดับเลขคณิตมีค่าเท่ากับ 2 และพจน์ที่ 8 มีค่าเท่ากับ 372 ผลบวกของลำดับตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ 8 เป็นเท่าใด

1. 1569
2. 1496
3. 1326
4. 1312
5. 1296

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

20. พจน์ที่เท่าใดที่ทำให้อนุกรม $1 - 4 + 7 - 10 + 13 - 16 + \ldots$ มีผลบวกเท่ากับ 100

1. 58
2. 66
3. 67
4. 72
5. 78

21. ผลบวก n พจน์ของอนุกรม $\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots$ คือข้อใด

1. $(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2}^n - 1)$
2. $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}^n - 1)$
3. $\frac{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2}^n - 1)}{2}$
4. $\frac{(1 - \sqrt{2})(\sqrt{2}^n - 1)}{2}$
5. $(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2}^n + 1)$

22. กำหนดให้

$$a_n = \begin{cases} n + n^2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคี่} \\ 5 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$$

$\lim_{n \to \infty} a_n$ เป็นเท่าใด

1. 0
2. 1
3. ∞
4. $-\infty$
5. ไม่มีลิมิต

23. ผลบวกอนันต์ของอนุกรม $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ คือข้อใด

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{5}{2}$
4. $\frac{2}{5}$
5. หาค่าของผลบวกไม่ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

24. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 5}{3 + n^2} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 0
2. 1
3. $\frac{1}{3}$
4. n^2
5. ∞

25. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

1. 1, 2, 3, 4, ...
2. 5, 5, 5, 5, ...
3. a, a^2, a^3, a^4, ...
4. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$
5. ข้อ 2, 4 ถูก

26. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

1. 3, $\sqrt{3}$, 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ...
2. 1, 0, 1, 0, ...
3. 5, 5, 5, 5, ...
4. -6, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{6}$, ...
5. 0, 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, ...

27. 2.051 มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\frac{249}{99}$
2. $\frac{1851}{900}$
3. $\frac{77}{30}$
4. $\frac{1999}{990}$
5. $\frac{677}{330}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

28. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^3 + 3x + 8}{x^2 - 7x - 2} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 0
2. 1
3. 4
4. -4
5. ∞

29. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. -1
2. 0
3. 1
4. $\frac{1}{4}$
5. $\frac{1}{2}$

30. กำหนดให้ $y = x^3 - 4x^2 - 3x - 5$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x =-3 เป็น x = -1 เป็นเท่าใด

1. -32
2. -6.5
3. 22
4. 18.5
5. 24

31. อนุภาคหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ตามสมการ $S = 5 - 2t + 3t^2$ อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ t = 2 เป็นเท่าใด

1. -10
2. -6
3. 6
4. 10
5. -18

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

32. ถ้า $S = 2t^2 + 3t + 1$ ความเร่งขณะนาทีที่ 2 (กิโลเมตร/นาที^{2}) เป็นเท่าใด

1. 1
2. 4
3. 11
4. 15
5. 17

33. กำหนดเส้นโค้ง $y = x^3 + 3x$ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (0, 0) เป็นเท่าใด

1. 3
2. 2
3. 1
4. 0
5. -1

34. กำหนดเส้นโค้ง $y = 2x^2 - 5$ สมการเส้นสัมผัส ณ จุด $x = 1$ เป็นเท่าใด

1. $x + 4y - 7 = 0$
2. $x - 4y + 7 = 0$
3. $4x - y - 7 = 0$
4. $4x + y - 7 = 0$
5. $4x + 3y + 1 = 0$

35. โยนลูกหินขึ้นไปในแนวดิ่ง โดยลูกหินมีการเคลื่อนที่ตามสมการ $S = 2 + 16t - 5t^2$ ลูกหินจะตกเมื่อ t มีค่าเท่าใด

1. 1
2. 1.6
3. 2
4. 3.2
5. 8

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

36. กำหนดให้ $y = 3x^2 + 5x - 2$

ค่าของ $2y'' - y'$ เป็นเท่าใด

1. $6 - 7x$
2. $7 - 6x$
3. $5 + 6x$
4. $6 + 5x$
5. $4 - 7x$

37. กำหนดเส้นโค้ง $y = x(x^2 + 3)$ สมการ เส้นปกติที่จุด $(0, 0)$ เป็นเท่าใด

1. $x + 3y = 0$
2. $x - 3y = 0$
3. $x + y + 1 = 0$
4. $x - 3y + 3 = 0$
5. $x + 3y - 3 = 0$

38. กระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 10 นิ้ว ยาว 16 นิ้ว ถ้าต้องการทำกล่องไม่มีฝาปิด โดยการตัดมุมกระดาษออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วพับขึ้นเป็นกล่อง ขนาดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ต้องตัดทิ้งซึ่งจะทำให้กล่องนี้มีปริมาตรมากที่สุดเป็นเท่าใด

1. 2.5 x 2.5 ตารางนิ้ว
2. 2 x 2 ตารางนิ้ว
3. 1.8 x 1.8 ตารางนิ้ว
4. 1.5 x 1.5 ตารางนิ้ว
5. 1 x 1 ตารางนิ้ว

39. ถ้าจุด (a, b) เป็นจุดสัมผัสเส้นโค้งที่มีความชันเท่ากับ $2x - 1$ สมการเส้นโค้งเป็นเท่าใด

1. $y = x^2 - x + b - a^2 + a$
2. $y = x^2 - x + b - a$
3. $y = x^2 + x + b - a^2 - a$
4. $y = x^2 + x + b - a - a^2$
5. $y = x^2 - x - b + a - b^2$

40. ถ้าความเร็วของวัตถุชนิดหนึ่งเป็น 53 กิโลเมตร/นาที และใน 10 นาที จะวิ่งได้ 500 กิโลเมตร สมการการเคลื่อนที่คือข้อใด

1. $s = 53t + 30$
2. $s = 53t - 30$
3. $s = 10 + 30t$
4. $s = 10 - 30t$
5. $s = 30 - 53t$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉบับที่ 4

ข้อ	คำตอบ
1.	3
2.	1
3.	2
4.	1
5.	2
6.	1
7.	2
8.	4
9.	5
10.	1
11.	2
12.	5
13.	2
14.	3
15.	5
16.	1
17.	2
18.	2
19.	2
20.	3
21.	1
22	5
23.	2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉบับที่ 4 (ต่อ)

ข้อ	คำตอบ
24.	2
25.	5
26.	2
27.	5
28.	4
29.	5
30.	5
31.	4
32.	2
33.	1
34.	3
35.	2
36.	2
37.	1
38.	2
39.	1
40.	2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ง

การคำนวณข้อมูลในการวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 5 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 013) ประจำภาคต้น ก่อนการทดลองของกลุ่มทดลอง (x_1) และกลุ่มควบคุม (x_2)

กลุ่มทดลอง				กลุ่มควบคุม			
x_1	f	fx_1	fx_1^2	x_2	f	fx_2	fx_2^2
44	5	220	9680	43	9	387	16641
43	2	86	3698	42	1	42	1764
42	2	84	3528	41	6	246	10086
41	1	41	1681	40	1	40	1600
40	5	200	8000	39	9	351	13689
39	3	117	4563	38	4	152	5776
38	6	228	8664	36	2	72	2592
37	4	148	5476	35	5	175	6125
35	2	70	2450	34	2	68	2312
34	3	102	3468	33	1	33	1089
33	2	66	2178	32	2	64	2048
32	1	32	1024	31	1	31	961
31	3	93	2883	30	1	30	900
30	2	60	1800	26	1	26	676
29	2	58	1682				
28	2	56	1568				
	$\sum f=$	$\sum fx_1=$	$\sum fx_1^2=$		$\sum f=$	$\sum fx_2=$	$\sum fx_2^2=$
	45	1,661	62,343		45	1,717	66,259

1. หามัธยฐานเลขคณิต $\bar{x}$

สูตร $\bar{x}_1 = \frac{\sum fx_1}{N_1}$

$= \frac{1661}{45}$

$= 36.911$

สูตร $\bar{x}_2 = \frac{\sum fx_2}{N_2}$

$= \frac{1717}{45}$

$= 38.156$

2. หาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

สูตร $S_1 = \sqrt{\frac{N_1 \Sigma fx_1^2 - (\Sigma fx_1)^2}{N_1 (N_1 - 1)}}$

$= \sqrt{\frac{45(62343) - (1661)^2}{45(44)}}$

$= 4.847$

$S_2 = \sqrt{\frac{N_2 \Sigma fx_2^2 - (\Sigma fx_2)^2}{N_2 (N_2 - 1)}}$

$= \sqrt{\frac{45(66259) - (1717)^2}{45(44)}}$

$= 4.117$

3. การทดสอบความแปรปรวน (σ^2)

Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

สูตร $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(4.847)^2}{(4.117)^2}$

$= 1.386$

ขั้นแห่งความเป็นอิสระมี 2 ค่าเป็น N - 1 ทั้งสองค่าคือ (45 - 1) และ (45 - 1) เป็น 44, 44 จากตาราง $0.05F_{44,44} = 1.66$ ค่า $F = 1.386 < 1.66$ ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 013) ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05 นั่นคือนักเรียนทั้งสองกลุ่มมาจากประชากรที่มีความแปรปรวนเท่ากัน

4. การทดสอบค่าที (t - test)

Ho : $\mu_1 = \mu_2$

สูตร $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left\{\frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right\}\left\{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right\}}}$

$$= \frac{38.156 - 36.911}{\sqrt{\left\{\frac{44(4.847)^2 + 44(4.117)^2}{45 + 45 - 2}\right\}\left\{\frac{1}{45} + \frac{1}{45}\right\}}}$$

$$= 1.313$$

กรณีนี้ขั้นแห่งความเป็นอิสระ = 45 + 45 - 2 = 88

จากตารางค่า 0.05t 88 = 1.96

ค่า t = 1.313 $<$ 1.96 ดังนั้นมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 013) ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

นั่นคือตัวอย่างประชากรทั้งสองกลุ่มมีความสามารถในการเรียนไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05 ซึ่งจากการจับฉลากได้ตัวอย่างประชากรกลุ่มที่ 1 เป็นกลุ่มควบคุม และตัวอย่างประชากรกลุ่มที่ 2 เป็นกลุ่มทดลอง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 6 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) หลังการทดลองของกลุ่มทดลอง (x_1) และกลุ่มควบคุม (x_2)

กลุ่มทดลอง				กลุ่มควบคุม			
x_1	f	fx_1	fx_1^2	x_2	f	fx_2	fx_2^2
71	1	71	5041	69	1	69	4761
67	1	67	4489	68	1	68	4624
62	1	62	3844	67	1	67	4489
59	1	59	3481	65	1	65	4225
57	2	114	6498	64	1	64	4096
55	2	110	6050	63	1	63	3969
54	3	162	8748	62	1	62	3844
52	2	104	5408	61	3	183	11163
51	4	204	10404	59	1	59	3481
50	1	50	2500	58	2	116	6728
49	3	147	7203	57	2	114	6498
48	4	192	9216	56	1	56	3136
47	1	47	2209	55	2	110	6050
46	3	138	6348	54	1	54	2916
45	3	135	6075	53	1	53	2809
44	2	88	3872	52	2	104	5408
43	1	43	1849	51	1	51	2601
42	3	126	5292	50	3	150	7500
41	1	41	1681	49	4	196	9604
40	3	120	4800	48	2	96	4608
39	1	39	1521	47	2	94	4418

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 6 (ต่อ)

กลุ่มทดลอง				กลุ่มควบคุม			
x_1	f	fx_1	fx_1^2	x_2	f	fx_2	fx_2^2
35	1	35	1225	46	2	92	4232
29	1	29	841	45	2	90	4050
				43	1	43	1849
				41	1	41	1681
				40	1	40	1600
				37	1	37	1369
				35	2	70	2450
				26	1	26	676
	$\sum f=$	$\sum fx_1=$	$\sum fx_1^2=$		$\sum f=$	$\sum fx=$	$\sum fx_2^2=$
	45	2,183	108,595		45	2,333	124,835

1. หามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$)

สูตร $\bar{x}_1 = \frac{\sum fx_1}{N_1}$

$= \frac{2183}{45}$

$= 48.511$

สูตร $\bar{x}_2 = \frac{\sum fx_2}{N_2}$

$= \frac{2333}{45}$

$= 51.844$

2. หาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

สูตร $S_1 = \sqrt{\frac{N_1\sum fx_1^2 - (\sum fx_1)^2}{N_1(N_1 - 1)}}$

สูตร $S_2 = \sqrt{\frac{N_2\sum fx_2^2 - (\sum fx_2)^2}{N_2(N_2 - 1)}}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$=\sqrt{\frac{45(108595) - (2183)^2}{45(44)}}$$

$$= 7.827$$

$$=\sqrt{\frac{45(124835) - (2333)^2}{45(44)}}$$

$$= 9.393$$

3. <u>การทดสอบความแปรปรวน</u> (σ^2)

$$Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

<u>สูตร</u>

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

$$= \frac{(9.393)^2}{(7.827)^2}$$

$$= 1.440$$

ขั้นแห่งความเป็นอิสระมี 2 ค่าเป็น N - 1 ทั้งสองค่าคือ (45 - 1) และ (45 - 1) เป็น 44,44 จากตาราง 0.05F 44,44 = 1.66 ค่า F = 1.440 < 1.66 ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) ของนักเรียนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนเสริมโดยครูกับกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนเสริมโดยเพื่อนนักเรียนไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

4. <u>การทดสอบค่าที</u> (t - test)

$$Ho : \mu_1 = \mu_2$$

<u>สูตร</u>

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left\{\frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right\}\left\{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right\}}}$$

$$= \frac{51.844 - 48.511}{\sqrt{\left\{\frac{44\ (9.393)^2 + 44\ (7.827)^2}{45 + 45 - 2}\right\}\left\{\frac{1}{45} + \frac{1}{45}\right\}}}$$

$$= 1.828$$

กรณีนี้ขั้นแห่งความเป็นอิสระ = 45 + 45 - 2 = 88

จากตารางค่า 0.05t 88 = 1.828

ค่า t = 1.828 <1.96 ดังนั้นมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ได้รับการสอนเสริมจากครูกับกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนเสริมโดยเพื่อนนักเรียนไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

นั่นคือ การสอนเสริมโดยเพื่อนนักเรียนกับกลุ่มทดลองให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) ไม่แตกต่างไปจากการสอนเสริมโดยครูกับกลุ่มควบคุมที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 7 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	p_H	p_L	p	r
1	13	9	0.69	0.25
2	15	6	0.66	0.56
3	12	4	0.50	0.50
4	12	5	0.53	0.44
5	13	5	0.56	0.50
6	12	4	0.50	0.50
7	9	4	0.41	0.31
8	11	1	0.38	0.63
9	16	6	0.69	0.63
10.	14	4	0.56	0.63
11	7	1	0.25	0.38
12	7	3	0.31	0.25
13	9	3	0.38	0.31
14.	16	5	0.66	0.69
15	14	5	0.59	0.56
16	14	2	0.50	0.75
17	15	4	0.59	0.69
18	10	6	0.50	0.25
19	14	5	0.59	0.56
20	9	4	0.41	0.31

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 7 (ต่อ)

ข้อที่	p_H	p_L	p	r
21	11	3	0.44	0.50
22	16	7	0.72	0.56
23	10	4	0.44	0.38
24	8	1	0.28	0.44
25	10	2	0.38	0.50

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การหาความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

ตารางที่ 8 อัตราส่วนของผู้ที่ตอบถูก (p) อัตราส่วนของผู้ที่ตอบผิด (q) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	p_H	p_L	p	q	pq
1	13	9	0.69	0.31	0.21
2	15	6	0.66	0.34	0.22
3	12	4	0.50	0.50	0.25
4	12	5	0.53	0.47	0.25
5	13	5	0.56	0.44	0.25
6	12	4	0.50	0.50	0.25
7	9	4	0.41	0.59	0.24
8	11	1	0.38	0.62	0.24
9	16	6	0.69	0.31	0.21
10	14	4	0.56	0.44	0.25
11	7	1	0.25	0.75	0.19
12	7	3	0.31	0.69	0.21
13	9	3	0.38	0.62	0.24
14	16	5	0.66	0.34	0.22
15	14	5	0.59	0.41	0.24
16	14	2	0.50	0.50	0.25
17	15	4	0.59	0.41	0.24
18	10	6	0.50	0.50	0.25
19	14	5	0.59	0.41	0.24

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 8 (ต่อ)

ข้อที่	p_H	p_L	p	q	pq
20	9	4	0.41	0.59	0.24
21	11	3	0.44	0.56	0.25
22	16	7	0.72	0.28	0.20
23	10	4	0.44	0.56	0.25
24	8	1	0.28	0.72	0.20
25	10	2	0.38	0.62	0.24
	—	—	—	—	$\sum$pq 5.83

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 9 การคำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

x	f	fx	fx^2
25	1	25	625
24	1	24	576
23	2	46	1058
22	1	22	484
21	2	42	882
20	4	80	1600
19	5	95	1805
18	2	36	648
17	4	68	1156
16	2	32	512
15	3	45	675
14	1	14	196
13	4	52	676
12	4	48	576
11	5	55	605
10	3	30	300
9	3	27	243
8	3	24	192
7	2	14	98
6	4	24	144

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 9 (ต่อ)

x	f	fx	fx^2
5	2	10	50
4	2	8	32
	$\Sigma f=$ 60	$\Sigma fx=$ 821	$\Sigma fx^2=$ 13133

ก. ค่าความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดลองผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

$$S_x^2 = \frac{N\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{60(13133) - (821)^2}{60(59)}$$

$$= 32.186$$

ข. ค่าความเที่ยงของแบบทดลองที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

$$Kr - 20 : r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma pq}{S_x^2}\right]$$

$$= \frac{25}{24}\left[1 - \frac{5.83}{32.186}\right]$$

$$= 0.853$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 10 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) เรื่อง "ลำดับ-อนุกรม" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	P_H	P_L	p	r
1	11	4	0.47	0.44
2	14	4	0.56	0.63
3	12	8	0.63	0.25
4	15	10	0.78	0.31
5	16	8	0.75	0.50
6	14	5	0.59	0.56
7	13	5	0.56	0.50
8	14	3	0.53	0.69
9	16	9	0.78	0.44
10	14	8	0.69	0.38
11	15	3	0.56	0.75
12	11	4	0.47	0.44
13	14	4	0.56	0.63
14	8	1	0.28	0.44
15	12	5	0.53	0.44
16	15	6	0.66	0.56
17	14	3	0.53	0.69
18	15	2	0.53	0.81
19	11	5	0.50	0.38
20	10	5	0.47	0.31

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 10 (ต่อ)

ข้อที่	p_H	p_L	p	r
21	13	4	0.53	0.56
22	15	0	0.47	0.94
23	9	3	0.38	0.38
24	8	1	0.28	0.44
25	16	3	0.59	0.81

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การหาความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

ตารางที่ 11 อัตราส่วนของผู้ที่ตอบถูก (p) อัตราส่วนของผู้ที่ตอบผิด (q) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "สำดับ-อนุกรม" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	p_H	p_L	p	q	pq
1	11	4	0.47	0.53	0.25
2	14	4	0.56	0.44	0.25
3	12	8	0.63	0.37	0.23
4	15	10	0.78	0.22	0.17
5	16	8	0.75	0.25	0.19
6	14	5	0.59	0.41	0.24
7	13	5	0.56	0.44	0.25
8	14	3	0.53	0.47	0.25
9	16	9	0.78	0.22	0.17
10	14	8	0.69	0.31	0.21
11	15	3	0.56	0.44	0.25
12	11	4	0.47	0.53	0.25
13	14	4	0.56	0.44	0.25
14	8	1	0.28	0.72	0.20
15	12	5	0.53	0.47	0.25
16	15	6	0.66	0.34	0.22
17	14	3	0.53	0.47	0.25
18	15	2	0.53	0.47	0.25
19	11	5	0.50	0.50	0.25
20	10	5	0.47	0.53	0.25

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 11 (ต่อ)

ข้อที่	p_H	p_L	p	q	pq
21	13	4	0.53	0.47	0.25
22	15	0	0.47	0.53	0.25
23	9	3	0.38	0.62	0.24
24	8	1	0.28	0.72	0.20
25	16	3	0.59	0.41	0.24
	—	—	—	—	$\sum pq$= 5.81

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 12 การคำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ลำดับ-อนุกรม" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

x	f	fx	fx^2
25	1	5	625
24	2	48	1152
23	2	46	1058
22	3	66	1452
21	2	42	882
20	3	60	1200
19	6	114	2166
18	6	108	1944
17	2	34	578
16	2	32	512
15	2	30	450
14	1	14	196
13	1	13	169
12	9	108	1296
11	4	44	484
10	6	60	600
9	2	18	162
8	2	16	128
7	1	7	49
6	2	12	72

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 12 (ต่อ)

x	f	fx	fx^2
5	1	5	25
	$\Sigma f=$ 60	$\Sigma fx=$ 882	Σfx^2 15208

ก. ค่าความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (014)

$$S_x^2 = \frac{N\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{60(15200) - (882)^2}{60(59)}$$

$$= 37.875$$

ข. ความเที่ยงของแบบทดสอบที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

$$Kr - 20 : r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma pq}{S_x^2}\right]$$

$$= \frac{25}{24}\left[1 - \frac{5.81}{37.875}\right]$$

$$= 0.882$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 13 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) เรื่อง "แคลคูลัสเบื้องต้น" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	P_H	P_L	p	r
1	15	8	0.72	0.44
2	11	6	0.53	0.31
3	14	6	0.63	0.50
4	13	3	0.50	0.63
5	12	5	0.53	0.44
6	14	4	0.56	0.63
7	14	4	0.56	0.63
8	15	3	0.56	0.75
9	15	4	0.59	0.69
10	12	3	0.47	0.56
11	11	3	0.44	0.50
12	11	4	0.47	0.44
13	14	1	0.47	0.81
14	15	2	0.53	0.81
15	9	1	0.31	0.50
16	12	8	0.63	0.25
17	9	4	0.41	0.31
18	7	3	0.31	0.25
19	14	3	0.53	0.69
20	15	10	0.78	0.31

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 13 (ต่อ)

ข้อที่	p_H	p_L	p	r
21	8	3	0.34	0.31
22	11	4	0.47	0.44
23	14	3	0.53	0.69
24	14	3	0.53	0.69
25	11	2	0.41	0.56

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การหาความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

ตารางที่ 14 อัตราส่วนของผู้ที่ตอบถูก (p) อัตราส่วนของผู้ที่ตอบผิด (q) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) เรื่อง "แคลคูลัสเบื้องต้น" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	p_H	p_L	p	q	pq
1	15	8	0.72	0.28	0.20
2	11	6	0.53	0.47	0.25
3	14	6	0.63	0.37	0.23
4	13	3	0.50	0.50	0.25
5	12	5	0.53	0.47	0.25
6	14	4	0.56	0.44	0.25
7	14	4	0.56	0.44	0.25
8	15	3	0.56	0.44	0.25
9	15	4	0.59	0.41	0.24
10	12	3	0.47	0.53	0.25
11	11	3	0.44	0.56	0.25
12	11	4	0.47	0.53	0.25
13	14	1	0.47	0.53	0.25
14	15	2	0.53	0.47	0.25
15	9	1	0.31	0.69	0.21
16	12	8	0.63	0.37	0.23
17	9	4	0.41	0.59	0.24
18	7	3	0.31	0.69	0.21
19	14	3	0.53	0.47	0.25
20	15	10	0.78	0.22	0.17

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 14 (ต่อ)

ข้อที่	p_H	p_L	p	q	pq
21	8	3	0.34	0.66	0.22
22	11	4	0.47	0.53	0.25
23	14	3	0.53	0.47	0.25
24	14	3	0.53	0.47	0.25
25	11	2	0.41	0.59	0.24
	—	—	—	—	$\sum pq$ 5.94

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 15 การคำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "แคลคูลัสเบื้องต้น" ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

x	f	fx	fx^2
25	2	50	1250
24	1	24	576
23	3	69	1587
22	2	44	968
21	4	84	1764
20	3	60	1200
19	6	114	2166
18	4	72	1296
17	5	85	1445
16	4	64	1024
15	4	60	900
14	3	42	588
13	2	26	338
12	2	24	288
11	3	33	363
10	2	20	200
9	3	27	243
8	2	16	128
7	1	7	49
6	2	12	72

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 15 (ต่อ)

x	f	fx	fx^2
5	1	5	25
4	1	4	16
	$\Sigma f =$ 60	$\Sigma fx =$ 942	$\Sigma fx^2 =$ 16,486

ก. ค่าความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

$$s_x^2 = \frac{N\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{60(16486) - (942)^2}{60(59)}$$

$$= 28.756$$

ข. ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

$$Kr - 20 : r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma pq}{s_x^2}\right]$$

$$= \frac{25}{24}\left[1 - \frac{5.94}{28.756}\right]$$

$$= 0.826$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 16 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) ปลายภาคเรียนที่ 2 ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	p_H	p_L	p	r
1	4	5	0.59	0.56
2	15	9	0.75	0.38
3	15	10	0.78	0.31
4	13	3	0.50	0.63
5	11	5	0.50	0.38
6	14	3	0.53	0.69
7	14	5	0.59	0.56
8	15	5	0.63	0.63
9	14	4	0.56	0.63
10	12	1	0.41	0.69
11	10	1	0.34	0.56
12	16	6	0.69	0.63
13	14	7	0.66	0.44
14	15	7	0.69	0.50
15	15	6	0.66	0.56
16	12	7	0.59	0.31
17	15	6	0.66	0.56
18	11	5	0.50	0.38
19	13	1	0.44	0.88
20	9	3	0.38	0.38

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 16 (ต่อ)

ข้อที่	p_H	p_L	p	r
21	11	4	0.47	0.44
22	12	7	0.59	0.31
23	8	3	0.34	0.31
24	11	3	0.44	0.50
25	7	3	0.31	0.25
26	13	5	0.56	0.50
27	11	2	0.41	0.56
28	11	3	0.44	0.50
29	14	3	0.53	0.69
30	11	5	0.50	0.38
31	15	4	0.59	0.69
32	14	2	0.50	0.75
33	9	1	0.31	0.50
34	11	1	0.38	0.63
35	12	4	0.50	0.50
36	15	9	0.75	0.38
37	12	5	0.53	0.44
38	13	2	0.47	0.69
39	15	4	0.59	0.69
40	11	2	0.41	0.56

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การหาความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

ตารางที่ 17 อัตราส่วนของผู้ที่ตอบถูก (p) อัตราส่วนของผู้ที่ตอบผิด (q) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) ปลายภาคเรียนที่ 2 ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

ข้อที่	P_H	P_L	p	q	pq
1	14	5	0.59	0.41	0.24
2	15	9	0.75	0.25	0.19
3	15	10	0.78	0.22	0.17
4	13	3	0.50	0.50	0.25
5	11	5	0.50	0.50	0.25
6	14	3	0.53	0.47	0.25
7	14	5	0.59	0.41	0.24
8	15	5	0.63	0.37	0.23
9	14	4	0.56	0.44	0.25
10	12	1	0.41	0.59	0.24
11	10	1	0.34	0.66	0.22
12	16	6	0.69	0.31	0.21
13	14	7	0.66	0.34	0.22
14	15	7	0.69	0.31	0.21
15	15	6	0.66	0.34	0.22
16	12	7	0.59	0.41	0.24
17	15	6	0.66	0.34	0.22
18	11	5	0.50	0.50	0.25
19	13	1	0.44	0.56	0.25
20	9	3	0.38	0.62	0.24

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 17 (ต่อ)

ข้อที่	P_H	P_L	p	q	pq
21	11	4	0.47	0.53	0.25
22	12	7	0.59	0.41	0.24
23	8	3	0.34	0.66	0.22
24	11	3	0.44	0.56	0.25
25	7	3	0.31	0.69	0.21
26	13	5	0.56	0.44	0.25
27	11	2	0.41	0.59	0.24
28	11	3	0.44	0.56	0.25
29	14	3	0.53	0.47	0.25
30	11	5	0.50	0.50	0.25
31	15	4	0.59	0.41	0.24
32	14	2	0.50	0.50	0.25
33	9	1	0.31	0.69	0.21
34	11	1	0.38	0.62	0.24
35	12	4	0.50	0.50	0.25
36	15	9	0.75	0.25	0.19
37	12	5	0.53	0.47	0.25
38	13	2	0.47	0.53	0.25
39	15	4	0.59	0.41	0.24
40	11	2	0.41	0.59	0.24
	—	—	—	—	$\sum pq$ 9.36

ตารางที่ 18 การคำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและค่าความเที่ยงของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014) ภาคเรียนที่ 2 ที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

x	f	fx	fx^2
40	1	40	1600
39	2	78	3042
38	1	38	1444
37	2	74	2738
36	2	72	2592
35	1	35	1225
34	1	34	1156
33	3	99	3267
32	2	64	2048
31	3	93	2883
30	2	60	1800
29	2	58	1682
28	3	84	2352
27	4	108	2916
26	2	52	1352
25	1	25	625
24	2	48	1152
23	4	92	2116
22	2	44	968
21	5	105	2205
20	4	80	1600

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 18)ต่อ)

x	f	fx	fx^2
19	2	38	722
18	1	18	324
17	2	34	578
16	1	16	256
15	1	15	225
14	1	14	196
13	1	13	169
12	1	12	144
10	1	10	100
	$\sum f=$ 60	$\sum fx$ 1,553	$\sum fx^2$ 43,477

ก. ค่าความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดลอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 014)

$$S_x^2 = \frac{N\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{60(43477) - (1553)^2}{60(59)}$$

$$= 55.596$$

ข. ค่าความเที่ยงของแบบทดลอบที่ได้คัดเลือกไว้แล้ว

$$Kr - 20 : r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma pq}{s_x^2}\right]$$

$$= \frac{40}{39}\left[1 - \frac{9.36}{55.596}\right]$$

$$= 0.853$$

ประวัติผู้วิจัย

นางสาวพนิดา พิสิฐอมรชัย เกิดเมื่อวันที่ 5 สิงหาคม พ.ศ. 2497 สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สาขาการสอนคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษา ปีการศึกษา 2521 เข้าศึกษาต่อในสาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2525 ปัจจุบันเป็นอาจารย์โรงเรียนเทพศิรินทร์ กรุงเทพมหานคร

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย