บทที่ 5
ผลการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบต่างๆ กับปัญหาตัวอย่าง

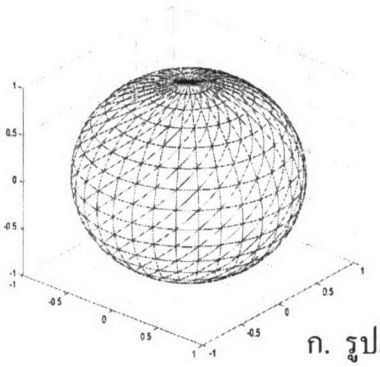
การสร้างขอบเขตย่อยด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบต่างๆ จะได้พื้นผิวที่มีความคลาดเคลื่อนแตกต่างกัน ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อความแม่นยำในการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า. บทนี้กล่าวถึงความผิดพลาดของการจำลองพื้นผิวและผลการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบต่างๆ.

5.1 ปัญหาตัวอย่างสำหรับการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า

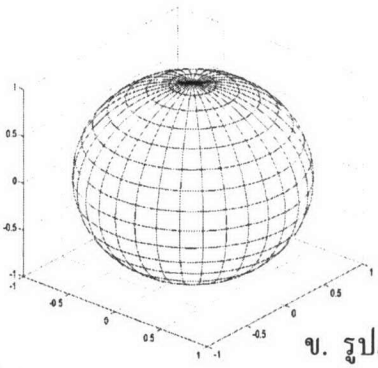
ปัญหาตัวอย่างในที่นี้คือ ทรงกลมหรือทรงรีฉนวนที่อยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ ดังตัวอย่างรูปที่ 5.1 และมีรายละเอียดดังนี้.

1) <u>ทรงกลมฉนวน</u> มีรัศมี 1 หน่วย.
   <u>ทรงรีฉนวน</u> มีแกนเอกยาว 1 หน่วยในแนวตั้ง และแกนโทยาว 0.5 หน่วยในแนวนอน.
   จุดศูนย์กลางของทรงกลมฉนวนและทรงรีอยู่ที่พิกัด (0,0,0).
2) ทรงกลมฉนวนและทรงรีฉนวนมีค่าคงตัวไดอิเล็กตริก(ε_r) เท่ากับ 4.
3) บริเวณภายนอกเป็นอากาศที่มีค่าคงตัวไดอิเล็กตริกเท่ากับ 1.
4) สนามไฟฟ้าภายนอกมีขนาด 1 V/หน่วย ในทิศทาง +Z.
5) การแบ่งเอลิเมนต์บนทรงกลมและทรงรีมีทั้งหมด 3 รูปแบบ ดังรูปที่ 5.2 คือ
   <u>รูปแบบที่ 1</u> เอลิเมนต์ทั้งหมดเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
   <u>รูปแบบที่ 2</u> เอลิเมนต์เฉพาะส่วนบนสุดและล่างสุดเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ส่วนบริเวณที่เหลือเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมทั้งหมด และ
   <u>รูปแบบที่ 3</u> เอลิเมนต์ทั้งหมดเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม.

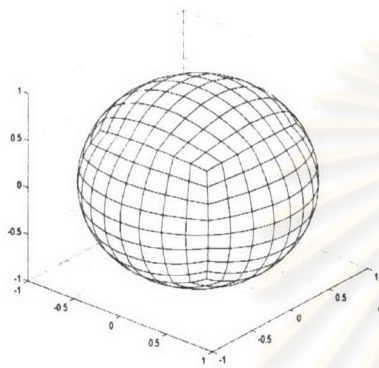
รูปที่ 5.1 ทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ



ก. รูปแบบที่ 1



ข. รูปแบบที่ 2



ค. รูปแบบที่ 3

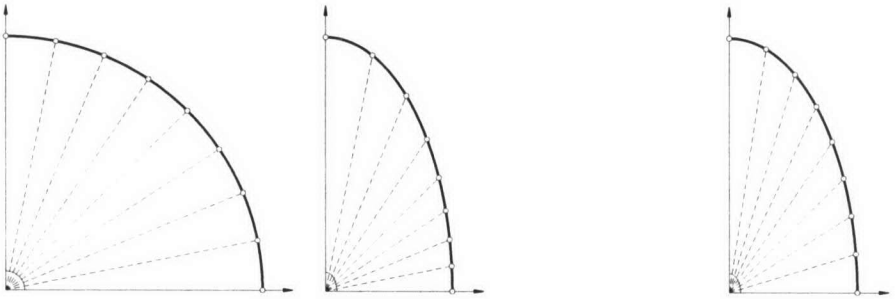
รูปที่ 5.2 การแบ่งเอลิเมนต์แบบต่างๆบนแบบจำลอง

6) ลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์ในข้อ 5) มี 2 ลักษณะคือ การแบ่งให้มุมเท่ากันและการแบ่งให้ความยาวด้านเท่ากัน. รูปที่ 5.3 แสดงการแบ่งเอลิเมนต์ที่ระนาบ $\phi = 0.0^{\circ}$ (ϕ อยู่ในระบบพิกัดทรงกลม.) โดยมีรายละเอียดดังนี้.

<u>ก. การแบ่งให้มุมเท่ากัน</u> คือ การกำหนดความยาวของเอลิเมนต์จากมุมตามแนวแกน θ และ ϕ ให้มีขนาดเท่ากัน. ในที่นี้ได้แบ่งทรงกลมและทรงรีออกเป็น 16 ส่วนในแนวแกน θ ($\theta = 0^{\circ}$ ถึง 180°) และ 32 ส่วนในแนวแกน ϕ ($\phi = 0^{\circ}$ ถึง 360°). สำหรับเส้นโค้งที่มีความโค้ง(Curvature)สม่ำเสมอ การแบ่งให้มุมเท่ากันจะทำให้ได้ความความด้านเท่ากันด้วย.

<u>ข. การแบ่งให้ความยาวด้านเท่ากัน</u> คือ การกำหนดความยาวของเอลิเมนต์ในแนวที่แบ่งให้มีค่าเท่ากัน. การแบ่งแบบนี้ใช้กับการแบ่งในแนวแกน θ ของแบบจำลองทรงรี.

วิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาความผิดพลาดของการจำลองพื้นผิวและความผิดพลาดของผลการคำนวณด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์เมื่อประยุกต์ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบต่างๆ. (ตัวอย่างวิธีการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์แสดงในภาคผนวก ก.) ความผิดพลาดของการจำลองพื้นผิวได้แก่ ความผิดพลาดของตำแหน่งและความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก. ค วามผิดพลาดของผลการคำนวณด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์ได้แก่



ก. การแบ่งให้มุมเท่ากันบนแบบจำลองทรงกลมและทรงรี

ข. การแบ่งให้ความยาวด้านเท่ากันบนแบบจำลองทรงรี

รูปที่ 5.3 การแบ่งเอลิเมนต์ที่ระนาบ $\phi = 0^\circ$

ความผิดพลาดของศักย์ไฟฟ้าและความผิดพลาดของสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก. ผลการคำนวณทั้ง 4 อย่างนี้เปรียบเทียบในรูปความผิดพลาดสูงสุดและความผิดพลาดเฉลี่ยดังสมการ

ความผิดพลาดสูงสุดของตำแหน่ง

$$(err_r)_{\max}\ (\%) = \max\left\{\frac{|r_{cal} - r_{real}|}{r_{real}} \times 100\right\}, \tag{5.1}$$

ความผิดพลาดสูงสุดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

$$(err_n)_{\max}\ (\%) = \max\left\{\frac{\|(\boldsymbol{a_n})_{cal} - (\boldsymbol{a_n})_{real}\|}{\|(\boldsymbol{a_n})_{real}\|} \times 100\right\}, \tag{5.2}$$

ความผิดพลาดสูงสุดของศักย์ไฟฟ้า

$$(err_U)_{\max}\ (\%) = \max\left\{\left|\frac{U_{cal} - U_{ana}}{U_{ana}}\right| \times 100\right\}, \tag{5.3}$$

ความผิดพลาดสูงสุดของสนามไฟฟ้า

$$(err_{EN})_{\max}\ (\%) = \max\left\{\left|\frac{(E_n)_{cal} - (E_n)_{ana}}{(E_n)_{ana}}\right| \times 100\right\}, \tag{5.4}$$

ความผิดพลาดเฉลี่ยของตำแหน่ง

$$(err_r)_{avg}\ (\%) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} \frac{|r_{cal} - r_{real}|}{r_{real}} d\Gamma}{A} \times 100, \tag{5.5}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความผิดพลาดเฉลี่ยของเวกเตอร์ตั้งฉาก

$$(err_n)_{avg}(\%) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} \frac{\left\|(\boldsymbol{a}_n)_{cal} - (\boldsymbol{a}_n)_{real}\right\|}{\left\|(\boldsymbol{a}_n)_{real}\right\|} d\Gamma}{A} \times 100, \tag{5.6}$$

ความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์ไฟฟ้า

$$(err_U)_{avg}(V) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} |U_{cal} - U_{ana}| d\Gamma}{A}, \tag{5.7}$$

ความผิดพลาดเฉลี่ยของสนามไฟฟ้า

$$(err_{EN})_{avg}(V/unit) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} |(E_n)_{cal} - (E_n)_{ana}| d\Gamma}{A} \tag{5.8}$$

โดยที่ ดัชนีล่าง *cal* บ่งชี้ค่าที่ได้จากการคำนวณเมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบต่างๆ,

ดัชนีล่าง *real* บ่งชี้ค่าที่ได้จากการพื้นผิวจริงของทรงกลมหรือทรงรี,

ดัชนีล่าง *ana* บ่งชี้ค่าที่ได้จากการวิธีเชิงวิเคราะห์[13] (ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาทรงกลมหรือทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอแสดงในภาคผนวก ข.),

max คือฟังก์ชันค่าสูงสุด,

r คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังพื้นผิว,

$\boldsymbol{a}_n$ คือเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วยบนพื้นผิว,

U คือศักย์ไฟฟ้าบนทรงกลมหรือทรงรีฉนวน,

E_n คือสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนทรงกลมหรือทรงรีฉนวน,

N คือจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด,

$|\cdot|$ คือค่าสมบูรณ์,

$\|\cdot\|$ คือ2-นอร์ม(2-Norm) และ

A คือพื้นที่ผิวที่ได้จากการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบต่างๆ โดยคำนวณจาก

$$A = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} d\Gamma \tag{5.9}$$

<u>หมายเหตุ</u> ในสมการที่ (5.3) และ (5.4) ค่าสูงสุดที่เกิดขึ้นโดยละเลยเอลิเมนต์ที่ติดกับระนาบ Z = 0 เนื่องจากคำตอบของสมการเชิงวิเคราะห์มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ Z = 0.

5.2 ฟังก์ชันเชิงเส้นและกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี

เอลิเมนต์เชิงเส้นและเอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตี(หรือเรียกโดยย่อว่า เอลิเมนต์กำลังสอง)เป็นเอลิเมนต์อย่างง่ายและนิยมนำไปใช้ในการคำนวณมากที่สุด. ผลการคำนวณที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองนี้จะใช้เป็นค่าพื้นฐานสำหรับการเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์แบบอื่นๆ. การคำนวณในหัวข้อนี้แสดงให้เห็นถึงผลการจำลองขอบเขตย่อยด้วยเอลิเมนต์เชิงเส้น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสองและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสอง และผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์ดังกล่าว.

5.2.1 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลอง

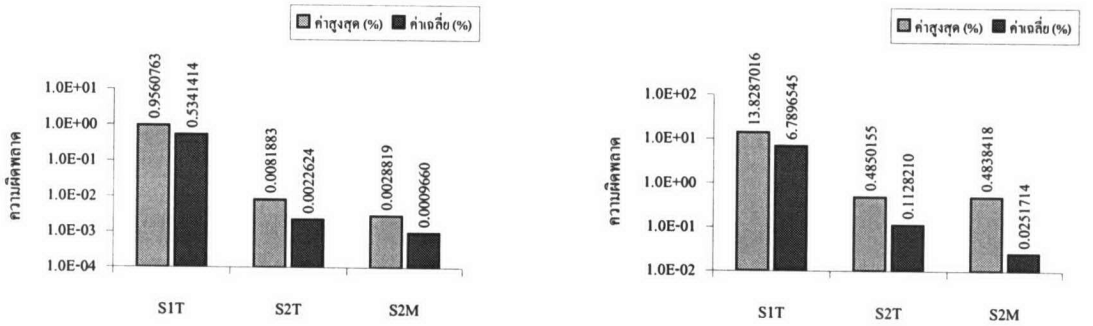
ตารางที่ 5.1 แสดงสัญลักษณ์ย่อของชนิดเอลิเมนต์ที่ใช้ในการจำลองพื้นผิว โดยอักษรตัวหน้า S บ่งชี้ฟังก์ชันรูปร่าง, ตัวเลข 1 หรือ 2 แสดงอันดับของเอลิเมนต์ว่าเป็นเอลิเมนต์เชิงเส้นหรือเอลิเมนต์กำลังสอง และอักษรตัวหลังแสดงถึงรูปแบบการแบ่งแบบจำลองในรูปที่ 5.2 (หน้าที่ 31). T คือ รูปแบบที่ 1 (แบบจำลองที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมทั้งหมด) และ M คือรูปแบบที่ 2 (แบบจำลองที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม). ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมและทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสองมีดังนี้.

<u>แบบจำลองทรงกลม</u>

กราฟในรูปที่ 5.4 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นผิวที่จำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสองทั้ง 2 รูปแบบ(S2T และ S2M)มีความผิดพลาดเฉลี่ยของทั้งรัศมีและเวกเตอร์ตั้งฉากน้อยกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้น(S1T) 1 ถึง 2 อันดับ. เมื่อเปรียบเทียบระหว่างการใช้เอลิเมนต์กำลังสอง การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม(S2M)มีความผิดพลาดของพื้นที่ต่ำกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยม(S2T).

ตารางที่ 5.1 การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง

กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์เชิงเส้น	รูปแบบที่ 1	S1T
2	เอลิเมนต์กำลังสอง	รูปแบบที่ 1	S2T
3		รูปแบบที่ 2	S2M

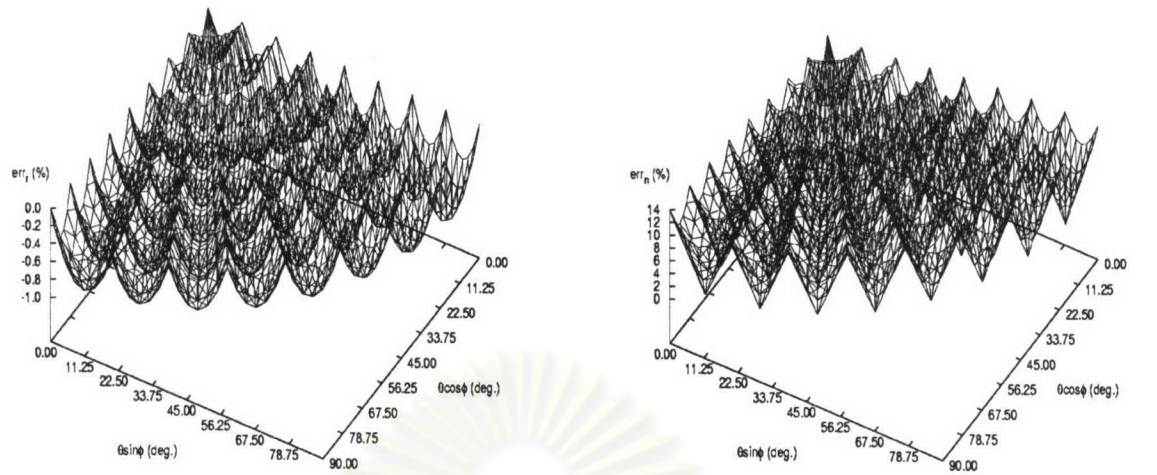


ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

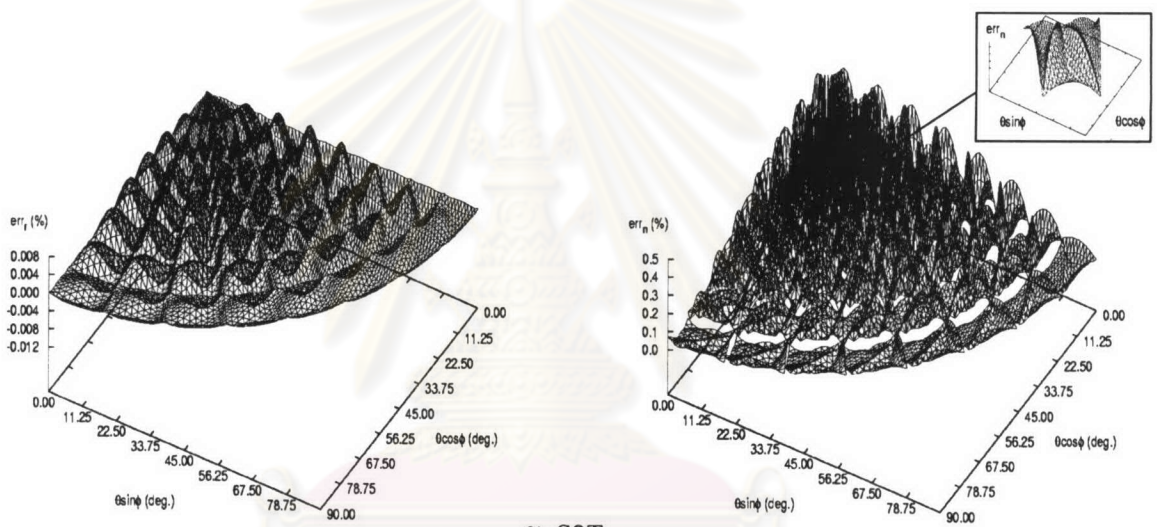
รูปที่ 5.4 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลม
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง

รูปที่ 5.5 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n)ในกรณีต่างๆ บนพื้นผิวทรงกลมในจตุภาค(Quadrant)ที่ 1. แกนตั้งของรูปคือ ค่าความผิดพลาด และแกนบนระนาบนอนของรูปคือ ค่าของมุม θ และ ϕ ในระบบพิกัดทรงกลมที่ถูกฉายลงบนระนาบ XY. จากรูปจะเห็นได้ว่า สำหรับพื้นผิวของทรงกลมซึ่งมีความโค้งสม่ำเสมอ ความผิดพลาดของตำแหน่งและเวกเตอร์ตั้งฉากจากการจำลองด้วยเอลิเมนต์เชิงเส้น(S1T)ในแต่ละเอลิเมนต์มีค่าใกล้เคียงกัน โดยเอลิเมนต์บนสุดของทรงกลมจะมีความผิดพลาดของพื้นผิวต่ำสุดและความผิดพลาดจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงเอลิเมนต์ที่ระนาบ Z=0 (หรือ $\theta = 90^{\circ}$) เนื่องจากเอลิเมนต์บนมีพื้นที่น้อยจึงมีความผิดพลาดต่ำ. การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสองมีความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากสูงที่สุดอยู่เอลิเมนต์ที่ 2 (นับจากเอลิเมนต์บนสุดของทรงกลม) และจากรูปที่ 5.5 ค. จะเห็นได้ว่าการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสอง(เอลิเมนต์บนสุดของทรงกลม)มีความผิดพลาดของพื้นผิวสูงมากเมื่อเทียบกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสอง ซึ่งเป็นผลให้ความผิดพลาดสุงสุดของพื้นผิวในรูปแบบที่ 2 (S2M) มีค่าสูงตามด้วย.

<u>หมายเหตุ</u> เครื่องหมาย * ที่มุมด้านขวาบนของรูปย่อย บ่งชี้การแสดงผลในลักษณะที่หมุนแกน Z เป็นมุม 90° ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเมื่อเทียบกับรูปอื่นๆ เพื่อให้เห็นผลการกระจายที่ชัดเจน.

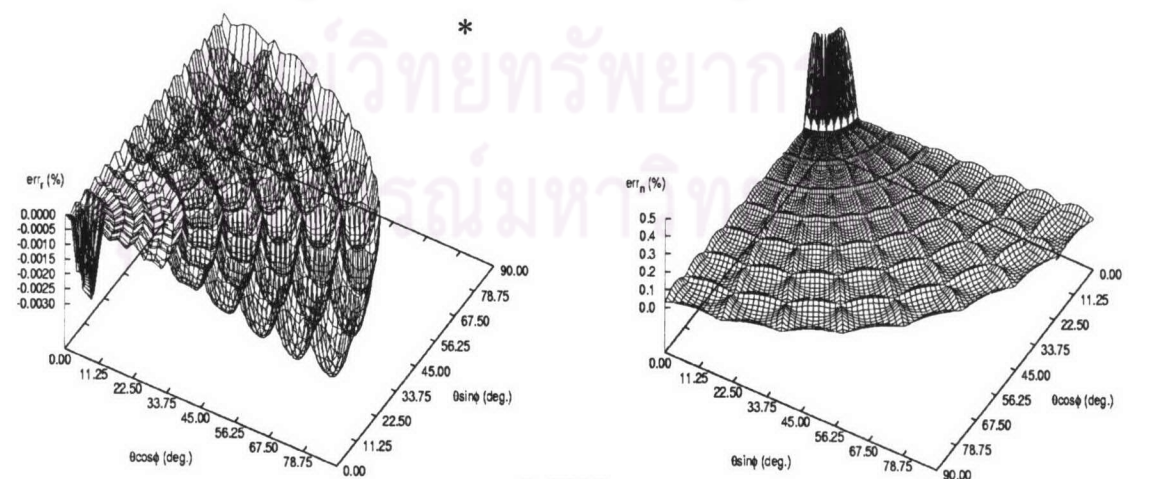


ก. S1T



ข. S2T

*



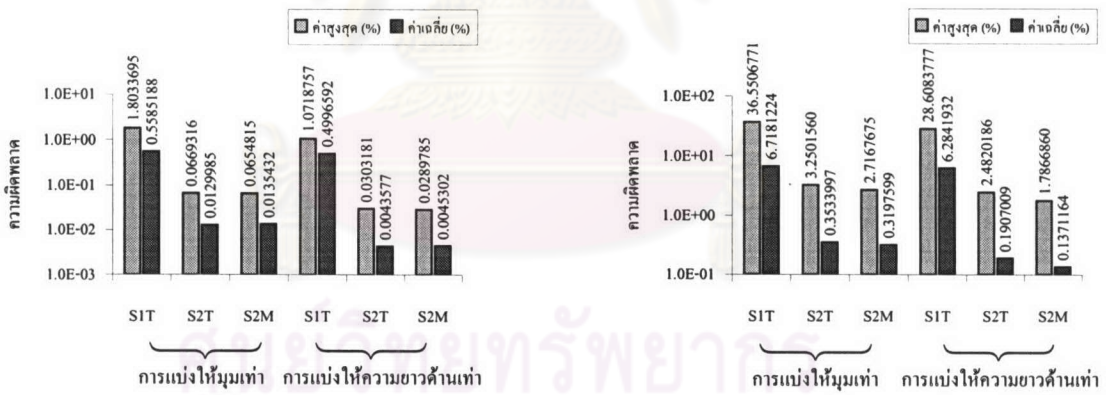
ค. S2M

รูปที่ 5.5 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลม
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง

แบบจำลองทรงรี

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 5.1 ว่า การแบ่งพื้นผิวของทรงรีมี 2 ลักษณะคือ การแบ่งให้มุมเท่ากันกับความยาวด้านเท่ากัน. กราฟในรูปที่ 5.6 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสองของทั้ง 2 ลักษณะการแบ่ง. จากรูปจะเห็นได้ว่าสำหรับพื้นผิวของทรงรีซึ่งมีความโค้งไม่สม่ำเสมอ การแบ่งเอลิเมนต์ให้ความยาวด้านเท่ากันมีความผิดพลาดของพื้นผิวต่ำกว่าการแบ่งให้มุมเท่ากันในทุกรูปแบบ. ตารางที่ 5.2 แสดงการลดลงของความผิดพลาดเมื่อแบ่งเอลิเมนต์ในลักษณะที่ให้ความยาวด้านเท่ากัน. จากตารางพบว่า การลดลงในกรณีเอลิเมนต์เชิงเส้น(S1T)มีมากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์กำลังสอง เนื่องจากการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสองมีความถูกต้องในระดับที่สูงอยู่แล้ว.

เมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์ในลักษณะที่ให้ความยาวด้านเท่ากันแล้ว พบว่าการใช้เอลิเมนต์กำลังสองให้ความถูกต้องของพื้นผิวดีกว่าการใช้เอลิเมนต์เชิงเส้น และสำหรับเอลิเมนต์กำลังสองรูปแบบที่ 1 (S2T) และ รูปแบบที่ 2 (S2M) มีความถูกต้องของพื้นผิวใกล้เคียงกัน ถึงแม้ว่ารูปแบบ S2M จะมีความถูกต้องของเวกเตอร์ตั้งฉากมากกว่ารูปแบบ S2T เล็กน้อย คือความแตกต่างของทั้ง 2 รูปแบบมีเพียง 0.0536% ซึ่งน้อยมากเมื่อเทียบกับกรณีของแบบจำลองทรงกลมในรูปที่ 5.4.



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

รูปที่ 5.6 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรี
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เส้นและกำลังสอง

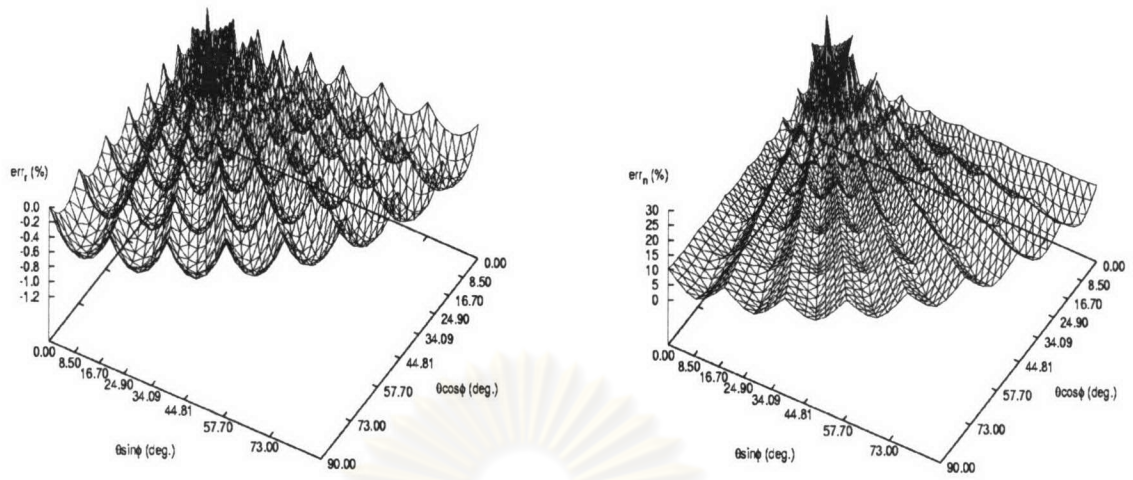
ตารางที่ 5.2 การลดลงของความผิดพลาดเมื่อแบ่งเอลิเมนต์ในลักษณะที่ให้ความยาวด้านเท่ากัน

	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย		
ความผิดพลาด	S1T	S2T	S2M
$(err_r)_{\max}$	0.731%	0.037%	0.037%
$(err_r)_{avg}$	0.059%	0.009%	0.009%
$(err_n)_{\max}$	7.940%	0.768%	0.930%
$(err_n)_{avg}$	0.434%	0.163%	0.183%

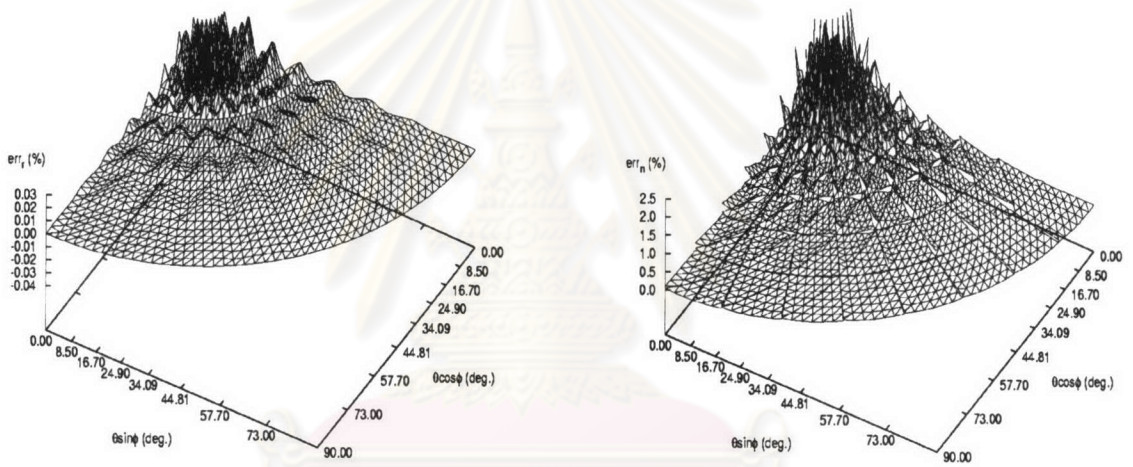
รูปที่ 5.7 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n) บนทรงรีที่มีการแบ่งเอลิเมนต์ให้ความยาวด้านเท่ากัน โดยใช้ระบบแกนแบบเดียวกับรูปที่ 5.5. จากรูปจะเห็นได้ว่า ในทุกรูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์ ความผิดพลาดของพื้นผิวที่บริเวณจุดยอดของทรงรีมีค่าสูงกว่าที่บริเวณอื่นมาก. ทั้ งนี้เนื่องจากผิวของทรงรีที่จำลองมีความโค้งสูงที่สุดที่จุดยอดและมีค่าต่ำที่สุดที่ระนาบ Z=0. เมื่อเปรียบเทียบระหว่างการใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นกับเอลิเมนต์กำลังสอง พบว่ามีความผิดพลาดในลักษณะเดียวกับแบบจำลองทรงกลมคือ การใช้เอลิเมนต์กำลังสองมีความถูกต้องของพื้นผิวมากกว่า 1 ถึง 2 อันดับ. เมื่อเปรียบเทียบระหว่างการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับสี่เหลี่ยมกำลังสอง ทั้ง 2 กรณีมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกัน แต่กรณีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะเห็นได้ความไม่ต่อเนื่องระหว่างด้านทแยงมุมขึ้น.

จากผลการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง พบว่า

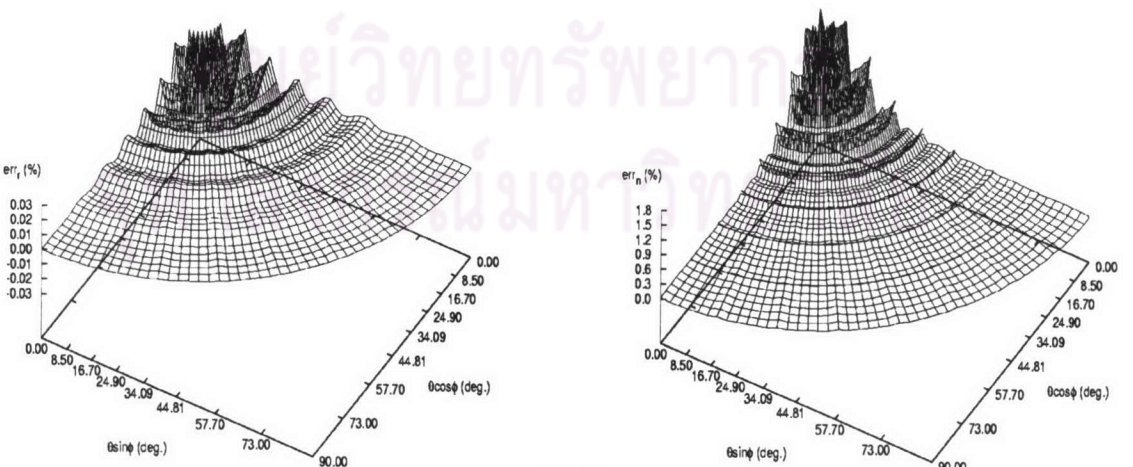
- เอลิเมนต์เชิงเส้นไม่เหมาะกับการจำลองพื้นผิวโค้ง เนื่องจากมีความผิดพลาดของพื้นผิวสูงมากเมื่อเทียบกับเอลิเมนต์กำลังสอง.
- สำหรับการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสอง การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมรวมกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม(รูปแบบที่ 2) จะมีความแม่นยำสูงกว่าการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเพียงอย่างเดียว(รูปแบบที่ 1) ทั้งนี้เนื่องจาก รูปแบบที่ 2 ลดความไม่ต่อเนื่องของเวกเตอร์ตั้งฉากในแนวทแยงมุม ซึ่งจะเกิดขึ้นในกรณีรูปแบบที่ 1.
- สำหรับพื้นผิวโค้งที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ การแบ่งเอลิเมนต์แบบให้ความยาวด้านเท่ากันช่วยลดความผิดพลาดของการจำลองพื้นผิวได้. อย่างไรก็ตาม ความผิดพลาดของพื้นผิวยังคงมีค่าสูงในบริเวณที่ความโค้งของพื้นผิวมีค่ามาก.



ก. S1T



ข. S2T



ค. S2M

รูปที่ 5.7 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีที่มีการแบ่งเอลิเมนต์ให้ความยาวด้านเท่ากันเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง

5.2.2 ความผิดพลาดของผลการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า

การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าโดยการใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสองแบ่งเป็นกรณีต่างๆ ตามตารางที่ 5.3. ฟังก์ชันการประมาณ(Interpolating Function)ที่ใช้ประมาณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าได้แก่ ฟังก์ชันเชิงเส้น(I1)และฟังก์ชันกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี(I2). ความผิดพลาดของผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสองกับปัญหาทรงกลมฉนวนและทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอมีดังนี้.

ปัญหาทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

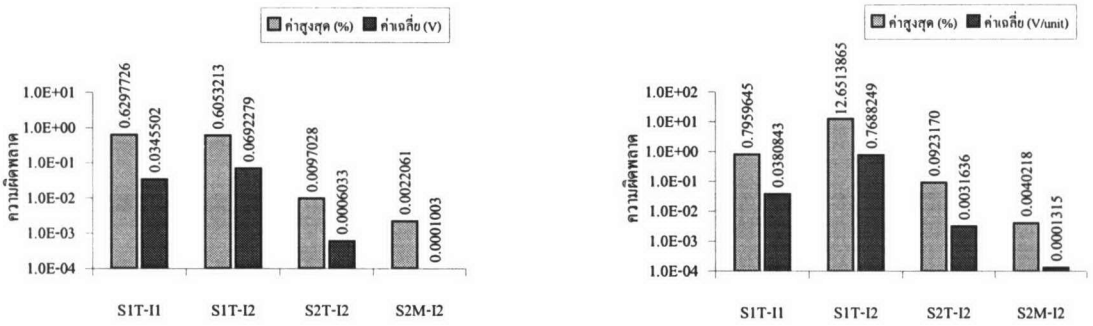
กราฟรูปที่ 5.8 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่า ผลการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสองให้ค่าเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าถูกต้องสูงกว่า 1 อันดับขึ้นไปเมื่อเปรียบเทียบกับผลการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์เชิงเส้น. สำ หรับกรณีของเอลิเมนต์กำลังสองนั้น การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำลองพื้นผิวทรงกลมฉนวน(S2M-I2)ให้ความถูกต้องของศักย์และสนามไฟฟ้ากว่าการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเพียงอย่างเดียว(S2T-I2). ค่าความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าลดลงจาก 6.033×10^{-4} และ 3.163×10^{-3} ในกรณี S2T-I2 เป็น 1.003×10^{-4} และ 1.315×10^{-4} ในกรณี S2M-I2 ตามลำดับ โดยความแตกต่างระหว่าง 2 รูปแบบนี้ จะเห็นได้อย่างชัดเจนที่ค่าสนามไฟฟ้า.

นอกจากนี้ กราฟในรูปที่ 5.8 ยังแสดงให้เห็นว่า การเพิ่มอันดับของฟังก์ชันการประมาณบนเอลิเมนต์เชิงเส้นไม่ปรับปรุงผลการคำนวณให้ดีขึ้น(กรณี S1T-I1 เปรียบเทียบกับกรณี S1T-I2) เนื่องจากความผิดพลาดของพื้นผิวนั้นส่งผลอย่างมากต่อผลการคำนวณ.

รูปที่ 5.9 และ 5.10 แสดงการกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าตามตารางที่ 5.3 โดยใช้ระบบแกนแบบเดียวกันรูปที่ 5.5 และละเลยการแสดงผลของเอลิเมนต์ที่ระนาบ Z=0 เนื่องจากคำตอบของสมการเชิงวิเคราะห์มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ระนาบนี้. จากรูปจะเห็นได้ว่า ความ

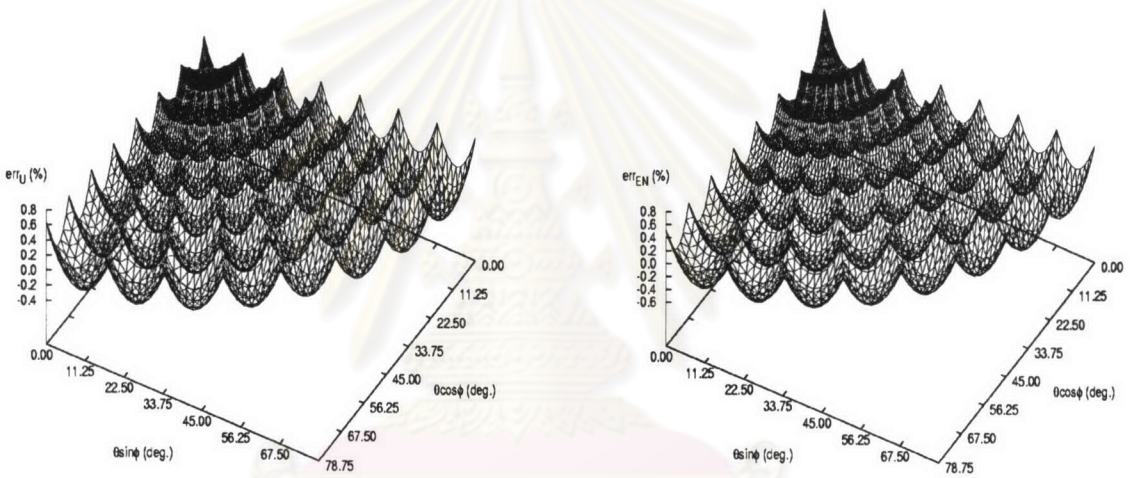
ตารางที่ 5.3 การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยเอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง

กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	ฟังก์ชันการประมาณ	รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์เชิงเส้น	ฟังก์ชันเชิงเส้น	รูปแบบที่ 1	S1T-I1
2		ฟังก์ชันกำลังสอง		S1T-I2
3	เอลิเมนต์กำลังสอง	ฟังก์ชันกำลังสอง	รูปแบบที่ 1	S2T-I2
4			รูปแบบที่ 2	S2M-I2

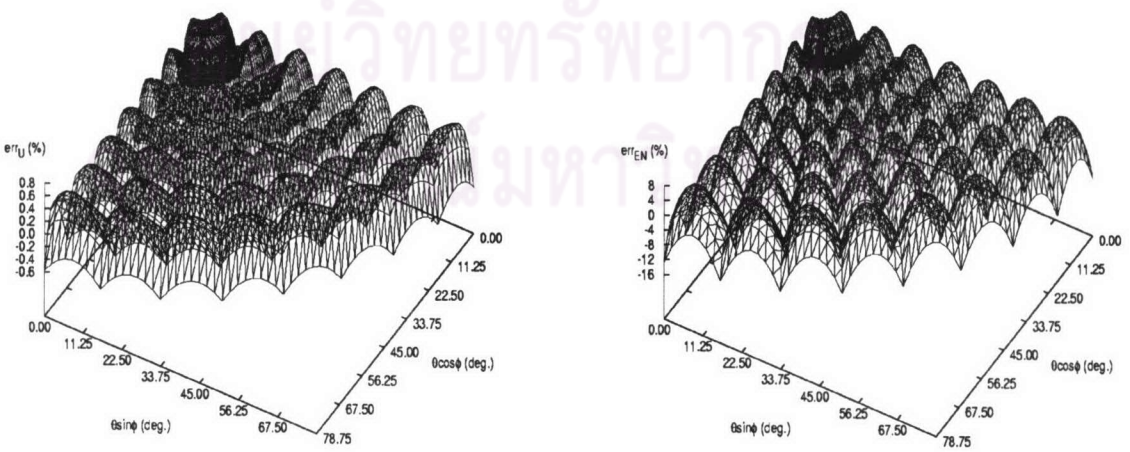


ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.8 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวน
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง

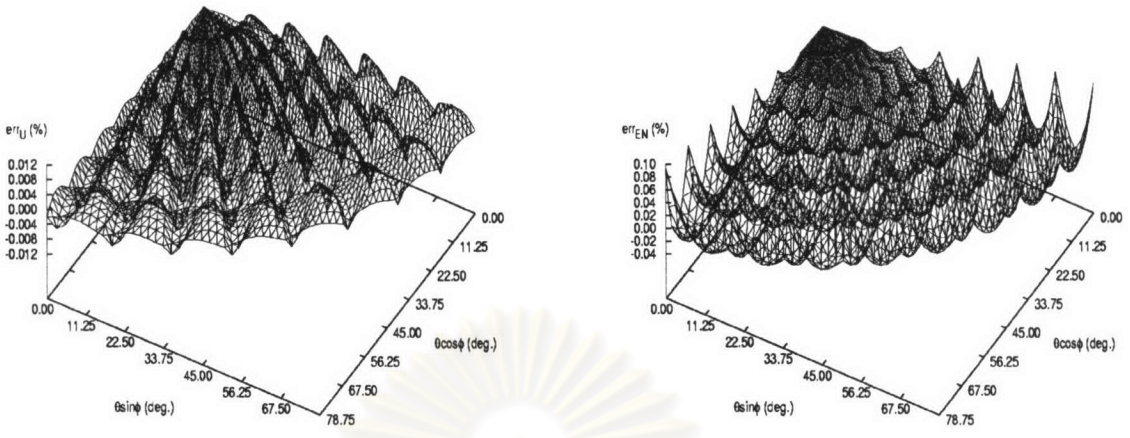


ก. S1T-I1

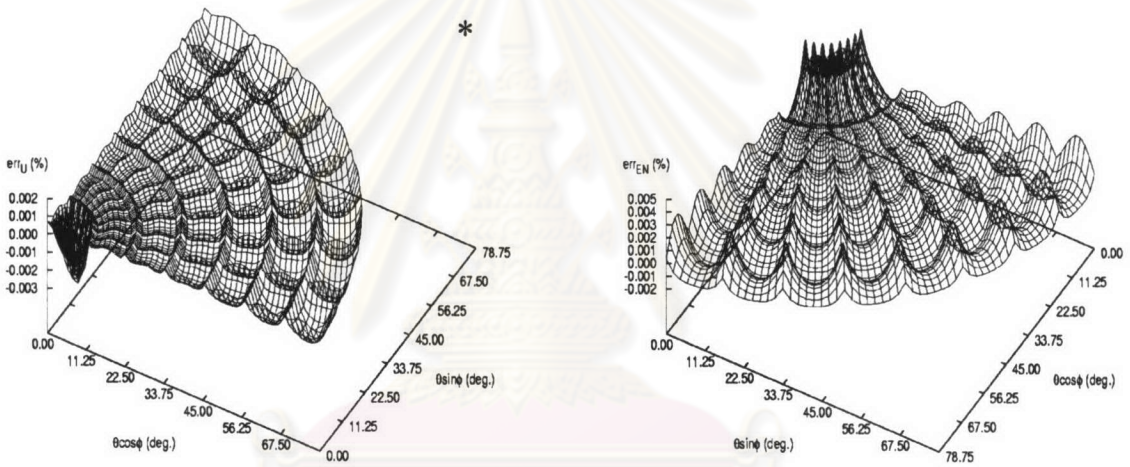


ข. S1T-I2

รูปที่ 5.9 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวน
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้น



ก. S2T-I2



ข. S2M-I2

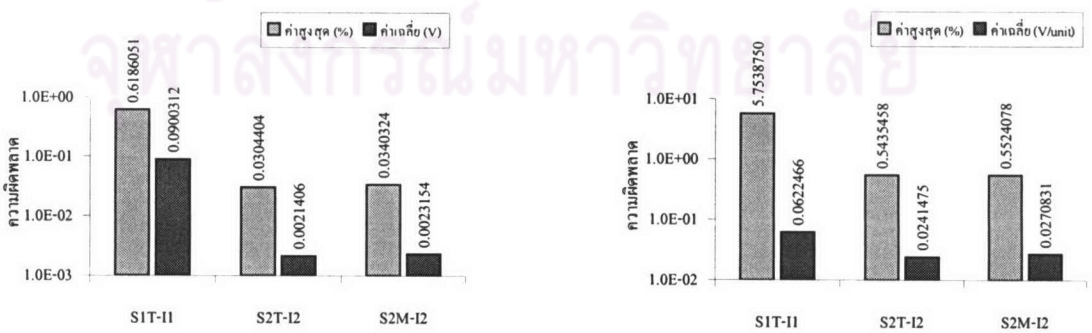
รูปที่ 5.10 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวน
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสอง

ผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้ามีความสัมพันธ์กับความผิดพลาดของพื้นผิวในรูปที่ 5.5 อย่างชัดเจน. อย่างไรก็ตาม ความแตกต่างระหว่างความผิดพลาดของพื้นผิวและความผิดพลาดของผลการคำนวณก็คือ ตำแหน่งของพื้นผิวมีความผิดพลาดเป็นศูนย์ที่ตำแหน่งของปมในขณะที่ผลการคำนวณไม่ถูกยึดด้วยเงื่อนไขนี้. ในรูปที่ 5.10 ข. ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้ามีค่าสูงที่บริเวณใกล้จุดยอด(ส่วนที่เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม) เนื่องจากความผิดพลาดของพื้นผิวในบริเวณดังกล่าวมีค่าสูงเมื่อเทียบกับบริเวณอื่น(รูปที่ 5.5 ค.).

ปัญหาทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

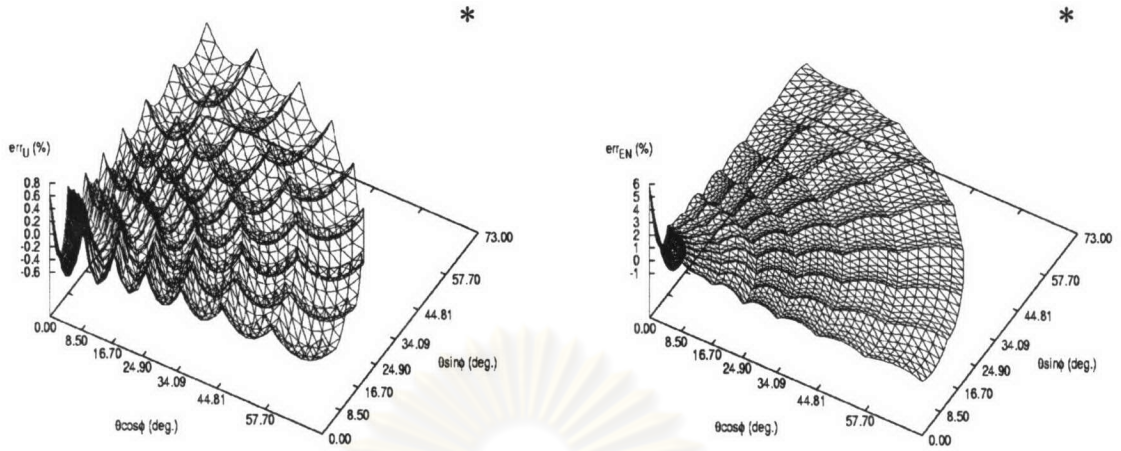
จากหัวข้อที่ 5.2.1 ซึ่งได้พบว่า ผลการจำลองพื้นผิวบนทรงรีโดยใช้ลักษณะการแบ่งให้ความยาวด้านเท่ากันมีความถูกต้องที่ดีกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับลักษณะการแบ่งให้มุมเท่ากัน ดังนั้นการคำนวณหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีจึงได้เลือกใช้ลักษณะการแบ่งให้ความยาวด้านเท่ากัน. กราฟในรูปที่ 5.11 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสองกับปัญหาของทรงรีฉนวนในกรณีที่ 1, 3 และ 4 ในตารางที่ 5.3 โดยละเลยผลการคำนวณกรณีที่ 2 เนื่องจากมีความผิดพลาดของผลการคำนวณสูงขึ้นในลักษณะเดียวกับในกรณีของปัญหาทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. จาก รูปจะเห็นได้ว่า ผลการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าในกรณีที่ใช้เอลิเมนต์กำลังสอง(S2T-I2 และ S2M-I2)มีความผิดพลาดในทุกกรณีน้อยกว่ากรณีที่ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้น(S1T-I1)มาก. ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าในกรณี S2T-I2 เทียบกับ S2M-I2 มีค่าใกล้เคียงกัน โดยที่การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมทั้งหมด(S2T-I2)มีความผิดพลาดต่ำกว่า $3.592\text{x}10^{-3}$% และ $1.748\text{x}10^{-4}$ V สำหรับความผิดพลาดสูงสุดและเฉลี่ยของศักย์ไฟฟ้า และ $8.862\text{x}10^{-3}$% และ $2.936\text{x}10^{-3}$ V/unit สำหรับความผิดพลาดสูงสุดและเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าตามลำดับ. การที่กรณี S2T-I2 มีความผิดพลาดต่ำกว่ากรณี S2M-I2 อาจเนื่องจากจำนวนปมที่มากกว่าในการคำนวณ.

รูปที่ 5.12 แสดงการกระจายความผิดพลาดของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้ากรณี S1T-I1 และ S2T-I2 โดยละเลยการแสดงผลกรณี S2M-I2 เนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่คล้ายกับกรณี S2T-I2 แต่มีค่าสูงกว่าเล็กน้อย. จากรูปจะเห็นได้ว่า ในทุกกรณีของผลการคำนวณ ค่าความผิดพลาดของเอลิเมนต์ที่บริเวณส่วนบนของทรงรีมีความผิดพลาดสูงอันเนื่องมาจากผลการจำลองพื้นผิวที่มีความผิดพลาดที่สูงในบริเวณที่มีความโค้งมาก(ดังรูปที่ 5.7) โดยจะสังเกตได้ชัดเจนในกรณีความผิดพลาดของสนามไฟฟ้าในรูปที่ 5.12 ก.

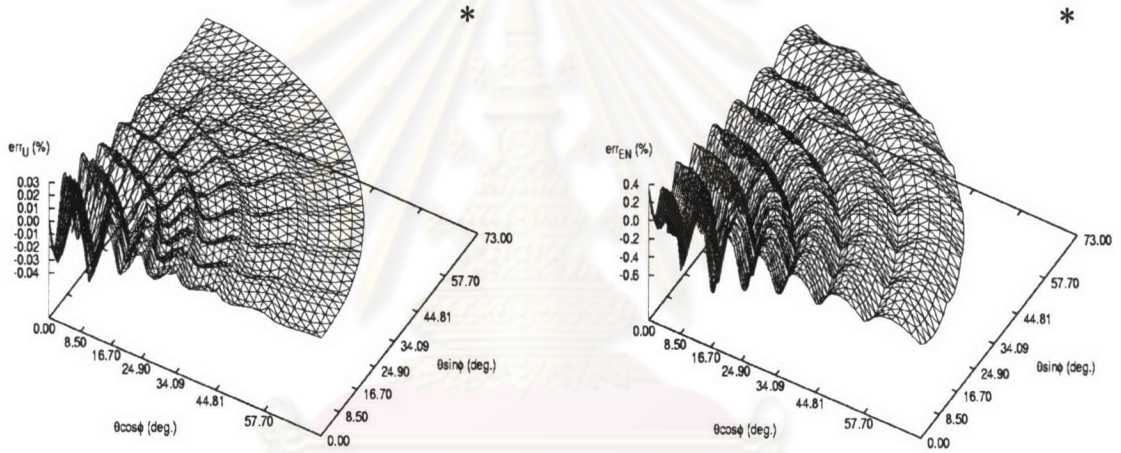


ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.11 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีฉนวน
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสอง



ก. S1T-I1



ข. S2T-I2

รูปที่ 5.12 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีฉนวน
กรณี S1T-I1 และ S2T-I2

จากผลการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นและกำลังสองในการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนปัญหาตัวอย่างทั้งสอง พบว่า

- การใช้เอลิเมนต์กำลังสองจำลองพื้นผิวสามารถเพิ่มความแม่นยำของผลการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์เชิงเส้น ได้มากกว่า 57.27 และ 12.04 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงกลมฉนวน ตามลำดับ และได้มากกว่า 38.88 และ 2.30 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงรีฉนวน ตามลำดับ.
- ความไม่สม่ำเสมอของความโค้งทำให้ผลการคำนวณมีความผิดพลาดสูงขึ้น เนื่องจากผลการจำลองพื้นผิวที่มีความผิดพลาดสูงขึ้น.

- การจำลองพื้นผิวโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสองมีผลการคำนวณที่มีความแม่นยำใกล้เคียงกับการจำลองพื้นผิวโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสอง ในขณะที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าเนื่องจากมีจำนวนเอลิเมนต์และตัวแปรลดลง.
- การเพิ่มอันดับของฟังก์ชันการประมาณบนเอลิเมนต์เชิงเส้นไม่ปรับปรุงผลการคำนวณให้ดีขึ้น เนื่องจากความผิดพลาดของพื้นผิวของเอลิเมนต์เชิงเส้นมีค่าสูง.

5.3 ฟังก์ชันพื้นผิวโค้งแบบเก้าและสิบสองระดับชั้นความเสรี

หัวข้อนี้แสดงถึงผลการจำลองขอบเขตย่อยด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีและสิบสองระดับชั้นความเสรี โดยจะเปรียบเทียบผลของการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์กับวิธีถ่วงน้ำหนักมุม(ในหัวข้อที่ 4.1) และผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งทั้ง 2 แบบ.

5.3.1 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลอง

ตารางที่ 5.4 แสดงสัญลักษณ์ย่อของชนิดเอลิเมนต์ที่ใช้ในการจำลองพื้นผิว โดยตัวเลข 9 และ 12 หมายถึงชนิดของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการจำลองขอบเขตย่อย. อักษรย่อ (s) และ (w) ของสัญลักษณ์ย่อที่ใช้หมายถึง การใช้เวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้จากวิธีรวมเวกเตอร์และวิธีถ่วงน้ำหนักมุมตามลำดับ ซึ่งเวกเตอร์ตั้งฉากนี้ใช้คำนวณเวกเตอร์สัมผัสเพื่อสร้างเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีต่อไป. ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมและทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งสองแบบมีดังนี้.

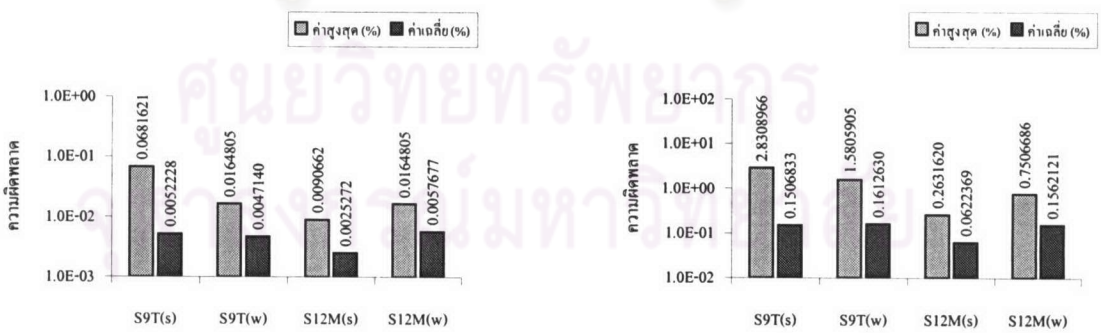
ตารางที่ 5.4 การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี

กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์)	รูปแบบที่ 1	S9T(s)
2	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม)		S9T(w)
3	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์)	รูปแบบที่ 2	S12M(s)
4	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม)		S12M(w)

แบบจำลองทรงกลม

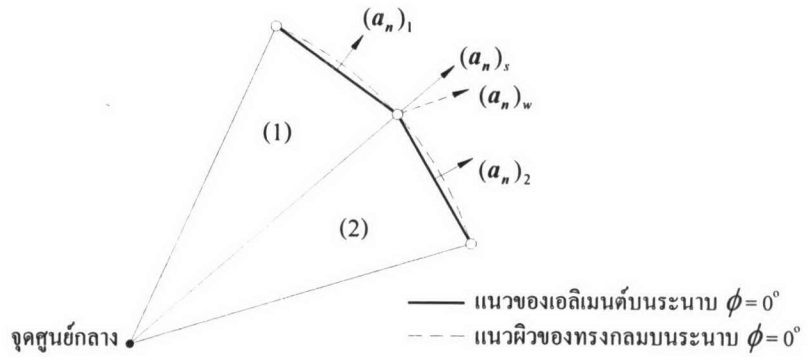
กราฟในรูปที่ 5.13 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่า วิธีการหาเวกเตอร์ตั้งฉากมีผลอย่างมากต่อความถูกต้องของพื้นผิวแบบจำลอง และนอกจากนี้ ผลของวิธีการหาเวกเตอร์ตั้งฉากยังแตกต่างกันออกไประหว่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม. ใ นกรณีของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม[S9T(s) และ S9T(w)] การหาเวกเตอร์ตั้งฉากด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักมุมจะเพิ่มความถูกต้องของตำแหน่งพื้นผิวแบบจำลองได้เมื่อเทียบกับการหาเวกเตอร์ตั้งฉากด้วยวิธีรวมเวกเตอร์ แต่ในกรณีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม[S12M(s) และ S12M(w)] ผลการประยุกต์ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักมุมกลับเป็นตรงข้าม นั่นคือ ในกรณีเอลิเมนต์สามเหลี่ยม การหาเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุมให้ความถูกต้องของพื้นผิวเฉลี่ยเพิ่มขึ้น $5.088\text{x}10^{-4}$% ส่วนกรณีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะลดลง $3.241\text{x}10^{-3}$%.

จากรูปที่ 5.13 ข. จะเห็นได้ว่า การหาเวกเตอร์ตั้งฉากด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักมุมไม่ได้ปรับปรุงทิศทางของเวกเตอร์ตั้งฉากบนพื้นผิวทั้งกรณีที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและกรณีที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม. รูปที่ 5.14 แสดงตัวอย่างผลการคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากบนระนาบ $\phi = 0^{\circ}$. จากรูปจะเห็นได้ว่า ทิศทางของเวกเตอร์ตั้งฉากบนเอลิเมนต์ที่ 1 และ 2 มีความสมดุลกัน เนื่องจากผลการแบ่งเอลิเมนต์ที่ให้มุมเท่ากัน. ดังนั้น การคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์[$(a_n)_s$]ให้ความถูกต้องสูงกว่าวิธีถ่วงน้ำหนักมุม[$(a_n)_w$].



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

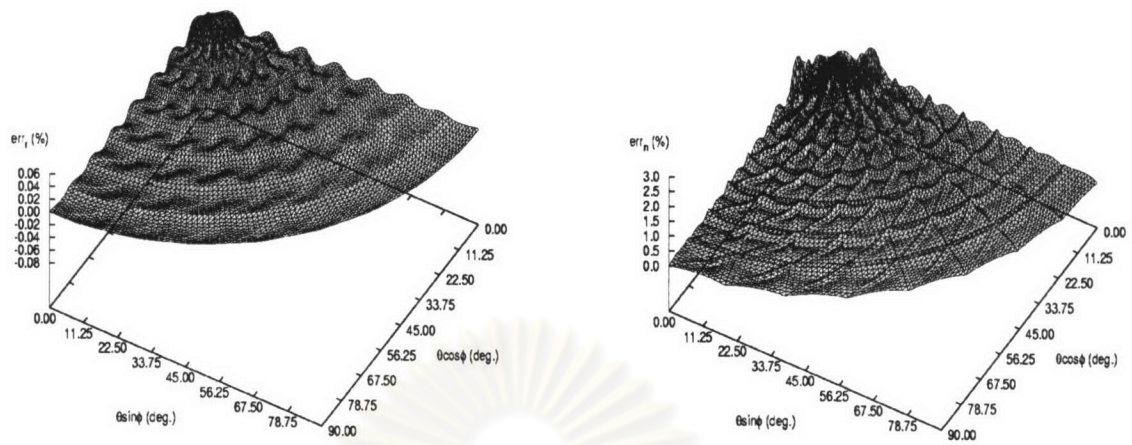
รูปที่ 5.13 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี



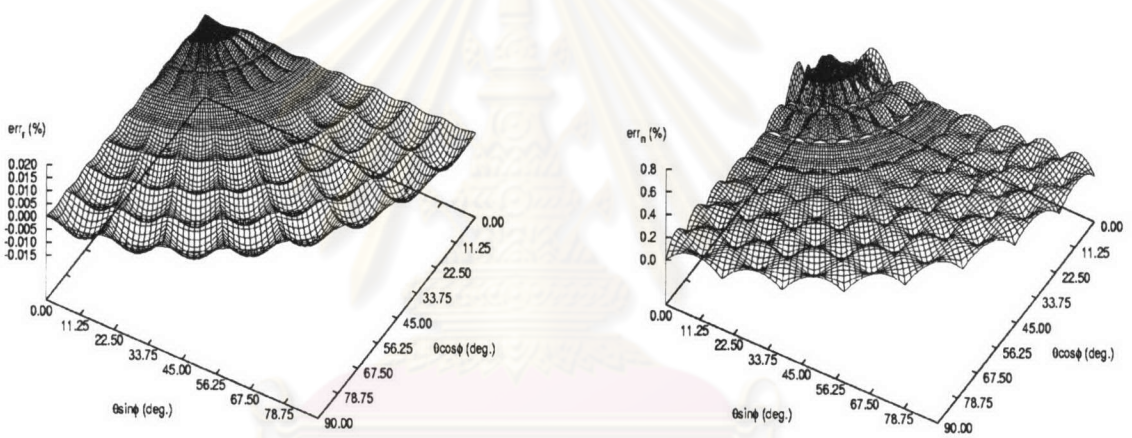
รูปที่ 5.14 เวกเตอร์ตั้งฉากที่คำนวณจากวิธีรวมเวกเตอร์และวิธีถ่วงน้ำหนักมุม
บนแบบจำลองทรงกลม

รูปที่ 5.15 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n) ในกรณีของ S9T(w) และ S12M(s) โดยใช้ระบบแกนเดียวกับรูปที่ 5.5. การกระจายความผิดพลาดในกรณี S9T(s) และ S12M(w) มีความคล้ายคลึงกับรูปที่ 5.15 ก. และ ข. ตามลำดับ เพียงแต่มีค่าความผิดพลาดสูงกว่า ดังนั้นจึงไม่แสดงผลของ 2 กรณีดังกล่าว. จากรูปที่ 5.15 ก. ความผิดพลาดสูงสุดของการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเกิดขึ้นบริเวณใกล้จุดยอดของทรงกลม โดยเฉพาะอย่างยิ่งค่าความผิดพลาดเวกเตอร์ตั้งฉาก ซึ่งมีค่าความผิดพลาดสูงกว่ากรณีของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในรูปที่ 5.15 ข. อย่างมาก ทั้งนี้เนื่องมาจากการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากที่นำมาคำนวณ. รูปที่ 5.16 แสดงเวกเตอร์ตั้งฉากรอบปมที่ต้องการคำนวณหาเวกเตอร์ตั้งฉาก. จากรูปจะเห็นได้ว่า ผลรวมเวกเตอร์ตั้งฉากของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม(รูปที่ 5.16 ก.)รอบจุด i ซึ่งมีทั้งหมด 5 ตัวมีความไม่สมดุลกันมากกว่าผลรวมของเวกเตอร์ตั้งฉากของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม(รูปที่ 5.16 ข.) ซึ่งมีทั้งหมด 4 ตัว. ดังนั้น เวกเตอร์ตั้งฉากที่คำนวณได้จากทั้งวิธีรวมเวกเตอร์และวิธีถ่วงน้ำหนักมุมบนแบบจำลองรูปแบบที่ 1 จะมีความผิดพลาดสูงกว่ารูปแบบที่ 2.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ก. S9T(w)



ข. S12M(s)

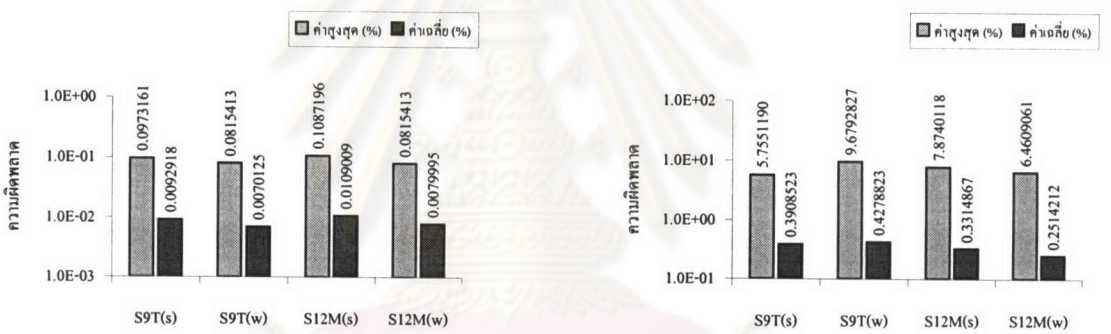
รูปที่ 5.15 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อใช้ประยุกต์เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี

ก. รูปแบบที่ 1 ข. รูปแบบที่ 2

รูปที่ 5.16 เวกเตอร์ตั้งฉากบนเอลิเมนต์รอบปม *i* ของแบบจำลอง

แบบจำลองทรงรี

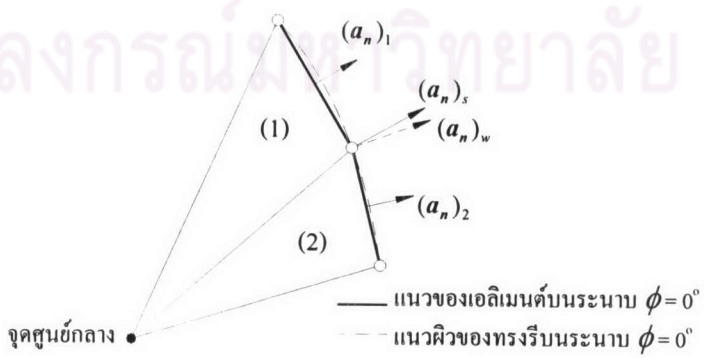
รูปที่ 5.17 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่า การหาเวกเตอร์ตั้งฉากด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักมุมทำให้ตำแหน่งของพื้นผิวและเวกเตอร์ตั้งฉากมีความถูกต้องมากขึ้น. อย่างไรก็ดี ผลของลักษณะความไม่สมดุลย์ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม[S9T(s) และ S9T(w)] ยังคงอยู่ และทำให้ความผิดพลาดเพิ่มขึ้น. ความผิดพลาดเฉลี่ยของเวกเตอร์ตั้งฉากในกรณีแบบจำลองทรงรีเพิ่มขึ้น 3.703×10^{-2}% ซึ่งมีค่าน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีแบบจำลองทรงกลม. ค่าความผิดพลาดที่น้อยกว่านี้เป็นผลเนื่องจากการถ่วงน้ำหนักมุมได้ลดผลความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากในแต่ละเอลิเมนต์ลงดังรูปที่ 5.18. จากรูปจะเห็นว่า เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม $[(a_n)_w]$มีทิศทางที่เข้าใกล้เวกเตอร์ตั้งฉากของเอลิเมนต์ที่ 2 มากกว่าเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์$[(a_n)_s]$ จึงทำให้เวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น.



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

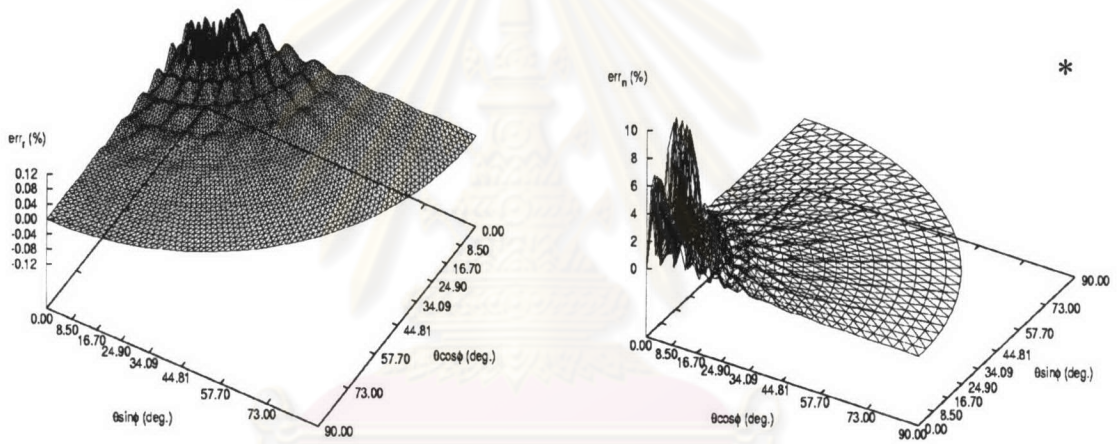
รูปที่ 5.17 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

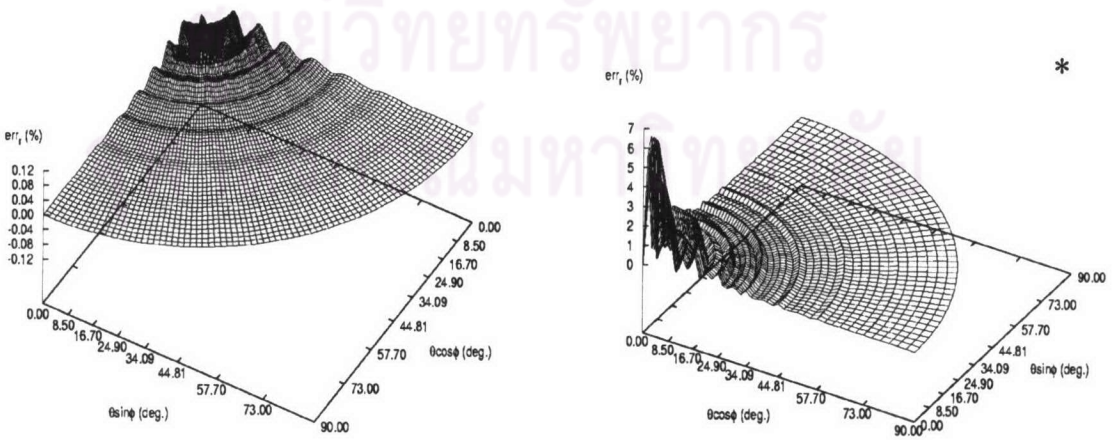


รูปที่ 5.18 เวกเตอร์ตั้งฉากที่คำนวณจากวิธีรวมเวกเตอร์และวิธีถ่วงน้ำหนักมุมบนแบบจำลองทรงรี

รูปที่ 5.19 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n) ในกรณีของ S9T(w) และ S12M(w) โดยใช้ระบบแกนเดียวกับรูปที่ 5.5. การกระจายความผิดพลาดในกรณี S9T(s) และ S12M(s) มีความคล้ายคลึงกับรูปที่ 5.19 ก. และ ข. ตามลำดับ แต่มีค่าความผิดพลาดสูงกว่า ดังนั้นจึงไม่แสดงผลของ 2 กรณีดังกล่าว. จากรูปจะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบกรณี S9T(s) และ S12M(s) ในรูปที่ 5.15. ค่าความผิดพลาดสูงสุดของเวกเตอร์ตั้งฉากในกรณีที่พื้นผิวมีความโค้งไม่สม่ำเสมอมีค่ามากกว่าพื้นผิวมีความโค้งสม่ำเสมออยู่มาก ซึ่งแสดงถึงความไม่เหมาะสมของการหาเวกเตอร์ตั้งฉากในกรณีที่พื้นผิวมีความโค้งไม่สม่ำเสมอ. ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองใช้วิธีการหาเวกเตอร์ตั้งฉากแบบถ่วงน้ำหนักมุม เพื่อลดความผิดพลาดของพื้นผิว ผลการทดลองปรากฏว่า ตำแหน่งของพื้นผิวทั้งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมมีความผิดพลาดของลดลง 2.279×10^{-3}% และ 2.901×10^{-3}% ตามลำดับ แต่เวกเตอร์ตั้งฉากจะมีคลาดเคลื่อนลดลงเฉพาะในกรณีของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเท่านั้น.



ก. S9T(w)

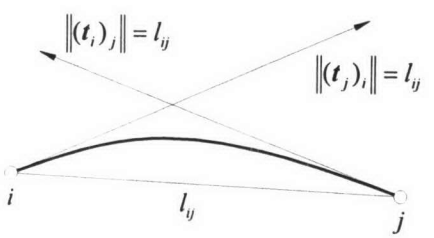


ข. S12M(w)

รูปที่ 5.19 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีเมื่อใช้ประยุกต์เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี

จากผลการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี พบว่า

- พื้นผิวที่จำลองด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีมีความถูกต้องมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้น โดยให้ความถูกต้องเฉลี่ยของตำแหน่งมากกว่าถึง 92.61 และ 45.84 เท่า สำหรับแบบจำลองทรงกลมและทรงรี ตามลำดับ แต่ใช้ข้อมูลพื้นฐานเริ่มต้นในการสร้างเอลิเมนต์เหมือนกันคือ เวกเตอร์พิกัดที่มุมของเอลิเมนต์.
- พื้นผิวที่จำลองด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีมีความถูกต้องน้อยกว่าเอลิเมนต์กำลังสอง ถึงแม้ว่าเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีสร้างมาจากฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม. ความผิดพลาดที่สูงมากกว่าเนื่องมาจากผลของการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้จากวิธีประมาณและขนาดของเวกเตอร์สัมผัสที่ไม่เหมาะสม.
- เมื่อเปรียบเทียบระหว่างการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 กับ 12 ระดับชั้นความเสรี ความผิดพลาดของการจำลองพื้นผิวทั้ง 2 มีค่าใกล้เคียงกันคือ ค่าความผิดพลาดเฉลี่ยของตำแหน่งมีความแตกต่างกันไม่เกิน $3.241\text{x}10^{-3}$% และ $3.888\text{x}10^{-3}$% สำหรับแบบจำลองทรงกลมและทรงรี ตามลำดับ.
- ความโค้งที่ไม่สม่ำเสมอทำให้การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีมีความผิดพลาดสูงขึ้นมาก ทั้งนี้มีสาเหตุสำคัญ 2 ส่วนคือ
  1) ทิศทางของเวกเตอร์ตั้งฉากดังที่ได้กล่าวมาแล้วในขั้นต้น และ
  2) ขนาดของเวกเตอร์สัมผัส. เวกเตอร์สัมผัสที่อยู่บนด้านเดียวกันของเอลิเมนต์จะมีความยาวเท่ากัน ดังรูปที่ 5.20 ซึ่งความยาวคำนวณได้จากระยะระหว่างปม i กับ j ดังสมการที่ 4.4 หน้า 25. ความยาวของเวกเตอร์สัมผัสเป็นตัวกำหนดความโค้งของเอลิเมนต์. สำหรับแบบจำลองทรงรีซึ่งมีความโค้งไม่สม่ำเสมอ การใช้เวกเตอร์สัมผัสที่ความยาวเท่ากันจึงไม่เหมาะสม.
- การหาเวกเตอร์ตั้งฉากด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักมุมเหมาะสมกับพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอหรือพื้นผิวที่แบ่งเอลิเมนต์แบบไม่เป็นระบบ โดยแสดงผลให้เห็นเด่นชัดในกรณีการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 12 ระดับชั้นความเสรี เนื่องจากมีความสมดุลย์ของเวกเตอร์ที่นำมาคำนวณดังที่ได้กล่าวไปแล้วในรูปที่ 5.16.



รูปที่ 5.20 ความยาวเวกเตอร์สัมผัสบนเอลิเมนต์

5.3.2 ความผิดพลาดของผลการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า

การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าโดยการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีแบ่งเป็นกรณีต่างๆ ตามตารางที่ 5.4 โดยประยุกต์ใช้ร่วมกับฟังก์ชันการประมาณแบบเชิงเส้นและกำลังสองดังหัวข้อที่ 5.2.2. ค วามผิดพลาดของผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีและสิบสองระดับชั้นความเสรีกับปัญหาทรงกลมฉนวนและทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอมีดังนี้.

<u>ปัญหาทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ</u>

กราฟในรูปที่ 5.21 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. ในหัวข้อที่ 5.2.2 แสดงให้เห็นว่า การเพิ่มอันดับของฟังก์ชันการประมาณเพียงอย่างเดียวบนการจำลองพื้นผิวที่มีความผิดพลาดสูง(S1T)ไม่ส่งผลให้การคำนวณถูกต้องมากขึ้น. ในทางกลับกัน การเพิ่มความถูกต้องของการจำลองพื้นผิวจากเอลิเมนต์เชิงเส้น(S1T)ไปเป็นเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี(S9T)แต่ยังคงใช้ฟังก์ชันการประมาณแบบเชิงเส้น[กรณี S9T(s)-I1 ในรูปที่ 5.21 เทียบกับกรณี S1T-I1 ในรูปที่ 5.6]ก็ไม่ปรับปรุงความถูกต้องของผลการคำนวณให้ดีขึ้นเช่นกัน. ทั้งนี้เนื่องจากใน

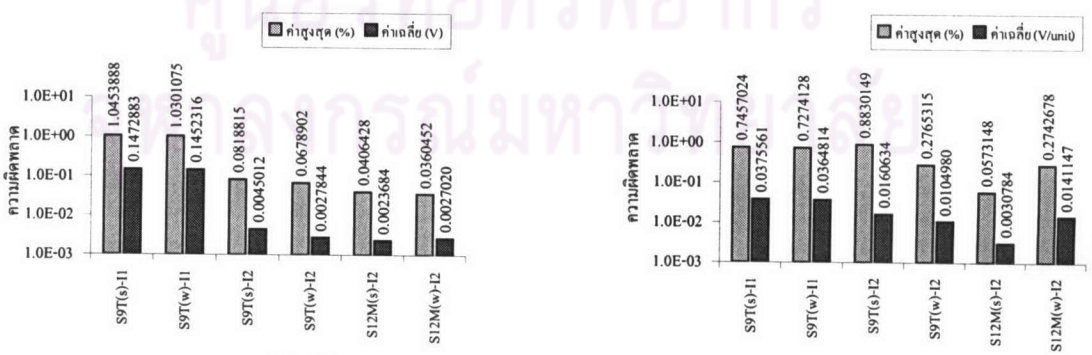
ตารางที่ 5.5 การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี

กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	ฟังก์ชันการประมาณ	รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์)	ฟังก์ชันเชิงเส้น	รูปแบบที่ 1	S9T(s)-I1
2	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม)			S9T(w)-I1
3	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์)	ฟังก์ชันกำลังสอง	รูปแบบที่ 1	S9T(s)-I2
4	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม)			S9T(w)-I2
5	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์)	ฟังก์ชันกำลังสอง	รูปแบบที่ 2	S12M(s)-I2
6	เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี (คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม)			S12M(w)-I2

ปัญหาตัวอย่างนี้ ฟังก์ชันการกระจายของค่าผลเฉลยทั้งศักย์และสนามไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันผิวโค้ง. ในกรณี S9T(s)-I1 ความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์เพิ่มขึ้น 4.26 เท่า ส่วนสนามไฟฟ้าลดลง 1.01 เท่า เมื่อเทียบกับกรณี S1T-I1. การใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรีและฟังก์ชันการประมาณแบบกำลังสอง[S9T(s)-I2]ทำให้ความถูกต้องของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้สูงขึ้น โดยมีความผิดพลาดของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าลดลง 7.68 เท่า และ 2.37 เท่า ตามลำดับ.

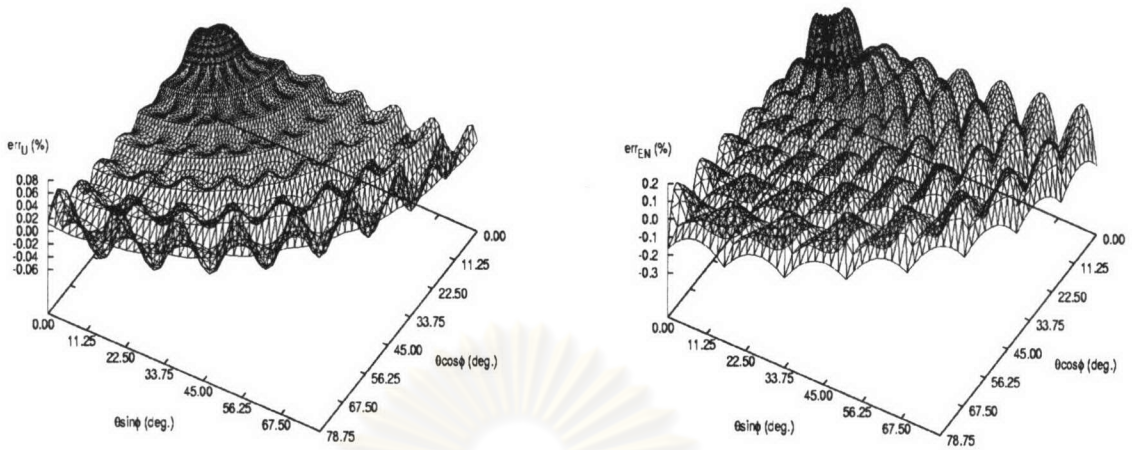
เมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีกับฟังก์ชันการประมาณแบบกำลังสอง ค่าศักย์และสนามไฟฟ้าที่ได้จากการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์และวิธีถ่วงน้ำหนักมีความสอดคล้องกับค่าความผิดพลาดของการจำลองพื้นผิว. ความผิดพลาดของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าลดลงเมื่อใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม แต่เพิ่มขึ้นเมื่อใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม.

รูปที่ 5.22 แสดงการกระจายความผิดพลาดของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้ากรณี S9T(w)-I2 และ S12M(s)-I2 โดยละเลยการแสดงผลกรณี S9T(s)-I1 และ S9T(w)-I1 เนื่องจากให้ผลที่มีความผิดพลาดที่สูง ส่วนกรณี S9T(s)-I2 และ S12M(w)-I2 เนื่องจากมีลักษณะการกระจากคล้ายคลึงกับกรณี S9T(w)-I2 และ S12M(s)-I2 ตามลำดับ แต่มีค่าที่สูงกว่าเล็กน้อย. ระบบแกนในรูปที่ 5.22 ใช้เช่นเดียวกับรูปที่ 5.5. จากรูปจะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์บริเวณด้านบนของทรงกลมให้ค่าความผิดพลาดของผลการคำนวณที่สูง ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากการจำลองพื้นผิว(ดังรูปที่ 5.15)ที่มีเวกเตอร์ตั้งฉากที่ไม่สมดุลย์ในบริเวณดังกล่าว. ทั้งนี้จะเห็นความผิดพลาดที่ชัดเจนเมื่อเปรียบเทียบระหว่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม(รูป 5.22 ก.)กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม(รูป 5.22 ข.).

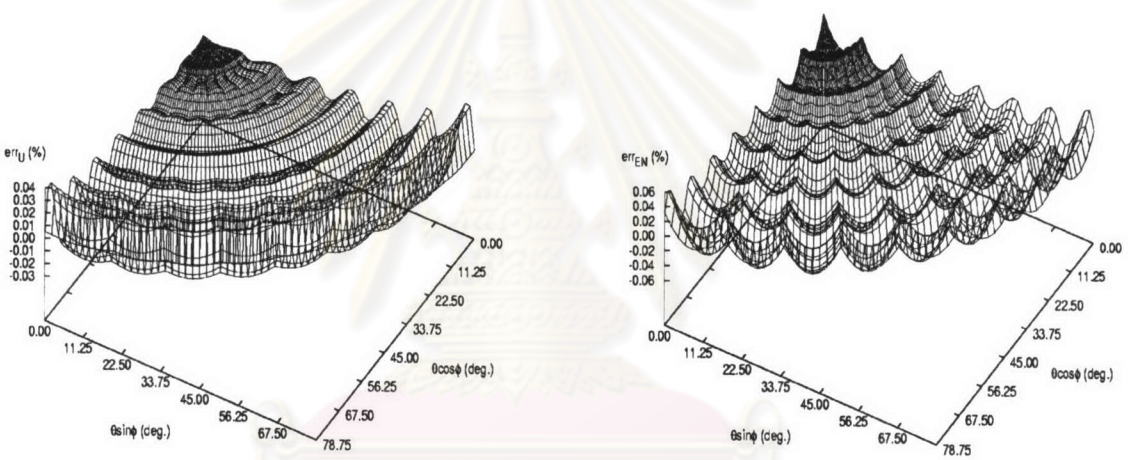


ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.21 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี



ก. S9T(w)-I2



ข. S12M(s)-I2

รูปที่ 5.22 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวน
กรณี S9T(w)-I2 และ S12M(s)-I2

<u>ปัญหาทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ</u>

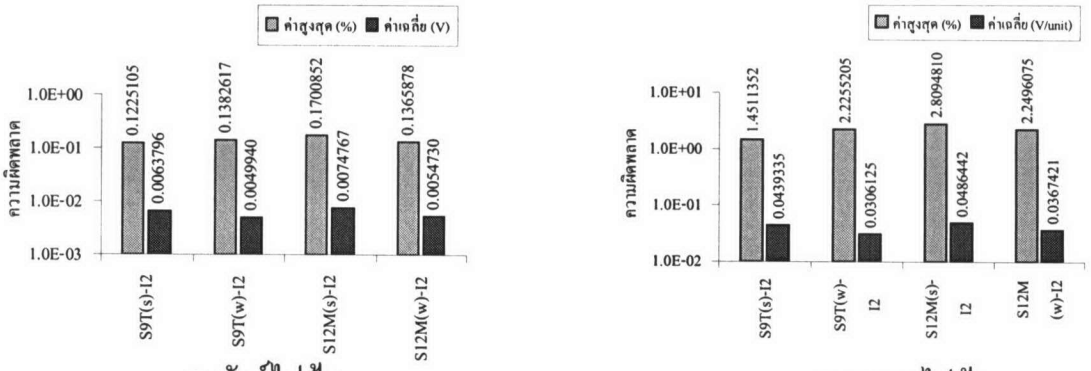
กราฟในรูปที่ 5.23 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี โดยละเลยการคำนวณในกรณีที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณแบบเชิงเส้น[S9T(s)-I1 และ S9T(w)-I1] เนื่องจากไม่ได้ปรับปรุงผลคำนวณให้ดีขึ้นในลักษณะเดียวกับปัญหาทรงกลมฉนวน. จากรูปจะเห็นได้ว่า การใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุมให้ผลการคำนวณของศักย์และสนามไฟฟ้าเฉลี่ยในทุกกรณีดีขึ้น อันเป็นผลเนื่องจากการจำลองพื้นผิวที่ดีเมื่อเปรียบเทียบกับการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์. สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าลดลง 1.386×10^{-3} V และ 1.332×10^{-2} V/unit ตามลำดับ และ

สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าลดลง 2.004×10^{-3} V และ 1.190×10^{-2} V/unit ตามลำดับ. เมื่อเปรียบเทียบผลการประยุกต์ใช้ระหว่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 9 และสี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 12 ระดับชั้นความเสรี[กรณี S9T(w)-I2 กับ S12M(w)-I2] พบว่า ผลการคำนวณที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันคือแตกต่างเพียง 4.79×10^{-4} V และ 6.130×10^{-3} V/unit สำหรับค่าศักย์และสนามไฟฟ้าตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับผลการจำลองพื้นผิวเช่นกัน.

รูปที่ 5.24 แสดงการกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าตามกรณี S9T(w)-I2 และ S12M(w)-I2 โดยละเลยการแสดงผล S9T(s)-I2 และ S12M(s)-I2 เนื่องจากมีลักษณะการกระจายคล้ายคลึงกับกรณี S9T(w)-I2 และ S12M(w)-I2 ตามลำดับ. ระบบแกนในรูปที่ 5.24 ใช้เช่นเดียวกับรูปที่ 5.5. จากรูปจะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์บริเวณด้านบนของทรงรีให้ค่าความผิดพลาดของผลการคำนวณที่สูง(เป็นบริเวณที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอสูง) ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากการจำลองพื้นผิว(ดังรูปที่ 5.19)ที่ไม่ดีบริเวณดังกล่าว. เมื่อเปรียบเทียบการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยม(รูปที่ 5.24 ก.)กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม(รูปที่ 5.24 ข.) จะเห็นได้ว่า การกระจายความผิดพลาดของผลการคำนวณที่คล้ายคลึงกัน ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างที่มาจากสมการที่คล้ายกัน.

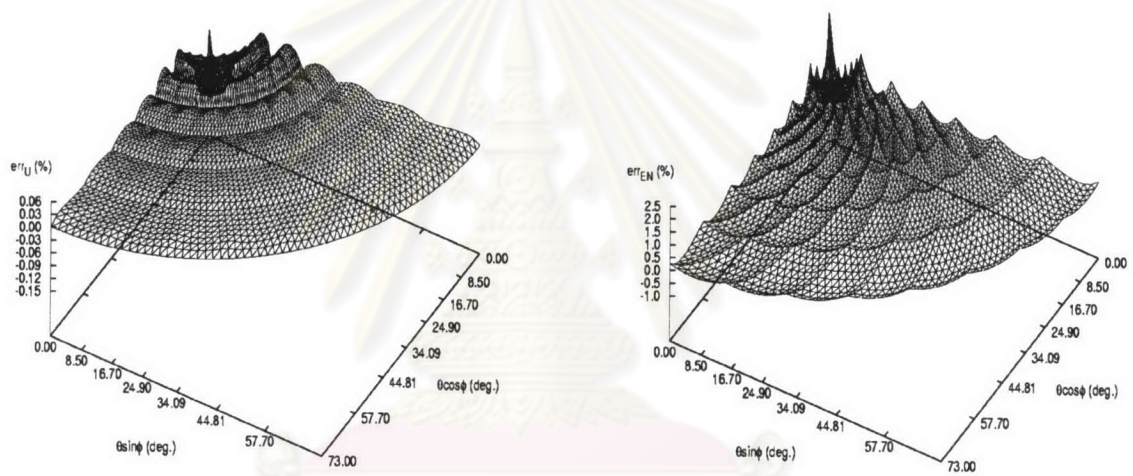
จากผลการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีในการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนปัญหาตัวอย่างทั้งสอง พบว่า

- การเพิ่มความถูกต้องของการจำลองพื้นผิวจากเอลิเมนต์เชิงเส้น(S1T)ไปเป็นเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี(S9T)แต่ยังคงใช้ฟังก์ชันการประมาณแบบเชิงเส้นไม่ปรับปรุงความถูกต้องของผลการคำนวณให้ดีขึ้น ทั้งนี้หากต้องการให้ผลการคำนวณที่ดีขึ้นต้องเพิ่มความถูกต้องทั้งการจำลองพื้นผิวและฟังก์ชันการประมาณไปพร้อมกัน ซึ่งจะให้ความถูกต้องมากกว่า 7.68 และ 2.37 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงกลมฉนวน ตามลำดับ และมากกว่า 12.04 และ 1.28 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงรีฉนวน ตามลำดับ.
- ความไม่สม่ำเสมอของความโค้งทำให้ผลการคำนวณมีความผิดพลาดสูงขึ้น แต่สามารถลดผลความผิดพลาดได้โดยการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม.
- ผลการคำนวณเมื่อจำลองพื้นผิวโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 12 ระดับชั้นความเสรีมีความแม่นยำใกล้เคียงกับผลการคำนวณเมื่อใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบ 9 ระดับชั้นความเสรี แม้ว่าจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าเนื่องจากมีจำนวนเอลิเมนต์และตัวแปรลดลง.

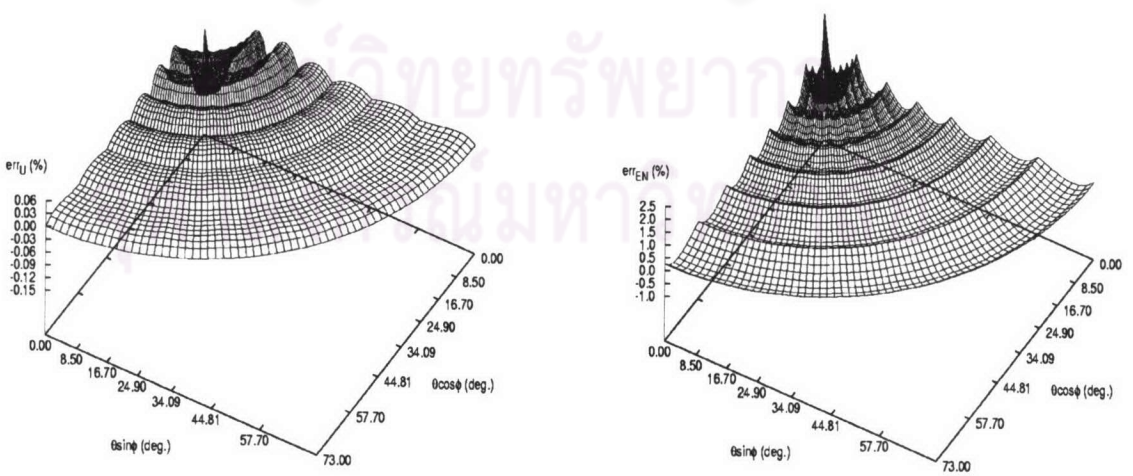


ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.23 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีฉนวนเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี



ก. S9T(w)-I2



ข. S12M(w)-I2

รูปที่ 5.24 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีฉนวน กรณี S9T(w)-I2 และ S12M(w)-I2

5.4 ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

พื้นผิวที่จำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีความต่อเนื่องระหว่างรอยต่อของเอลิเมนต์ในระดับ C^1 ซึ่งแตกต่างกับการจำลองด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีที่มีความต่อเนื่องในระดับ C^1 เฉพาะที่มุมของเอลิเมนต์เท่านั้น. ดังนั้น การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตจึงมีความเหมาะสมมากกว่า. (ความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตบนแบบจำลองกำหนดให้อยู่ในระดับ C^1 โดยสามารถดูวิธีการกำหนดความต่อเนื่องได้ในหัวข้อที่ 3.4.) อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีข้อด้อยตรงที่ไม่มีฟังก์ชันสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม(ดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 3.4). ดังนั้น ในหัวข้อนี้ยังมีการเปรียบเทียบผลของการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากการลดรูปอีกด้วย.

5.4.1 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลอง

ตารางที่ 5.6 แสดงสัญลักษณ์ย่อของชนิดเอลิเมนต์ที่ใช้ในการจำลองพื้นผิว โดยอักษร H หมายถึง เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต และอักษร R หมายถึง รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบที่ 3 (ดังรูปที่ 5.2 หน้าที่ 32) ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมทั้งหมด. การแบ่งเอลิเมนต์บนแบบจำลองให้เป็นสี่เหลี่ยมทั้งหมดเพื่อใช้สำหรับเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม โดยจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับการแบ่งรูปแบบที่ 2 ซึ่งมีการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากการลดรูป. สัญลักษณ์ย่อในวงเล็บแสดงถึงชนิดของวิธีการคำนวณหาเวกเตอร์ตั้งฉากและเวกเตอร์บิด. สัญลักษณ์ย่อตัวแรกบ่งชี้ชนิดของเวกเตอร์ตั้งฉากซึ่งอ้างอิงในลักษณะเดียวกับหัวข้อที่ 5.3.1. (สำหรับทรงกลมใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีรวมเวกเตอร์ ส่วนทรงรีใช้จากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม.) สัญลักษณ์ย่อตัวที่สองบ่งชี้ชนิดของเวกเตอร์บิด. ความผิดพลาดของพื้นผิวเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตบนแบบจำลองทรงกลมและทรงรีมีดังนี้.

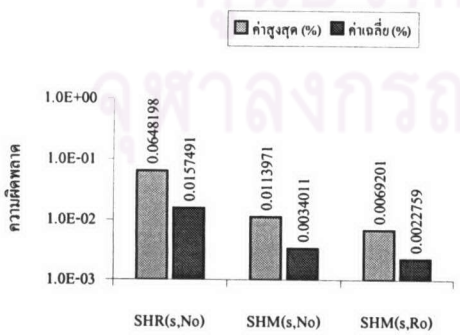
ตารางที่ 5.6 การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	วิธีประมาณเวกเตอร์บิด	รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์	แบบจำลอง	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต	ขนาดเวกเตอร์บิดเท่ากับศูนย์	รูปแบบที่ 3	ทรงกลม	SHR(s,No)
2		ขนาดเวกเตอร์บิดเท่ากับศูนย์	รูปแบบที่ 2	ทรงกลม	SHM(s,No)
				ทรงรี	SHM(w,No)
3		แบบหมุนรอบแกน (แสดงในหัวข้อที่ 4.3)		ทรงกลม	SHM(s,Ro)
				ทรงรี	SHM(w,Ro)

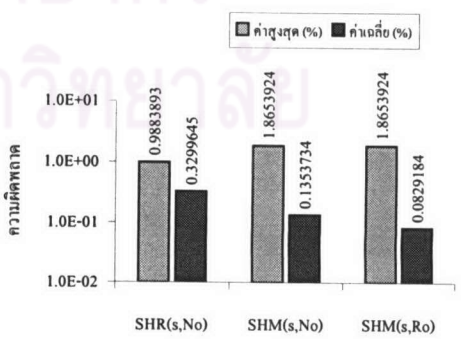
แบบจำลองทรงกลม

กราฟรูปที่ 5.25 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตในการจำลองพื้นผิวทรงกลมที่มีการแบ่งเอลิเมนต์ในรูปแบบที่ 3 (เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมทั้งหมด) กับรูปแบบที่ 2 (เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม) การจำลองพื้นผิวรูปแบบที่ 2 ให้ความถูกต้องที่มากกว่ารูปแบบที่ 3 ทุกค่า ยกเว้นความผิดพลาดสูงสุดของเวกเตอร์ตั้งฉาก ซึ่งเป็นผลอันเนื่องมาจากการลดรูปเอลิเมนต์. การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(s,Ro)]ให้ความถูกต้องมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด [SHM(s,No)] แต่ความผิดพลาดสูงสุดของเวกเตอร์ตั้งฉากยังคงเท่าเดิม เนื่องจากความผิดพลาดนี้เกิดขึ้นบนเอลิเมนต์ที่ทำการลดรูป ซึ่งไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดอยู่.

รูปที่ 5.26 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n) ในกรณีต่างๆ ตามตารางที่ 5.6 โดยใช้ระบบแกนเดียวกับรูปที่ 5.5. จากรูปจะเห็นว่า ความผิดพลาดของพื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(s,Ro)]มีลักษณะใกล้เคียงกับพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(s,No)]แต่มีความถูกต้องที่มากกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณเอลิเมนต์ที่ใกล้กับระนาบ Z=0 ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่. การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากการลดรูปที่บริเวณด้านบนของทรงกลมทำให้มีความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากสูง ซึ่งสังเกตเห็นได้ชัดเจนดังรูปที่ 5.26 ข. และ ค. (รูปด้านขวา).



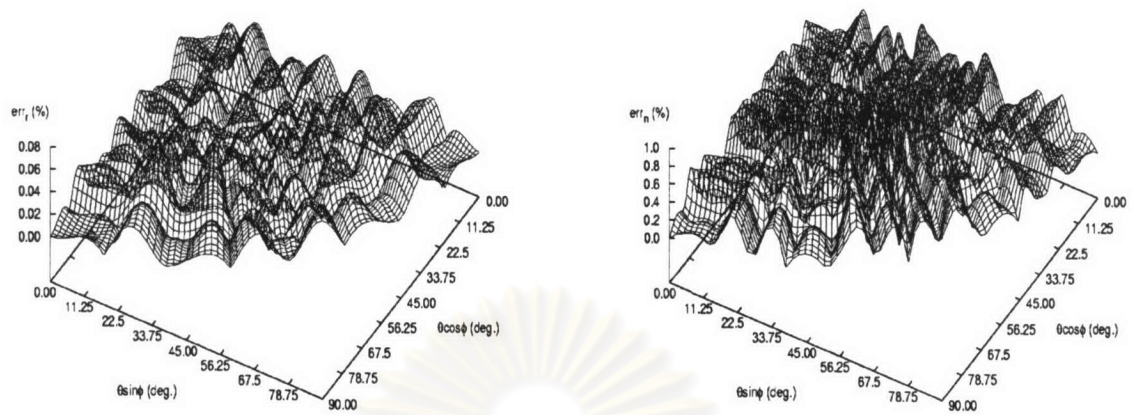
ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง



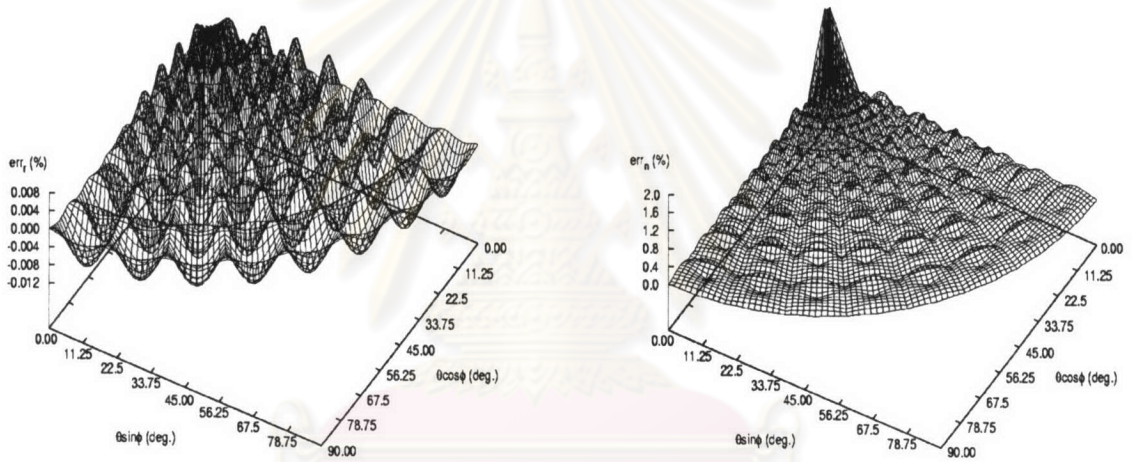
ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

รูปที่ 5.25 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

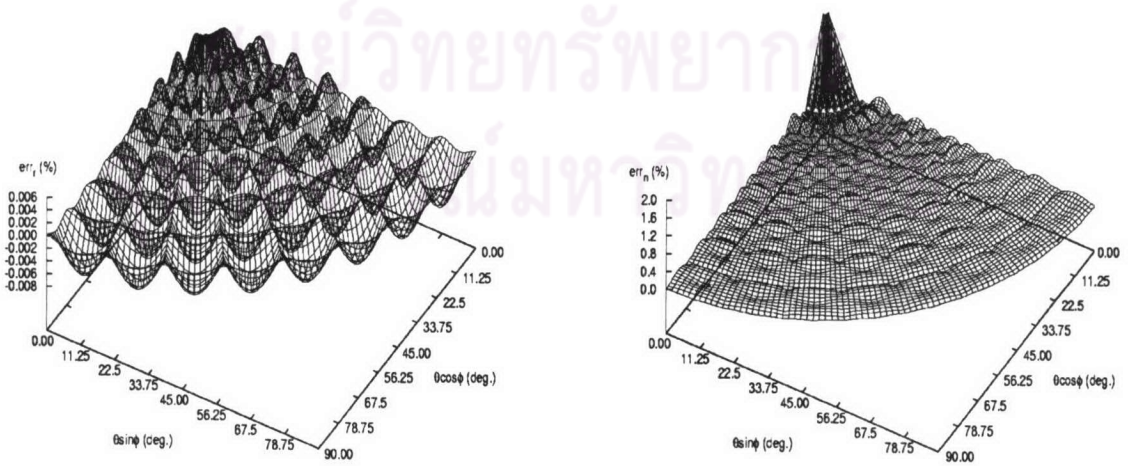
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ก. SHR(s,No)



ข. SHM(s,No)



ค. SHM(s,Ro)

รูปที่ 5.26 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

แบบจำลองทรงรี

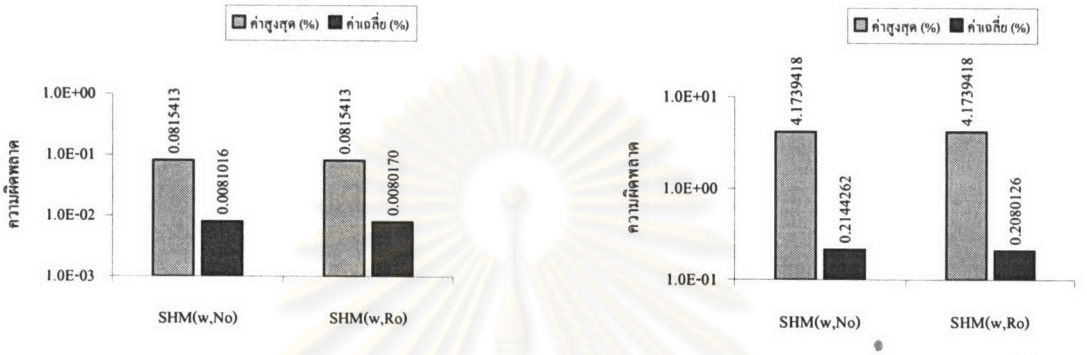
กราฟในรูปที่ 5.27 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต โดยละเลยกรณีการใช้เอลิเมนต์รูปแบบที่ 3 (SHR) เนื่องจากให้ผลการคำนวณในลักษณะเดียวกับแบบจำลองทรงกลม. จากรูปจะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบความผิดพลาดเฉลี่ยของตำแหน่งและเวกเตอร์ตั้งฉากของการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(w,Ro)]กับพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(w,No)] ปรากฏว่า พื้นผิวทั้งสองมีความถูกต้องใกล้เคียงกันแต่พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องมากกว่า 1.1252×10^{-3} % และ 5.2455×10^{-2} % ตามลำดับ. ความผิดพลาดสูงสุดของตำแหน่งและเวกเตอร์ตั้งฉากของทั้ง 2 กรณีมีค่าเท่าเดิม ซึ่งเกิดขึ้นที่เอลิเมนต์ที่ทำการลดรูป ดังที่ได้กล่าวมาแล้วขึ้นต้น.

รูปที่ 5.28 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n) ในกรณีของ SHM(w,Ro) โดยละเลยการแสดงผลกรณี SHM(w,Ro) เนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่คล้ายกับกรณี SHM(w,Ro) แต่มีค่าสูงกว่าเล็กน้อย. ระบบแกนในรูปที่ 5.28 ใช้เช่นเดียวกับรูปที่ 5.5. จากรูปจะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดของทั้งตำแหน่งและเวกเตอร์ตั้งฉากจะมีค่าสูงมากบริเวณใกล้ด้านบน ซึ่งเป็นผลเนื่องจากความโค้งที่เพิ่มขึ้นของบริเวณนี้.

จากผลการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต พบว่า

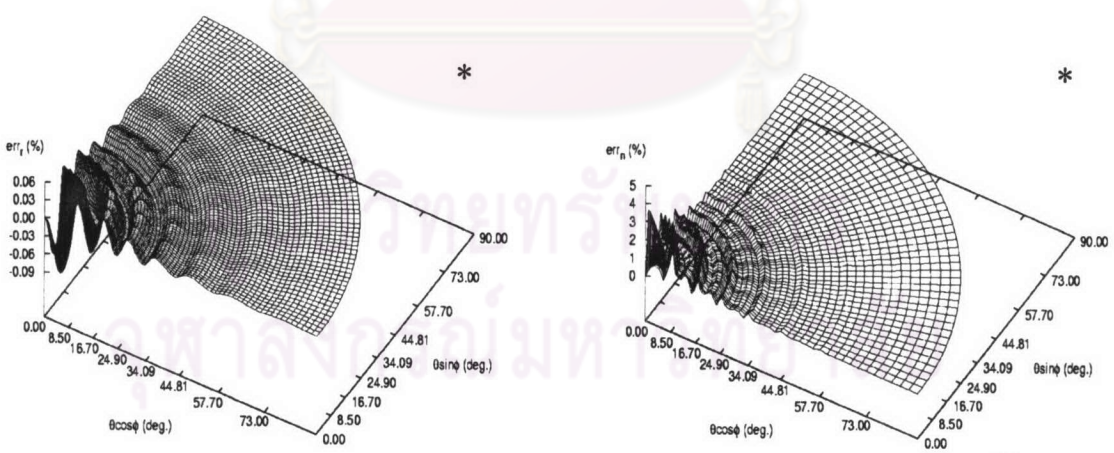
- เมื่อเปรียบเทียบการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตที่ได้จากการลดรูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีความผิดพลาดของตำแหน่งใกล้เคียงกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม แต่จะให้ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากที่สูงมากในบริเวณที่ทำการลดรูป.
- พื้นผิวที่จำลองด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีความถูกต้องมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้น โดยให้ความถูกต้องเฉลี่ยของตำแหน่งมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้นถึง 157.05 และ 61.67 เท่าสำหรับแบบจำลองทรงกลมและทรงรี ตามลำดับ.
- การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีความเหมาะสมมากกว่าการจำลองด้วยเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี เนื่องจากมีความต่อเนื่องของพื้นผิวที่ดีกว่า และมีความถูกต้องเฉลี่ยของตำแหน่งและเวกเตอร์ตั้งฉากที่สูงกว่า.
- ผลการจำลองพื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด ไม่ว่าพื้นผิวจะมีความโค้งสม่ำเสมอหรือไม่ก็ตาม.

- สำหรับพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ การจำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตให้ความผิดพลาดที่สูงกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับพื้นผิวที่มีความโค้งสม่ำเสมอ เช่นเดียวกับการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์ผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี.



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

รูปที่ 5.27 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

รูปที่ 5.28 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีกรณี SHM(w,Ro)

5.4.2 ความผิดพลาดของผลการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า

การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าโดยการใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตในการจำลองรูปร่างแบ่งเป็นกรณีต่างๆ ตามตารางที่ 5.6 โดยผลการคำนวณจะประยุกต์ใช้ร่วมกับฟังก์ชันการประมาณแบบกำลังสอง ซึ่งให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องสูง ดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 5.3.2. ค วามผิดพลาดของผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตกับปัญหาทรงกลมฉนวนและทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอมีดังนี้.

<u>ปัญหาทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ</u>

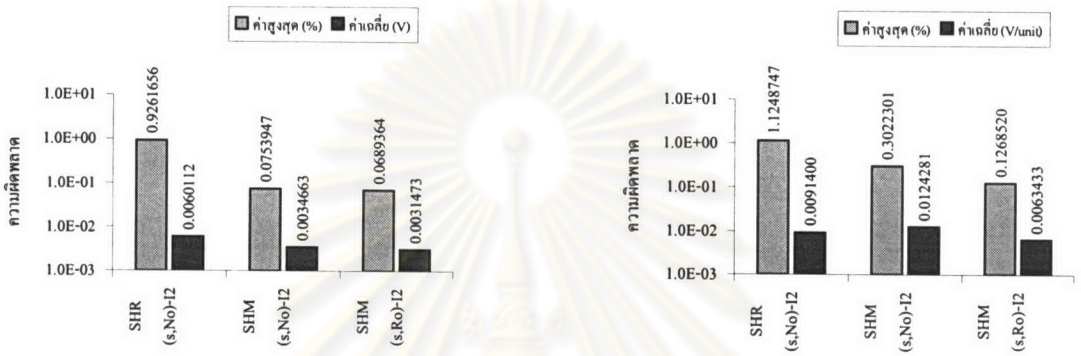
กราฟในรูปที่ 5.29 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่าเมื่อเปรียบเทียบความผิดพลาดการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตบนแบบจำลองรูปแบบที่ 3 [SHR(s,No)-I2] กับรูปแบบที่ 2 [SHM(s,No)-I2] ปรากฏว่า รูปแบบที่ 2 ให้ความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์ไฟฟ้าน้อยกว่า 2.5499×10^{-3} V แต่สนามไฟฟ้ามากกว่า 3.2881×10^{-3} V/unit ซึ่งเป็นผลเนื่องจากการจำลองพื้นผิวที่มีความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากที่สูง, และเมื่อเราเพิ่มความถูกต้องของการจำลองพื้นผิวโดยเพิ่มองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(s,Ro)-I2] ปรากฏว่า ได้ค่าศักย์และสนามไฟฟ้าที่มีความถูกต้องมากขึ้นและมากกว่ากรณี SHR(s,No)-I2 โดยมีความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าน้อยกว่า 3.9351×10^{-3} V และ 3.2376×10^{-3} V/unit ตามลำดับ. ดั งนั้นถ้าการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีความถูกต้องเพียงพอ เราสามารถนำเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากการลดรูปไปใช้กับแบบจำลองที่มีการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้วยได้.

ตารางที่ 5.7 การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	วิธีประมาณเวกเตอร์บิด	รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์	แบบจำลอง	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต	ขนาดเวกเตอร์บิดเท่ากับศูนย์	รูปแบบที่ 3	ทรงกลมฉนวน	SHR(s,No)-I2
2		ขนาดเวกเตอร์บิดเท่ากับศูนย์	รูปแบบที่ 2	ทรงกลมฉนวน	SHM(s,No)-I2
				ทรงรีฉนวน	SHM(w,No)-I2
3		แบบหมุนรอบแกน		ทรงกลมฉนวน	SHM(s,Ro)-I2
				ทรงรีฉนวน	SHM(w,Ro)-I2

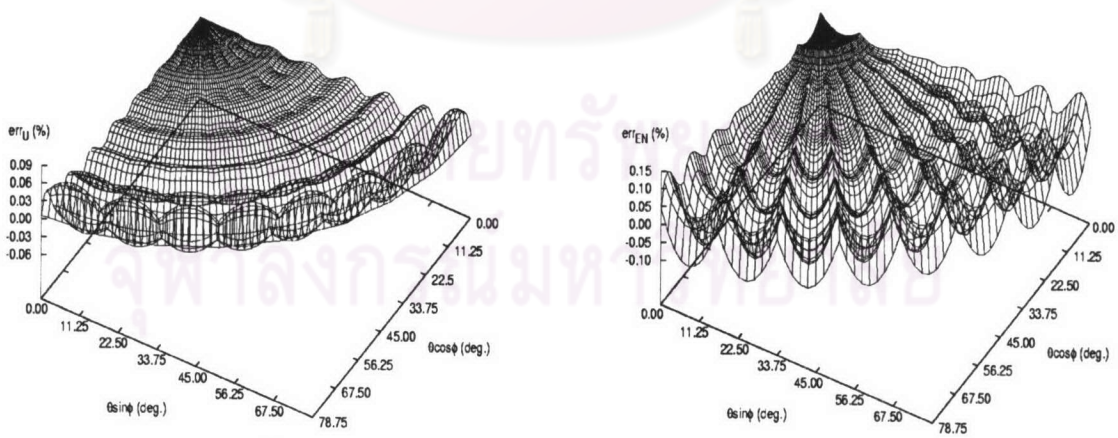
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 5.30 แสดงการกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้ากรณี SHM(s,Ro)-I2 โดยละเลยกรณี SHM(s,No)-I2 เนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกันแต่มีความผิดพลาดสูงกว่า. จากรูปจะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดของสนามไฟฟ้าที่บริเวณด้านบนของทรงกลมมีค่าสูง เนื่องจากผลการลดรูปเอลิเมนต์ ส่วนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมีการกระจายที่คล้ายกันแต่ต่างกันที่ค่าความผิดพลาดซึ่งขึ้นกับผลของการจำลองพื้นผิว.



ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.29 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต



ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.30 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนกรณี SHM(s,Ro)-I2

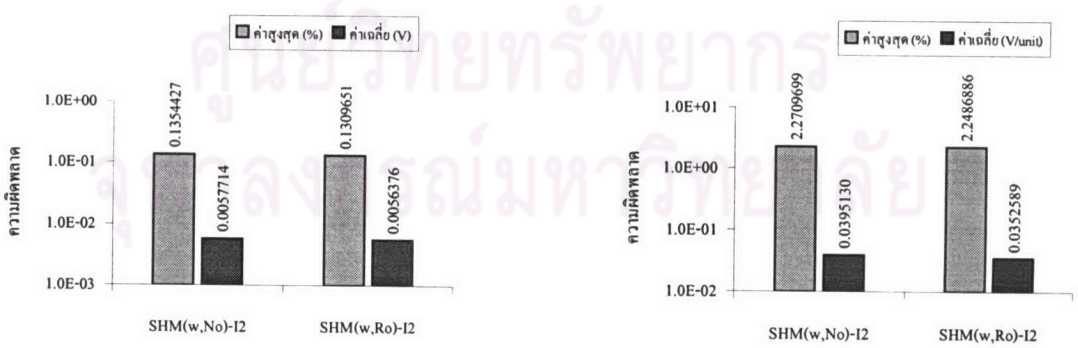
ปัญหาทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

กราฟในรูปที่ 5.31 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากผลการคำนวณในรูปที่ 5.27 พบว่า พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด ดังนั้น ถ้านำพื้นผิวทั้งสองมาคำนวณด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์ ก็จะได้ผลในลักษณะเดียวกันคือ พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(w,Ro)-I2]ให้ความถูกต้องของศักย์และสนามไฟฟ้ามากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด[SHM(w,No)-I2] แต่มีค่าไม่แตกต่างกันมากคือค่าศักย์และสนามไฟฟ้าเฉลี่ยต่างกันไม่เกิน $1.338\text{x}10^{-4}$ V และ $4.2541\text{x}10^{-3}$ V/unit ตามลำดับ.

รูปที่ 5.32 แสดงการกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้ากรณี SHM(w,Ro)-I2 โดยละเลยกรณี SHM(w,No)-I2 เนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกันแต่มีความผิดพลาดสูงกว่า. จากรูปจะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์บริเวณด้านบนของทรงรีมีความผิดพลาดของผลการคำนวณที่สูง(เป็นบริเวณที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอสูง) ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากการจำลองพื้นผิวที่ไม่ดีในบริเวณดังกล่าว.

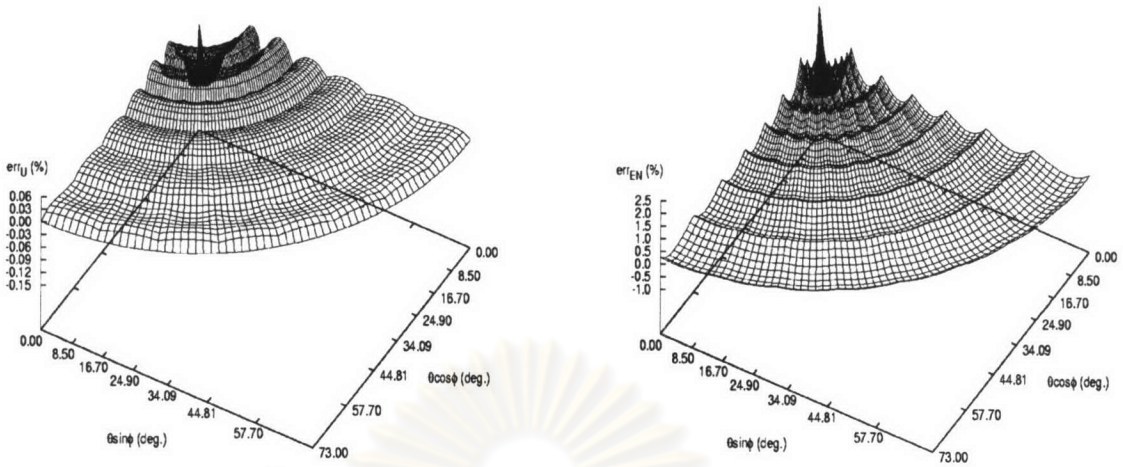
จากผลการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตในการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนปัญหาตัวอย่างทั้งสอง พบว่า

- เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตที่ได้จากการลดรูปสามารถใช้ร่วมกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตในการคำนวณด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์ได้ เมื่อมีการจำลองพื้นผิวที่ถูกต้องเพียงพอ.



ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.31 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีฉนวนเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต



ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.32 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้า
บนทรงรีฉนวนกรณี SHM(s,Ro)-I2

- ผลการคำนวณโดยใช้พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องของศักย์และสนามไฟฟ้ามากกว่าผลการคำนวณโดยใช้พื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด.
- การใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตจำลองพื้นผิวสามารถเพิ่มความแม่นยำของผลการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์เชิงเส้น ได้มากกว่า 9.97 และ 3.06 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงกลมฉนวน ตามลำดับ และได้มากกว่า 15.60 และ 1.58 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงรีฉนวน ตามลำดับ.
- ผลการคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีความถูกต้องมากกว่าผลการคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี เนื่องจากการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีความถูกต้องสูงกว่า โดยให้ความถูกต้องมากกว่า 2.29 และ 0.69 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงกลมฉนวน ตามลำดับ และมากกว่า 3.56 และ 0.30 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงรีฉนวน ตามลำดับ.
- สำหรับพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ การคำนวณด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตให้ความผิดพลาดที่สูงกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับพื้นผิวที่มีความโค้งสม่ำเสมอ เช่นเดียวกับการคำนวณด้วยเอลิเมนต์ผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี.

5.5 ฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสาม

การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรีและเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตในสองหัวข้อที่แล้วพบว่า ผลการคำนวณที่ได้มีความถูกต้องมากกว่าการใช้เอลิเมนต์เชิงเส้น. ถ้าทำการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอในลักษณะเดียวกับสองหัวข้อที่แล้ว ก็จะให้ผลการคำนวณที่คล้ายกัน. ดังนั้น จุดมุ่งหมายของหัวข้อนี้จะแตกต่างออกไป โดยเราจะพยายามทำให้การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอมีความถูกต้องที่ใกล้เคียงหรือดีกว่าเอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตี โดยการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้จากค่าจริงบนพื้นผิวแทนเวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้จากการประมาณ และเวกเตอร์บิดที่ได้จากการประมาณด้วยวิธีต่างๆ ด้วย.

จากหัวข้อที่แล้ว ถึงแม้ว่าการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตมีความต่อเนื่องของพื้นผิวที่ดี แต่ก็มีความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากบริเวณเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสูง. ในหัวข้อนี้ แสดงการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอซึ่งฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสามมีทั้งฟังก์ชันสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม. ดังนั้น พื้นผิวที่ได้จะมีความถูกต้องมากขึ้น. (ความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอบนแบบจำลองกำหนดให้อยู่ในระดับ G^1 โดยสามารถดูวิธีการกำหนดความต่อเนื่องได้ในหัวข้อที่ 3.5.)

ข้อแตกต่างอีกประการหนึ่งระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอและเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตคือ การนำเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์บิดไปใช้ในการสร้างเอลิเมนต์. ในกรณีของเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ เราจะนำเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์บิดไปคำนวณหาเวกเตอร์พิกัดของจุดควบคุมซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของเอลิเมนต์(ไม่ได้นำเวกเตอร์ทั้งสองมาใช้เป็นพารามิเตอร์โดยตรงเหมือนในเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต).

5.5.1 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลอง

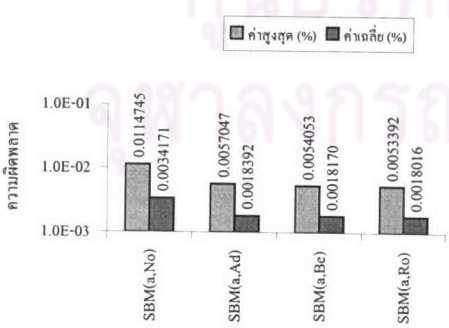
ตารางที่ 5.8 แสดงสัญลักษณ์ย่อของชนิดเอลิเมนต์ที่ใช้ในการจำลองพื้นผิว โดยอักษร B หมายถึง เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ และสัญลักษณ์ย่อในวงเล็บแสดงถึงชนิดของวิธีการคำนวณหาเวกเตอร์ตั้งฉากและเวกเตอร์บิดซึ่งอ้างอิงในลักษณะเดียวกับหัวข้อที่ 5.4.1. สัญลักษณ์ย่อ a ในวงเล็บตัวแรกบ่งชี้เวกเตอร์ตั้งฉากที่คำนวณได้จริงบนพื้นผิวทรงกลมหรือทรงรี. เวกเตอร์ตั้งฉากนี้นำไปใช้ในการจำลองพื้นผิวเพื่อให้ได้พื้นผิวที่มีความถูกต้องมากขึ้นดังที่กล่าวมาแล้วข้นต้น. (วิธีการคำนวณเวกเตอร์บิดแบบต่างๆ แสดงในหัวข้อที่ 4.3.) ความผิดพลาดของพื้นผิวเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอบนแบบจำลองทรงกลมและทรงรีที่มีการแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบที่ 2 มีดังนี้.

ตารางที่ 5.8 การจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ

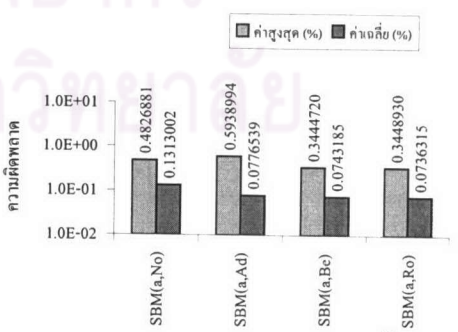
กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	วิธีประมาณเวกเตอร์บิด	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ	ขนาดเวกเตอร์บิดเท่ากับศูนย์	SBM(a,No)
2		แบบอาดินิ	SBM(a,Ad)
3		แบบเบสเซิล	SBM(a,Be)
4		แบบหมุนรอบแกน	SBM(a,Ro)

<u>แบบจำลองทรงกลม</u>

กราฟรูปในที่ 5.33 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวเมื่อใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอในการจำลองพื้นผิวทรงกลม โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความถูกต้องเฉลี่ยของพื้นผิวสูงกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด เนื่องจากพื้นผิวมีองค์ประกอบที่สมบูรณ์กว่าในลักษณะเช่นเดียวกับเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต. การใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 ประเภทให้ความผิดพลาดของพื้นผิวใกล้เคียงกันคือ ค่าความผิดพลาดสูงสุดและเฉลี่ยของรัศมีต่างกันไม่เกิน 3.655×10^{-4}% และ 3.760×10^{-5}% ตามลำดับ โดยที่การใช้เวกเตอร์บิดแบบหมุนรอบแกนให้ผลความผิดพลาดของพื้นผิวต่ำสุด ส่วนการใช้เวกเตอร์บิดแบบอาดินิให้ผลความผิดพลาดของพื้นผิวสูงสุด เนื่องจากการประมาณแบบอาดินิได้นำเวกเตอร์สัมผัสเข้าไปคิดรวมด้วยดังสมการที่ 4.5 หน้า 28 และรูปที่ 5.34. รูปที่ 5.34 แสดงข้อมูลที่นำมาคำนวณเวกเตอร์บิดแบบอาดินิ ซึ่งประกอบได้ด้วยเวกเตอร์พิกัดที่มุมทั้ง 4 และเวกเตอร์สัมผัสที่กึ่งกลางด้านทั้ง 4. ขนาดของเวกเตอร์สัมผัสเป็นค่าที่ประมาณจากความยาวด้านเช่นเดียวกับเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อการคำนวณหาเวกเตอร์บิด.



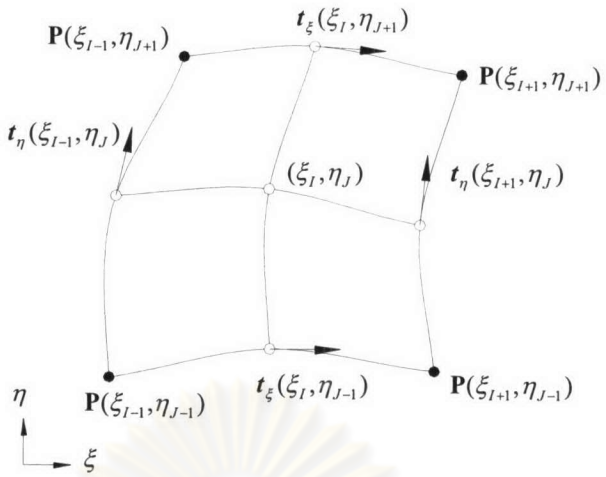
ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง



ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

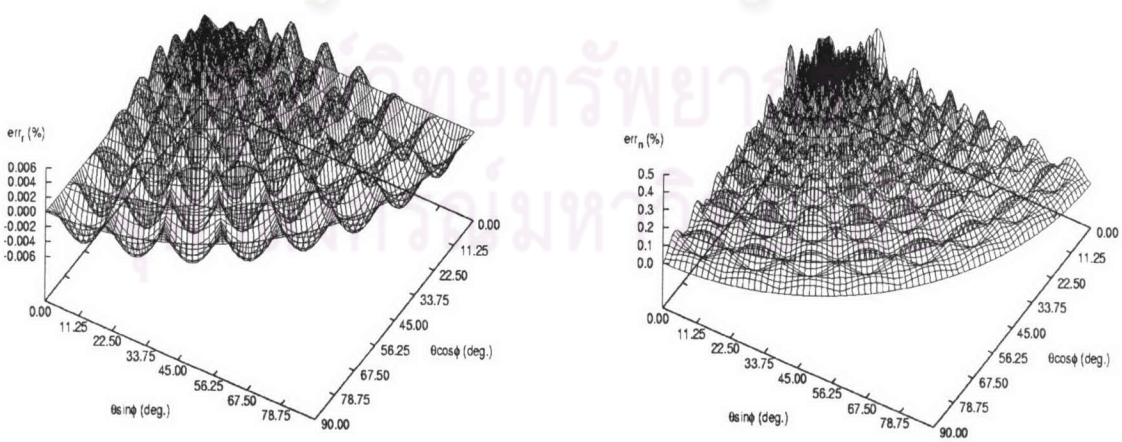
รูปที่ 5.33 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 5.34 ข้อมูลที่นำมาคำนวณเวกเตอร์บิดแบบอาดินิ

รูปที่ 5.35 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n) ในกรณี SBM(a,Ro) ในระบบแกนเดียวกับรูปที่ 5.5 โดยละเลยกรณีอื่นเนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกัน. จากรูปจะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดของพื้นผิวในแต่ละเอลิเมนต์มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งเป็นผลเนื่องจากการแบ่งแบบจำลองที่มีความโค้งสม่ำเสมอ. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามแบบเบทซิเอ(รูปที่ 5.35 ข.)มีค่าน้อยกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากการลดรูปฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต(รูปที่ 5.26 ค.)มาก.



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

รูปที่ 5.35 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงกลมกรณี SBM(a,Ro)

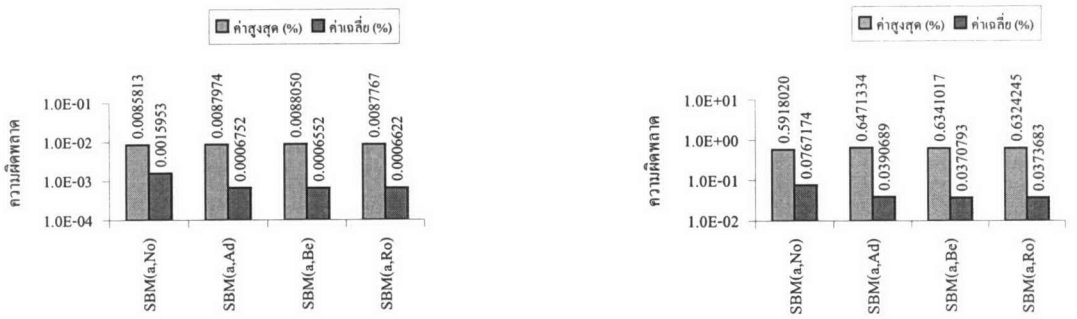
แบบจำลองทรงรี

กราฟในรูปที่ 5.36 แสดงความผิดพลาดของพื้นผิวเมื่อใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอในการจำลองพื้นผิวทรงรี โดยมีแกนตั้งเป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึม. จากรูปจะเห็นได้ว่า พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดมีความผิดพลาดเฉลี่ยของรัศมีและเวกเตอร์ตั้งฉากต่ำกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด. การใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 ประเภทให้ความผิดพลาดของพื้นผิวใกล้เคียงกันคือ ค่าความผิดพลาดสูงสุดและเฉลี่ยของรัศมีต่างกันไม่เกิน 2.830×10^{-5}% และ 2.000×10^{-5}% ตามลำดับ. ความผิดพลาดเฉลี่ยของรัศมีและเวกเตอร์ตั้งฉากมีค่าต่ำสุดในกรณีที่ใช้เวกเตอร์บิดแบบเบสเซิล และมีค่าสูงสุดในกรณีที่ใช้เวกเตอร์บิดแบบอาดินิ.

รูปที่ 5.37 แสดงการกระจายความผิดพลาดของตำแหน่ง(err_r)และเวกเตอร์ตั้งฉาก(err_n) ในกรณี SBM(a,Be) โดยละเลยกรณีอื่นเนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกัน. จากรูปจะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดของทั้งตำแหน่งและเวกเตอร์ตั้งฉากจะมีค่าสูงมากบริเวณใกล้ด้านบน ซึ่งเป็นผลเนื่องจากความโค้งที่เพิ่มขึ้นของบริเวณนี้. เมื่อเปรียบเทียบความผิดพลาดในรูปที่ 5.28 กับ 5.37 พบว่า การใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอในการจำลองพื้นผิวทรงรีมีความผิดพลาดของตำแหน่งที่ต่ำกว่าอันเนื่องมาจากการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากที่มีความถูกต้องสูงกว่า และสังเกตได้ชัดเจนว่าการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามแบบเบทซิเอที่ส่วนบนสุดของแบบจำลองมีความผิดพลาดสูงสุดของเวกเตอร์ตั้งฉากต่ำกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตที่ได้จากวิธีการลดรูปมาก.

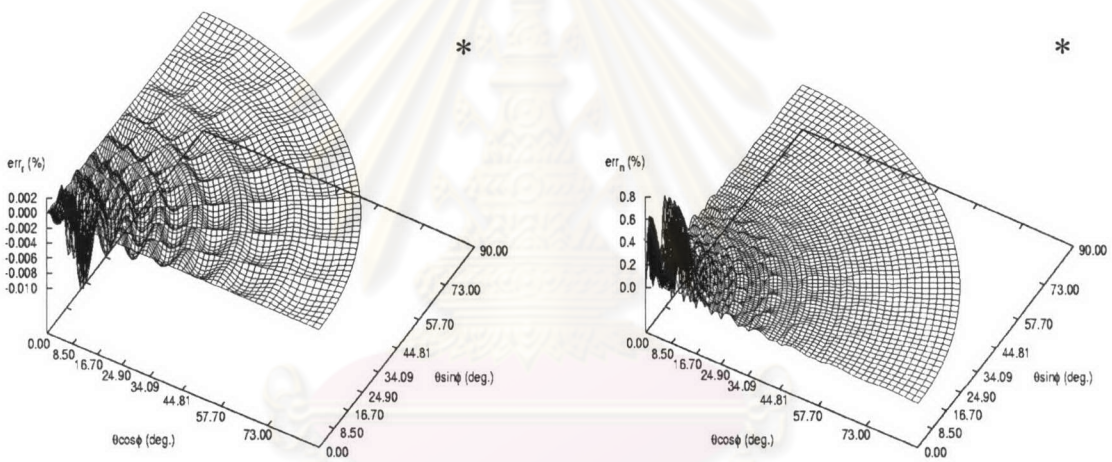
จากผลการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ พบว่า

- พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดให้ความถูกต้องของพื้นผิวมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด.
- ผลการจำลองพื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดแบบอาดินิมีความผิดพลาดสูงสุดเนื่องจากการประมาณแบบอาดินิได้นำเวกเตอร์สัมผัสเข้าไปคิดรวมด้วย ทำให้ผลการคำนวณที่ได้มีความผิดพลาดที่เพิ่มขึ้น.
- พื้นผิวที่จำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอมีความถูกต้องมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้น โดยให้ความถูกต้องเฉลี่ยของตำแหน่งมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้นถึง 156.31 และ 313.21 เท่าสำหรับแบบจำลองทรงกลมและทรงรี ตามลำดับ.
- การใช้เวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้จากค่าจริงบนพื้นผิวและใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 แบบในการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอไม่สามารถทำให้พื้นผิวมีความถูกต้องมากกว่าการจำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตี.
- สำหรับพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ การจำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอให้ความผิดพลาดที่สูงกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับพื้นผิวที่มีความโค้งสม่ำเสมอ เช่นเดียวกับการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์ผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี.



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

รูปที่ 5.36 ความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ



ก. ความผิดพลาดของตำแหน่ง ข. ความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉาก

รูปที่ 5.37 การกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวแบบจำลองทรงรีกรณี SBM(a,Be)

5.5.2 ความผิดพลาดของผลการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า

การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าโดยการใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอแบ่งเป็นกรณีต่างๆ ตามตารางที่ 5.9. ความผิดพลาดของผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอกับปัญหาทรงกลมฉนวนและทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอที่มีการแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบที่ 2 ดังนี้.

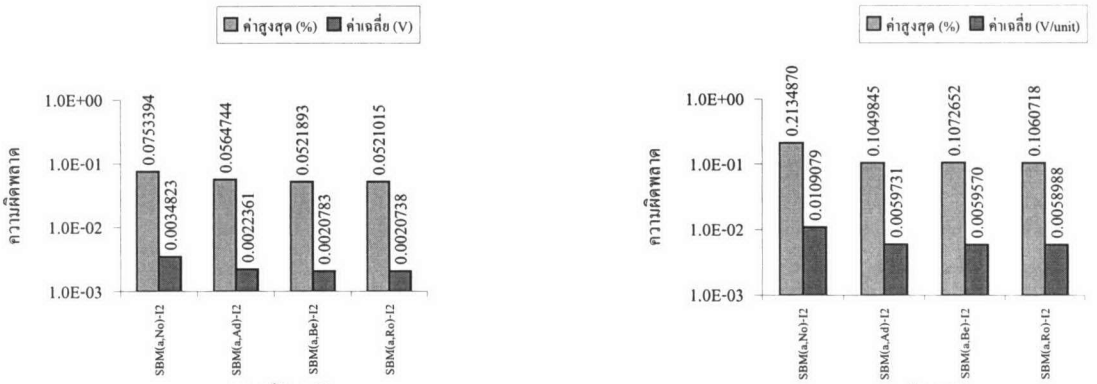
ตารางที่ 5.9 การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ

กรณีที่	เอลิเมนต์ที่ใช้จำลองขอบเขตย่อย	ฟังก์ชันการประมาณ	วิธีประมาณเวกเตอร์บิด	สัญลักษณ์ย่อที่ใช้
1	เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ	ฟังก์ชันกำลังสอง	ขนาดเวกเตอร์บิดเท่ากับศูนย์	SBM(a,No)-I2
2			แบบอาดินิ	SBM(a,Ad)-I2
3			แบบเบสเซิล	SBM(a,Be)-I2
4			แบบหมุนรอบแกน	SBM(a,Ro)-I2

ปัญหาทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

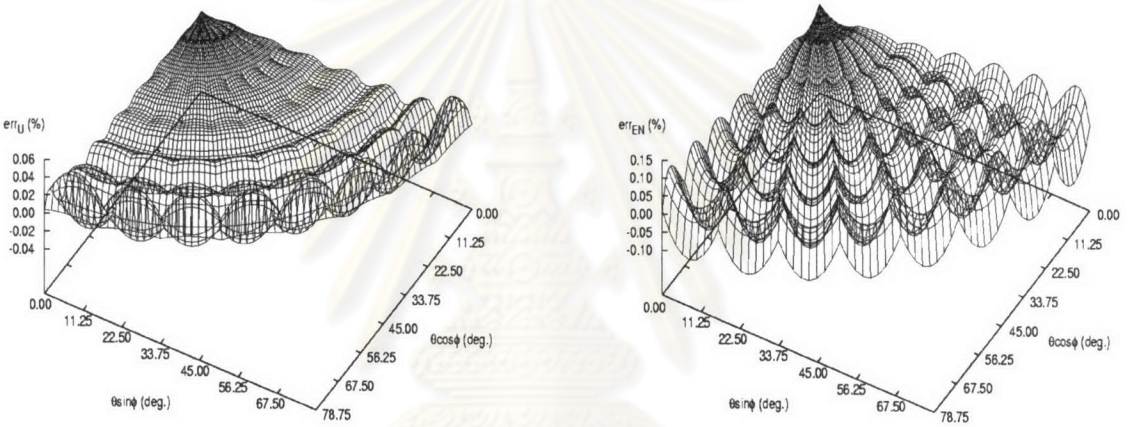
กราฟในรูปที่ 5.38 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ. จากรูปจะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าสอดคล้องกับผลการจำลองพื้นผิว(รูปที่ 5.33). พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดให้ผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าที่มีความถูกต้องมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด. การใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 ประเภทให้ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าใกล้เคียงกันคือ ค่าความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าต่างกันไม่เกิน $1.623\text{x}10^{-4}$ V และ $7.43\text{x}10^{-5}$ V/unit ตามลำดับ. ความผิดพลาดเฉลี่ยของรัศมีและเวกเตอร์ตั้งฉากมีค่าต่ำสุดในกรณีที่ใช้เวกเตอร์บิดแบบหมุนรอบแกน และมีค่าสูงสุดในกรณีที่ใช้เวกเตอร์บิดแบบอาดินิ. เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้ทั้งหมดจากรูปที่ 5.38 กับกรณี S2M-I2 ในรูปที่ 5.8 ปรากฏว่า การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอให้ผลการคำนวณที่มีความผิดพลาดที่สูงกว่า อันเป็นผลเนื่องจากการจำลองพื้นผิวที่มีความผิดพลาดสูงกว่า.

รูปที่ 5.39 แสดงตัวอย่างการกระจายความผิดพลาดของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้ากรณี SBM(a,Ro)-I2 โดยละเลยกรณีอื่นเนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกัน. ลักษณะการกระจายความผิดพลาดของพื้นผิวในแต่ละเอลิเมนต์มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งเป็นผลเนื่องจากการจำลองพื้นผิวที่มีความโค้งสม่ำเสมอ. เมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 5.30 [กรณี SHM(s,Ro)-I2] กับรูปที่ 5.39 [กรณี SBM(a,Ro)-I2] พบว่า ลักษณะการกระจายของศักย์และสนามไฟฟ้าทั้ง 2 กรณีมีลักษณะที่คล้ายกัน แต่กรณี SBM(a,Ro)-I2 มีความถูกต้องที่สูงกว่า เนื่องจากการใช้เวกเตอร์ตั้งฉากจากค่าจริงบนพื้นผิวและไม่มีผลความผิดพลาดของเวกเตอร์ตั้งฉากจากการลดรูปเอลิเมนต์.



ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.38 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ



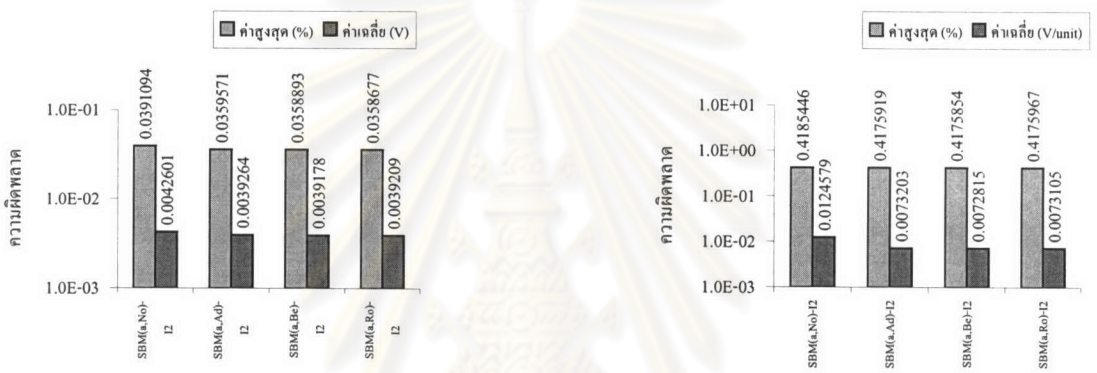
ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.39 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนกรณี SBM(a,Ro)-I2

ปัญหาทรงรีฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

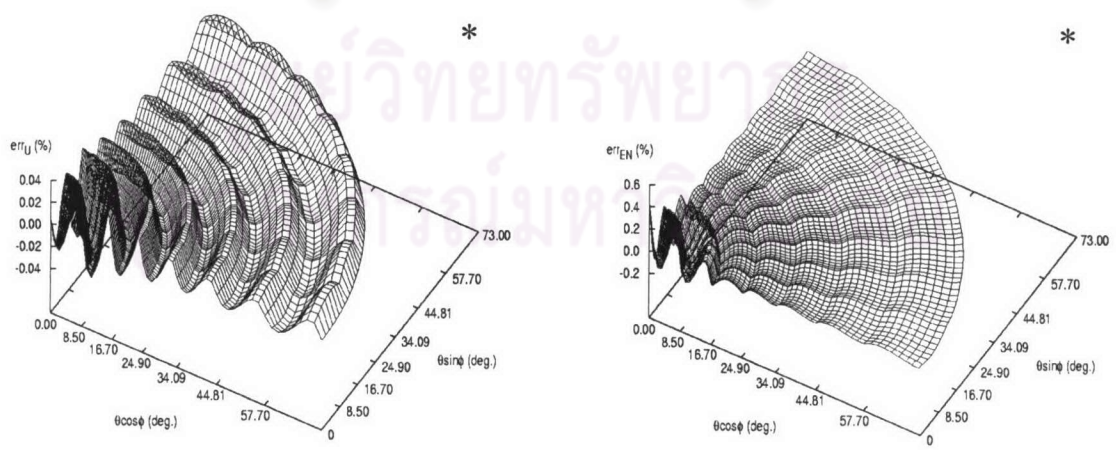
รูปที่ 5.40 แสดงความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ. จากรูปจะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าสอดคล้องกับผลการจำลองพื้นผิว ในลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาทรงกลมฉนวน แต่มีความผิดพลาดที่สูงกว่า เนื่องจากการจำลองพื้นผิวที่ไม่ดีบนพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ. พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดให้ผลการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าที่มีความถูกต้องมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด และสังเกตได้ชัดเจนว่า ความแตกต่างระหว่างผลการคำนวณของพื้นผิวที่มีและไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดในปัญหาทรงรีมีค่าน้อยกว่าในปัญหาทรงกลม. การใช้เวกเตอร์บิดแบบเบสเซิลให้ผลความผิดพลาดเฉลี่ยของศักย์และสนามไฟฟ้าต่ำสุด ส่วนการใช้เวกเตอร์บิดแบบอาดินิให้ผลความผิดพลาดสูงสุด.

รูปที่ 5.41 แสดงการกระจายความผิดพลาดของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้ากรณี SBM(a,Be)-I2 โดยละเลยกรณีอื่นเนื่องจากมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกัน. จากรูปจะเห็นได้ว่า บริเวณที่เอลิเมนต์มีความโค้งมากหรือบริเวณด้านบนของทรงรีซึ่งมีค่าความผิดพลาดของพื้นผิวที่สูงจะให้ผลการคำนวณที่ผิดพลาดสูงตามด้วย. เมื่อเปรียบเทียบความผิดพลาดของสนามไฟฟ้าในรูปที่ 5.32 [กรณี SHM(s,Ro)-I2] กับรูปที่ 5.41 [กรณี SBM(a,Be)-I2] พบว่า การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามแบบเบทซิเอมีความถูกต้องที่สูงกว่า ทั้งนี้เป็นผลเนื่องจากการจำลองพื้นผิวด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามแบบเบทซิเอมีความถูกต้องมากกว่าการจำลองด้วยเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต.



ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.40 ความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีฉนวนเมื่อประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ



ก. ศักย์ไฟฟ้า ข. สนามไฟฟ้า

รูปที่ 5.41 การกระจายความผิดพลาดของศักย์และสนามไฟฟ้าบนทรงรีฉนวนกรณี SBM(a,Be)-I2

จากผลการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอในการคำนวณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนปัญหาตัวอย่างทั้งสอง พบว่า

- พื้นผิวที่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิดให้ความถูกต้องของผลการคำนวณมากกว่าพื้นผิวที่ไม่มีองค์ประกอบของเวกเตอร์บิด.
- การใช้เวกเตอร์บิดทั้ง 3 ชนิดในการจำลองพื้นผิวให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกัน โดยการใช้เวกเตอร์บิดแบบอาดินิให้ความผิดพลาดสูงสุด.
- การใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอจำลองพื้นผิวสามารถเพิ่มความแม่นยำของผลการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์เชิงเส้น ได้มากกว่า 9.92 และ 3.49 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงกลมฉนวน ตามลำดับ และได้มากกว่า 21.13 และ 5.00 เท่าของค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในปัญหาทรงรีฉนวน ตามลำดับ.
- เมื่อเปรียบเทียบการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอกับเอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตีพบว่า ผลการคำนวณจากการใช้เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอยังคงมีความผิดพลาดที่สูงกว่า อันเป็นผลเนื่องจากการใช้เวกเตอร์สัมผัสและเวกตอร์บิดที่ไม่เหมาะสม.
- สำหรับพื้นผิวที่มีความโค้งไม่สม่ำเสมอ การคำนวณด้วยเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอให้ความผิดพลาดที่สูงกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับพื้นผิวที่มีความโค้งสม่ำเสมอ เช่นเดียวกับการคำนวณด้วยเอลิเมนต์ผิวโค้งแบบ 9 และ 12 ระดับชั้นความเสรี.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย