

บทที่ 4 การหาน้ำหนักรถที่กำลังเคลื่อนที่

แรงที่กระทำซึ่งกันและกันระหว่างรถกับสะพานเป็นข้อมูลที่สำคัญสำหรับการออกแบบสะพาน เพราะจะนำมาใช้ในการพิจารณาหาน้ำหนักบรรทุกจร (live load) ที่ใช้ในมาตรฐานของการออกแบบสะพาน การวัดแรงดังกล่าวโดยตรงด้วยการใช้เครื่องมือที่ติดตั้งไว้กับรถจะเสียค่าใช้จ่ายสูงและมีความลำเอียง (bias) ในการเก็บข้อมูล ในขณะที่ผลที่ได้จากการคำนวณจากการจำลองรูปแบบก็มีความผิดพลาดเนื่องจากแบบจำลองที่คลาดเคลื่อน การรวมผลของตัวแปรต่าง ๆ เข้าไปในแบบจำลองจะทำให้การคำนวณมีค่าใช้จ่ายสูง ระบบต่าง ๆ ที่ได้พัฒนาขึ้นมาสำหรับ "Weight-In-Motion" นั้นจะวัดเฉพาะน้ำหนักรถทางสถิตเท่านั้น เทคนิคที่ใช้ในการหาน้ำหนักรถจากปฏิกิริยาตอบสนองของการสั่นไหวของสะพานนั้นจึงมีความจำเป็น โดยตัวแปรต่างๆ ของสะพานและของรถจะถูกนำมาคิดรวมด้วยสำหรับปฏิกิริยาตอบสนองที่ถูกวัด ซึ่งค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับวิธีนี้จะมีค่าน้อยกว่าการวัดโดยตรง

งานวิจัยต่างๆ ในปัจจุบันที่เกี่ยวข้องกับการหาน้ำหนักรถที่กำลังเคลื่อนที่ จะมีวิธีการหลัก ๆ ที่ใช้กันอยู่ 3 วิธีคือ

1. วิธีโดเมนของเวลา (Time Domain Method) เป็นการจำลองรูปแบบโครงสร้างและแรง ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง โดยที่แรงจะถูกจำลองให้เป็นฟังก์ชันที่เป็นขั้น (step functions) ในช่วงเวลาเล็กๆ สมการการเคลื่อนที่นี้จะแสดงในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมด (modal coordinate) และจะทำการแก้สมการในโดเมนของเวลา ซึ่งแรงจะสามารถหาได้โดยการให้หลักของซูเปอร์โพสิชันที่เชิงโหมด (modal superposition principle)

2. วิธีโดเมนของความถี่และเวลา (Frequency and Time Domain Method) ทำการแปลงเชิงฟูรีเยอร์ (Fourier transforms) ในสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมดเช่นเดียวกัน การแปลงเชิงฟูรีเยอร์ของปฏิกิริยาตอบสนองและของแรงจะถูกเชื่อมโยงอยู่ในโดเมนของความถี่ ซึ่งแรงจะสามารถหาได้โดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด

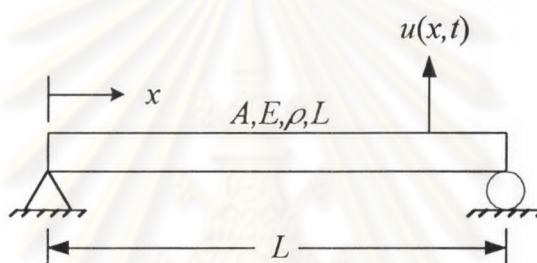
3. วิธีเชิงโหมด (Modal Approach) เป็นการหาแรงในพิกัดเชิงโหมด การกระจัดที่วัดได้จะถูกเปลี่ยนเป็นการกระจัดเชิงโหมด (modal displacement) โดยทำการสมมติฟังก์ชันพื้นฐาน (shape function) ซึ่งความเร็วเชิงโหมด (modal velocities) และความเร่งเชิงโหมด (modal acceleration) สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ของการกระจัดเชิงโหมด หลังจากนั้นจะหาแรงโดยทำการแก้สมการในพิกัดเชิงโหมด

ทั้ง 3 วิธีที่กล่าวถึงนี้ต้องทำการคำนวณเกี่ยวกับเมตริกซ์ผกผัน (matrix inverse) ซึ่งจะเกิดสภาวะบกพร่อง (ill-conditioned) ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของแกนเวลา

ในงานวิจัยครั้งนี้จะทำการหาแรงที่กำลังเคลื่อนที่โดยการใช้วิธีการของไดนามิกโปรแกรมมิ่ง (dynamic programming) ซึ่งสามารถหาแรงได้ในโดเมนของเวลาจากการใช้สูตรซ้ำ (recursive formula) โดยมีสมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณดังนี้

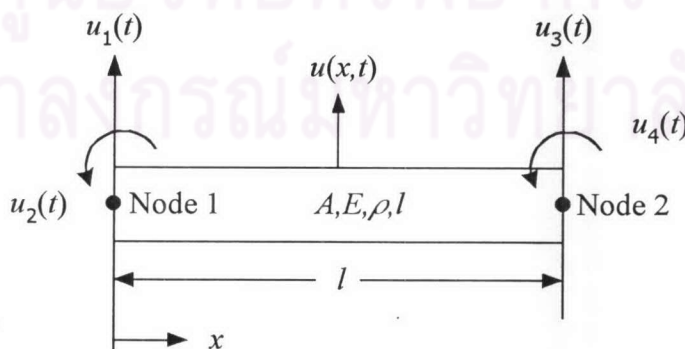
1. การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของระบบ เช่น สติฟเนส, ความหน่วง และมวล ภายใต้แรงภายนอกจะไม่นำมาพิจารณา
2. ความหน่วงของโครงสร้างจะถูกนำมาวิเคราะห์ในการคำนวณ
3. โครงสร้างไม่จำเป็นจะต้องอยู่ในสภาวะหยุดนิ่งก่อนที่จะมีแรงภายนอกมากกระทำ
4. ใช้แบบจำลองคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli beam) โดยไม่คิดผลของแรงเฉือน

4.1 การจำลองรูปแบบคาน



รูปที่ 4.1 แบบจำลองคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลี

เราจะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการจำลองรูปแบบคาน ซึ่งแสดงดังรูปที่ 4.2 โดยที่ A คือ พื้นที่หน้าตัดของคาน E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของคาน ρ คือ มวลต่อหน่วยความยาวของคาน L คือ ความยาวของคาน ซึ่งแต่ละชิ้นส่วนของคานจะประกอบด้วย 2 ขั้ว (node) และแต่ละขั้วของชิ้นส่วนของคานจะมี 2 ระดับขั้นความเร็วคือ การกระจัดในแนวตั้ง และการกระจัดในการหมุน



รูปที่ 4.2 แบบจำลองชิ้นส่วนของคาน

การกระจัดในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคานที่ระยะทาง x และ เวลา t ใดๆ จะต้องสอดคล้องตาม

สมการ (4.1)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (4.1)$$

สำหรับในกรณี EI มีค่าคงที่ สมการ (4.1) จะกลายเป็น $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0$ ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้เป็น

$$u(x,t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) \quad (4.2)$$

โดยที่ $c_i(t)$ คือ ค่าคงที่ของการอินทิเกรต

สมการ (4.2) สามารถใช้ในการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคานได้ ซึ่งมีเงื่อนไขที่ขอบ (boundary condition) ดังนี้

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1(t) & u(l,t) &= u_3(t) \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u_2(t) & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= u_4(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้น เมื่อแทนลงในสมการ (4.2) จะสามารถหาค่าคงที่ของการอินทิเกรตได้ คือ

$$c_4(t) = u_1(t)$$

$$c_3(t) = u_2(t)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{l^2} [3(u_3 - u_1) - l(2u_2 + u_4)]$$

$$c_1(t) = \frac{1}{l^3} [2(u_1 - u_3) - l(u_2 + u_4)] \quad (4.4)$$

แทนสมการ (4.4) ลงในสมการ (4.2) และทำการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในพจน์ของการกระจัดที่ขั้ว (nodal displacement) จะได้สมการการกระจัดของชิ้นส่วนคานที่ระยะ x และเวลา t ใดๆ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = & \left[1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right] u_1(t) + l \left[\frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right] u_2(t) \\
 & + \left[\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right] u_3(t) + l \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right] u_4(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ที่อยู่ข้างหน้า $u_i(t)$ คือฟังก์ชันพื้นฐาน (shape function) ของการกระจัดของชิ้นส่วนคาน

เมตริกซ์มวล (mass matrix) ของชิ้นส่วนคานสามารถคำนวณได้จากการแทนสมการ (4.5) ลงไปในสมการของพลังงานจลน์

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx
 \tag{4.6}$$

และสมการ (4.6) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้ คือ

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}
 \tag{4.7}$$

โดยที่ \mathbf{M} คือ เมตริกซ์มวล (mass matrix) และเวกเตอร์ $\dot{\mathbf{u}}$ คืออนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\mathbf{u}(t)$ เทียบกับเวลาซึ่งเวกเตอร์ $\mathbf{u}(t)$ สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}
 \tag{4.8}$$

หลังจากทำการอินทิเกรตและจัดรูปแบบเวกเตอร์ของการกระจัดที่ข้อ (nodal displacement) จะได้เมตริกซ์มวลสำหรับชิ้นส่วนคานดังนี้

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}
 \tag{4.9}$$

ในการทำงานเดียวกันเมตริกซ์สติฟเนสสามารถหาได้จากการแทนสมการ (4.5) ลงในสมการพลังงานความเครียด (strain energy) ซึ่งกำหนดโดย

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (4.10)$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.11)$$

โดยที่ \mathbf{u} ได้กำหนดไว้ข้างต้น ดังนั้นเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนคาน คือ

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

เมื่อได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วนคานแล้ว ทำการรวมชิ้นส่วนคานแต่ละชิ้นส่วนเข้าด้วยกันตามระดับชั้นความเร็วที่ตรงกัน ซึ่งจะได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสของระบบ

4.2 การหาเมตริกซ์ความหน่วง (damping matrix) ของระบบ

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (4.13)$$

เมื่อเรานำ \mathbf{M}^{-1} คูณตลอดสมการ (4.13) จะได้

$$\ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} = 0 \quad (4.14)$$

โดยที่ $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

กำหนดให้
$$u = Vq \tag{4.15}$$

โดยที่ V คือ เวกเตอร์เฉพาะจริง (eigenvector) ของเมตริกซ์ \bar{K}

แทนสมการ (4.15) ลงใน (4.14) และคูณตลอดด้วย V^{-1} จะได้

$$I\ddot{q} + V^{-1}\bar{C}V\dot{q} + V^{-1}\bar{K}Vq = 0 \tag{4.16}$$

$$I\ddot{q} + C^*\dot{q} + K^*q = 0 \tag{4.17}$$

โดยที่

$$C^* = V^{-1}\bar{C}V$$

$$= \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$K^* = V^{-1}\bar{K}V$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

ξ_i คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดที่ i

ω_i คือ ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโหมดที่ i

เมื่อเราทราบค่า ξ_i และ ω_i แล้ว ก็จะสามารถหาเมตริกซ์ \bar{C} และ C^* ได้ ดังนี้

$$\bar{C} = VC^*V^{-1} \tag{4.20}$$

$$C = M\bar{C} \tag{4.21}$$

4.3 การหาแรงที่ข้อจากแรงภายนอกที่มากกระทำ

เมื่อมีแรงภายนอก f มากกระทำบนชิ้นส่วนคาน 2 มิติ ที่มีความยาวเท่ากับ l ระหว่างข้อที่ i กับข้อที่ $i+1$ ที่ระยะ x จากปลายซ้ายดังรูปที่ 4.3 แรงที่ข้อที่แต่ละปลายของชิ้นส่วนคานสามารถแสดงได้ดังนี้

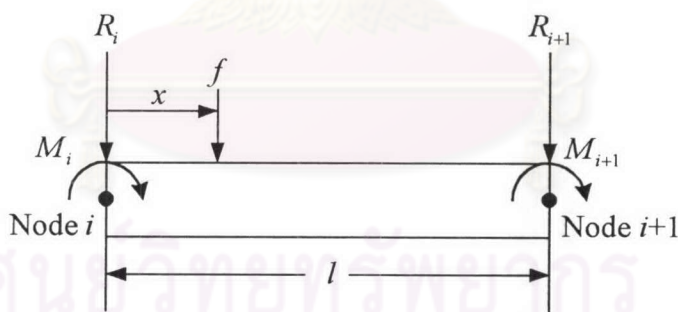
$$R_i = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) f$$

$$M_i = \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l}\right) f$$

$$R_{i+1} = \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) f$$

$$M_{i+1} = \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\right) f \quad (4.22)$$

โดยที่ R_i, R_{i+1} คือ แรงที่ข้อในแนวตั้ง ของข้อที่ i และ $i+1$ ของโครงสร้างตามลำดับ
 M_i, M_{i+1} คือ โมเมนต์ตัดของข้อที่ i และ $i+1$ ของโครงสร้างตามลำดับ



รูปที่ 4.3 แรงที่ข้อเนื่องจากแรงภายนอกที่มากกระทำ

แรงที่ข้อดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ของแรงในพิกัดทั่วไป (global force vector) ได้ คือ

$$\mathbf{P} = \mathbf{Y}(x)f \quad (4.23)$$

โดยที่ \mathbf{P} คือ เวกเตอร์ของแรงที่ข้อ (nodal force vector)
 $\mathbf{Y}(x)$ คือ เวกเตอร์ที่ตำแหน่งของแรงที่กระทำ

สำหรับกรณีของแรงภายนอกหลายแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนคาน เวกเตอร์ของแรงในทิศทางที่ไปที่เกิดขึ้นจากแรงที่ i สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Y}(x_i) f_i \quad (4.24)$$

4.4 การสร้างสมการการเคลื่อนที่

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของระบบพลศาสตร์ที่มี n ระดับขั้นความเสรี จะเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (4.25)$$

โดยที่

- \mathbf{u} คือ เวกเตอร์การกระจัดของแบบจำลอง
- $\dot{\mathbf{u}}$ คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ \mathbf{u} เทียบกับเวลา t
- \mathbf{M} คือ เมตริกซ์มวลของระบบ (system mass matrix)
- \mathbf{C} คือ เมตริกซ์ความหน่วงของระบบ (system damping matrix)
- \mathbf{K} คือ เมตริกซ์สติฟเนสของระบบ (system stiffness matrix)
- \mathbf{P} คือ แรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและขนาดของแรงภายนอกที่มากระทำดังแสดงในสมการ (4.24)

การใช้สมการปริภูมิหลัก (state-space formulation) สมการ (4.25) จะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังแสดง

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{K}^* \mathbf{X} + \bar{\mathbf{P}} \quad (4.26)$$

โดยที่

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}_{2n \times 1}, \quad \mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix}_{2n \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2n \times n_f} \mathbf{f}_{n_f \times 1} \quad (4.27)$$

โดยที่

- \mathbf{X} คือ เวกเตอร์ของตัวแปรหลัก (state variables) ที่มีมิติเท่ากับ $2n$ ซึ่งประกอบด้วย การกระจัดที่ข้อและความเร็วที่ข้อ
- n_f คือ จำนวนของแรงภายนอกที่มากระทำ

\mathbf{f} คือ แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่า มีมิติเท่ากับ n_f

สมการอนุพันธ์ข้างต้นสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการไม่ต่อเนื่อง (discrete equation) โดยการใช้เมตริกซ์กำลัง (exponential matrix) เข้ามาเกี่ยวข้องจะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \bar{\mathbf{G}}_{j+1}\bar{\mathbf{P}}_j \quad (4.28)$$

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{K}^*\Delta t} \quad (4.29)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{K}^{*-1}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (4.30)$$

โดยที่ \mathbf{F} คือ เมตริกซ์กำลัง
 $\bar{\mathbf{G}}$ คือ เมตริกซ์ที่เชื่อมโยงระหว่างแรงกับระบบ
 \mathbf{I} คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)
 $j+1$ หมายถึง การคำนวณในช่วงเวลาที่ $j+1$
 Δt คือ ผลต่างของเวลาในการคำนวณตัวแปรหลักระหว่าง \mathbf{X}_j และ \mathbf{X}_{j+1}

จากการแทนสมการ (4.27) และ (4.30) ลงไปในสมการ (4.28) จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \mathbf{G}_{j+1}\mathbf{f}_j \quad (4.31)$$

โดยที่

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2n \times n_f} \quad (4.32)$$

4.5 วิธีการหาเมตริกซ์กำลัง \mathbf{F}

$$e^{\mathbf{K}^*\Delta t} = \mathbf{I} + \Delta t\mathbf{K}^* + \frac{\Delta t^2}{2!}\mathbf{K}^{*2} + \frac{\Delta t^3}{3!}\mathbf{K}^{*3} + \dots \quad (4.33)$$

และ

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \quad (4.34)$$

โดยที่ $\mathbf{\Lambda}$ คือ เมตริกซ์ค่าเจาะจง (eigenvalue) ของเมตริกซ์ \mathbf{K}^*
 \mathbf{V} คือ เมตริกซ์เวกเตอร์เจาะจง (eigenvector) ของเมตริกซ์ \mathbf{K}^*

แทนสมการ (4.34) ลงใน (4.33) จะได้

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{K}^* \Delta t} &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + \Delta t \mathbf{V}\Lambda \mathbf{V}^{-1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{V}\Lambda \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}\Lambda \mathbf{V}^{-1} \\
&\quad + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{V}\Lambda \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}\Lambda \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}\Lambda \mathbf{V}^{-1} + \dots \\
&= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + \Delta t \mathbf{V}\Lambda \mathbf{V}^{-1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{V}\Lambda^2 \mathbf{V}^{-1} + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{V}\Lambda^3 \mathbf{V}^{-1} + \dots \\
&= \mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \Delta t \Lambda + \frac{\Delta t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} \Lambda^3 + \dots \right) \mathbf{V}^{-1} \\
&= \mathbf{V} e^{\Lambda \Delta t} \mathbf{V}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

4.6 การวิเคราะห์ปัญหา

จุดประสงค์ของปัญหานี้คือ การหาแรง \mathbf{f} ซึ่งทำให้สมการ (4.31) มีความใกล้เคียงกับข้อมูลที่วัดมาได้มากที่สุด แต่ในทางปฏิบัติเราไม่สามารถที่จะวัดการกระจัดและความเร็วได้ทั้งหมด ซึ่งจะมีแค่บางตำแหน่งเท่านั้นที่เราสามารถวัดได้ ดังนั้นข้อมูลที่ได้จากการวัดสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \tag{4.36}$$

- โดยที่ \mathbf{d}_j คือ เวกเตอร์ของการวัด มีมิติ $m \times 1$
 \mathbf{Q} คือ เมตริกซ์ที่ถูกเลือก เพื่อเชื่อมโยงระหว่างการวัดกับตัวแปรหลัก มีมิติ $m \times 2n$
 m คือ จำนวนของข้อมูลที่วัดได้

ข้อมูลจากการวัดจริงจะแทนได้ด้วยเวกเตอร์ \mathbf{Z}_j ซึ่งมีมิติเดียวกับ \mathbf{d}_j โดยทั่วไปจำนวนของข้อมูลที่วัดได้ (m) จะน้อยกว่าจำนวนของตัวแปร (หรือ n ระดับขั้นความเสรีของระบบ) มาก แต่จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนของแรงภายนอกที่มากกระทำ (n_f) ในกรณีของคาน 2 มิติ ที่มีจุดรองรับแบบธรรมดาซึ่งถูกแบ่งเป็น l ชิ้นส่วนจะได้ระดับขั้นความเสรีของระบบ $n = 2(l+1) - 2$ ซึ่งได้รวมการกระจัดในแนวตั้งและการกระจัดในการหมุนที่แต่ละข้อไว้แล้ว

เมื่อแรงที่ไม่ทราบค่า \mathbf{f}_j ได้รวมอยู่ในสมการ (4.31) การที่ข้อมูลจากแบบจำลองจะเหมือนกับข้อมูลจากการวัดจึงเป็นไปได้ ทั้งนี้เนื่องจากข้อมูลที่ได้จากการวัดจะมีสิ่งรบกวนรวมอยู่ด้วย ซึ่งวิธีการยกกำลังสองน้อยที่สุดที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน E ดังสมการ

$$E = \sum_{j=1}^N \left((\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j), \mathbf{A}(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j) \right) \tag{4.37}$$

มีค่าน้อยที่สุดก็ไม่พอเพียง จากสาเหตุดังกล่าวนี้สามารถที่จะหลีกเลี่ยงได้โดยการเพิ่มพจน์การกลา (smoothing term) เข้าไปในสมการ (4.37) ดังแสดง

$$E = \sum_{j=1}^N \left((\mathbf{Z}_j - \mathbf{QX}_j)^T \mathbf{A} (\mathbf{Z}_j - \mathbf{QX}_j) + (\mathbf{f}_j^T \mathbf{B} \mathbf{f}_j) \right) \quad (4.38)$$

วิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่าวิธีทีคิโนฟ (Tikhonov method) เมตริกซ์ \mathbf{A} มิติ $m \times m$ และเมตริกซ์ \mathbf{B} มิติ $n_f \times n_f$ เป็นเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักบวกแน่นอนที่มีความสมมาตร (symmetric positive-definite weighting matrices) ซึ่งให้ความยืดหยุ่นในการถ่วงน้ำหนักของการวัดและการถ่วงน้ำหนักของแรง เมตริกซ์ \mathbf{A} โดยทั่วไปจะเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) และ เมตริกซ์ \mathbf{B} เป็นเมตริกซ์ทแยง (diagonal matrix) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lambda \mathbf{I}_{n_f \times n_f}$ เมื่อ λ คือตัวแปรที่ทำให้สม่ำเสมอ (regularization parameter)

4.7 การวัดความเครียด

สำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์ของคาน 2 มิติ ที่ยาว l โดยมีระดับชั้นความเครียด $(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2)$ ที่ปลายทั้งสองข้าง จะได้ว่าความเครียดที่หน้าตัดใด ๆ ระยะทาง x จากปลายซ้ายของชิ้นส่วนคานสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระดับชั้นความเครียดที่ปลายทั้งสองข้างได้ดังนี้

$$\epsilon_x = \left(\frac{-y}{l^3} \right) [(12x - 6l)u_1 - l(6x - 4l)\theta_1 - (12x - 6l)u_2 + l(6x - 2l)\theta_2] \quad (4.39)$$

โดยที่ y คือ ระยะจากแนวแกนสะเทินของคาน

4.8 ไดนามิกโปรแกรมมิ่ง (dynamic programming)

เพื่อที่จะทำให้อายุการใช้งานของคาน E ของสมการ (4.38) มีค่าน้อยที่สุด วิธีการไดนามิกโปรแกรมมิ่ง และหลักการของเบลแมน (Bellman's Principle of Optimality) ได้ถูกนำมาใช้ ค่า E ที่น้อยที่สุดที่ขั้นตอน n สำหรับค่าเริ่มต้น \mathbf{X} สามารถเขียนได้เป็น

$$g_n(\mathbf{X}) = \min_{r_j} E_n(\mathbf{X}, \mathbf{f}_j) \quad (4.40)$$

จากสมการ (4.40) โดยวิธีของเบลแมนจะสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$g_{n-1}(\mathbf{X}) = \min_{r_{n-1}} \left((\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{QX}), \mathbf{A} (\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{QX}) + (\mathbf{f}_{n-1}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_{n-1}) + g_n(\mathbf{FX} + \mathbf{G}_n \mathbf{f}_{n-1}) \right) \quad (4.41)$$

\mathbf{f}_n และ \mathbf{g}_n คือ ค่าแรงที่เหมาะสมที่สุด (optimal forcing term) และค่าต้นทุนที่เหมาะสมที่สุด (optimal cost term) ตามลำดับ การแก้ปัญหาสามารถทำได้โดยการเริ่มต้นขั้นตอนที่ $n = N$ (เมื่อ N คือจุดปลายของกระบวนการ) และทำย้อนกลับไปจนถึง $n = 1$ (ซึ่งเป็นจุดต้นของกระบวนการ) ณ จุดปลายค่าที่น้อยที่สุดสามารถหาได้จาก

$$g_N(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_N} [(\mathbf{Z}_N - \mathbf{Q}\mathbf{X}), \mathbf{A}(\mathbf{Z}_N - \mathbf{Q}\mathbf{X}) + (\mathbf{f}_N, \mathbf{B}\mathbf{f}_N)] \quad (4.42)$$

เมื่อ $\mathbf{f}_N = 0$ เราจะได้คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดดังสมการ (4.43) โดยการขยายสมการ (4.42)

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{X}) = \mathbf{q}_N + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_N) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_N \mathbf{X}) \quad (4.43)$$

โดยที่

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{Z}_N^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_N$$

$$\mathbf{S}_N = -2\mathbf{Q}_N^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_N$$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{Q}_N^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_N \quad (4.44)$$

สมการ (4.44) คือค่าเริ่มต้นสำหรับการทำงานย้อนกลับที่ $n = N$ โดยการแทนสมการ (4.43) ด้วยขั้นตอนที่ n และ $n-1$ ลงในสมการ (4.41) และขยายพจน์ทางด้านขวามือของสมการจะได้

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_{n-1}} [(\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n \mathbf{X} + \mathbf{U}_n), \mathbf{H}_n(\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n \mathbf{X} + \mathbf{U}_n) + \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X})] \quad (4.45)$$

โดยที่

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{B} + \mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{G}_n, \quad 2\mathbf{H}_n \mathbf{V}_n = 2\mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}, \quad \mathbf{V}_n = \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}$$

$$2\mathbf{H}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{G}_n^T \mathbf{S}_n, \quad \mathbf{U}_n = (\mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \mathbf{S}_n) / 2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{x}) = & (\mathbf{q}_n + \mathbf{Z}_{n-1}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_{n-1}) + \mathbf{X}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}) \mathbf{X} + \mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{S}_n - 2\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_{n-1}) \\ & - \mathbf{X}^T \mathbf{V}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{X} - \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{U}_n - 2\mathbf{X}^T \mathbf{V}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{U}_n \end{aligned}$$

ทำให้พจน์ทางด้านขวามือของสมการ (4.45) มีค่าน้อยที่สุด จะหาแรงที่เหมาะสมที่สุดได้ คือ

$$\mathbf{f}_{n-1} = -\mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \left[\mathbf{R}_n \mathbf{F} \mathbf{X}_{n-1} + \frac{\mathbf{S}_n}{2} \right] \quad (4.46)$$

และสมการ (4.45) จะกลายเป็น

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{X}) = \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X}) \quad (4.47)$$

จากการกระจายพจน์ในสมการ (4.44) และทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n-1} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \right] \mathbf{R}_n \mathbf{F} \\ \mathbf{S}_{n-1} &= -2\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_{n-1} + \mathbf{F}^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \right] \mathbf{S}_n \end{aligned} \quad (4.48)$$

4.9 ขั้นตอนการหาแรง \mathbf{f}

เพื่อจะหาแรง \mathbf{f} ที่เหมาะสมที่สุดจากสมการ (4.45)-(4.48) ซึ่งเป็นกระบวนการของสูตรทำซ้ำ (recursive formular) จะต้องทำการคำนวณเป็นลำดับขั้นตอนดังนี้

4.9.1 \mathbf{Q} , \mathbf{Z} และความเร็วของแรงสามารถหาได้จากการวัดจากภาคสนาม

4.9.2 $\bar{\mathbf{G}}$ และ \mathbf{G} สามารถหาได้จากข้อมูลตำแหน่งของแรงจากสมการ (4.30) และ (4.32)

4.9.3 คำนวณค่าเริ่มต้น \mathbf{q}_N , \mathbf{R}_N และ \mathbf{S}_N จากสมการ (4.44) และคำนวณค่า \mathbf{H}_N จากสมการ (4.45)

4.9.4 คำนวณ \mathbf{S}_{n-1} และ \mathbf{R}_{n-1} จากสมการ (4.48) ตั้งแต่ค่า $n = N$ จนถึง $n = 1$

4.9.5 กำหนดค่าเริ่มต้น \mathbf{X} เท่ากับศูนย์แล้วคำนวณค่า \mathbf{X}_{j+1} จากสมการ (4.31) ตั้งแต่ค่า $j = 0$ จนถึง $j = N$ และหาแรง \mathbf{f}_{n-1} จากสมการ (4.43) ตั้งแต่ค่า $n = 1$ จนถึง $n = N$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย