บทที่ 5
การหาแรงที่กระทำเป็นจุด

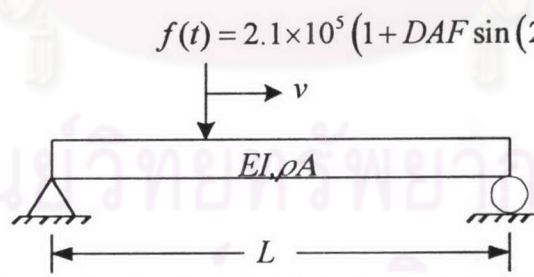
ในบทนี้จะทำการหาแรงที่กระทำเป็นจุดหนึ่งจุด ซึ่งเคลื่อนที่อยู่บนคานที่มีจุดรองรับเป็นแบบธรรมดา ด้วยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงและวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งการประมวลผลของทั้งสองวิธีจะใช้โปรแกรม MATLAB ในการประมวลผล โดยจะทำการศึกษาถึงผลของความเร็วและผลของพลศาสตร์ หลังจากนั้นนำผลที่ได้จากทั้งสองวิธีมาเปรียบเทียบกัน ซึ่งการเปรียบเทียบจะแบ่งออกเป็น

1. การเปรียบเทียบกับแรงจริงทางสถิต
2. การเปรียบเทียบกับแรงจริงทางพลศาสตร์

5.1 การสร้างสัญญาณความเครียดจากแรงที่กระทำเป็นจุด

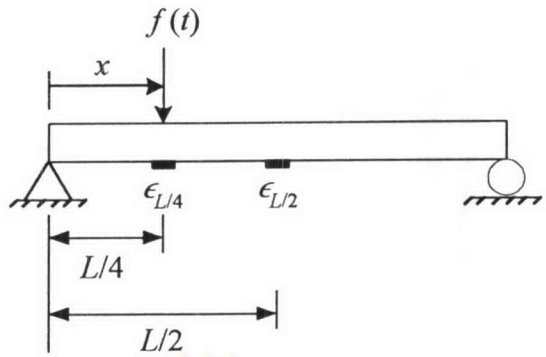
กำหนดให้แรงที่กระทำเป็นจุด $f(t)$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ v ไปบนคานที่มีจุดรองรับเป็นแบบธรรมดาดังรูปที่ 5.1 ซึ่งคานมีคุณสมบัติต่างๆดังนี้ L = 35 เมตร, EI = 1.71x10^{10} นิวตัน.เมตร^2, ρA = 2745 กิโลกรัม/เมตร, ω_1 = 20.1 Hz, ω_2 = 80.4 Hz, ω_3 = 180.9 Hz (ω_i คือ ความถี่เชิงมุมของการสั่นไหวของคานในโหมดที่ i) $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ = 0.01 (ξ_i คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดที่ i) และระยะจากแนวแกนสะเทินถึงท้องคานเท่ากับ 1.1 เมตร

ค่า DAF (ค่าที่ทำให้เกิดผลทางด้านพลศาสตร์) ที่ใช้มีค่าต่างๆดังนี้คือ 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 และ0.30 ส่วนความเร็วที่แรง $f(t)$ เคลื่อนที่มีค่าตั้งแต่ 1, 5, 10, 15, 20, 25 และ30 เมตร/วินาที



รูปที่ 5.1 แรงกระทำเป็นจุด 1 จุดวิ่งอยู่บนคานที่มีจุดรองรับแบบธรรมดาด้วยความเร็วคงที่

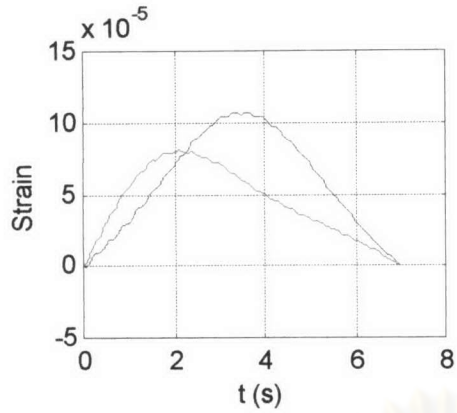
จากการวิเคราะห์เชิงโหมดในลักษณะคล้ายกับสมการที่ (2.1)-(2.11) โดยพิจารณาคานใน 2 มิติ จะสามารถหาการสั่นไหวของคานที่ตำแหน่งใดๆ ได้ แล้วหาสัญญาณความเครียดที่ตำแหน่งใดๆ ของคานจากสมการที่ (2.43) ซึ่งสัญญาณความเครียดที่นำมาใช้เป็นข้อมูลในการหาแรงจะใช้สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$ และ $L/4$ ของสะพานดังรูปที่ 5.2



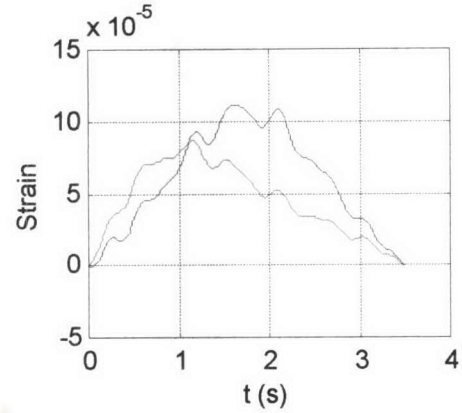
รูปที่ 5.2 ตำแหน่งของสัญญาณความเครียดที่ระยะ $L/2$ และ $L/4$ ของสะพาน

สัญญาณความเครียดที่ใช้จะถูกแบ่งช่วงของข้อมูลออกเป็น 500 ช่วงเท่ากันๆ ไม่ว่าความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่จะมีค่าเท่าใดก็ตาม นั่นคือจะมีสัญญาณความเครียดเมื่อแรงอยู่บนคานทุกๆระยะ 35/500 เมตร (ทุกๆ ระยะ 7 เซนติเมตร) จากรูปที่ 5.3 แสดงสัญญาณความเครียดเนื่องจากแรง $f(t)$ ที่ความเร็วและค่า DAF ต่างๆ กัน โดยที่ความเร็ว 15 เมตร/วินาทีจะเกิดปรากฏการณ์เรโซแนนซ์ (resonance) ขึ้นจึงทำให้สัญญาณความเครียดที่ความเร็วดังกล่าวมีลักษณะเช่นนั้น

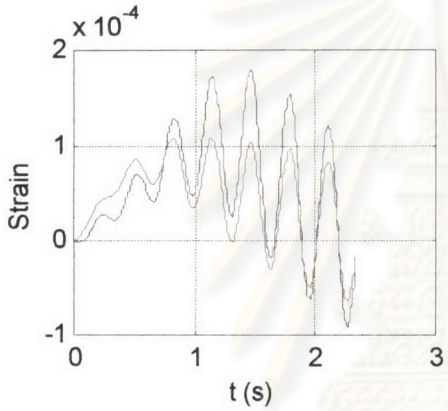
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



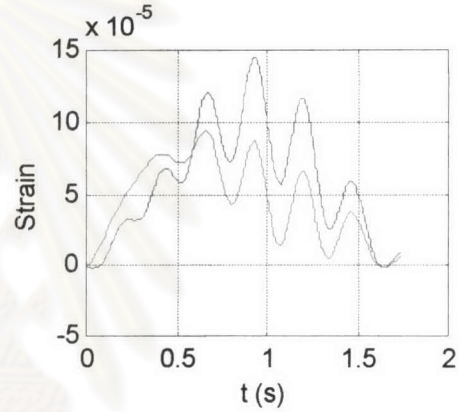
(ก) $v = 5\ m/s, DAF = 0$



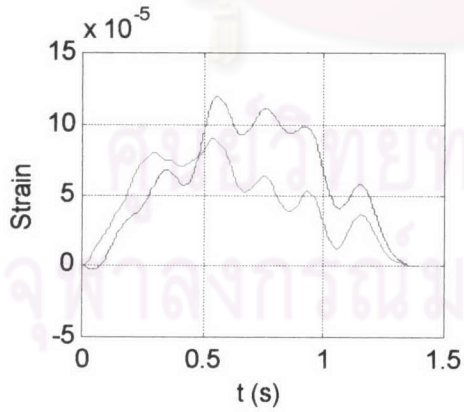
(ข) $v = 10\ m/s, DAF = 5$



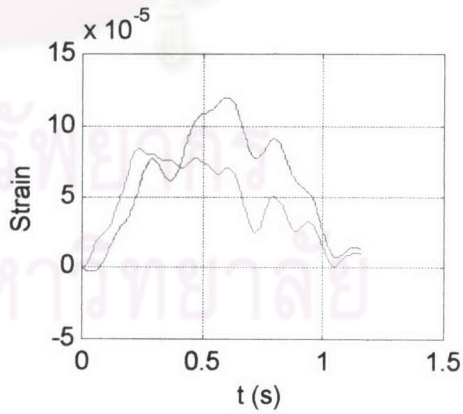
(ค) $v = 15\ m/s, DAF = 10$



(ง) $v = 20\ m/s, DAF = 15$



(จ) $v = 25\ m/s, DAF = 20$



(ฉ) $v = 30\ m/s, DAF = 25$

รูปที่ 5.3 สัญญาณความเครียดเนื่องจากแรง $f(t)$ ที่ความเร็วและค่า DAF ต่างๆ กัน
(—— สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$, —— สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/4$)

5.2 การหาแรงโดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง

หลังจากได้สัญญาณความเครียดในหัวข้อที่ 5.1 แล้ว นำข้อมูลดังกล่าวมาหาแรงด้วยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง ซึ่งใช้แบบจำลองที่เป็นชิ้นส่วนคาน (beam element) ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 โดยแบ่งคานออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และมีระดับขั้นความเสรี (n) เท่ากับ 14

การคำนวณหาแรงจะทำตามขั้นตอนต่างๆ ตามหัวข้อที่ 4.9 โดยมีค่า $\mathbf{Z}_j, \mathbf{Q}, \mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ดังนี้

$$\mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{L/2,j} \\ \varepsilon_{L/4,j} \end{bmatrix}_{2\times 1}; \; j = 1,2,...,500 \tag{5.1}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{2\times 28} \tag{5.2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{I}; \; \lambda = 0.2\times 10^{-20} \tag{5.4}$$

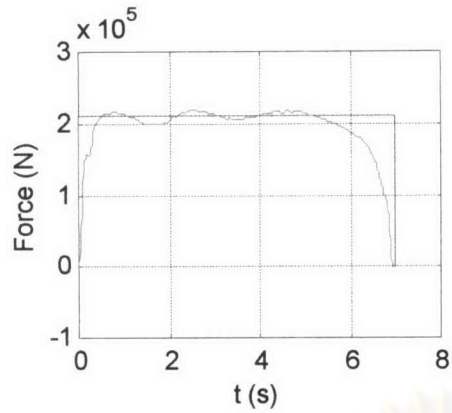
โดยที่ $\varepsilon_{L/2,j}$ คือ สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$ ของข้อมูลที่ j

$\varepsilon_{L/4,j}$ คือ สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/4$ ของข้อมูลที่ j

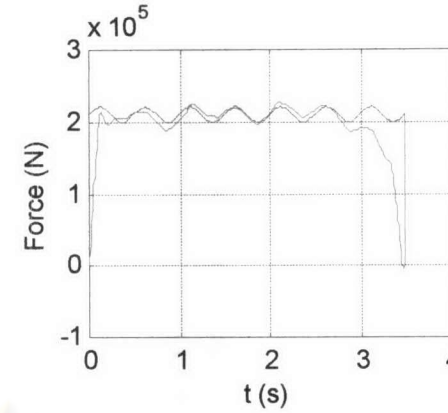
$\mathbf{Q}$ คือ เมตริกซ์ที่เชื่อมโยงระหว่างสัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$ และ $L/4$ กับตัวแปรหลัก มีมิติ 2x28

$\mathbf{I}$ คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ มีมิติ 1x1

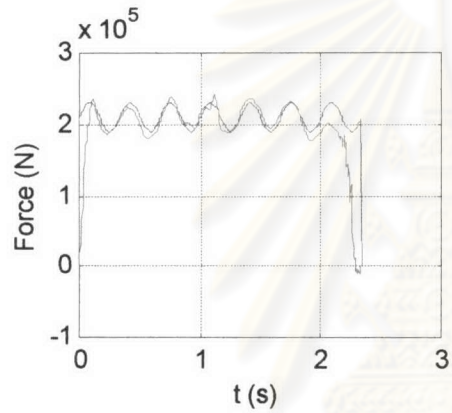
จากรูปที่ 5.4 ซึ่งแสดงแรงที่หาได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงเมื่อเปรียบเทียบกับแรงจริง โดยที่ความเร็ว 15 เมตร/วินาที สัญญาณความเครียดจะเกิดปรากฏการณ์เรโซแนนซ์ขึ้น แต่แรงที่หาได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมที่ความเร็วดังกล่าวก็ไม่มีผลแต่อย่างใด นั่นคือไม่ว่าผลของพลศาสตร์จะมีค่ามากหรือน้อยเพียงใดก็ตามแรงที่หาได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงก็จะยังคงใกล้เคียงกับแรงจริงเสมอ



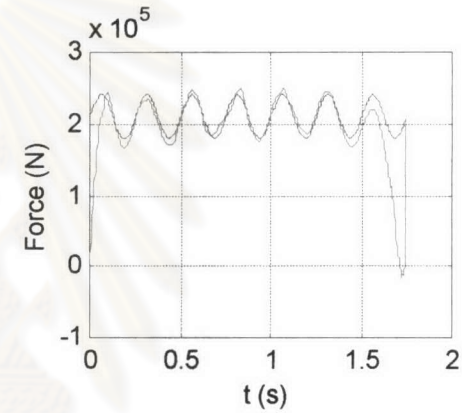
(ก) $v = 5\ m/s, DAF = 0$



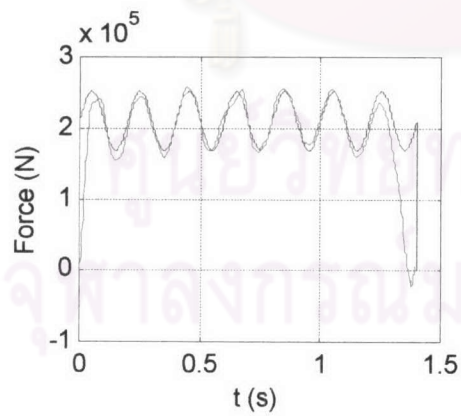
(ข) $v = 10\ m/s, DAF = 5$



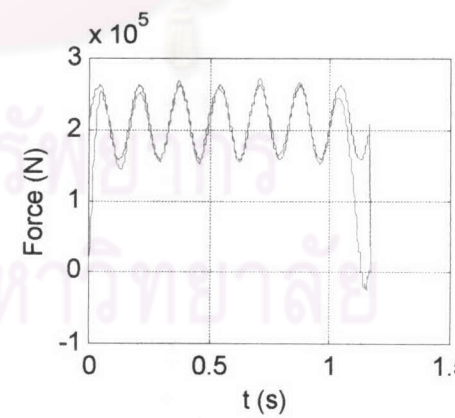
(ค) $v = 15\ m/s, DAF = 10$



(ง) $v = 20\ m/s, DAF = 15$



(จ) $v = 25\ m/s, DAF = 20$

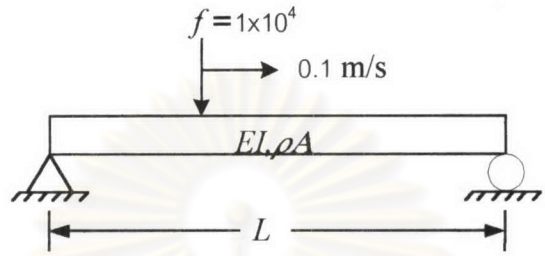


(ฉ) $v = 30\ m/s, DAF = 25$

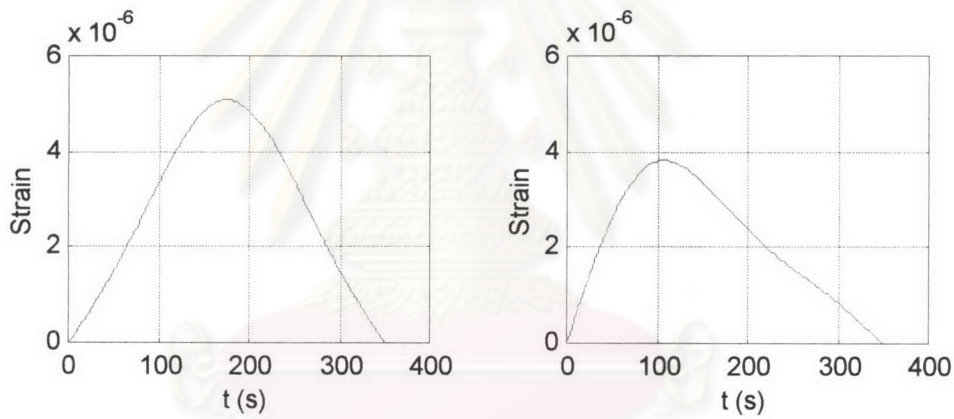
รูปที่ 5.4 แรงที่หาได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงเมื่อเปรียบเทียบกับแรงจริงที่ความเร็วและค่า *DAF* ต่างๆ กัน (—— แรงจริง, —— แรงที่หาได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง)

5.3 <u>การหาแรงโดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด</u>

กำหนดให้แรง f ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1x10^4 นิวตัน เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ 0.1 เมตร/วินาที ไปบนคานที่มีจุดรองรับเป็นแบบธรรมดาดังรูปที่ 5.5 และคานมีคุณสมบัติต่างๆ เหมือนกับคานในหัวข้อ 5.1 แล้วหาค่าความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$ และ $L/4$ โดยวิธีการเหมือนกับหัวข้อ 5.1 ซึ่งจะได้สัญญาณความเครียด ดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.5 แรง 1x10^4 นิวตัน วิ่งอยู่บนคานที่มีจุดรองรับแบบธรรมดาด้วยความเร็ว 0.1 เมตร/วินาที



(ก) สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$ (ข) สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/4$

รูปที่ 5.6 สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$ และ $L/4$ เนื่องจาก แรง 1x10^4 นิวตัน วิ่งอยู่บนคานที่มีจุดรองรับเป็นแบบธรรมดาด้วยความเร็ว 0.1 เมตร/วินาที

เช่นเดียวกันสัญญาณความเครียดที่ได้นี้ จะถูกแบ่งช่วงของข้อมูลออกเป็น 500 ช่วงเท่าๆกัน ดังนั้นจำนวนข้อมูลของสัญญาณความเครียดที่ได้จากหัวข้อ 5.3 จะเท่ากับจำนวนข้อมูลของสัญญาณความเครียดที่ได้จากหัวข้อ 5.1 หลังจากนั้นคำนวณแรงโดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด ดังสมการที่ (5.5) และ (5.6)

$$Error = \min_{k} \sum_{j=1}^{500} \left[\left(\varepsilon_{L/2,j} - k\varepsilon'_{L/2,j} \right)^2 + \left(\varepsilon_{L/4,j} - k\varepsilon'_{L/4,j} \right)^2 \right] \quad (5.5)$$

$$F_L = k \times 10^4 \quad (5.6)$$

โดยที่ $\varepsilon'_{L/2,j}$ คือ สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/2$ ของช่วงข้อมูลที่ j เนื่องจากแรง f ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1x10^4 นิวตัน (รูปที่ 5.6 (ก))

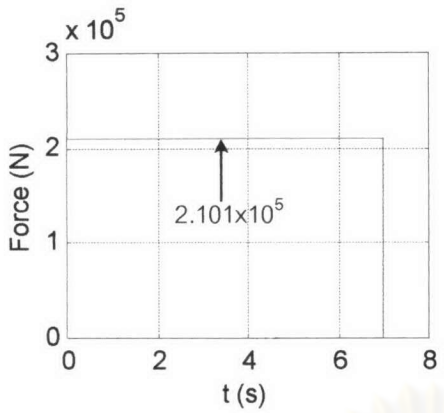
$\varepsilon'_{L/4,j}$ คือ สัญญาณความเครียดที่ตำแหน่ง $L/4$ ของช่วงข้อมูลที่ j เนื่องจากแรง f ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1x10^4 นิวตัน (รูปที่ 5.6 (ข))

k คือ ค่าที่ทำให้ $Error$ ในสมการ (5.4) มีค่าน้อยที่สุด

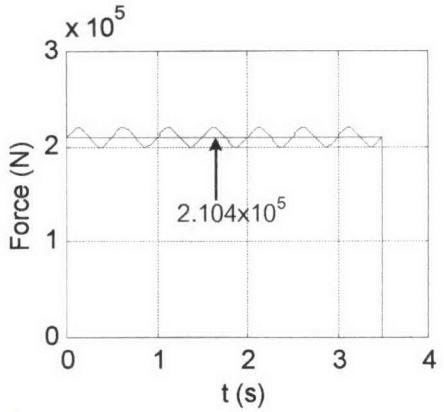
F_L คือ แรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด หน่วยเป็น นิวตัน

จากสมการที่ (5.5) และ (5.6) จะได้ F_L ซึ่งเป็นแรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดซึ่งมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามโดเมนของเวลา แสดงได้ดังรูปที่ 5.7 โดยที่เมื่อผลของพลศาสตร์มีน้อยมากหรือไม่มีเลยแรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดจะมีค่าใกล้เคียงหรือเท่ากับแรงจริง แต่เมื่อผลของพลศาสตร์เริ่มมีค่ามากขึ้น แรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดจะแตกต่างจากแรงจริงมากยิ่งขึ้น

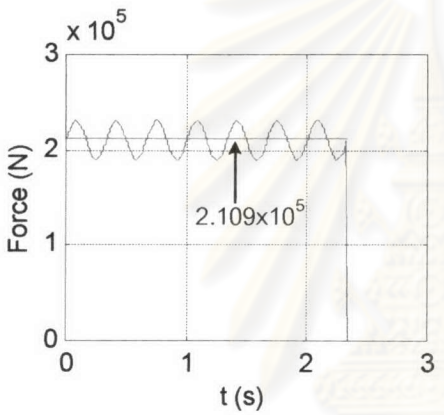
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



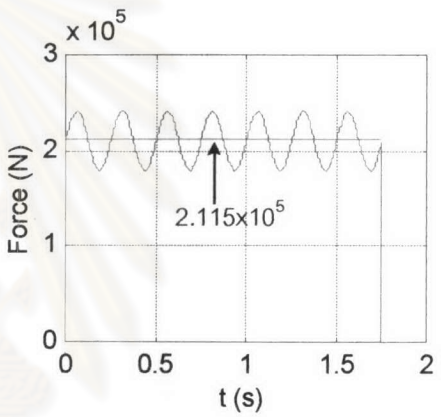
(ก) $v = 5\ m/s, DAF = 0$



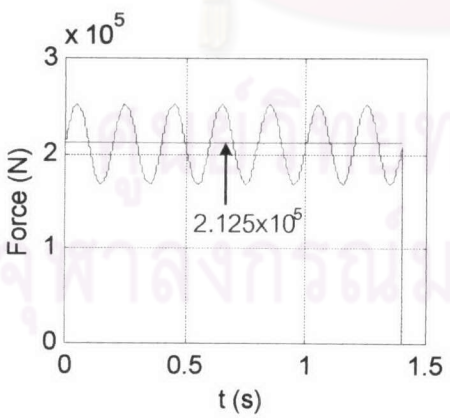
(ข) $v = 10\ m/s, DAF = 5$



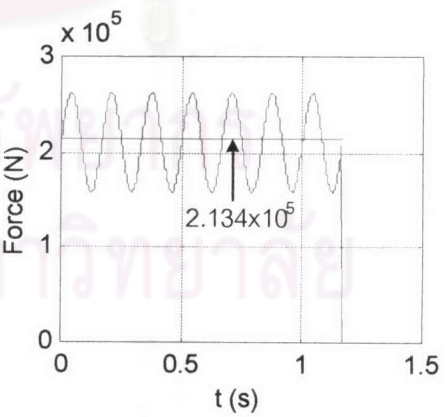
(ค) $v = 15\ m/s, DAF = 10$



(ง) $v = 20\ m/s, DAF = 15$



(จ) $v = 25\ m/s, DAF = 20$



(ฉ) $v = 30\ m/s, DAF = 25$

รูปที่ 5.7 แรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับแรงจริงที่ความเร็วและค่า DAF ต่างๆ กัน
(—— แรงจริง, —— แรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด)

5.4 การเปรียบเทียบแรงที่หาได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงและวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด

แรงที่หาได้จากทั้งสองวิธีจะถูกนำมาเปรียบเทียบกับแรงจริงทั้งทางสถิตและทางพลศาสตร์ เพื่อหาความคลาดเคลื่อนของแต่ละวิธีเมื่อพิจารณาผลของความเร็วและผลของพลศาสตร์

5.4.1 การเปรียบเทียบกับแรงจริงทางสถิต

แรงที่หาได้จากวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงจะเป็นแรงทางพลศาสตร์ ดังนั้นเพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับแรงทางสถิต จึงทำการหาค่าเฉลี่ยของแรงดังกล่าว ซึ่งจากรูปที่ 5.4 จะพอสังเกตได้ว่าช่วงกลางของข้อมูลจะมีความใกล้เคียงกับแรงจริงมากที่สุด ดังนั้นในการหาค่าเฉลี่ยจึงใช้ข้อมูลที่ 101 จนถึงข้อมูลที่ 400 (รวมทั้งหมด 300 ข้อมูล) ในการหาค่าเฉลี่ย ส่วนแรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดจะเปรียบได้กับแรงทางสถิตอยู่แล้วดังนั้นจึงไม่ทำการหาค่าเฉลี่ย ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนของทั้ง 2 วิธีสามารถนิยามได้ดังนี้

$$E_{s,D} = \frac{\left|F_D - 2.1\times10^5\right|}{2.1\times10^5}\times100\% \tag{5.7}$$

$$E_{s,L} = \frac{\left|F_L - 2.1\times10^5\right|}{2.1\times10^5}\times100\% \tag{5.8}$$

โดยที่ $E_{s,D}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของแรงรวมทางสถิตโดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง

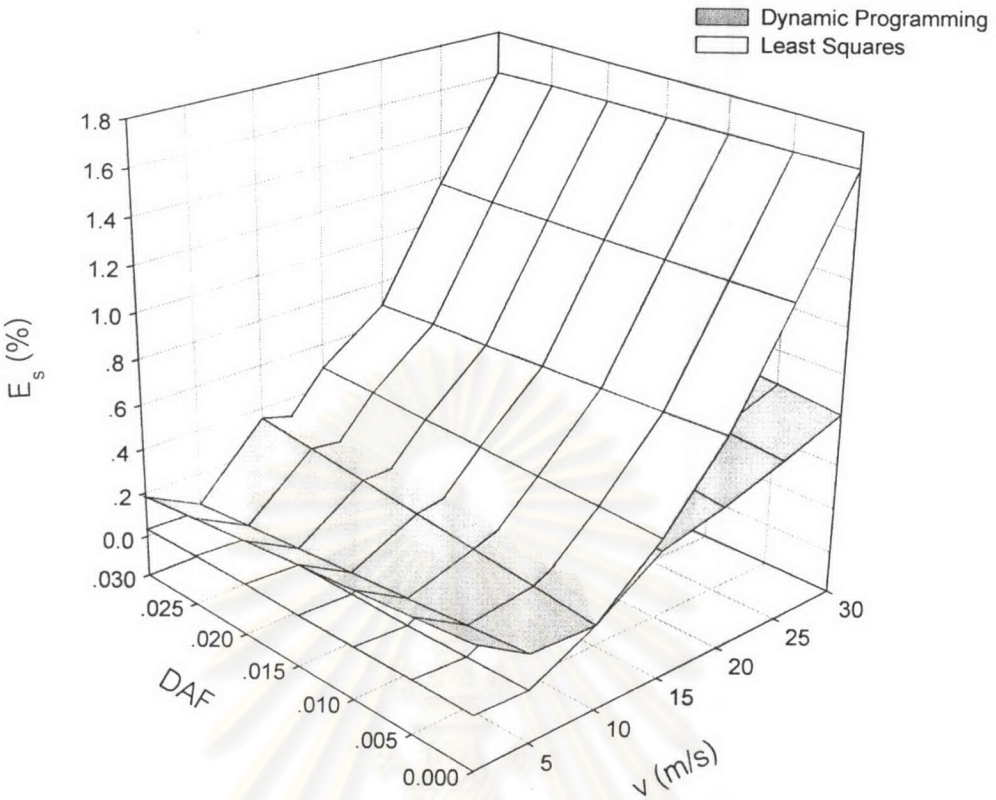
$E_{s,L}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของแรงรวมทางสถิตโดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด

F_D คือ แรงที่ได้จากการเฉลี่ยของข้อมูลที่ 101 ถึงข้อมูลที่ 400 จากวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง

F_L คือ แรงที่หาได้จากวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด

จากรูปที่ 5.8 จะเห็นได้ว่าเมื่อความเร็วมีค่ามากขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อเปรียบเทียบกับแรงจริงทางสถิตของทั้งสองวิธีจะมีค่าสูงขึ้นและโดยส่วนใหญ่ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงจะต่ำกว่าของวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด

จากการพิจารณาในช่วงที่ความเร็วมีค่าน้อย (1 ถึง10 เมตร/วินาที) ไม่ว่า DAF จะมีค่าเท่าใดก็ตามลักษณะของสัญญาณความเครียดจะยังคงมีลักษณะคล้ายกับสัญญาณความเครียดแบบรูปที่ 5.6 ซึ่งทำให้การหาแรงทางสถิตโดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดมีความใกล้เคียงกับแรงจริงทางสถิตมากกว่าวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง แต่เมื่อความเร็วมีค่ามากขึ้น (10 ถึง30 เมตร/วินาที) ลักษณะของสัญญาณความเครียดจะเริ่มต่างไปจากสัญญาณความเครียดแบบรูปที่ 5.6 มากขึ้น จึงทำให้การหาแรงทางสถิตโดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดมีความแตกต่างจากแรงจริงทางสถิตมากกว่าของวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง



รูปที่ 5.8 ค่าความคลาดเคลื่อนของแรงรวมทางสถิตโดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงและวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด ที่ความเร็วและค่า DAF ต่างๆกัน

5.4.2 <u>การเปรียบเทียบกับแรงจริงทางพลศาสตร์</u>

ในการหาความคลาดเคลื่อนของแรงทางพลศาสตร์ จะใช้ข้อมูลที่ 101 จนถึงข้อมูลที่ 400 (รวมทั้งหมด 300 ข้อมูล) ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนของทั้ง 2 วิธีสามารถนิยามได้ดังนี้

$$E_{d,D} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=101}^{400}\left(F_{real,i} - F_{iden,i}\right)^2\right)/300}}{2.1\times10^5}\times100\% \qquad (5.9)$$

$$E_{d,L} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=101}^{400}\left(F_{real,i} - F_{L}\right)^2\right)/300}}{2.1\times10^5}\times100\% \qquad (5.10)$$

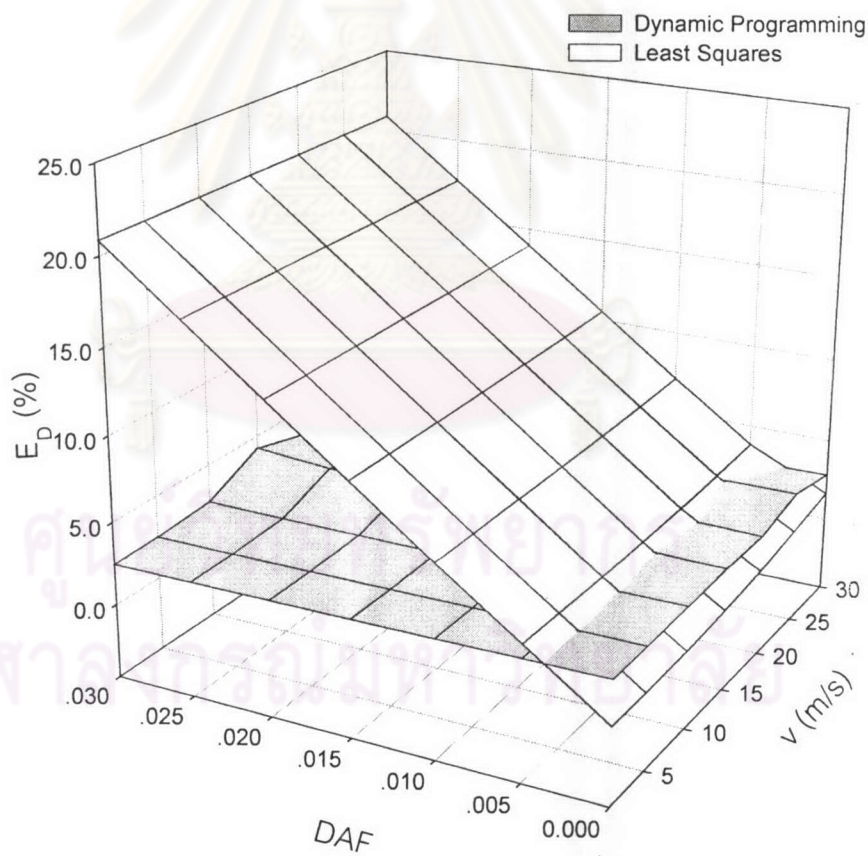
โดยที่ $E_{d,D}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของแรงทางพลศาสตร์โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง

$E_{d,L}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของแรงทางพลศาสตร์โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด

$F_{real,i}$ คือ แรงจริงของรถ ณ ข่วงข้อมูลที่ i

$F_{iden,i}$ คือ แรงที่ทายได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง ณ ข่วงข้อมูลที่ i

จากรูปที่ 5.9 จะเห็นได้ว่าโดยส่วนใหญ่ค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อเปรียบเทียบกับแรงทางพลศาสตร์ของวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงจะต่ำกว่าของวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด และจะมีค่าอยู่ในช่วง 2.5%-4% ซึ่งอยู่ในช่วงแคบๆทั้งนี้เพราะแรงที่หาได้โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงจะเป็นแรงทางพลศาสตร์และมีความใกล้เคียงกับแรงจริงทางพลศาสตร์มาก ในขณะที่ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด จะอยู่ในช่วงตั้งแต่ 0.05% ไปจนถึง 21% ซึ่งมีความแตกต่างอย่างมาก ทั้งนี้เพราะแรงที่หาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดจะเป็นแรงทางสถิตเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับแรงจริงทางพลศาสตร์จึงมีความแตกต่างกันมากโดยเฉพาะที่ DAF สูงๆ ผลของพลศาสตร์ก็จะมีมากทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดก็จะยิ่งมีค่ามาก



รูปที่ 5.9 ค่าความคลาดเคลื่อนของแรงรวมทางพลศาสตร์โดยวิธีไดนามิคโปรแกรมมิงและวิธียกกำลังสองน้อยที่สุดที่ความเร็วและค่า DAF ต่างๆกัน