บทที่ 2

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

<u>ระดับของการวัด</u> (Level of Measurement)

ลักษณะอย่างหนึ่งที่จะชี้ให้เห็นว่าควรใช้วิธีการทางสถิติแบบใดในการวิเคราะห์ข้อมูลคือระดับของการวัดตัวแปร ซึ่งจะบอกลักษณะของข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย ระดับของการวัดแบ่งออกเป็น 4 ระดับ แต่ละระดับใช้มาตราการวัดที่แตกต่างกันคือ

1. <u>มาตรานามบัญญัติ</u> (Nominal Scales) เป็นมาตราการวัดที่ใช้กับข้อมูลที่มีลักษณะหยาบที่สุด อาจกล่าวได้ว่าการวัดในระดับนี้เป็นเพียงการเรียกชื่อหรือจำแนกชนิดของสิ่งต่าง ๆ เท่านั้นเอง ดังนั้นจึงมีบางทฤษฎีไม่ยอมรับการวัดในระดับนี้ว่าเป็นการวัด (Measurement) เพราะไม่สามารถบอกปริมาณมากน้อยได้ นอกจากแสดงให้เห็นเพียงความแตกต่างของสิ่งต่าง ๆ เท่านั้น เช่น การจำแนกเป็นเพศหญิง - ชาย สติปัญญาสูง-ต่ำ ซึ่งเป็นการจำแนกตามลักษณะหรือคุณสมบัติประจำตัว นอกจากนี้ยังมีการจำแนกที่สมมติกันขึ้นเองในหมู่พวกของตนแต่ไม่ใช่ลักษณะประจำตัว เช่น เลขประจำตัวนักเรียนแต่ละคนในห้องเรียนเป็น 1, 2, 3, ... ซึ่งตัวเลขเหล่านี้ไม่ได้บอกปริมาณมากน้อยหรือมีค่าสูงต่ำแต่อย่างไร แต่เป็นการบอกให้รู้ว่าเป็นนักเรียนคนละคนเท่านั้น การแบ่งหรือจำแนกแบบนี้ก็เพื่อจัดคนหรือสิ่งของหรือลักษณะต่าง ๆ ให้ออกเป็นกลุ่มหรือพวกที่มีลักษณะอย่างเดียวกันหรือใกล้เคียงกัน

ลักษณะอีกอย่างหนึ่งของการวัดในลักษณะนี้คือ ไม่สามารถจะแสดงให้เห็นปริมาณมากน้อยหรือสูงต่ำแต่อย่างใด แม้การวัดในบางกรณีจะปรากฏออกมาในรูปของตัวเลขก็ตาม กล่าวคือตัวเลขเหล่านั้นจะไม่มีความหมายเชิงปริมาณ ดังนั้นจึงไม่สามารถนำตัวเลขเหล่านั้นมาบวก ลบ คูณ หรือหารกันได้เลย ลักษณะที่กระทำได้ก็คือการนับจำนวนหรือความถี่ของลักษณะที่มีเหมือนกันเท่านั้น นั่นคือเป็นการตรวจดูว่าลักษณะแต่ละอย่างมีความถี่เท่าไร

2. มาตราจัดอันดับ (Ordinal Scales)

ลักษณะของการวัดตามมาตรานี้สูงกว่ามาตราแรกคือ สามารถจะจัดลำดับข้อมูลได้ว่ามาก - น้อย สูง - ต่ำ แต่ก็ยังถือว่าเป็นการวัดที่ค่อนข้างหยาบเช่นกัน มาตราการวัดในระดับนี้นอกจากจะเป็นการจำแนกข้อมูลว่าต่างกันแล้วยังบอกได้อีกว่าที่ต่างกันนั้น ต่างไปทางใดดีหรือเลวกว่ากัน หรือมากหรือน้อยกว่ากัน อย่างไรก็ตามข้อมูลที่ปรากฏออกมาเป็นตัวเลขในระดับนี้ก็ยังไม่สามารถนำมาบวก ลบ คูณ หาร ได้ นั่นคือการวัดในมาตรานี้บอกได้แต่ทิศทางแต่ไม่สามารถบอกระยะห่างระหว่างของสองสิ่งหรือหลาย ๆ สิ่งได้

3. มาตราอันตรภาค (Interval Scales)

ลักษณะของการวัดในมาตราแบบนี้มีลักษณะเหมือนมาตราจัดอันดับทุกอย่าง แต่ดีกว่าตรงที่มีคุณสมบัติเพิ่มขึ้นอีกประการหนึ่งคือสามารถบอกความห่างระหว่างสองจุดได้ด้วย โดยแต่ละหน่วยการวัดจะมีระยะห่างเท่า ๆ กัน แต่ก็เป็นระยะห่างระหว่าง 2 จุดเท่านั้นไม่ใช่ระยะห่างจากจุดเริ่มต้น ลักษณะประการสำคัญในการวัดในระดับนี้คือยังไม่มีศูนย์แท้หรือศูนย์สัมบูรณ์ (Absolute Zero) แต่ก็มีศูนย์ซึ่งเป็นศูนย์เทียมหรือศูนย์ที่สมมุติกันขึ้น

การวัดทางการศึกษาหรือจิตวิทยาหรือในทางพฤติกรรมศาสตร์นั้น ถ้าจะพิจารณากันอย่างถ่องแท้แล้วจะพบว่าส่วนใหญ่ยังไม่สามารถวัดได้ถึงมาตรานี้ แต่ก็พยายามจะใช้มาตรานี้โดยการตกลงกัน (Assume)

4. มาตราอัตราส่วน (Ratio Scales) เป็นมาตราการวัดที่มีลักษณะสมบูรณ์ทุกอย่าง ดีกว่ามาตราอันตรภาคตรงที่มีศูนย์แท้ เครื่องหมายหรือวิธีการทางสถิติหรือทางคณิตศาสตร์ใช้ได้ทั้งหมด ทั้งการบวก ลบ คูณ หาร ถอดราก หรือยกกำลังต่าง ๆ หน่วยการวัดระดับนี้จะพบมากในการวัดทางฟิสิกส์ต่าง ๆ เช่นวัดส่วนสูงเป็นเซ็นติเมตร เป็นนิ้ว ชั่งน้ำหนักเป็นกิโลกรัม เป็นปอนด์

สถิติทดสอบเอช ของคราสคัล แวลิส (The Kruskal - Wallis's H-Test)

สถิติเพื่อการทดสอบ เอช (H - test) เป็นสถิติทดสอบด้านนันพาราเมตริกวิธีหนึ่ง ซึ่งสามารถใช้ได้กับข้อมูลที่มีกลุ่มตัวอย่างตั้งแต่ 3 กลุ่ม ที่เป็นอิสระต่อกันและเป็นตัวแปรต่อเนื่องที่มีระดับการวัดตั้งแต่มาตราจัดอันดับขึ้นไป

คราสคัลและแวลิสเป็นผู้พัฒนาขึ้นมาในปี ค.ศ. 1952 เพื่อศึกษาเปรียบเทียบความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติของประชากรซึ่งเป็นที่มาของกลุ่มตัวอย่างสุ่มตั้งแต่สามกลุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน สถิติทดสอบ เอช ของคราสคัล แวลิส นี้มีพื้นฐานการสร้างเช่นเดียวกับสถิติทดสอบของวิลค๊อกซอน (Wilcoxon's Rank-Sum Test) แตกต่างกันที่สถิติทดสอบ เอช นั้นใช้เปรียบเทียบกับกลุ่มตัวอย่างที่มากกว่า 2 กลุ่มขึ้นไป และมีลักษณะการวิเคราะห์ในทำนองเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียว โดยผลบวกกำลังสองของความแปรปรวนระหว่างกลุ่มนั้น (Mean Square between group) คิดคำนวณโดยใช้ค่าอันดับซึ่งมีค่าเท่ากับ $\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{r}_j - \bar{r})^2$ และค่ากำลังสองของความแปรปรวนทั้งหมด (total mean square) มีค่าเท่ากับ $N(N+1)/12$ ซึ่งสามารถให้นิยามของสถิติทดสอบ เอช ในรูปแบบนี้ได้คือ

$$H = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{r}_j - \bar{r})^2}{{}^{1}/_{12}\, N(N+1)}$$

หรือในรูปแบบที่นิยมใช้โดยทั่วไปคือ

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

คราสคัลและแวลิส ได้แสดงให้เห็นว่า ถ้ากำหนดให้ r_{ik} แทนอันดับของ X_{ik} และ n แทนขนาดของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots\ldots n_k$$

ดังนั้น $$\bar{R}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} r_{ik} = \frac{R_k}{n_k}$$

และ $E(\bar{R}_k) = \bar{R}$

จากนิยามของการกระจายไคสแควร์ สามารถแสดงได้ว่า U ประมาณได้ด้วยการกระจายของไคสแควร์ ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k-1 เมื่อ

$$U = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_K^2 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{(R_k - \bar{R})^2}{VAR(\bar{R}_k)}$$

เนื่องจาก

$$E(r_{ik}) = \frac{N+1}{2}$$

$$VAR(r_{ik}) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

$$E(\bar{R}_k) = E\left[\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} r_{ik}\right]$$

$$= \frac{1}{n_k} \; n_k \; \Sigma(r_{ik})$$

$$= E(r_{ik})$$

$$= \frac{N+1}{2}$$

$$VAR(\bar{R}_k) = \frac{VAR(r_{ik})}{n_k} \left[\frac{N - n_k}{N - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{n_k} \left[\frac{N^2 - 1}{12}\right] \left[\frac{N - n_k}{N - 1}\right]$$

$$= \frac{(N+1)\,(N - n_k)}{12 n_k}$$

ถ้า n_k มีขนาดใหญ่ ตามทฤษฎี central - limit แล้ว $\bar{R}_k$ จะมีการกระจายเป็นแบบปกติ

$$Z_k = \frac{\bar{R}_k - E(\bar{R}_k)}{\sqrt{VAR(\bar{R}_k)}}$$

$$Z_k^2 = \frac{(\bar{R}_k - (N + 1)/2)^2}{(N + 1)(N - n_k)} \cdot 12k$$

ซึ่ง Z_k^2 จะมีการกระจายประมาณด้วยการกระจายไคส์แคว์ ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ 1

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{N - n_k}{N}\right) Z_k^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N - n_k)}{N} \cdot \frac{\left[\bar{R}_k - (N + 1)_{/2}\right]^2}{(N + 1)(N - n_k)} \cdot 12n_k$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{12n_k}{N(N + 1)} \left[\bar{R}_k - \frac{(N + 1)}{2}\right]^2$$

$$= \frac{12}{N(N + 1)} \sum_{k=1}^{K} n_k \left[\bar{R}_k - \frac{(N + 1)}{2}\right]^2$$

$$= H$$

ดังนั้น H จะมีการกระจายประมาณได้ด้วยการกระจายของไคส์แคว์ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k-1 เมื่อ N มีขนาดใหญ่

<u>ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับ Kruskal-Wallis's H-Test</u> (Conover, 1980 : 230)

1. กลุ่มตัวอย่างทั้ง k กลุ่มจะต้องเป็นกลุ่มตัวอย่างสุ่มของแต่ละประชากร

2. กลุ่มตัวอย่างสุ่มภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่มเป็นอิสระต่อกัน

3. มาตราการวัดอย่างน้อยที่สุดเป็นมาตราจัดลำดับและเป็นตัวแปรต่อเนื่อง (variable consist of continuous ordinal data) (Chris Leach, 1979; 148)

4. ฟังก์ชั่นการกระจายของประชากร k กลุ่มเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันโดยประมาณ

<u>การคำนวณค่าสถิติทดสอบ</u> (Test statistics)

1. กรณีที่มีอันดับไม่ซ้ำกัน (untied rank)

นำคะแนนที่ได้จากการสังเกตทั้งหมดมาจัดอันดับแล้วรวมค่าอันดับของแต่ละกลุ่มให้ผลรวมของค่าอันดับในแต่ละกลุ่มเป็น R_j แล้วนำไปหาค่าทดสอบ เอช จากสูตรเอชที่ไม่ใช้ค่าแก้ดังนี้

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

2. กรณีที่มีอันดับที่ซ้ำกัน (ties rank)

นำคะแนนที่ได้จากการสังเกตทั้งหมดมาจัดอันดับ และในอันดับที่ซ้ำกันนั้นให้ใช้ค่าเฉลี่ยของอันดับเป็นตัวแทนอันดับที่ซ้ำ แล้วนับจำนวนความถี่ของการซ้ำในแต่ละอันดับให้เป็น t_s และรวมค่าอันดับของแต่ละกลุ่มให้ผลรวมของค่าอันดับในแต่ละกลุ่มเป็น R_j แล้วนำไปหาค่าทดสอบ เอช จากสูตร เอช ที่ใช้ค่าแก้ ดังนี้

$$H^* = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)}{1 - \frac{1}{N^3 - N} \sum_{s=1}^{d} (t_s^3 - t_s)}$$

เมื่อ N คือจำนวนค่าสังเกตทั้งหมด

n คือจำนวนค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มตัวอย่าง

R คือผลรวมของอันดับในแต่ละกลุ่มตัวอย่าง

t คือจำนวนความถี่ของการซ้ำในแต่ละอันดับ

k คือจำนวนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

s คือจำนวนกลุ่มของอันดับที่มีการซ้ำเกิดขึ้น

<u>การคำนวณค่าวิกฤติสำหรับ Kruskal-Wallis's H-Test</u>

เมื่อมีจำนวนกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 3 ($k = 3$) และในแต่ละกลุ่มมีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ 5 หรือน้อยกว่า 5 สามารถใช้ค่านัยสำคัญของ เอช เทส จากตารางซึ่งสร้างโดยคราสคัลและแวลลิส (Kruskal and Wallis, 1952) ซึ่งมีในหนังสือสถิตินันพาราเมตริกมาตรฐานทุกเล่ม

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 15 ($k > 3$) ค่านัยสำคัญของ เอช เทส สามารถหาจากตารางไคสแควร์ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $k - 1$

<u>ลักษณะการกระจายของ Kruskal-Wallis's H-Test</u>

คราสคัล (Kruskal, 1952 : 527 - 528) ได้พิสูจน์ว่าการกระจายของ เอช เทส ภายใต้สมมุติฐานสูญที่เป็นจริงนั้นจะมีลักษณะเป็นไคสแควร์ ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $k-1$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $k-1$ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ

$$2(k-1) - \frac{2\left[3k^2 - 6k + N(2k^2 - 6k + 1)\right]}{5N(N+1)} - \frac{6}{5}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}$$

เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างใหญ่มาก (sample size approaches infinity) ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของ เอช เทส จะเท่ากับ $k-1$ และ $2(k-1)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของการกระจายไคสแควร์ ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระ $k-1$ ซึ่งในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่นี้คราสคัลและแวลลิสได้รับรองว่าการใช้ค่านัยสำคัญ

ของเอช เทส นี้สามารถประมาณได้จากค่าของไคส์แควร์ที่ขั้นแห่งความเป็นอิสระ k-1 ได้ดีที่สุด โดยประมาณว่าค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มตัวอย่างมากกว่า 5 ก็สามารถใช้ได้

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดกลาง ๆ คราส์คัลได้แนะนำว่าอาจจะใช้การกระจายโดยประมาณของแกมมา หรือ เบต้า ก็ได้ (Gamma and Beta Distribution) ในกรณีที่ใช้การกระจายโดยประมาณของแกมมาจะมีค่าเฉลี่ย (E) คือ

$E = k-1$ และค่าความแปรปรวน (V) คือ

$$V = 2(k-1) - \frac{2\left[3k^2 - 6k + N(2k^2 - 6k + 1)\right]}{5N(N+1)} - \frac{6}{5}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}$$

และแปลงเป็นค่าไคส์แควร์คือ $\chi^2 = 2HE/V$ ที่มีค่าขั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $2E^2/V$ กรณีที่ใช้การกระจายโดยประมาณของเบต้าใช้ค่าเฉลี่ย (E) และค่าความแปรปรวน (V) เท่ากับการกระจายโดยประมาณของแกมมาและแปลงเป็นการกระจายแบบเอฟ ดังนี้

$$F = \frac{H(M-E)}{E(M-H)}$$ โดย

$$M = \frac{N^3 - \sum_{i=1}^{k} n_i^3}{N(N+1)}$$ และจำนวนขั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ

$$f_1 = E \cdot \frac{E(M-E) - V}{{}^1/_2\, MV}$$ และ $$f_2 = \frac{M-E}{E} \cdot f_1$$ แต่ค่าขั้นแห่งความเป็นอิสระที่ได้ไม่เป็นจำนวนเต็มทำให้ไม่สามารถใช้ค่าเอฟได้จึงแปลงเป็นการกระจายแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 คือ

$$k_p = \frac{(1 - 2/9f_2)F' + 2/9f_1 - 1}{\sqrt{2F'^2/9f_2 + 2/9f_1}}$$ และใช้ค่าความน่าจะเป็นจากตารางการกระจายแบบปกติ

การกระจายที่แท้จริงของเอชภายใต้สมมติฐานสูญ และการกระจายโดยประมาณด้วยการกระจายไคส์แควร์, แกมมาและเบต้านั้นได้แสดงการเปรียบเทียบการ

กระจายทั้ง 4 ชนิดนี้ในแผนภาพที่ 2 และ 3 (Kruskal and Wallis, 1952 : 611) โดย χ^2 แทนการกระจายของไคสแคว์ Γ แทนการกระจายของแกมมา และ β แทนการกระจายของเบต้า

<u>การแจกแจงของไคสแคว์</u> (Chi-Square Distribution)

Chi อ่านว่าไค เป็นคำที่มาจากภาษากรีก ใช้สัญลักษณ์ χ แทน แต่เดิม ไม่ได้เรียกว่าการแจกแจงแบบไคสแคว์ (Cochan, 1952) เนื่องจากปีคริสตศักราช 1836 ได้มีชาวเยอรมันชื่อ เฮลเมอร์ท (Robert Ericdrich Helmert) ค้นพบการแจกแจงที่เป็นโค้งปกติ และเรียกว่าการแจกแจงแบบ เฮลเมอร์ท (Helmert's Distribution) การกระจายซึ่งเฮลเมอร์ทค้นพบนี้ได้ถูกละเลยเป็นเวลา 20 ปีเศษ

ต่อมาในปีคริศตศักราช 1900 เปียร์สัน (Karl Pearson) ได้ค้นพบใหม่และผลงานชิ้นนี้นับว่าเป็นรากฐานสำหรับสถิติแผนใหม่ โดยเริ่มจากการพิสูจน์ว่าถ้ากลุ่มของตัวแปรที่สัมพันธ์กัน Z; (Correlated Variates) จำนวน n ตัว มีมัชฌิมเลขคณิตเท่ากับศูนย์ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

$$dF = (2\P)^{-1/2^n} \exp^{(Q/2)} dz_1\, dz_2\, dz_3 \ldots dz_n$$

(charles C. Peter and Walter Van Vourhis,1940)

หลังจากนั้นเปียร์สัน (Karl Pearson) ได้เสนอการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีที่ข้อมูลแยกออกจากกัน โดยเริ่มจากการทราบค่าความถี่ที่คาดหวัง (m_i) ล่วงหน้า และ x_i ใด ๆ ที่ได้จากการสังเกตจะต้องมีการแจกแจงแบบมัลติโนเมียล (Multinomial Distribution) เปียร์สันยอมรับว่า x_i นั้น อาจมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ซึ่งจุดนี้เปียร์สันยอมรับว่าในกรณีที่ค่าความถี่ที่คาดหวังมีขนาดใหญ่พอทุก ๆ ค่า และผลงานในตอนแรกของเขานี้ ทำให้ทราบว่าถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่ค่า χ^2 จะมีชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k-1

ต่อมาฟิชเชอร์ (R.A. Fisher) ได้หลีกเลี่ยงความยุ่งยากในงานของเปียร์สันโดยชี้ให้เห็นว่าถ้ายอมรับว่าสิ่งที่สังเกตได้ x_i มีการแจกแจงแบบพัวซอง (Poisson

Distribution)

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{e^{-m_i} m_i^{x_i}}{x_i\,!} = e^{-n} \prod_{i=1}^{k} \frac{m_i^{x_i}}{x_{i}!} \quad , \quad m = n$$

มีค่า m_i เป็นความถี่ที่คาดหวังหรือมัชฌิมและขนาดของกลุ่มตัวอย่าง n ใหญ่มากแล้ว $y_i = \frac{x_i - m_i}{\sqrt{m_i}}$ จะมีการแจกแจงโค้งปกติ เมื่อมัชฌิมเลขคณิตคือ mi และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $\sqrt{m}$ ดังนั้นการแจกแจงของ χ^2 คือ $Y_1^2 + Y_2^2 \ldots . Y_k^2$, เมื่อ y_i มีการแจกแจงอย่างอิสระ และ

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i \sqrt{m_i} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m_i) = 0$$

<u>ลักษณะของการแจกแจงของไคสแคว์</u>

ดังได้กล่าวจากตอนต้นแล้วว่าไคสแคว์ เป็นลักษณะการกระจายแบบหนึ่ง และมีสมการอธิบายลักษณะการกระจายไคสแคว์ดังนี้

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2}\, \Gamma\left(^{n}/_{2}\right)} \exp\left(- \chi^2/_2\right) \left(\chi^2\right)^{n/2 - 1} \qquad 0 \leq \chi^2 < \infty$$

การกระจายแบบนี้จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ n และความแปรปรวนเท่ากับ 2n เมื่อ n คือค่าขั้นแห่งความเป็นอิสระ และ Γ คือการกระจายแบบแกมมา

แมคนีมาร์ (Mcnemar, 1949 : 194 - 195) ระบุว่าการแจกแจงที่แท้จริงของไคสแคว์นั้นเป็นการแจกแจงที่ต่อเนื่อง แต่เมื่อนำไปใช้นั้นส่วนมากใช้กับข้อมูลที่มีลักษณะเป็นการกระจายที่ไม่ต่อเนื่อง ซึ่งทำให้โค้งขาดตอนแต่ก็ยังยอมรับว่ามีการแจกแจงแบบไคสแคว์ ลักษณะการกระจายของไคสแคว์นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนขั้นแห่งความเป็นอิสระ ถ้าขั้นแห่งความเป็นอิสระมีจำนวนมากขึ้น ส่วนโค้งจะเบ้น้อย และจะมีตำแหน่งทางขวามือมากขึ้นจนกระทั่งเกือบมีการกระจายเป็นโค้งปกติ

คุณสมบัติของไคสแควร์

1. การแจกแจงของไคสแควร์ตามทฤษฎีเป็นการแจกแจงที่ต่อเนื่อง

2. ความโค้งจะเริ่มจาก 0 ถึง∞

3. ค่าออร์ดิเนตสูงสุด จะอยู่ที่ $\chi^2 = n - 1$ โดยที่ n คือจำนวนขั้นแห่งความเป็นอิสระ

4. ลักษณะของส่วนโค้งจะเบ้ไปทางขวามือ

5. มีลักษณะเป็นส่วนโค้งของเปียร์สันชนิดที่ 3 (Pearson Type III curve)

6. จะเข้าใกล้โค้งปกติที่มีมัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีจำนวนมากขึ้น

7. การกระจายเป็นไปตามกฎของการแจกแจงแบบมัลติโนเมียล (Multinomial Distribution)

8. สำหรับการแจกแจงของไคสแควร์เมื่อขั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ n จะมีลักษณะดังนี้

8.1 ค่าเฉลี่ยจะมีค่าเท่ากับ n ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $\sqrt{2n}$

8.2 ค่ามัธยฐานเท่ากับ n - 2

8.3 ค่าความเบ้ของโค้ง (Skewness) เท่ากับ $\sqrt{2/n}$

<u>ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับการซ้ำของค่าสังเกตในสถิติทดสอบนันพาราเมตริก</u>

สถิติทางด้านนันพาราเมตริกส่วนมากข้อตกลงที่พบเสมอคือข้อตกลงเกี่ยวกับความต่อเนื่องของตัวแปร ซึ่งข้อมูลน่าจะวัดได้ถึงระดับอันตรภาค โดยเฉพาะสถิติทดสอบที่ใช้กับข้อมูลมาตราจัดอันดับ ถึงแม้ตามทฤษฎีตัวแปรเหล่านั้นจะเป็นตัวแปรต่อเนื่อง แต่ในทางปฏิบัตินั้นอาจจะสามารถวัดได้เพียงระดับการจัดอันดับเท่านั้นก็ได้ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งระหว่างข้อมูลเชิงทฤษฎีและข้อมูลเชิงประจักษ์ ซึ่งควรจะต้องนำมาพิจารณาด้วยอย่างยิ่งเมื่อจะใช้สถิติทดสอบ โดยเฉพาะการซ้ำของค่าสังเกตนั้นจะเกิดขึ้นเป็นจำนวนมากมายสำหรับตัวแปรขาดตอน แต่มักพบเสมอว่าตัวแปรต่อเนื่องมีการซ้ำของค่าสังเกตเกิดขึ้น ดังนั้นเมื่อเกิดการซ้ำของค่าสังเกตและต้องการใช้สถิติทดสอบที่ใช้มาตราจัดอันดับ วิธีที่นิยมใช้แก้ปัญหาคือ การให้

อันดับเฉลี่ยระหว่างค่าสังเกตที่ซ้ำกัน และใช้ค่าแก้ที่เรียกว่า correction for ties ซึ่งจะทำให้มีอำนาจการทดสอบเกือบเท่ากับการที่ไม่มีค่าซ้ำเกิดขึ้น (Marascuilo, 1973; 17)

แบรดเลย์ (Bradley, 1968; 49) กล่าวว่าตามทฤษฎีนั้นกลุ่มตัวอย่างของตัวแปรที่มาจากประชากรตัวแปรต่อเนื่องย่อมต่อเนื่องด้วย หมายความว่าจะต้องไม่มีค่าใดที่มีค่าเท่ากันเลยหรือค่าของความแตกต่างเท่ากับศูนย์ดังนั้นข้อตกลงเกี่ยวกับความต่อเนื่อง (Continuity Assumption) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อไม่มีการซ้ำของค่าสังเกตเกิดขึ้นระหว่างกลุ่มตัวอย่างแต่ทางปฏิบัติพบว่าข้อมูลเชิงประจักษ์ส่วนมากไม่สามารถหลีกเลี่ยงการซ้ำของค่าสังเกตได้ เมื่อจะนำมาให้ค่าอันดับแก่ค่าสังเกตทำให้เกิดปัญหาว่าจะดำเนินการอย่างไร ซึ่งมีวิธีการแก้ปัญหาหลายวิธี

ดังนั้นในกรณีที่มีการฝ่าฝืนข้อตกลงเกี่ยวกับการซ้ำของค่าสังเกตจะทำให้มีผลต่อค่าสถิติทดสอบนั้นด้วย ซึ่ง กิบบอนส์ (Gibbon, 1971 : 96) และแบรดเลย์ (Bradley, 1968 : 51 - 55) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหา 7 วิธีคือ

1. Randomization คือเมื่อมีการซ้ำของค่าสังเกตเกิดขึ้นในแต่ละเซทของค่าสังเกตที่ซ้ำกันก็ใช้วิธีให้อันดับกับค่าสังเกตเหล่านั้นที่ซ้ำกัน โดยการสุ่ม และจะไม่มีอันดับที่ซ้ำกันแม้ว่าค่าสังเกตจะเท่ากันก็ตาม การใช้วิธีนี้นั้นทฤษฎีทางด้านสถิติของการจัดอันดับยังคงใช้อยู่เพราะการให้ค่าของอันดับแต่ละค่าสังเกตนั้นมีค่าความน่าจะเป็นเท่ากันโดยเฉพาะไม่ทำให้ null probability Distribution เปลี่ยนแปลงแต่อาจจะมีผลต่อ the Probability Distribution under alternative

2. Midranks วิธีการนี้จะให้อันดับของค่าสังเกตที่ซ้ำกันโดยวิธีเฉลี่ยค่าของอันดับให้กับกลุ่มของค่าสังเกตที่ซ้ำกัน นั่นคือถ้ามีค่าสังเกตกลุ่มใดซ้ำกัน ค่าของอันดับในกลุ่มค่าสังเกตนั้นก็ซ้ำกันด้วย วิธีการนี้ใช้ได้เหมาะสมในกรณีที่มีการซ้ำเป็นจำนวนมาก ๆ แต่วิธีการนี้จะมีผลต่อ Null Distribution of ranks และที่เห็นได้ชัดเจนคือค่าเฉลี่ยของอันดับ (Mean Rank) จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงแต่จะเปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าความแปรปรวนของอันดับเท่านั้น (the varaince of the rank) จะมีค่าลดลง วิธีการ Midranks นิยมใช้สำหรับสถิติทดสอบบางแบบทดสอบที่ต้องการนำไปใช้แก้ปัญหาการซ้ำ (correction for ties)

3. Average Statistic ถ้าไม่ใช้วิธีการที่กล่าวมาแล้วทั้ง 2 วิธี อาจจะใช้วิธีนี้คือคำนวณค่าสถิติทดสอบสำหรับค่าความเป็นไปได้ทั้งหมดของการจัดอันดับคือ $\prod_{i=1}^{t} T_i!$ และนำมาหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย ในทำนองเดียวกันพบว่าสถิติทดสอบนี้ก็จะมีค่าเฉลี่ยของอันดับคงเดิมแต่ค่าความแปรปรวนจะลดลงกว่าเดิม

4. Average Probability วิธีการนี้แทนที่จะใช้วิธี Average Statistics สำหรับแต่ละความเป็นไปได้ในการจัดอันดับ อาจจะใช้วิธีหาค่าความน่าจะเป็นของแต่ละค่าสถิติทดสอบและหาค่าเฉลี่ยอย่างง่ายของค่าความน่าจะเป็นแทนค่าความน่าจะเป็นทั้งหมด วิธีการนี้ต้องการเพียงตาราง Exact null Probability Distribution ของสถิติทดสอบมากกว่าตารางค่าวิกฤต (Simply a table of critical Values)

5. Least Favorable Statistics วิธีการนี้เป็นวิธีการหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสถิติทดสอบแล้วเลือกมาเพียง 1 ค่า ที่มีค่าความน่าจะเป็นในการปฏิเสธที่ต่ำที่สุด (Minimizes the probability of rejection) วิธีนี้เป็นวิธีที่นิยมมากใน conservative test คือหาค่าความน่าจะเป็นที่ต่ำที่สุดในการสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีที่สุด

6. Range of Probability เป็นวิธีการคำนวณหาค่า 2 ค่าของสถิติทดสอบทั้ง Least favorable และ Most favorable แล้วพิจารณาว่าทั้ง 2 ค่า ไม่ตกอยู่ในเขตปฏิเสธหรือทั้ง 2 ค่า ไม่ตกอยู่นอกเขตปฏิเสธ (Unless both fall inside or both fall outside the rejection Region)

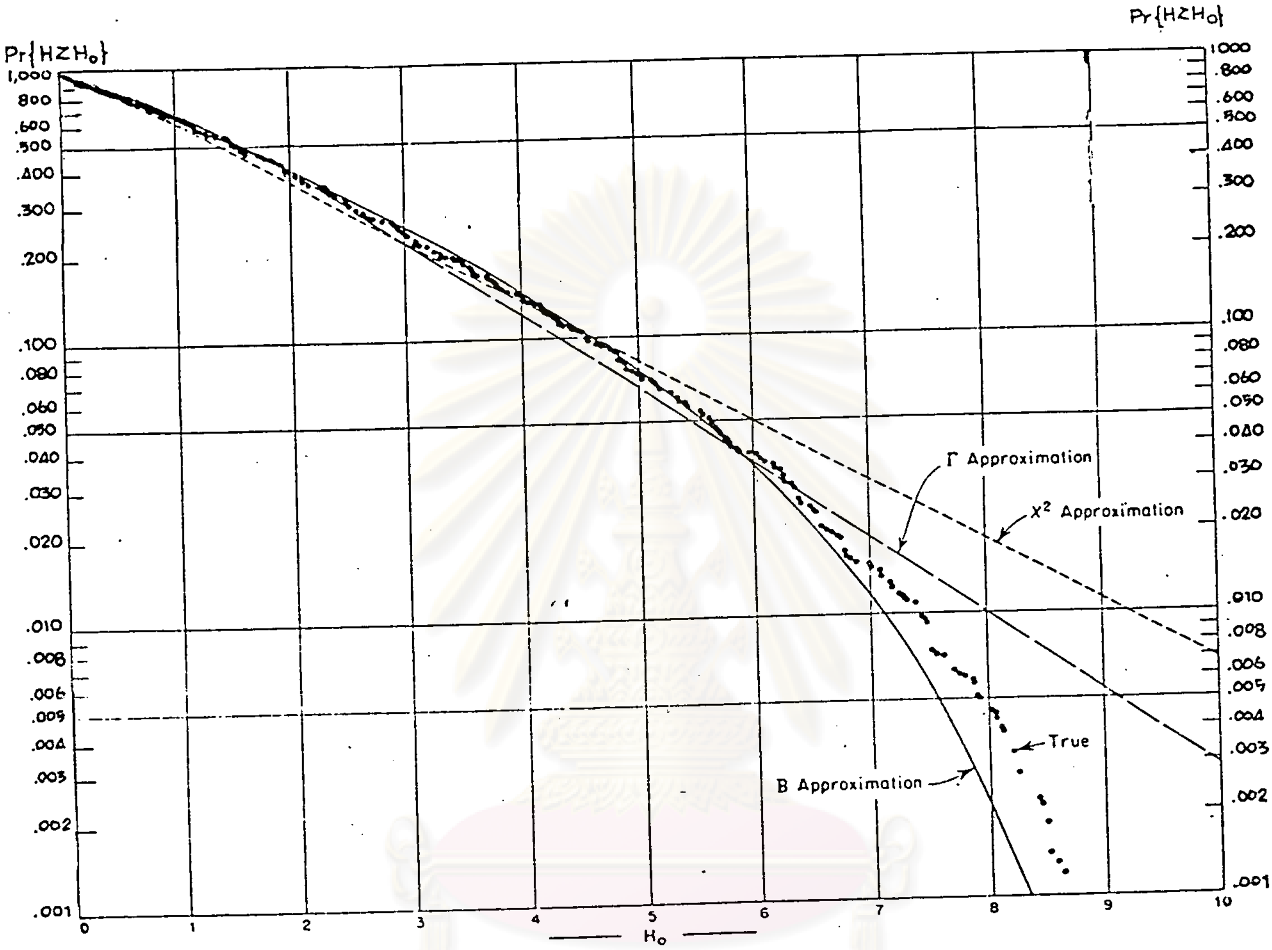
7. Omission of tied observation วิธีการนี้เป็นวิธีการสุดท้ายและเป็นไปได้มากที่สุดคือการตัดทิ้งค่าสังเกตที่ซ้ำซึ่งจะทำให้กลุ่มตัวอย่างลดลงอย่างสอดคล้อง วิธีนี้จะทำให้รายละเอียดบางอย่างสูญเสียไป แต่ถ้าจำนวนค่าสังเกตที่ตัดทิ้งไปมีความสัมพันธ์เพียงเล็กน้อยกับกลุ่มตัวอย่าง การสูญเสียก็จะถือว่าน้อยมาก แต่วิธีการนี้จะเกิดความลำเอียง (bias) ต่อการปฏิเสธสมมติฐานสูญ

ครัสคัล และแวลิส (Kruskal and Wallis, 1952 : 584 - 587) สำหรับการทดสอบ H ถ้าระดับการซ้ำของค่าสังเกตน้อยกว่า 25 เปอร์เซ็นต์ และใช้ Midrank แทนอันดับที่ซ้ำกันแล้วจะใช้สูตรที่เป็นค่าแก้หรือไม่มีค่าแก้จะมีผลทำให้ค่าความน่าจะเป็นจากการใช้สองสูตรนี้แตกต่างกันไม่เกิน 10 เปอร์เซ็นต์ ดังนั้นอาจจะไม่ต้องใช้ค่าแก้ก็ได้

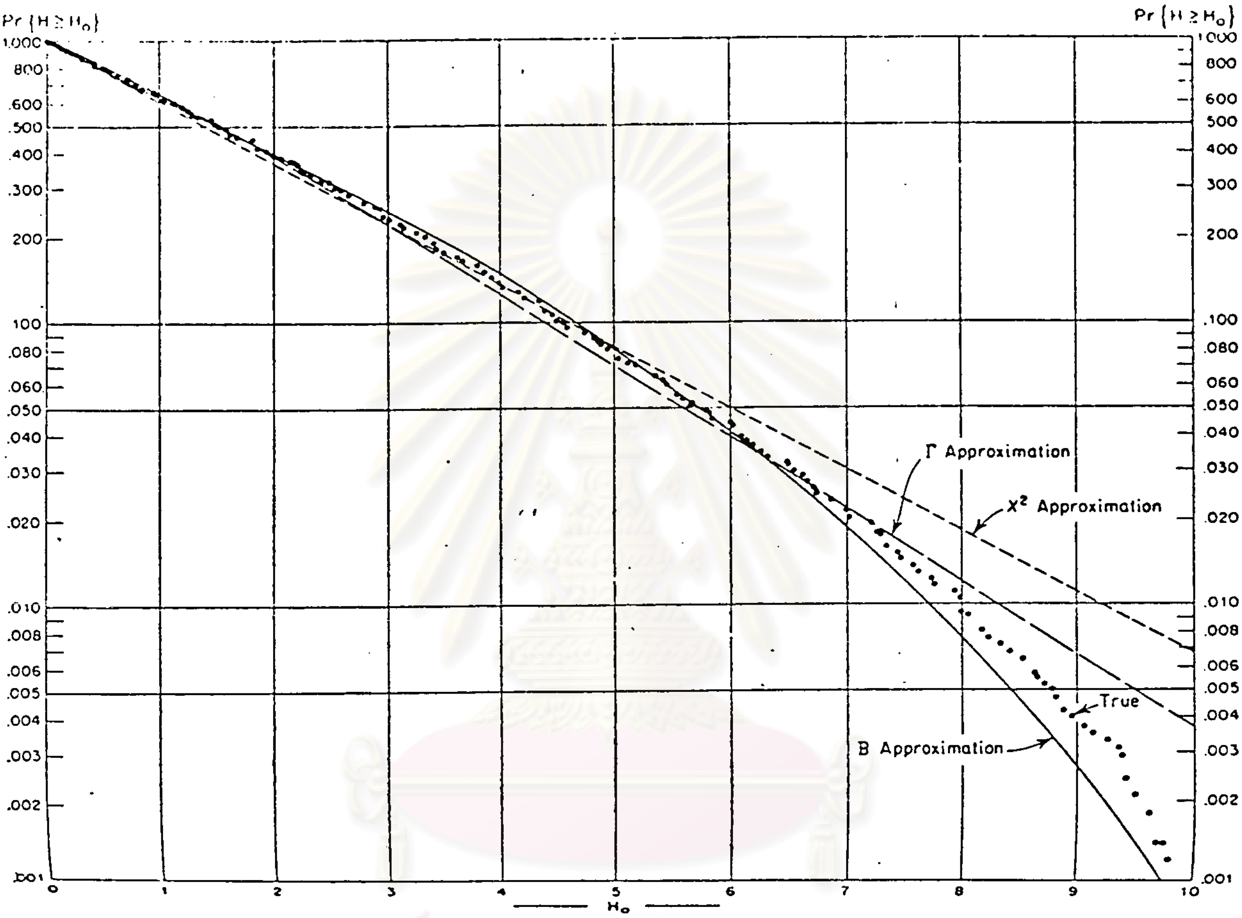
มาร์ซูโร (Marascuilo, 1973 : 301) การกระจายของสถิติทดสอบที่ใช้กับข้อมูลประเภทจัดอันดับภายใต้สมมติฐานสูญนั้นอยู่บนพื้นฐานของความน่าจะเป็นที่เท่ากันในการจัดอันดับให้กับค่าสังเกต ดังนั้นเมื่อมีการซ้ำของค่าสังเกตเกิดขึ้นทำให้มีผลต่อการกระจายของการทดสอบ H ด้วย ถ้าสุ่มการกำหนดอันดับให้กับค่าที่ซ้ำกันโดยทำให้ $P(X_{ik} = R_{ik}) = {}^{1}/N$ ตามต้องการและไม่มีผลต่อการกระจายตามทฤษฎีของการทดสอบในทางตรงข้ามถ้ากำหนดค่ากึ่งกลางของอันดับ (Midrank) ให้กับค่าที่ซ้ำกันลักษณะการกระจายภายใต้สมมติฐานสูญของการทดสอบจะเปลี่ยนแปลง ส่วนมากมักนิยมใช้วิธีการหลังนี้เพราะว่าจะทำให้ค่า H เพิ่มขึ้น ถ้ามีอันดับซ้ำกันมาก ๆ วิธีที่นิยมใช้กันมากคือการใช้ค่ากึ่งกลางของอันดับให้กับค่าที่ซ้ำกัน (Midrank) และใช้การแก้การซ้ำ (Correction for ties) ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนเซ็ทของค่าสังเกตที่ซ้ำกันระหว่างกลุ่มตัวอย่าง

เลย์แมน (Lehman, 1961 : 293) ได้ศึกษาลักษณะการกระจาย 3 ประเภทของสถิติทดสอบวิลคอกซอนที่มีการซ้ำคือ the exact distributions, the normal approximation to the distributions and the normal approximation to the distributions with a continuity correction จากกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่มีขนาดเท่ากับ 5, 5 ซึ่งมีระดับการซ้ำแตกต่างกันทั้งหมด 5 กรณี โดยใช้สถิติทดสอบวิลคอกซอลที่มีค่าแก้สำหรับการซ้ำและค่าแก้สำหรับความต่อเนื่อง การให้อันดับของการซ้ำใช้ค่ากึ่งกลางของค่าสังเกตที่ซ้ำ (Midrank) พบว่าที่ระดับนัยสำคัญ .01 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง (actual Probability) ค่อนข้างต่ำ ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ .05 และ .01 ค่าความน่าจะเป็นที่ได้จากลักษณะการกระจายทั้ง 3 ประเภท จะไปในทิศทางเดียวกัน และการใช้การแจกแจงประมาณด้วยการแจกแจงปกติ และมีค่าแก้สำหรับการซ้ำและค่าแก้สำหรับความต่อเนื่องดีที่สุดเมื่อค่าของ R เป็นจำนวนเต็ม และไม่จำเป็น

ต้องใช้ค่าแก้เมื่อค่าของ R เป็นทศนิยม นอกจากนั้น เลย์แมน พบว่ากรณีที่กลุ่มตัวอย่าง ทั้ง 2 กลุ่มมีระดับการซ้ำน้อยกว่าร้อยละ 25 ของค่าสังเกต การใช้ค่าแก้สำหรับค่าซ้ำมีผลทำให้ค่าความน่าจะเป็นเปลี่ยนแปลงไม่ถึงร้อยละ 10



แผนภาพที่ 1 ลักษณะการแจกแจงที่แท้จริงของ เอช เทส เปรียบเทียบกับการกระจายโดยประมาณของ χ^2, Γ, B เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาด (5,4,3)



แผนภาพที่ 2 ลักษณะการแจกแจงที่แท้จริงของ เอช เทล เปรียบเทียบกับการกระจายโดยประมาณของ χ^2, Γ, B เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาด (5,5,5)