

บทที่ 4

การคำนวณหาค่าประกอบบนพื้นผิว

บทที่แล้วได้กล่าวถึงฟังก์ชันรูปร่างแบบต่างๆ ที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ ซึ่งเอลิเมนต์แต่ละแบบใช้ข้อมูลในการสร้างที่แตกต่างกัน. บทนี้กล่าวถึงรายละเอียดของการคำนวณหาข้อมูลหรือองค์ประกอบต่างๆ บนพื้นผิวดังนี้.

4.1 เวกเตอร์ตั้งฉาก

โดยปกติแล้ว การคำนวณหาเวกเตอร์ตั้งฉากที่ตำแหน่งใดๆ บนพื้นผิวสามารถทำได้ก็ต่อเมื่อเราทราบลักษณะที่แน่นอนของพื้นผิว เช่น พื้นผิวนั้นมีรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย. ในกรณีที่พื้นผิวมีลักษณะซับซ้อน เช่น พื้นผิวของลูกถ้วยฉนวน เราไม่สามารถหาเวกเตอร์ตั้งฉากจริงได้ จึงต้องใช้วิธีคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากโดยการประมาณ. วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทดลองคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากจากวิธีที่แตกต่างกัน 2 วิธีคือ วิธีรวมเวกเตอร์และวิธีถ่วงน้ำหนักมุม.

วิธีรวมเวกเตอร์

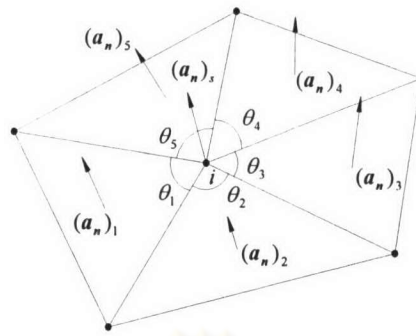
เมื่อพิจารณาปมที่ i ในรูปที่ 4.1 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ต้องการคำนวณหาเวกเตอร์ตั้งฉาก, เราสามารถคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากที่ปมที่ i ได้จากผลรวมของเวกเตอร์ตั้งฉากของเอลิเมนต์ที่อยู่ล้อมรอบปมนี่. สมมติให้มีเอลิเมนต์ทั้งหมด m เอลิเมนต์อยู่ล้อมรอบปมที่ i (เอลิเมนต์มีปมที่ i อยู่บนเอลิเมนต์). ดังนั้นเวกเตอร์ตั้งฉากที่ล้อมรอบปมที่ i มีทั้งหมด m ตัว และสามารถคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากที่ปมที่ i ได้จาก

$$(\mathbf{a}_n)_s = \frac{\sum_{k=1}^m (\mathbf{a}_n)_k}{\left| \sum_{k=1}^m (\mathbf{a}_n)_k \right|} \quad (4.1)$$

โดยที่ $(\mathbf{a}_n)_s$ คือเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วยที่ปมที่ i ซึ่งคำนวณได้จากวิธีรวมเวกเตอร์ และ

$(\mathbf{a}_n)_k$ คือเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วยของเอลิเมนต์ที่ k .

การประมาณเวกเตอร์ตั้งฉากด้วยวิธีนี้จะได้ผลดีก็ต่อเมื่อเอลิเมนต์ที่นำมาคำนวณมีขนาดใกล้เคียงกัน. ถ้าเอลิเมนต์ที่อยู่รอบปมมีขนาดพื้นที่หรือมีมุม ณ จุดที่คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากต่างกันมาก เวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้จากการประมาณด้วยวิธีนี้จะมีความผิดพลาดสูง. การประมาณเวกเตอร์ตั้งฉากโดยคิดผลของมุมของเอลิเมนต์ด้วยสามารถทำได้โดยวิธีถ่วงน้ำหนักมุม.

รูปที่ 4.1 เวกเตอร์ตั้งฉากที่ปมที่ i

วิธีถ่วงน้ำหนักมุม

การคำนวณเวกเตอร์ตั้งฉากโดยวิธีนี้เป็นการเพิ่มผลของมุมให้กับเวกเตอร์ตั้งฉากที่นำมา รวมกันดังที่กล่าวมาข้างต้น. เมื่อพิจารณาเวกเตอร์ตั้งฉากที่ปมที่ i ในรูปที่ 4.1 ซึ่งเอลิเมนต์ที่ล้อม รอบปมที่ i มีขนาดของมุมที่แตกต่างกันด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักมุม เวกเตอร์ตั้งฉากที่ปมที่ i คำนวณจาก

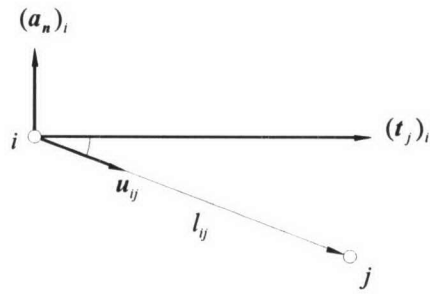
$$(a_n)_w = \frac{\sum_{k=1}^m \theta_k (a_n)_k}{\left| \sum_{k=1}^m \theta_k (a_n)_k \right|} \quad (4.2)$$

โดยที่ $(a_n)_w$ คือเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วยที่ปมที่ i ซึ่งคำนวณได้จากวิธีถ่วงน้ำหนักมุม และ θ_k คือมุมของเอลิเมนต์ที่ k ณ ปมที่ i ซึ่งถูกใช้เป็นค่าถ่วงน้ำหนัก.

4.2 เวกเตอร์สัมผัส

เนื่องจากเวกเตอร์สัมผัสที่จุดใดๆ บนพื้นผิวตั้งฉากกับเวกเตอร์ตั้งฉากบนพื้นผิวที่ตำแหน่ง นั้น. ดังนั้น ถ้าเราทราบค่าเวกเตอร์ตั้งฉาก(สามารถคำนวณได้จากหัวข้อที่แล้ว) ก็จะสามารรถคำนวณ หาเวกเตอร์สัมผัสได้. เวกเตอร์สัมผัสที่ปมใดๆ สามารถคำนวณได้จากเวกเตอร์ตั้งฉากที่ปมนั้นกับ พิกัดที่ใช้กำหนดทิศทางของเวกเตอร์สัมผัส. เวกเตอร์สัมผัสที่ปมที่ i และมีทิศทางไปตามแนวของ ปมที่ j ซึ่งแสดงดังรูปที่ 3.2 สามารถคำนวณได้ตามสมการ

$$(t_j)_i = l_{ij} \frac{\mathbf{u}_{ij} - (\mathbf{u}_{ij} \cdot (\mathbf{a}_n)_i)(\mathbf{a}_n)_i}{\left| \mathbf{u}_{ij} - (\mathbf{u}_{ij} \cdot (\mathbf{a}_n)_i)(\mathbf{a}_n)_i \right|} \quad (4.3)$$



รูปที่ 4.2 เวกเตอร์สัมผัสที่คำนวณได้จากเวกเตอร์ตั้งฉาก

โดยที่ $(t_j)_i$ คือเวกเตอร์สัมผัสที่ปมที่ i และมีทิศทางไปตามแนวของปมที่ j ,
 l_{ij} คือระยะทางจากปมที่ i ถึงปมที่ j ,
 u_{ij} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางจากปมที่ i ไปยังปมที่ j และ
 $(a_n)_i$ คือเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วยที่ปมที่ i .

จากสมการที่ (4.3) จะสังเกตได้ว่าเมื่อทิศทางของเวกเตอร์ตั้งฉากเปลี่ยนแปลงจะส่งผลให้เวกเตอร์สัมผัสและพื้นผิวที่สร้างจากเวกเตอร์สัมผัสเปลี่ยนไปด้วย.

4.3 เวกเตอร์บิด

เวกเตอร์บิดที่จุดใดๆ บนพื้นผิวคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สัมผัสในทิศทาง ξ เทียบกับ η หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์สัมผัสในทิศทาง η เทียบกับ ξ ที่จุดนั้น. สมการของเวกเตอร์บิดคือ

$$\begin{aligned} t_w(\xi, \eta) &= \frac{4\partial^2 \mathbf{P}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \\ &= \frac{2\partial t_\xi(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{2\partial t_\eta(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (4.4)$$

โดยที่ $t_w(\xi, \eta)$ คือเวกเตอร์บิดที่ตำแหน่ง (ξ, η) .

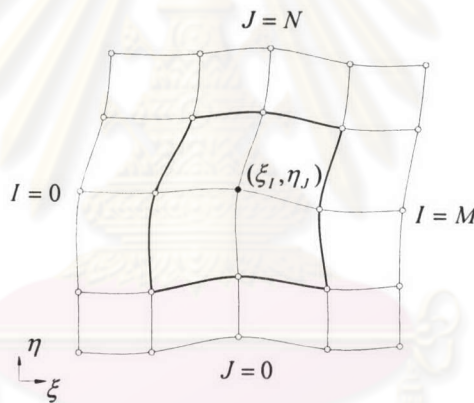
จากสมการที่ (4.4) ถ้าเราไม่ทราบฟังก์ชันพื้นผิวที่ต้องการจำลองอย่างแน่นอน ก็จะไม่สามารรถคำนวณเวกเตอร์บิดได้. ในกรณีนี้ เราจะประมาณเวกเตอร์บิดจากข้อมูลที่มีอยู่. วิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองประมาณเวกเตอร์บิดจาก 3 วิธีดังนี้.

4.3.1 วิธีประมาณเวกเตอร์บิดแบบอาดินิ

กำหนดให้โครงข่ายของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมมีลักษณะการต่อดังรูปที่ 4.3. เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่งใดๆ บนโครงข่ายคือ $\mathbf{P}(\xi_I, \eta_J)$ โดยที่ I และ J คือลำดับปมของโครงข่ายเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมในทิศทาง ξ และ η ตามลำดับ. ($0 \leq I \leq M$ และ $0 \leq J \leq N$)

เมื่อพิจารณาปมที่ (ξ_I, η_J) ซึ่งล้อมรอบด้วยเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม 4 รูปดังรูปที่ 4.3 เราสามารถสร้างสมการแผ่นปะแบบคุนส์ (Coons Patch) จากการใช้เส้นโค้งซึ่งเป็นขอบของเอลิเมนต์ทั้ง 4 รูป (เส้นหนา). เวกเตอร์บิดที่ปมที่ (ξ_I, η_J) บนแผ่นปะแบบคุนส์คือ เวกเตอร์บิดแบบอาดินินั้นเอง. เวกเตอร์บิดแบบอาดินิที่ปมที่ (ξ_I, η_J) คำนวณได้จากสมการ

$$t_w(\xi_I, \eta_J) = \frac{2(t_\eta(\xi_{I+1}, \eta_J) - t_\eta(\xi_{I-1}, \eta_J))}{\xi_{I+1} - \xi_{I-1}} + \frac{2(t_\xi(\xi_I, \eta_{J+1}) - t_\xi(\xi_I, \eta_{J-1}))}{\eta_{J+1} - \eta_{J-1}} - \frac{4(\mathbf{P}(\xi_{I+1}, \eta_{J+1}) - \mathbf{P}(\xi_{I-1}, \eta_{J+1}) - \mathbf{P}(\xi_{I+1}, \eta_{J-1}) + \mathbf{P}(\xi_{I-1}, \eta_{J-1}))}{(\xi_{I+1} - \xi_{I-1})(\eta_{J+1} - \eta_{J-1})} \quad (4.5)$$



รูปที่ 4.3 โครงข่ายของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม

4.3.2 วิธีประมาณเวกเตอร์บิดแบบเบสเชลิต

วิธีการประมาณเวกเตอร์บิดแบบเบสเชลิตที่ปมที่ (ξ_I, η_J) ในรูปที่ 4.3 คือ การนำเวกเตอร์บิด 4 ตัวบนเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบปมที่ (ξ_I, η_J) มาทำการประมาณแบบเชิงเส้นคู่. เวกเตอร์บิดทั้ง 4 ตัวนี้คำนวณได้จากเวกเตอร์บิดบนเอลิเมนต์เชิงเส้น 4 เอลิเมนต์ โดยเวกเตอร์บิดแต่ละตัวหาได้จากสมการ

$$q_{I,J} = \frac{(\mathbf{P}(\xi_{I+1}, \eta_{J+1}) - \mathbf{P}(\xi_{I+1}, \eta_J)) - (\mathbf{P}(\xi_I, \eta_{J+1}) - \mathbf{P}(\xi_I, \eta_J))}{(\xi_{I+1} - \xi_I)(\eta_{J+1} - \eta_J)} \quad (4.6)$$

โดยที่ $q_{I,J}$ คือเวกเตอร์บิดที่อยู่บนเอลิเมนต์เชิงเส้นที่ล้อมรอบปมที่ (ξ_I, η_J) .

เมื่อกำหนดเวกเตอร์บิด($\mathbf{q}_{I,J}$)ครบทั้ง 4 ตัวแล้วนำเวกเตอร์บิดที่ได้มาทำการประมาณแบบเชิงเส้นคู่ และเขียนสมการเวกเตอร์บิดแบบเบสเชลได้เป็น

$$\mathbf{t}_w(\xi_I, \eta_J) = [1 - \alpha_I \quad \alpha_I] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{I-1,J-1} & \mathbf{q}_{I-1,J} \\ \mathbf{q}_{I,J-1} & \mathbf{q}_{I,J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \beta_J \\ \beta_J \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

โดยที่

$$\alpha_I = \frac{\xi_I - \xi_{I-1}}{\xi_{I+1} - \xi_{I-1}} \quad (4.8)$$

$$\beta_J = \frac{\eta_J - \eta_{J-1}}{\eta_{J+1} - \eta_{J-1}} \quad (4.9)$$

จากสมการที่ (4.6) ถึง (4.9) จะพบว่า ข้อมูลที่นำมาใช้ในการสร้างสมการคือ เวกเตอร์พิกัดที่มุมของเอลิเมนต์เชิงเส้นซึ่งมีทั้งหมด 9 ตัวคือ $\mathbf{P}(\xi_{I+r}, \eta_{J+s})$; $r, s \in \{-1, 0, 1\}$. เวกเตอร์พิกัดที่มุมของเอลิเมนต์เป็นเวกเตอร์พิกัดจริงบนพื้นผิว ดังนั้นความถูกต้องของเวกเตอร์บิดที่ได้จะขึ้นอยู่กับ การประมาณแบบเชิงเส้นคู่ที่ใช้.

4.3.3 วิธีประมาณเวกเตอร์บิดแบบหมุนรอบแกน

ในกรณีที่เรாதราบสมการของพื้นผิว เราสามารถใช้สมการที่ (4.4) กำหนดหาเวกเตอร์บิดบนพื้นผิวนั้นได้ทันที, แต่ สำหรับกรณีที่เราไม่ทราบสมการของพื้นผิว หัวข้อนี้นำเสนอการสร้างสมการพื้นผิวจากวิธีหมุนเส้นโค้งรอบแกน และนำสมการที่ได้ไปกำหนดหาเวกเตอร์บิด. ดังนั้นข้อจำกัดของวิธีการคำนวณนี้คือ สามารถใช้ได้กับเฉพาะพื้นผิวที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุนเท่านั้น. ตัวอย่างการคำนวณในหัวข้อนี้จะทำการหมุนเส้นโค้งรอบแกน Z.

รูปที่ 4.4 แสดงพื้นผิวที่ได้จากการหมุนเส้นโค้ง $\mathbf{P}(\xi)$ รอบแกน Z จากมุม 0° ถึง θ_0° ซึ่งมุมที่ทำการหมุนจะอยู่ในแนว ϕ ของระบบพิกัดทรงกลม. สมการพื้นผิวที่ได้อยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi, \phi) &= \mathbf{P}(\xi)T_z(\phi) \\ &= [P_x(\xi) \cos \phi + P_y(\xi) \sin \phi] \mathbf{i} + [-P_x(\xi) \sin \phi + P_y(\xi) \cos \phi] \mathbf{j} + [P_z(\xi)] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.10)$$

โดยที่ $\mathbf{P}(\xi, \phi)$ คือพื้นผิวโดยประมาณที่ได้จากการหมุนเส้นโค้งรอบแกน[12],

$\mathbf{P}(\xi)$ คือฟังก์ชันเส้นโค้งซึ่งสามารถใช้ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามรูปแบบแอร์มีต หรือฟังก์ชันเบทซีเอกำลังสามก็ได้,

$P_x(\xi), P_y(\xi), P_z(\xi)$ คือองค์ประกอบของ $\mathbf{P}(\xi)$ ในแนวแกน X, Y และ Z ของระบบพิกัด

คาร์ทีเซียนตามลำดับ และ

$T_z(\phi)$ คือเมตริกซ์การหมุน(Rotation Matrix)รอบแกน Z.

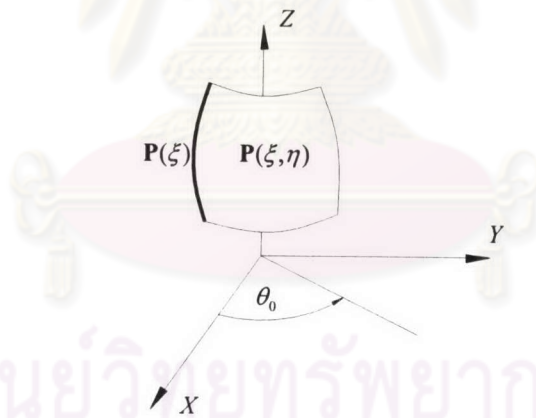
ก่อนนำสมการของพื้นผิวที่ได้ไปทำการคำนวณหาเวกเตอร์บิดต้องเปลี่ยนตัวแปร ϕ ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง $[0, \theta_0]$ เป็นตัวแปรพิกัดเฉพาะที่ η ที่มีค่าอยู่ในช่วง $[-1, 1]$ ก่อนโดยการแทนสมการ

$$\phi = \frac{\eta+1}{2}\theta_0 \quad (4.11)$$

ในสมการที่ (4.10) แล้วเขียนสมการของพื้นผิวใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi, \eta) = & \left[P_x(\xi) \cos\left(\frac{\eta+1}{2}\theta_0\right) + P_y(\xi) \sin\left(\frac{\eta+1}{2}\theta_0\right) \right] \mathbf{i} \\ & + \left[-P_x(\xi) \sin\left(\frac{\eta+1}{2}\theta_0\right) + P_y(\xi) \cos\left(\frac{\eta+1}{2}\theta_0\right) \right] \mathbf{j} + [P_z(\xi)] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

ทำการอนุพันธ์สมการที่ (4.12) เทียบกับตัวแปร ξ และ η จะได้สมการของเวกเตอร์บิดแบบหมุนรอบแกน.



รูปที่ 4.4 พื้นผิวที่ได้จากการหมุนเส้นโค้ง $P(\xi)$ รอบแกน Z

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย