

บทที่ 2

การสร้างแบบจำลองเพื่อสร้างสัญญาณความเครียด

ในบทนี้จะทำการสร้างแบบจำลองปฏิกิริยาตอบสนองระหว่างสะพานกับรถบรรทุก 10 ล้อ (Boonchu : 1998) เพื่อให้สร้างสัญญาณความเครียดของสะพานเมื่อมีรถวิ่งผ่าน หลังจากนั้นจึงนำสัญญาณความเครียดดังกล่าวไปใช้ในการหาน้ำหนักรถต่อไป

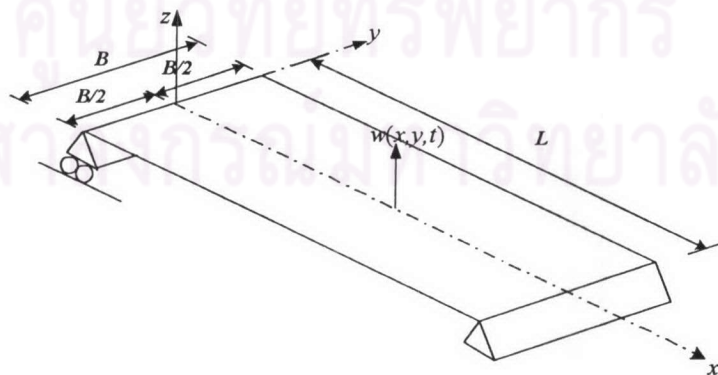
การสร้างแบบจำลองปฏิกิริยาตอบสนองระหว่างสะพานกับรถบรรทุกเริ่มต้นจากจำลองรูปแบบสะพานและจำลองรูปแบบรถบรรทุกโดยพิจารณาแยกกัน ต่อมานำแบบจำลองทั้งสองมาพิจารณาร่วมกันโดยมีผลของความขรุขระของผิวทางรวมอยู่ในการพิจารณาด้วย ซึ่งการวิเคราะห์จะใช้สมการของลากรานจ์ (Lagrange's equation) ในการสร้างสมการการกระจัดของแบบจำลอง

2.1 การจำลองรูปแบบสะพาน

สะพานจะถูกจำลองรูปแบบเป็น 3 มิติ โดยมีจุดรองรับเป็นแบบธรรมดา และมีโหมดของการสั่นไหว 4 โหมดคือ โหมดเนื่องจากการดัด (bending mode) 3 โหมด และโหมดเนื่องจากการบิด (torsional mode) 1 โหมด ผลของความหน่วง (damping) จะถูกรวมเข้าไปในการวิเคราะห์ด้วย โดยจะคิดเป็นความหน่วงเชิงเส้นในรูปแบบโหมด (linear modal damping)

2.1.1 การสร้างสมการการกระจัดของสะพาน

กำหนดแกนพิกัด $x-y$ ดังรูปที่ 2.1 โดยที่ B คือ ความกว้างของสะพาน และ L คือ ความยาวของสะพาน การสั่นไหวของสะพานสามารถเขียนได้เป็น $w(x, y, t)$ ซึ่งถูกกำหนดให้เป็นผลรวมของโหมดของการสั่นไหว 4 โหมด



รูปที่ 2.1 แบบจำลองสะพาน 3 มิติ

$$w(x, y, t) = \phi_1(x, y)q_1(t) + \phi_2(x, y)q_2(t) + \phi_3(x, y)q_3(t) + \phi_4(x, y)q_4(t) \quad (2.1)$$

โดยที่
$$\phi_1(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.2)$$

$$\phi_2(x, y) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (2.3)$$

$$\phi_3(x, y) = \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \quad (2.4)$$

$$\phi_4(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \times \frac{2y}{B} \quad (2.5)$$

จากสมการ (2.2) - (2.5) $\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y)$ คือ ฟังก์ชันพื้นฐาน (shape function) ของโหมดการดัดโหมดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ส่วน $\phi_4(x, y)$ คือ ฟังก์ชันพื้นฐานของโหมดการบิดโหมดที่ 1 ซึ่งเกิดขึ้นในการสั่นไหวของสะพาน ดังรูปที่ 2.2

สมการการสั่นไหวของสะพานสามารถเขียนได้เป็น

$$M_b \ddot{q} + C_b \dot{q} + K_b q = 0 \quad (2.6)$$

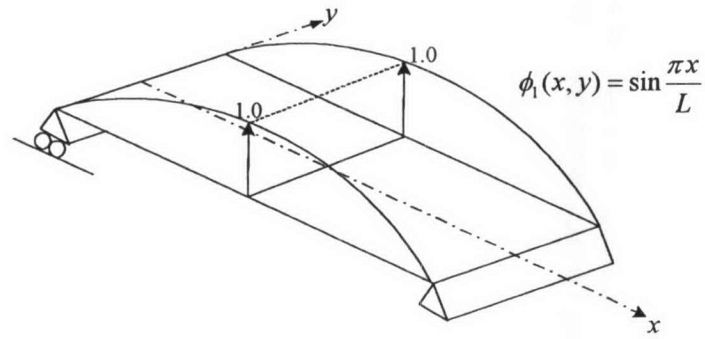
โดยที่ $M_b = [m_{ij}]$ สำหรับ $i, j \in \{1, 2\}$

สัมประสิทธิ์ของมวล (mass coefficient) m_{ij} ของสะพานสามารถหาได้จาก

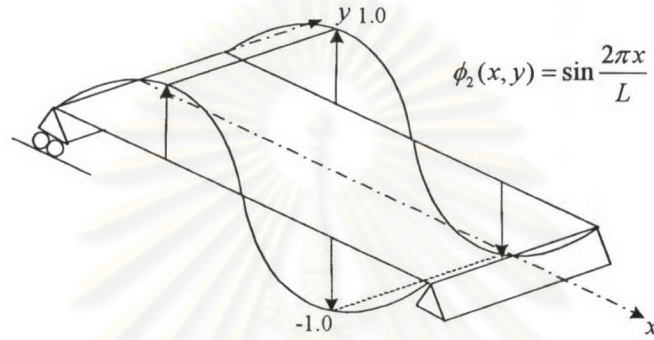
$$m_{ij} = \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L m(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

จากการพิจารณาว่าสะพานมีการกระจายหน้าตัดอย่างสม่ำเสมอ มวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ $m(x, y)$ สามารถพิจารณาเป็นค่าคงที่ได้คือ m_0 ดังนั้นสมการ (2.7) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

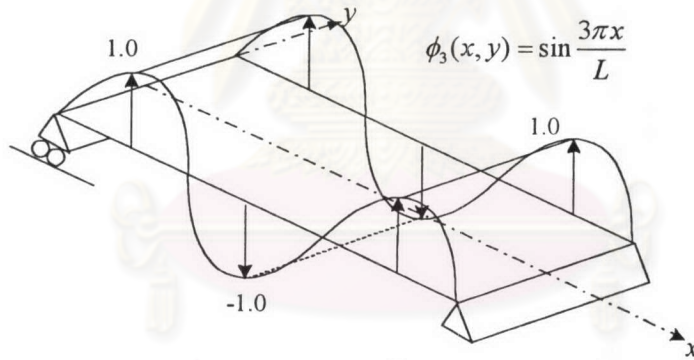
$$m_{ij} = m_0 \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dx dy \quad (2.8)$$



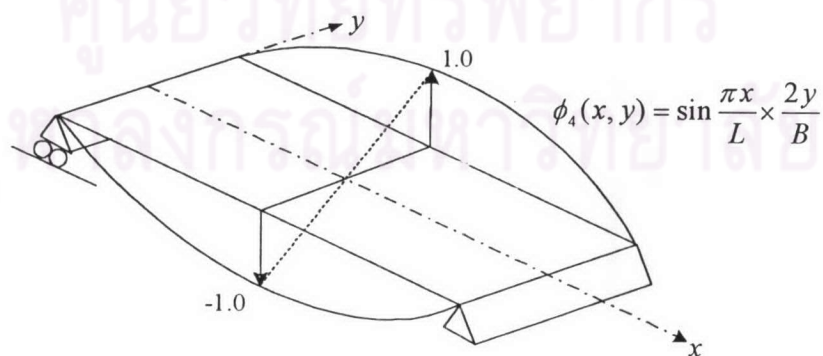
(ก) โหมดเนื่องจากการคั่นโหมดที่ 1



(ข) โหมดเนื่องจากการคั่นโหมดที่ 2



(ค) โหมดเนื่องจากการคั่นโหมดที่ 3



(ง) โหมดเนื่องจากการบิดโหมดที่ 1

รูปที่ 2.2 รูปแบบโหมดพื้นฐานของสะพานที่ใช้ในการศึกษา

เนื่องจากคุณสมบัติการตั้งฉากกัน (orthogonality property) ของฟังก์ชันพื้นฐานทำให้ค่านอกแนวทแยง (off-diagonal) ของเมตริกซ์มวล (mass matrix) ต้องเท่ากับศูนย์ และเมตริกซ์มวลต้องมีความสมมาตร ดังนั้นจากสมการ (2.8) เมตริกซ์มวลเชิงโหมด (modal mass matrix) สามารถเขียนได้เป็น

$$M_b = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \mu_3 & \\ & & & \mu_4 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

โดยที่ $\mu_1 = m_0 \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L \phi_1^2(x, y) dx dy$ คือ มวลเชิงโหมด (modal mass) ของโหมดการดัดโหมดที่ 1

$\mu_2 = m_0 \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L \phi_2^2(x, y) dx dy$ คือ มวลเชิงโหมด (modal mass) ของโหมดการดัดโหมดที่ 2

$\mu_3 = m_0 \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L \phi_3^2(x, y) dx dy$ คือ มวลเชิงโหมด (modal mass) ของโหมดการดัดโหมดที่ 3

$\mu_4 = m_0 \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L \phi_4^2(x, y) dx dy$ คือ มวลเชิงโหมด (modal mass) ของโหมดการบิดโหมดที่ 1

จากการวิเคราะห์เชิงโหมด (modal analysis) เราสามารถหาเมตริกซ์สติฟเนสเชิงโหมด (modal stiffness matrix) และเมตริกซ์ความหน่วงเชิงโหมด (modal damping matrix) ได้ โดยที่ค่านอกแนวทแยงของเมตริกซ์สติฟเนสเชิงโหมดและเมตริกซ์ความหน่วงเชิงโหมดต้องเท่ากับศูนย์

$$K_b = \begin{bmatrix} \mu_1 \omega_1^2 & & & \\ & \mu_2 \omega_2^2 & & \\ & & \mu_3 \omega_3^2 & \\ & & & \mu_4 \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$C_b = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \mu_1 \omega_1 & & & \\ & 2\xi_2 \mu_2 \omega_2 & & \\ & & 2\xi_3 \mu_3 \omega_3 & \\ & & & 2\xi_4 \mu_4 \omega_4 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

โดยที่ ω_1 คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมของโหมดการตัดโหมดที่ 1
 ω_2 คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมของโหมดการตัดโหมดที่ 2
 ω_3 คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมของโหมดการตัดโหมดที่ 3
 ω_4 คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมของโหมดการบิดโหมดที่ 1
 ξ_1 คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดการตัดโหมดที่ 1
 ξ_2 คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดการตัดโหมดที่ 2
 ξ_3 คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดการตัดโหมดที่ 3
 ξ_4 คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดการบิดโหมดที่ 1

2.2 การจำลองรูปแบบของรถบรรทุก

เราจะพิจารณารูปแบบของรถบรรทุกให้อยู่ในระนาบ โดยมี 2 ระดับชั้นความเสถียรที่ระดับชั้นความเสถียรแรกจะอยู่ที่ปลายด้านหน้าของตัวรถ (u_f) และระดับชั้นความเสถียรที่สองจะอยู่ที่ปลายด้านหลังของตัวรถ (u_r) ซึ่งลักษณะแบบจำลองของรถบรรทุก สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.3 เพลาคู่หลังของรถบรรทุกจะถูกนำมาพิจารณาในลักษณะของเพลาดียว

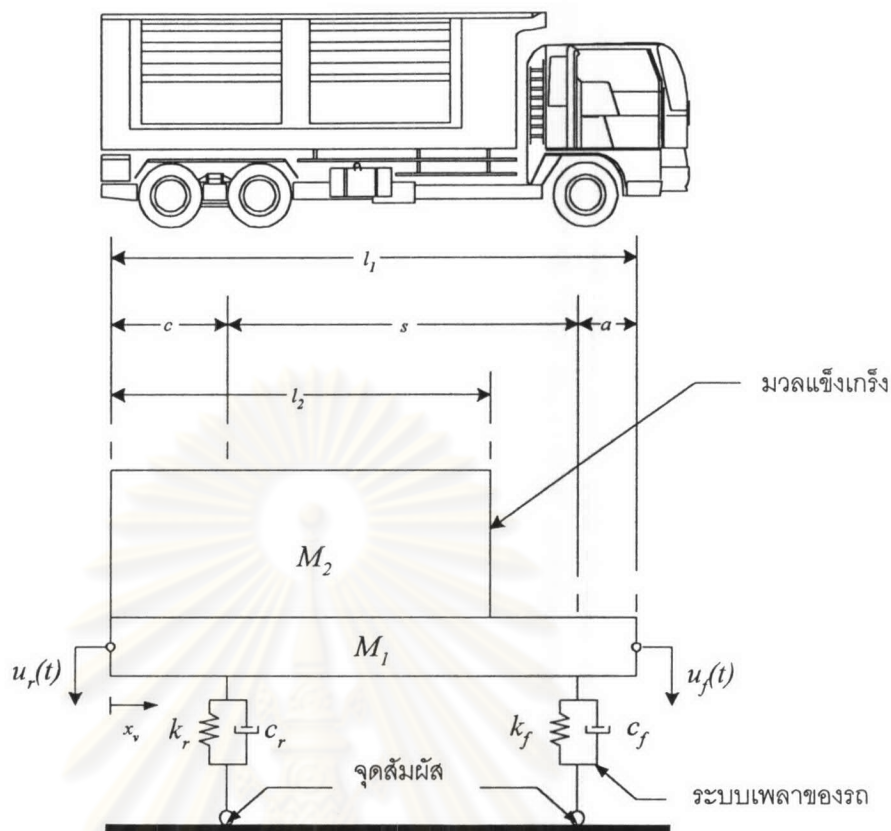
ระบบการสั่นไหวของเพลารถสามารถแทนได้ด้วยชุดของความหน่วงและสปริง โดยมีสมมติฐานว่าพฤติกรรมอยู่ในช่วงอิลาสติกเชิงเส้น ดังนั้นค่าสติเฟนสของสปริงจึงสมมติให้เป็นค่าคงที่ การจำลองรูปแบบมวลของรถบรรทุก จะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นมวลของรถ (M_1) และส่วนที่เป็นมวลของการบรรทุกสิ่งของ (M_2)

จากรูปที่ 2.3 จะแสดงระยะต่าง ๆ ของตัวรถ โดยที่ a คือ ระยะทางที่ยื่นออกไปด้านหน้า c คือ ระยะทางที่ยื่นออกไปด้านหลัง s คือ ระยะห่างระหว่างเพล่า l_1 คือ ความยาวของตัวรถทั้งหมด l_2 คือ ความยาวของส่วนที่บรรทุกของ k_f และ k_r คือ สติเฟนสของสปริงที่เพล่าหน้าและเพล่าหลังตามลำดับ c_f และ c_r คือ ความหน่วงที่เพล่าหน้าและเพล่าหลังตามลำดับ

2.2.1 การสร้างสมการการกระจัดของรถบรรทุก

เราสามารถอธิบายการสั่นไหวของตัวรถบรรทุกได้ โดยผ่านสมการการเคลื่อนที่ของลากรานจ์ (Lagrange's equation) พลังงานและงานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์ (nonconservative force) จะถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดทั่วไป (generalized coordinate) และอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลา ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.12)$$



รูปที่ 2.3 รูปแบบจำลองของรถบรรทุก

- โดยที่ T คือ พลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบ
 V คือ พลังงานศักย์ทั้งหมดของระบบ
 q_i คือ พิกัดทั่วไป (generalized coordinates)
 Q_i คือ แรงทั่วไป (generalized force) ที่สอดคล้องกับ q_i

จากสมมติฐานว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของรถเนื่องจากการดัด เราสามารถแสดงการกระจัดสัมบูรณ์ (absolute displacement) และอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของการกระจัดสัมบูรณ์เทียบกับเวลาที่จุดใด ๆ ตามแกนของรถในรูปแบบของ u_f และ u_r ดังสมการ

$$u(x_v, t) = u_r + (u_f - u_r) \frac{x_v}{l_1} \quad (2.13)$$

$$\dot{u}(x_v, t) = \dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{x_v}{l_1} \quad (2.14)$$

โดยที่	u_f	คือ การกระจัดสัมบูรณ์ในแนวตั้งของตัวรอดด้านหน้า
	u_r	คือ การกระจัดสัมบูรณ์ในแนวตั้งของตัวรอดด้านหลัง
	\dot{u}_f	คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ u_f เทียบกับเวลา
	\dot{u}_r	คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ u_r เทียบกับเวลา
	x_v	คือ ระยะทางที่วัดจากปลายด้านหลังไปตามแนวยาวของรอด

เมื่อเราแทนระยะทางของเพลาน้ำและเพลาลังที่วัดจากปลายท้ายของรอด ลงไปในสมการ (2.13) จะได้

$$u(x_{vf}, t) = u_r + (u_f - u_r) \frac{c+s}{l_1} \quad (2.15)$$

$$u(x_{vr}, t) = u_r + (u_f - u_r) \frac{c}{l_1} \quad (2.16)$$

จากสมมติฐานว่าตัวรอดสั้นไหวในทิศทางในแนวตั้งและไม่มีการกระจัดในแนวราบ เมื่อเกิดการสั้นไหวอย่างอิสระ ดังนั้นพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ของตัวรอดสามารถหาได้จากการอินทิเกรตพลังงานจลน์ของแต่ละจุดไปตามแนวแกนรอด พิจารณาสมการ (2.14) พลังงานจลน์ของตัวรอดสามารถเขียนได้ดังสมการ

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{l_1} \right) \int_0^l \left(\frac{\partial u(x_v, t)}{\partial t} \right)^2 dx_v + \frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{l_2} \right) \int_0^l \left(\frac{\partial u(x_v, t)}{\partial t} \right)^2 dx_v \quad (2.17)$$

ในขณะที่มีการสั้นไหวขึ้นลงในแนวตั้ง สปริงจะเกิดการยืดและหด ซึ่งสิ่งนี้จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ยืดหยุ่นที่เก็บสะสมอยู่ในสปริง และเมื่อรวมผลของพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของมวลแข็งเกร็งของตัวรอด เราสามารถเขียนพลังงานศักย์ทั้งหมดของระบบได้ดังสมการ

$$V = \frac{1}{2} k_f u^2(x_v, t) + \frac{1}{2} k_r u^2(x_{vr}, t) + N_f u(x_{vf}, t) + N_r u(x_{vr}, t) - \left(\frac{M_1 g}{l_1} \right) \int_0^l u(x_v, t) dx_v - \left(\frac{M_2 g}{l_2} \right) \int_0^l u(x_v, t) dx_v \quad (2.18)$$

โดยที่ N_f และ N_r คือ แรงสถิตของเพลาน้ำและเพลาลังตามลำดับ

จากหลักการของงานสมมติ ถ้าที่เวลา t ใดๆ เรากำหนดให้ตัวรอดมีการกระจัดสมมติในแนวตั้ง $\delta u(x_{vf}, t)$ และ $\delta u(x_{vr}, t)$ ที่ตำแหน่งเพลาน้ำและตำแหน่งเพลาลัง งานสมมติของแรงไม่อนุรักษ์เนื่องจากความหน่วง (nonconservative damping force) สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$\delta W_{nc} = -c_f \dot{u}(x_{vf}, t) \delta u(x_{vf}, t) - c_r \dot{u}(x_{vr}, t) \delta u(x_{vr}, t) \quad (2.19)$$

โดยทั่วไป งานสมมติจะเขียนอยู่ในรูปแบบของแรงไม่อนุรักษ์ (nonconservative force) และการกระจัดสมมติ (virtual displacement) ดังสมการ

$$\delta W_{nc} = U_f \delta u_f + U_r \delta u_r \quad (2.20)$$

จากการจัดรูปแบบสมการ (2.19) ตามสมการ (2.20) จะได้แรงทั่วไป (generalized force) ดังสมการ

$$U_f = -c_f \frac{c+s}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} \right] - c_r \frac{c}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} \right] \quad (2.21)$$

$$U_r = -c_f \frac{a}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} \right] - c_r \frac{a+s}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} \right]$$

โดยการแทนสมการ (2.17) , (2.18) และ (2.21) ลงในสมการ (2.12) จะได้สมการการกระจัดซึ่งอธิบายถึงลักษณะของการสั่นไหวของรถ สมการการกระจัดสามารถจัดในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังแสดง

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_f \\ \ddot{u}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_f \\ \dot{u}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

โดยที่

$$m_{11} = \frac{M_1}{3} + \frac{M_2 l_2^2}{3l_1^2} \quad m_{22} = \frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{2} \left(2 - \frac{2l_2}{l_1} + \frac{2l_2^2}{3l_1^2} \right) \quad (2.23\text{ก-ค})$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{M_1}{6} + \frac{M_2}{2} \left(\frac{l_2}{l_1} - \frac{2l_2^2}{3l_1^2} \right)$$

$$c_{11} = c_f \left(\frac{c+s}{l_1} \right)^2 + c_r \left(\frac{c}{l_1} \right)^2 \quad c_{22} = c_f \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 + c_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right)^2 \quad (2.24\text{ก-ค})$$

$$c_{12} = c_{21} = c_f \left(\frac{a}{l_1} \right) \left(\frac{c+s}{l_1} \right) + c_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right) \left(\frac{c}{l_1} \right)$$

$$k_{11} = k_f \left(\frac{c+s}{l_1} \right)^2 + k_r \left(\frac{c}{l_1} \right)^2 \quad k_{22} = k_f \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 + k_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right)^2$$

(2.25ก-ค)

$$k_{12} = k_{21} = k_f \left(\frac{a}{l_1} \right) \left(\frac{c+s}{l_1} \right) + k_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right) \left(\frac{c}{l_1} \right)$$

2.3 การจำลองรูปแบบปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

แบบจำลองของสะพานกับรถบรรทุก ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ (2.1) และ (2.2) จะถูกนำมาพิจารณาร่วมกัน นอกจากนี้เพื่อที่จะทำให้ปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุกมีความใกล้เคียงกับความจริงมากขึ้น ความขรุขระของผิวถนนบนสะพานจึงถูกนำมาพิจารณาด้วย

จากการศึกษาพบว่าความขรุขระของผิวถนนบนสะพานเป็นสาเหตุหลักที่มีอิทธิพลต่อปฏิกิริยาตอบสนองการสั่นไหวของสะพานและรถบรรทุก ซึ่งในงานวิจัยครั้งนี้ได้ใช้สมการที่ใช้ในการหาความขรุขระของผิวถนนบนสะพานประเภทคานขนาดใหญ่ที่เสนอโดย Honda และคณะ (1982)

$$S_r(\Omega) = \frac{0.0098}{\Omega^{1.92} + 0.08^{1.92}} \quad (2.26)$$

โดยที่ Ω คือ ความถี่ของความขรุขระ (รอบ/เมตร)

จากสมการ 2.26 เราสามารถนำมาใช้เพื่อจำลองหน้าข้างความขรุขระของสะพาน (bridge roughness profile) ได้โดยทำการเขียนกราฟระหว่าง S_r กับ Ω เริ่มตั้งแต่ $\Omega = 0$ จนถึง $\Omega = 100$ แล้วแบ่ง Ω ออกเป็นช่วงต่างๆที่มีความกว้างของแต่ละช่วงเท่ากับ 0.1 ซึ่งระดับของความขรุขระบนสะพานที่ระยะ x ใดๆ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$h(x) = \sum_{i=1}^{1000} S_r(i) \sin(2\pi\Omega(i)x + r(i)) \quad (2.27)$$

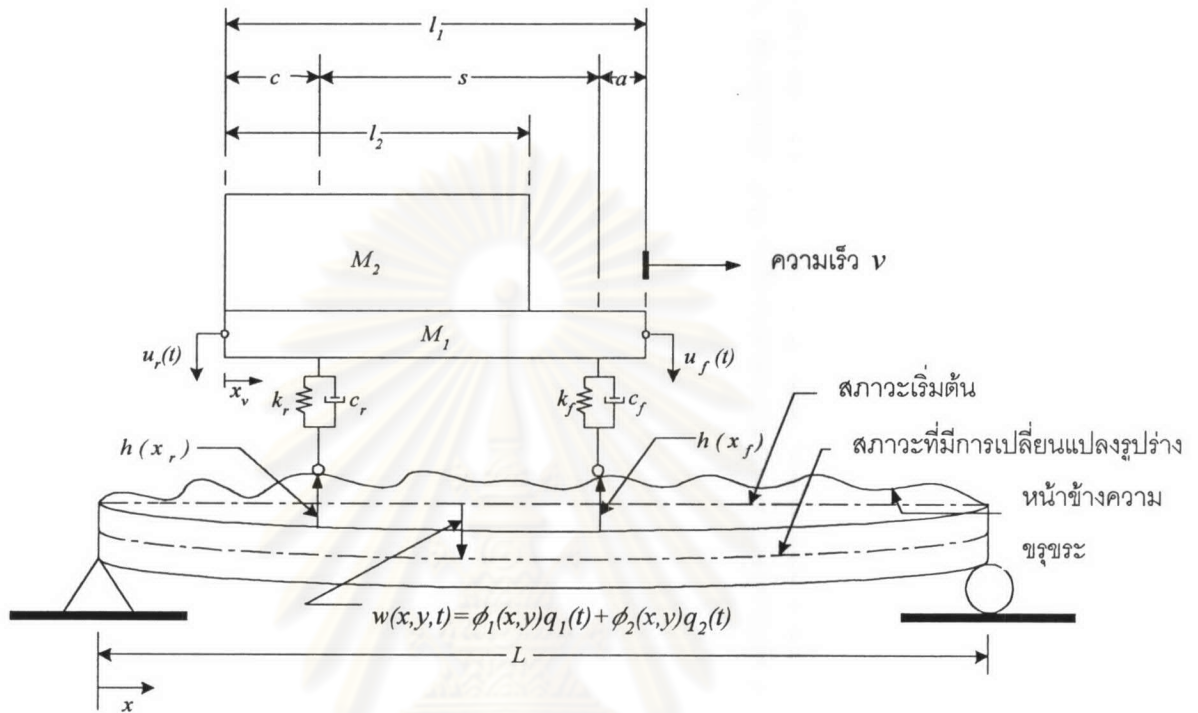
โดยที่ $h(x)$ คือ ระดับของความขรุขระบนสะพานที่ระยะ x ใดๆ

$\Omega(i)$ คือ ค่า Ω ที่จุดกึ่งกลางของช่วงที่ i

$S_r(i)$ คือ ค่า S_r ที่ $\Omega(i)$

$r(i)$ คือ ค่าตัวเลขสุ่ม (random number) ของช่วงที่ i

พิจารณารูปที่ 2.4 แบบจำลองของรถบรรทุกที่มี 2 ระดับชั้นความเร็ว จะถูกวางอยู่บนสะพาน และเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ v ซึ่งระยะจากจุดเริ่มต้นบนสะพานจะแทนด้วย x หน้าข้างของสะพานซึ่งกำหนดให้ $h_f(t)$ และ $h_r(t)$ ดังรูปที่ 2.4 เป็นระดับของความขรุขระบนสะพานที่ตำแหน่งล้อหน้าและล้อหลังตามลำดับ จะถูกนำมารวมในสมการอนุพันธ์การกระจัดของแบบจำลองปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน



รูปที่ 2.4 รูปแบบจำลองระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

2.3.1 การสร้างสมการการกระจัดของปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

สมการการกระจัดของปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน สามารถหาได้จากสมการของลากรางจ์ การกระจัดในแนวตั้งของสะพานในโหมดของการตัดและโหมดของการบิด จะถูกเลือกเป็นพิกัดทั่วไป (generalized coordinates) q_1, q_2, q_3 และ q_4 ขณะที่การกระจัดสัมบูรณ์ของรถที่ตำแหน่งด้านหน้าและด้านหลัง จะกำหนดให้เป็น u_f และ u_r ตามลำดับ

พลังงานจลน์ทั้งหมด ซึ่งเป็นผลรวมของพลังงานจลน์เนื่องมาจากการสั่นไหวของสะพานและการกระจัดของรถ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับเวลาของพิกัดทั่วไป 6 ตัว $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{u}_f$ และ \dot{u}_r ได้ ดังนั้นพลังงานจลน์ของระบบคือ

$$T = \frac{1}{2} m_0 \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L \left(\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{L_1} \right) \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial u(x_v, t)}{\partial t} \right)^2 dx_v \quad (2.28)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{L_2} \right) \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial u(x_v, t)}{\partial t} \right)^2 dx_v + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v^2$$

แทนสมการ (2.1) , (2.14) ลงในสมการ (2.28) และกระจายพจน์ต่างๆออกมาจะได้

$$T = \frac{1}{2} m_0 \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L \left[\begin{aligned} & \dot{q}_1^2 \phi_1^2(x, y) + \dot{q}_2^2 \phi_2^2(x, y) + \dot{q}_3^2 \phi_3^2(x, y) + \dot{q}_4^2 \phi_4^2(x, y) \\ & + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \phi_1(x, y) \phi_2(x, y) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 \phi_1(x, y) \phi_3(x, y) \\ & + 2\dot{q}_1 \dot{q}_4 \phi_1(x, y) \phi_4(x, y) + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 \phi_2(x, y) \phi_3(x, y) \\ & + 2\dot{q}_2 \dot{q}_4 \phi_2(x, y) \phi_4(x, y) + 2\dot{q}_3 \dot{q}_4 \phi_3(x, y) \phi_4(x, y) \end{aligned} \right] dx dy \quad (2.29)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{L_1} \right) \int_0^{l_1} \left(\dot{u}_r^2 + 2\dot{u}_r (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{x_v}{L_1} + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{x_v^2}{L_1^2} \right) dx_v$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{L_2} \right) \int_0^{l_2} \left(\dot{u}_r^2 + 2\dot{u}_r (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{x_v}{L_1} + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{x_v^2}{L_1^2} \right) dx_v + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v^2$$

การกระจัดในแนวราบของรถนี้จะก่อให้เกิดพลังงานจลน์ขึ้นมาบางส่วน แต่จะไม่มีผลต่อการหาอนุพันธ์ของสมการการกระจัด จากสมการ (2.29) พจน์สุดท้ายซึ่งหมายถึงพลังงานจลน์ของการกระจัดในแนวราบจะหายไปหลังจากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับพิกัดทั่วไป

พลังงานศักย์ของระบบจะประกอบด้วยพลังงานความเครียดที่เก็บสะสมอยู่ในการเปลี่ยนรูปของสะพานในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมด (modal coordinates) พลังงานศักย์ยืดหยุ่นที่อยู่ในสปริงของรถ และพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของการกระจัดในแนวตั้งของมวลแข็งเกร็งของรถ ดังนั้นพลังงานศักย์ทั้งหมดคือ

$$V = \frac{1}{2} \mu_1 \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \omega_2^2 q_2^2 + \frac{1}{2} \mu_3 \omega_3^2 q_3^2 + \frac{1}{2} \mu_4 \omega_4^2 q_4^2 + \frac{1}{2} k_f (u(x_{vf}, t) - w(x_f, y, t) + h(x_f))^2$$

$$+ \frac{1}{2} k_r (u(x_{vr}, t) - w(x_r, y, t) + h(x_r))^2 + N_f (u(x_{vf}, t) - w(x_f, y, t) + h(x_f)) \quad (2.30)$$

$$+ N_r (u(x_{vr}, t) - w(x_r, y, t) + h(x_r)) - \left(\frac{M_1 g}{L_1} \right) \int_0^{l_1} u(x_v, t) dx_v - \left(\frac{M_2 g}{L_2} \right) \int_0^{l_2} u(x_v, t) dx_v$$

การกระจัดในแนวตั้งของสะพานที่ตำแหน่งล้อหน้าและล้อหลังสามารถกำหนดได้ดังนี้

$$w(x_f, y, t) = \phi_1(x_f, y)q_1(t) + \phi_2(x_f, y)q_2(t) + \phi_3(x_f, y)q_3(t) + \phi_4(x_f, y)q_4(t) \quad (2.31)$$

$$w(x_r, y, t) = \phi_1(x_r, y)q_1(t) + \phi_2(x_r, y)q_2(t) + \phi_3(x_r, y)q_3(t) + \phi_4(x_r, y)q_4(t) \quad (2.32)$$

โดยที่ x_f คือ การกระจัดในแนวราบที่ตำแหน่งล้อหน้า
 x_r คือ การกระจัดในแนวราบที่ตำแหน่งล้อหลัง

จากสมการ (2.13), (2.15), (2.16), (2.31) และ (2.32) สามารถขยายพจน์ของพลังงานศักย์ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \mu_1 \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \omega_2^2 q_2^2 + \frac{1}{2} \mu_3 \omega_3^2 q_3^2 + \frac{1}{2} \mu_4 \omega_4^2 q_4^2 \\ & + \frac{1}{2} k_f \left(u_r + (u_f - u_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} q_1 - \phi_{2f} q_2 - \phi_{3f} q_3 - \phi_{4f} q_4 + h_f \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} k_r \left(u_r + (u_f - u_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} q_1 - \phi_{2r} q_2 - \phi_{3r} q_3 - \phi_{4r} q_4 + h_r \right)^2 \\ & N_f \left(u_r + (u_f - u_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} q_1 - \phi_{2f} q_2 - \phi_{3f} q_3 - \phi_{4f} q_4 + h_f \right) \\ & N_r \left(u_r + (u_f - u_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} q_1 - \phi_{2r} q_2 - \phi_{3r} q_3 - \phi_{4r} q_4 + h_r \right) \\ & - \left[\frac{M_1 g}{2} + \frac{M_2 g}{2} \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \right] u_f - \left[\frac{M_1 g}{2} + \frac{M_2 g}{2} \left(2 - \frac{l_2}{l_1} \right) \right] u_r \end{aligned} \quad (2.33)$$

โดยที่ ϕ_{if} คือ $\phi_i(x_f, y)$; $i = 1, 2, 3, 4$
 ϕ_{ir} คือ $\phi_i(x_r, y)$; $i = 1, 2, 3, 4$
 h_f คือ ระดับของความขรุขระที่ตำแหน่งล้อหน้า
 h_r คือ ระดับของความขรุขระที่ตำแหน่งล้อหลัง

งานสมมติอันเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์ (nonconservative forces) เช่น แรงหน่วง (damping forces) ที่ถูกกำหนดโดย $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4, \delta u_f$ และ δu_r สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} = & -c_f \left[\dot{u}(x_{vf}, t) - \dot{w}(x_f, y, t) + \dot{h}(x_f) \right] \delta \left[u(x_{vf}, t) - w(x_f, y, t) + h(x_f) \right] \\ & - c_r \left[\dot{u}(x_{vr}, t) - \dot{w}(x_r, y, t) + \dot{h}(x_r) \right] \delta \left[u(x_{vr}, t) - w(x_r, y, t) + h(x_r) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

ซึ่งสามารถขยายพจน์ได้ดังแสดง

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} = & -2\xi_1 \mu_1 \omega_1 \dot{q}_1 \delta q_1 - 2\xi_2 \mu_2 \omega_2 \dot{q}_2 \delta q_2 - 2\xi_3 \mu_3 \omega_3 \dot{q}_3 \delta q_3 - 2\xi_4 \mu_4 \omega_4 \dot{q}_4 \delta q_4 \\ & - c_f \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \dot{q}_1 - \phi_{2f} \dot{q}_2 - \phi_{3f} \dot{q}_3 - \phi_{4f} \dot{q}_4 + \dot{h}_f \right] \times \\ & \left[\delta u_r + (\delta u_f - \delta u_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \delta q_1 - \phi_{2f} \delta q_2 - \phi_{3f} \delta q_3 - \phi_{4f} \delta q_4 + h_f \right] \\ & - c_r \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \dot{q}_1 - \phi_{2r} \dot{q}_2 - \phi_{3r} \dot{q}_3 - \phi_{4r} \dot{q}_4 + \dot{h}_r \right] \times \\ & \left[\delta u_r + (\delta u_f - \delta u_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \delta q_1 - \phi_{2r} \delta q_2 - \phi_{3r} \delta q_3 - \phi_{4r} \delta q_4 + h_r \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

จากการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการ (2.35) เทียบกับ $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4, \delta u_f$ และ δu_r จะได้ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, U_f และ U_r ดังสมการ (2.36ก)-(2.36ข) ตามลำดับ

$$Q_1 = c_f \phi_{1f} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \dot{q}_1 - \phi_{2f} \dot{q}_2 - \phi_{3f} \dot{q}_3 - \phi_{4f} \dot{q}_4 + \dot{h}_f \right] + \quad (2.36ก)$$

$$c_r \phi_{1r} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \dot{q}_1 - \phi_{2r} \dot{q}_2 - \phi_{3r} \dot{q}_3 - \phi_{4r} \dot{q}_4 + \dot{h}_r \right]$$

$$Q_2 = c_f \phi_{2f} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \dot{q}_1 - \phi_{2f} \dot{q}_2 - \phi_{3f} \dot{q}_3 - \phi_{4f} \dot{q}_4 + \dot{h}_f \right] + \quad (2.36ข)$$

$$c_r \phi_{2r} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \dot{q}_1 - \phi_{2r} \dot{q}_2 - \phi_{3r} \dot{q}_3 - \phi_{4r} \dot{q}_4 + \dot{h}_r \right]$$

$$Q_3 = c_f \phi_{3f} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \dot{q}_1 - \phi_{2f} \dot{q}_2 - \phi_{3f} \dot{q}_3 - \phi_{4f} \dot{q}_4 + \dot{h}_f \right] +$$

(2.36ค)

$$c_r \phi_{3r} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \dot{q}_1 - \phi_{2r} \dot{q}_2 - \phi_{3r} \dot{q}_3 - \phi_{4r} \dot{q}_4 + \dot{h}_r \right]$$

$$Q_4 = c_f \phi_{4f} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \dot{q}_1 - \phi_{2f} \dot{q}_2 - \phi_{3f} \dot{q}_3 - \phi_{4f} \dot{q}_4 + \dot{h}_f \right] +$$

(2.36ง)

$$c_r \phi_{4r} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \dot{q}_1 - \phi_{2r} \dot{q}_2 - \phi_{3r} \dot{q}_3 - \phi_{4r} \dot{q}_4 + \dot{h}_r \right]$$

$$U_f = -c_f \frac{c+s}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \dot{q}_1 - \phi_{2f} \dot{q}_2 - \phi_{3f} \dot{q}_3 - \phi_{4f} \dot{q}_4 + \dot{h}_f \right]$$

(2.36จ)

$$-c_r \frac{c}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \dot{q}_1 - \phi_{2r} \dot{q}_2 - \phi_{3r} \dot{q}_3 - \phi_{4r} \dot{q}_4 + \dot{h}_r \right]$$

$$U_r = -c_f \frac{a}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c+s}{l_1} - \phi_{1f} \dot{q}_1 - \phi_{2f} \dot{q}_2 - \phi_{3f} \dot{q}_3 - \phi_{4f} \dot{q}_4 + \dot{h}_f \right]$$

(2.36ฉ)

$$-c_r \frac{a+s}{l_1} \left[\dot{u}_r + (\dot{u}_f - \dot{u}_r) \frac{c}{l_1} - \phi_{1r} \dot{q}_1 - \phi_{2r} \dot{q}_2 - \phi_{3r} \dot{q}_3 - \phi_{4r} \dot{q}_4 + \dot{h}_r \right]$$

จากการแทนสมการ (2.29), (2.33) และ (2.36ก-2.36ฉ) ลงในสมการ (2.12) จะได้สมการการสั่นไหว
ในรูปแบบของเมตริกซ์ ดังสมการ (2.37)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{u}_f \\ \ddot{u}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{u}_f \\ \dot{u}_r \end{Bmatrix}$$

(2.37)

$$+ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ u_f \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_f \\ p_r \end{Bmatrix}$$

โดยที่ $m_{11} = \mu_1$ $m_{22} = \mu_2$ $m_{33} = \mu_3$ $m_{44} = \mu_4$

$$m_{55} = \frac{M_1}{3} + \frac{M_2 l_2^2}{3l_1^2} \qquad m_{56} = m_{65} = \frac{M_1}{6} + \frac{M_2}{2} \left(\frac{l_2}{l_1} - \frac{2l_2^2}{3l_1^2} \right)$$

$$m_{66} = \frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{2} \left(2 - \frac{2l_2}{l_1} + \frac{2l_2^2}{3l_1^2} \right)$$

$$c_{11} = 2\xi_1 \mu_1 \omega_1 + c_f \phi_{1f}^2 + c_r \phi_{1r}^2$$

$$c_{12} = c_{21} = c_f \phi_{1f} \phi_{2f} + c_r \phi_{1r} \phi_{2r}$$

$$c_{13} = c_{31} = c_f \phi_{1f} \phi_{3f} + c_r \phi_{1r} \phi_{3r}$$

$$c_{14} = c_{41} = c_f \phi_{1f} \phi_{4f} + c_r \phi_{1r} \phi_{4r}$$

$$c_{15} = c_{51} = - \left[c_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{1f} + c_r \frac{c}{l_1} \phi_{1r} \right]$$

$$c_{16} = c_{61} = - \left[c_f \frac{a}{l_1} \phi_{1f} + c_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{1r} \right]$$

$$c_{22} = 2\xi_2 \mu_2 \omega_2 + c_f \phi_{2f}^2 + c_r \phi_{2r}^2$$

$$c_{23} = c_{32} = c_f \phi_{2f} \phi_{3f} + c_r \phi_{2r} \phi_{3r}$$

$$c_{24} = c_{42} = c_f \phi_{2f} \phi_{4f} + c_r \phi_{2r} \phi_{4r}$$

$$c_{25} = c_{52} = - \left[c_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{2f} + c_r \frac{c}{l_1} \phi_{2r} \right]$$

$$c_{26} = c_{62} = - \left[c_f \frac{a}{l_1} \phi_{2f} + c_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{2r} \right]$$

$$c_{33} = 2\xi_{53} \mu_3 \omega_3 + c_f \phi_{3f}^2 + c_r \phi_{3r}^2$$

$$c_{34} = c_{43} = c_f \phi_{3f} \phi_{4f} + c_r \phi_{3r} \phi_{4r}$$

$$c_{35} = c_{53} = - \left[c_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{3f} + c_r \frac{c}{l_1} \phi_{3r} \right]$$

$$c_{36} = c_{63} = - \left[c_f \frac{a}{l_1} \phi_{3f} + c_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{3r} \right]$$

$$c_{44} = 2\xi_{54} \mu_4 \omega_4 + c_f \phi_{4f}^2 + c_r \phi_{4r}^2$$

$$c_{45} = c_{54} = - \left[c_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{4f} + c_r \frac{c}{l_1} \phi_{4r} \right]$$

$$c_{46} = c_{64} = - \left[c_f \frac{a}{l_1} \phi_{4f} + c_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{4r} \right]$$

$$c_{55} = c_f \left(\frac{c+s}{l_1} \right)^2 + c_r \left(\frac{c}{l_1} \right)^2$$

$$c_{66} = c_f \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 + c_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right)^2$$

$$c_{56} = c_{65} = c_f \left(\frac{a}{l_1} \right) \left(\frac{c+s}{l_1} \right) + c_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right) \left(\frac{c}{l_1} \right)$$

$$k_{11} = \mu_1 \omega_1^2 + k_f \phi_{1f}^2 + k_r \phi_{1r}^2$$

$$k_{12} = k_{21} = k_f \phi_{1f} \phi_{2f} + k_r \phi_{1r} \phi_{2r}$$

$$k_{13} = k_{31} = k_f \phi_{1f} \phi_{3f} + k_r \phi_{1r} \phi_{3r}$$

$$k_{14} = k_{41} = k_f \phi_{1f} \phi_{4f} + k_r \phi_{1r} \phi_{4r}$$

$$k_{15} = k_{51} = - \left[k_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{1f} + k_r \frac{c}{l_1} \phi_{1r} \right]$$

$$k_{16} = k_{61} = - \left[k_f \frac{a}{l_1} \phi_{1f} + k_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{1r} \right]$$

$$k_{22} = \mu_2 \omega_2^2 + k_f \phi_{2f}^2 + k_r \phi_{2r}^2$$

$$k_{23} = k_{32} = k_f \phi_{2f} \phi_{3f} + k_r \phi_{2r} \phi_{3r}$$

$$k_{24} = k_{42} = k_f \phi_{2f} \phi_{4f} + k_r \phi_{2r} \phi_{4r}$$

$$k_{25} = k_{52} = - \left[k_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{2f} + k_r \frac{c}{l_1} \phi_{2r} \right]$$

$$k_{26} = k_{62} = - \left[k_f \frac{a}{l_1} \phi_{2f} + k_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{2r} \right]$$

$$k_{33} = \mu_3 \omega_3^2 + k_f \phi_{3f}^2 + k_r \phi_{3r}^2$$

$$k_{34} = k_{43} = k_f \phi_{3f} \phi_{4f} + k_r \phi_{3r} \phi_{4r}$$

$$k_{35} = k_{53} = - \left[k_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{3f} + k_r \frac{c}{l_1} \phi_{3r} \right]$$

$$k_{36} = k_{63} = - \left[k_f \frac{a}{l_1} \phi_{3f} + k_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{3r} \right]$$

$$k_{44} = \mu_4 \omega_4^2 + k_f \phi_{4f}^2 + k_r \phi_{4r}^2$$

$$k_{45} = k_{54} = - \left[k_f \frac{c+s}{l_1} \phi_{4f} + k_r \frac{c}{l_1} \phi_{4r} \right]$$

$$k_{46} = k_{64} = - \left[k_f \frac{a}{l_1} \phi_{4f} + k_r \frac{a+s}{l_1} \phi_{4r} \right]$$

$$k_{55} = k_f \left(\frac{c+s}{l_1} \right)^2 + k_r \left(\frac{c}{l_1} \right)^2$$

$$k_{66} = k_f \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 + k_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right)^2$$

$$k_{56} = k_{65} = k_f \left(\frac{a}{l_1} \right) \left(\frac{c+s}{l_1} \right) + k_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right) \left(\frac{c}{l_1} \right)$$

$$p_1 = (N_f + k_f h_f + c_f \dot{h}_f) \phi_{1f} + (N_r + k_r h_r + c_r \dot{h}_r) \phi_{1r}$$

$$p_2 = (N_f + k_f h_f + c_f \dot{h}_f) \phi_{2f} + (N_r + k_r h_r + c_r \dot{h}_r) \phi_{2r}$$

$$p_3 = (N_f + k_f h_f + c_f \dot{h}_f) \phi_{3f} + (N_r + k_r h_r + c_r \dot{h}_r) \phi_{3r}$$

$$p_4 = (N_f + k_f h_f + c_f \dot{h}_f) \phi_{4f} + (N_r + k_r h_r + c_r \dot{h}_r) \phi_{4r}$$

$$p_f = -k_f h_f \left(\frac{c+s}{l_1} \right) - k_r h_r \left(\frac{c}{l_1} \right) - c_f \dot{h}_f \left(\frac{c+s}{l_1} \right) - c_r \dot{h}_r \left(\frac{c}{l_1} \right)$$

$$p_r = -k_f h_f \left(\frac{a}{l_1} \right) - k_r h_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right) - c_f \dot{h}_f \left(\frac{a}{l_1} \right) - c_r \dot{h}_r \left(\frac{a+s}{l_1} \right)$$

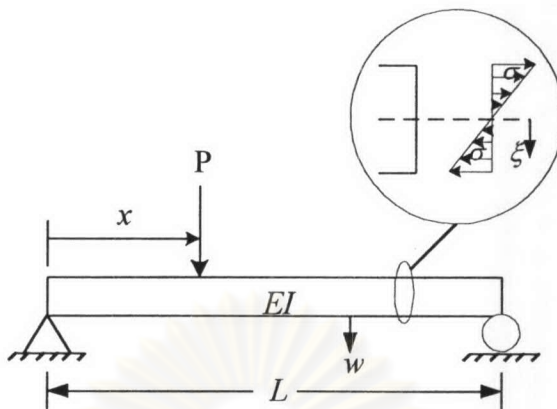
2.4 การหาความเครียดจากแบบจำลอง

จากกฎของฮุค (Hooke 's Law) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ดังสมการ

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.38)$$

โดยที่	σ	คือ ค่าความเค้น (stress)
	ε	คือ ค่าความเครียด (strain)
	E	คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (elastic modulus) ของวัสดุ

พิจารณาคานเมื่อรับน้ำหนักบรรทุก P ดังรูป 2.5 จะเกิดความเค้น σ ขึ้นที่หน้าตัดใด ๆ ของคานซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 2.5 แสดงความเค้นที่หน้าตัดใด ๆ ของคานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก

$$\sigma(\xi) = \frac{M\xi}{I} \quad (2.39)$$

$$M = -EI\kappa \quad (2.40)$$

$$\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.41)$$

- โดยที่ M คือ โมเมนต์ดัด (bending moment) เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกที่หน้าตัดใด ๆ ของคาน
 I คือ โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) รอบแกนที่ถูกดัด
 ξ คือ ระยะที่วัดจากแนวแกนสะเทินถึงจุดที่พิจารณา
 κ คือ ความโค้ง (curvature) เนื่องจากการดัด
 w คือ การโก่งตัวของคานที่ระยะทาง x ใดๆ

จากสมการ (2.38), (2.39), (2.40) และ (2.41) จะได้

$$\varepsilon = -\xi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.42)$$

แทนสมการ (2.1)-(2.5) ลงใน (2.42) จะได้ความเครียดที่ตำแหน่ง x, y และเวลา t ใดๆ ของสะพาน

ดังนี้

$$\varepsilon(x, y, t, \xi) = \frac{\xi\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left[q_1(t) + 4q_2(t) + 9q_3(t) + \frac{2y}{B} q_4(t) \right] \quad (2.43)$$

