# บทที่ 7
# สรุปและข้อเสนอแนะ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้ง ซึ่งประกอบด้วย เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี, เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต และเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ. เอลิเมนต์ผิวโค้งทั้ง 3 นี้มีความถูกต้องของการจำลองพื้นผิวโค้งมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้น แต่น้อยกว่าเอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตี. ลักษณะพื้นผิวและข้อมูลในการสร้างเอลิเมนต์ดังกล่าวมีความแตกต่างกัน โดยมีรายละเอียดดังนี้.

**เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี**

- ข้อมูลที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ประกอบด้วย เวกเตอร์พิกัดและเวกเตอร์สัมผัสที่มุมของเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จากเอลิเมนต์เชิงเส้น.
- เวกเตอร์ตั้งฉากที่ใช้ในการคำนวณเวกเตอร์สัมผัสสามารถคำนวณได้จาก 2 วิธีคือ วิธีรวมเวกเตอร์และวิธีถ่วงน้ำหนักมุม.
- ความโค้งของพื้นผิวถูกกำหนดโดยทิศทางของเวกเตอร์สัมผัสอย่างเดียว ซึ่งแตกต่างกับเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตและเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอที่มีเวกเตอร์บิดเพื่อช่วยในการปรับความโค้ง.
- เอลิเมนต์ชนิดนี้มีความต่อเนื่องในระดับ $C^1$ เฉพาะที่มุมของเอลิเมนต์ ส่วนขอบของเอลิเมนต์มีความต่อเนื่องในระดับ $C^0$ เท่านั้น จึงทำให้พื้นผิวมีความโค้งที่ต่อเนื่องกันเฉพาะที่มุม.

**เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต**

- ข้อมูลที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ประกอบด้วย เวกเตอร์พิกัด, เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์บิดที่มุมของเอลิเมนต์ ซึ่งข้อมูลทั้ง 3 นี้สามารถคำนวณได้จากเอลิเมนต์เชิงเส้น.
- เวกเตอร์ตั้งฉากและเวกเตอร์สัมผัสคำนวณหาได้เช่นเดียวกับวิธีการของเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี.
- เวกเตอร์บิดที่แสดงในวิทยานิพนธ์นี้คำนวณได้จากวิธีการประมาณแบบอาดินิ, แบบเบสเซิล และแบบหมุนรอบแกน. (การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตใช้เวกเตอร์บิดแบบหมุนรอบแกนเท่านั้น.)
- ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตไม่มีฟังก์ชันสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม. ดังนั้น จึงใช้เทคนิกการลดรูปเพื่อสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.

- เอลิเมนต์ชนิดนี้สามารถกำหนดให้ความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ในระดับ $G^1$ หรือ $C^1$ ซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์บิดที่ใช้.

**เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ**

- ข้อมูลที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์คือ เวกเตอร์พิกัดของจุดควบคุม ซึ่งคำนวณได้จากเวกเตอร์พิกัด, เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์บิดที่มุมของเอลิเมนต์.
- ฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสามมีฟังก์ชันสำหรับทั้งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม ซึ่งแตกต่างจากเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต.
- เอลิเมนต์ชนิดนี้สามารถกำหนดให้ความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ในระดับ $G^1$ หรือ $C^1$ ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเวกเตอร์พิกัดของจุดควบคุมที่ใช้.

เมื่อนำเอลิเมนต์ทั้ง 3 มาจำลองพื้นผิวของแบบจำลองทรงกลมและทรงรี พบว่า

**เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี**

- การแบ่งเอลิเมนต์ให้มีพื้นที่และความยาวด้านใกล้เคียงกันทำให้การจำลองพื้นผิวมีความถูกต้องเพิ่มขึ้น.
- การหาเวกเตอร์ตั้งฉากด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักมุมเหมาะสมกับพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอหรือพื้นผิวที่แบ่งเอลิเมนต์แบบไม่เป็นระบบ.
- การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 12 ระดับชั้นความเสรีให้ผลการจำลองพื้นผิวใกล้เคียงกับการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี.

**เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต**

- ผลการจำลองพื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด.
- เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากวิธีการลดรูปมีความผิดพลาดของตำแหน่งใกล้เคียงกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม แต่มีความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากที่บริเวณที่ทำการลดรูปสูง.
- การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตได้พื้นผิวที่มีความถูกต้องมากกว่าเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี.

**เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ**

- ผลการจำลองพื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด เช่นเดียวกับการใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต.
- การใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 ชนิดในการจำลองพื้นผิวให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกัน โดยการใช้เวกเตอร์บิดแบบอาดินิให้ความผิดพลาดสูงสุด.

- การใช้เวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้จากค่าจริงบนพื้นผิวและใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 แบบในการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอไม่สามารถทำให้พื้นผิวมีความถูกต้องมากกว่าการจำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตี.

เมื่อนำเอลิเมนต์ทั้ง 3 มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้า พบว่า

**เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี**

- การเพิ่มความถูกต้องของฟังก์ชันการประมาณหรือการเพิ่มความถูกต้องของการจำลองพื้นผิวเพียงอย่างเดียวไม่ทำให้ผลการคำนวณดีขึ้น.
- การใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีกับฟังก์ชันการประมาณศักย์และสนามไฟฟ้าแบบกำลังสองให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องมากกว่าการใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและฟังก์ชันการประมาณแบบเชิงเส้น แต่น้อยกว่าการใช้เอลิเมนต์กำลังสองและฟังก์ชันการประมาณแบบกำลังสอง. ทั้งนี้รวมไปถึงการใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตและเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอด้วย.
- ผลการคำนวณเมื่อจำลองพื้นผิวโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 12 ระดับชั้นความเสรีมีความแม่นยำใกล้เคียงกับผลการคำนวณเมื่อใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี แม้ว่าจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าเนื่องจากมีจำนวนเอลิเมนต์และตัวแปรลดลง.

**เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต**

- เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากการลดรูปสามารถนำมาใช้ในการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าร่วมกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมได้ เมื่อมีการจำลองพื้นผิวที่มีความถูกต้องเพียงพอ.
- ผลการคำนวณโดยใช้พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องของศักย์และสนามไฟฟ้ามากกว่าผลการคำนวณโดยใช้พื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด.

**เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ**

- เมื่อเปรียบเทียบการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอกับเอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตีพบว่า ผลการคำนวณจากการใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอมีความผิดพลาดที่สูงกว่า อันเป็นผลเนื่องจากการจำลองพื้นผิวที่มีความผิดพลาดที่มากกว่า.
- การใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 ชนิดในการจำลองพื้นผิวให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกัน โดยการใช้เวกเตอร์บิดแบบอาดินิให้ความผิดพลาดสูงสุด.

**ข้อสรุปเพิ่มเติมในการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์ผิวโค้ง**

1) พื้นผิวที่จำลองได้มีความผิดพลาดสูงในบริเวณที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ.
2) การแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดพื้นที่และความยาวด้านที่ใกล้เคียงกันจะลดผลความผิดพลาดได้มากเมื่อนำเอลิเมนต์ที่ได้ไปคำนวณหาองค์ประกอบอื่นๆ เช่น เวกเตอร์ตั้งฉากและเวกเตอร์บิด.

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงการประยุกต์ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปในการสร้างแบบจำลองและนำข้อมูลของขอบเขตย่อยมาใช้โดยตรง ซึ่งทำให้ประหยัดเวลาและลดความผิดพลาดได้เป็นอย่างมาก. อีกทั้งยังสามารถนำข้อมูลที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ผิวโค้ง ซึ่งมีความถูกต้องของพื้นผิวมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้นด้วย ดังตัวอย่างปัญหาทางวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูงที่นำมาแสดง.

**<u>ข้อเสนอแนะ</u>**

1) ในกรณีที่เอลิเมนต์ที่อยู่ล้อมรอบจุดที่ต้องการคำนวณหาเวกเตอร์ตั้งฉากมีเอลิเมนต์ที่มีความยาวด้านแตกต่างกันมาก การคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากโดยพิจารณาค่าของความยาวด้านด้วยจะให้ผลการคำนวณที่มีความถูกต้องมากขึ้น.
2) การปรับเปลี่ยนขนาดของเวกเตอร์สัมผัสที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีบนพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ จะส่งผลให้ความถูกต้องของพื้นผิวเพิ่มสูงขึ้น.
3) ควรศึกษาวิธีการหาเวกเตอร์บิดอื่นๆ ที่นอกเหนือจากวิธีที่ระบุในวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อเพิ่มความถูกต้องในการจำลองพื้นผิวที่สูงขึ้น.
4) การจำลองพื้นผิวด้วยฟังก์ชันผิวโค้งที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้มีความถูกต้องน้อยกว่าฟังก์ชันกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี ทำให้ผลการนำพื้นผิวที่ได้ไปใช้ในการคำนวณมีความผิดพลาดสูง. ดังนั้น จึงควรมีการศึกษาการจำลองพื้นผิวที่มีความถูกต้องมากกว่าฟังก์ชันกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี.
5) วิทยานิพนธ์นี้ทดลองใช้ฟังก์ชันการประมาณของศักย์และสนามไฟฟ้าแบบกำลังสองแทนแบบเชิงเส้น ซึ่งให้ผลการคำนวณที่มีความถูกต้องเพิ่มขึ้น. ดังนั้น จึงควรมีการศึกษาฟังก์ชันการประมาณที่มีความถูกต้องมากกว่าแบบกำลังสอง.