บทที่ 3
ฟังก์ชันรูปร่าง

การสร้างเอลิเมนต์นั้น นอกจากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นหรือกำลังสองซึ่งเป็นฟังก์ชันอย่างง่าย ยังมีเทคนิกอื่นอีกมากมายเพื่อสร้างพื้นผิวที่มีความถูกต้องสูง. บทนี้กล่าวถึงฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ย่อยได้แก่ ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีและสิบสองระดับชั้นความเสรี ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต และฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสาม. ฟังก์ชันพื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรีเป็นฟังก์ชันรูปร่างใหม่ซึ่งได้ศึกษาเป็นครั้งแรกในวิทยานิพนธ์นี้. ฟังก์ชันรูปร่างแต่ละแบบมีเทคนิกการประยุกต์ใช้แตกต่างกันโดยจะกล่าวดังต่อไปนี้.

3.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันรูปร่างประเภทนี้ ใช้เวกเตอร์พิกัดเพียงแค่ 2 ตัวในการประมาณด้านแต่ละด้านของเอลิเมนต์. รูปที่ 3.1 ก และ ข แสดงลักษณะเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่สร้างจากฟังก์ชันเชิงเส้น ตามลำดับ. (ตัวเลขที่อยู่หน้าคู่อันดับหมายถึงลำดับที่ของปม. ส่วนคู่อันดับที่ใช้แสดงอยู่ในพิกัดเฉพาะที่.)

เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์ที่สร้างจากฟังก์ชันเชิงเส้นอยู่ในรูปของ

$$\mathbf{P}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m} N_i \mathbf{P}_i \tag{3.1}$$

โดยที่ $\mathbf{P}(\xi,\eta)$ คือเวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์,

ξ และ η คือพิกัดเฉพาะที่ โดย $-1 \le \xi \le 1$ และ $-1 \le \eta \le 1$ (แสดงในรูปที่ 2.2),

N_i คือฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นที่ปมที่ i ,

$\mathbf{P}_i$ คือเวกเตอร์พิกัดของปมที่ i และ

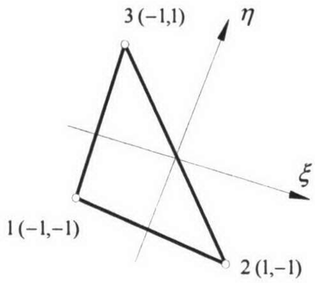
m คือจำนวนปม. (m มีค่าเท่ากับ 3 และ 4 สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ตามลำดับ.)

สมการต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นที่ปมของเอลิเมนต์ในรูปที่ 3.1

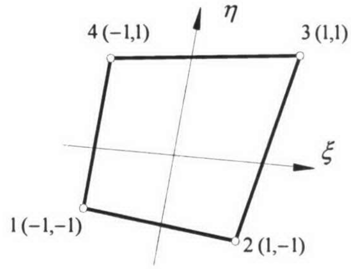
<u>เอลิเมนต์สามเหลี่ยม</u>

$$N_1 = -\frac{\xi}{2} - \frac{\eta}{2} \tag{3.2}$$

$$N_2 = \eta \tag{3.3}$$



ก. เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น



ข. เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น

รูปที่ 3.1 เอลิเมนต์เชิงเส้น

<u>เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม</u>

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\,. \tag{3.4}$$

3.2 ฟังก์ชันกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี

ฟังก์ชันรูปร่างประเภทนี้ใช้เวกเตอร์พิกัดทั้งหมด 3 ตัวในการประมาณด้านแต่ละด้านของเอลิเมนต์. รูปที่ 3.2 ก และ ข แสดงลักษณะเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่สร้างจากฟังก์ชันกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี ตามลำดับ.

เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์ที่สร้างจากฟังก์ชันกำลังสองอยู่ในรูปของ

$$\mathbf{P}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m} N_i\,\mathbf{P}_i \tag{3.5}$$

โดยที่ ξ และ η คือพิกัดเฉพาะที่ โดย $-1 \le \xi \le 1$ และ $-1 \le \eta \le 1$,

N_i คือฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสองที่ปม i และ

m คือจำนวนปม. (m มีค่าเท่ากับ 6 และ 8 สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ตามลำดับ.)

สมการต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสองที่ปมของเอลิเมนต์ในรูปที่ 3.2

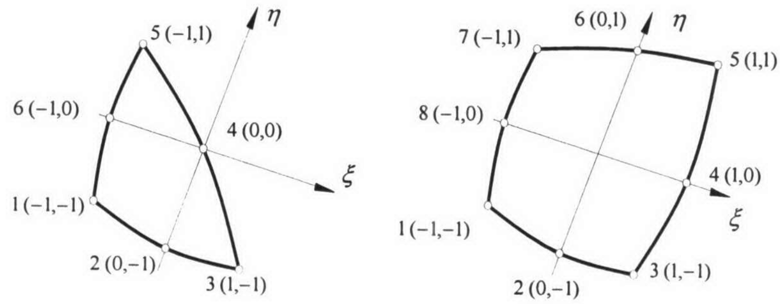
<u>เอลิเมนต์สามเหลี่ยม</u>

$$N_1 = \frac{1}{2}(-\xi-\eta)(-1-\xi-\eta) \tag{3.6}$$

$$N_2 = (1+\xi)(-\xi-\eta) \tag{3.7}$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \tag{3.8}$$

$$N_4 = (1+\xi)(1+\eta) \tag{3.9}$$



ก. เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี

ข. เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสองแบบเซเรนดิพิตี

รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์กำลังสองแบบเซเรนดิพิตี

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \tag{3.10}$$

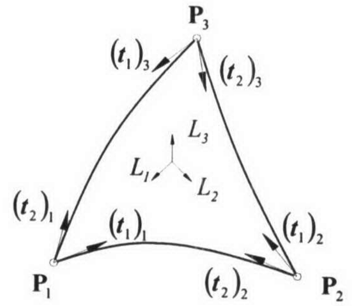
$$N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\xi)(1-\eta). \tag{3.11}$$

3.3 ฟังก์ชันพื้นผิวโค้งแบบเก้าและสิบสองระดับชั้นความเสรี

ฟังก์ชันสามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี(Nine Degrees of Freedom Curved Surface Triangular Function)[2]และฟังก์ชันสี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรี (Twelve Degrees of Freedom Curved Surface Rectangular Function) เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม. สมการพื้นผิวและวิธีการสร้างพื้นผิวของเอลิเมนต์มีดังต่อไปนี้.

ฟังก์ชันสามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี

การสร้างพื้นผิวจากฟังก์ชันสามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีใช้ข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมด 9 ตัว. ข้อมูลทั้ง 9 ตัวประกอบด้วยเวกเตอร์พิกัดที่มุมของสามเหลี่ยม 3 ตัวและเวกเตอร์สัมผัสที่มุมของสามเหลี่ยม 6 ตัว ซึ่งแต่ละมุมจะมีเวกเตอร์สัมผัส 2 ตัว ดังรูปที่ 3.3. ขั้นตอนในการคำนวณเวกเตอร์สัมผัสเป็นขั้นตอนที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับขั้นตอนในการสร้างพื้นผิวจากฟังก์ชันเชิงเส้นหรือฟังก์ชันกำลังสองที่ใช้เพียงแต่พิกัดที่มุมและกึ่งกลางด้านเท่านั้น. (วิธีคำนวณเวกเตอร์สัมผัสแสดงในบทที่ 4.) พื้นผิวของสามเหลี่ยมที่ได้จะมีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ในระดับ C^0 ที่ด้านทั้งสามและมีความต่อเนื่องในระดับ C^1 ที่มุมทั้งสามของเอลิเมนต์.



รูปที่ 3.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี

เพื่อความสะดวกในการแสดงค่าฟังก์ชันรูปร่าง ในที่นี้จะใช้ระบบพิกัดพื้นที่สามเหลี่ยม (Area Coordinate)[6] L_1, L_2 และ L_3 สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม. ตัวแปร L_1, L_2 และ L_3 มีความสัมพันธ์กับ ξ และ η ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 1 - L_2 - L_3 \\ L_2 &= \frac{1+\xi}{2} \\ L_3 &= \frac{1+\eta}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีอยู่ในรูปของ

$$\mathbf{P}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^{3}\left[N_i\,\mathbf{P}_i + N_{i+3}(\boldsymbol{t}_1)_i + N_{i+6}(\boldsymbol{t}_2)_i\right] \quad (3.13)$$

โดยที่ $\mathbf{P}(L_1, L_2, L_3)$ คือเวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี,

$(\boldsymbol{t}_1)_i$ คือเวกเตอร์สัมผัสที่ปมที่ i และมีทิศทางไปยังปมถัดไป (โดยนับลำดับปมดังรูปที่ 3.3),

$(\boldsymbol{t}_2)_i$ คือเวกเตอร์สัมผัสที่ปมที่ i และมีทิศทางไปยังปมก่อนหน้า,

N_i คือฟังก์ชันรูปร่างลำดับที่ i ของสามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี.

สมการต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของฟังก์ชันรูปร่างของสามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีที่ปมที่ 1

$$N_1 = L_1 + L_2L_1^2 + L_3L_1^2 - L_1L_2^2 - L_1L_3^2 \quad (3.14)$$

$$N_4 = L_2L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3 \quad (3.15)$$

$$N_7 = L_3L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3. \quad (3.16)$$

ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรี

การสร้างพื้นผิวจากฟังก์ชันสี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรีใช้ข้อมูลที่จำเป็นมีทั้งหมด 12 ตัว. ในลักษณะเดียวกับฟังก์ชันสามเหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี ข้อมูลทั้ง 12 ตัวประกอบด้วยเวกเตอร์พิกัด 4 ตัวและเวกเตอร์สัมผัส 8 ตัว ดังรูปที่ 3.4. ความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ย่อยที่ได้จากฟังก์ชันนี้จะมีความต่อเนื่องในระดับ C^0 ที่ด้านทั้งสี่และมีความต่อเนื่องในระดับ C^1 ที่มุมทั้งสี่ของเอลิเมนต์.

เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์พื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรีอยู่ในรูปของ

$$\mathbf{P}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4}\left[N_i\,\mathbf{P}_i + N_{i+4}(\boldsymbol{t}_1)_i + N_{i+8}(\boldsymbol{t}_2)_i\right] \tag{3.17}$$

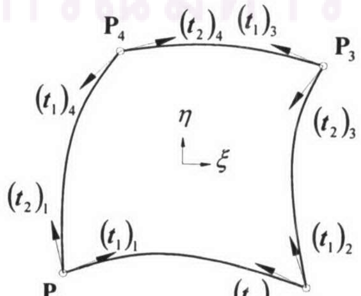
โดยที่ N_i คือฟังก์ชันรูปร่างลำดับที่ i ของสี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรี และ ξ และ η คือพิกัดเฉพาะที่ โดย $-1 \le \xi \le 1$ และ $-1 \le \eta \le 1$.

สมการต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของฟังก์ชันรูปร่างของสี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรีที่ปมที่ 1

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{1}{16}(1-\xi)^2(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{16}(1-\xi)(1+\xi)^2(1-\eta) \\ &\quad + \frac{1}{16}(1-\eta)^2(1+\eta)(1-\xi) - \frac{1}{16}(1-\eta)(1+\eta)^2(1-\xi) \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$N_5 = \frac{1}{16}(1-\xi)^2(1+\xi)(1-\eta) \tag{3.19}$$

$$N_9 = \frac{1}{16}(1-\eta)^2(1+\eta)(1-\xi)\,. \tag{3.20}$$



รูปที่ 3.4 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพื้นผิวโค้งแบบสิบสองระดับชั้นความเสรี

3.4 ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

การสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจากฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต ใช้ข้อมูลทั้งหมด 16 ตัวคือ เวกเตอร์พิกัดที่มุม 4 ตัว เวกเตอร์สัมผัสที่มุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 ตัว และเวกเตอร์บิดที่มุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 4 ตัว. (วิธีคำนวณเวกเตอร์บิดแสดงในบทที่ 4.) รูปที่ 3.5 แสดงตัวอย่างเอลิเมนต์ที่สร้างจากฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต.

เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์ที่สร้างจากฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต[1] อยู่ในรูปของ

$$\mathbf{P}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4}\left[N_i P_i + N_{i+4}(\boldsymbol{t}_\xi)_i + N_{i+8}(\boldsymbol{t}_\eta)_i + N_{i+12}(\boldsymbol{t}_w)_i\right] \tag{3.21}$$

โดยที่ N_i คือฟังก์ชันรูปร่างลำดับที่ i ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรแอร์มีต,

ξ และ η คือพิกัดเฉพาะที่ โดย $-1 \le \xi \le 1$ และ $-1 \le \eta \le 1$,

$(\boldsymbol{t}_\xi)_i$ และ $(\boldsymbol{t}_\eta)_i$ คือเวกเตอร์สัมผัสที่ปมที่ i และมีทิศทางตามแกน ξ และ η ในพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ และ

$(\boldsymbol{t}_w)_i$ คือเวกเวกเตอร์บิดที่ปมที่ i.

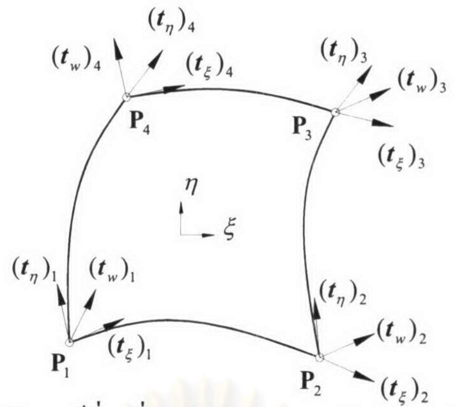
สมการต่อไปนี้แสดงฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรแอร์มีต

$$\left.\begin{array}{llll}
N_1 = F_1(\xi)F_1(\eta), & N_5 = F_3(\xi)F_1(\eta), & N_9 = F_1(\xi)F_3(\eta), & N_{13} = F_3(\xi)F_3(\eta), \\
N_2 = F_2(\xi)F_1(\eta), & N_6 = F_4(\xi)F_1(\eta), & N_{10} = F_2(\xi)F_3(\eta), & N_{14} = F_4(\xi)F_3(\eta), \\
N_3 = F_2(\xi)F_2(\eta), & N_7 = F_4(\xi)F_2(\eta), & N_{11} = F_2(\xi)F_4(\eta), & N_{15} = F_4(\xi)F_4(\eta), \\
N_4 = F_1(\xi)F_2(\eta), & N_8 = F_3(\xi)F_2(\eta), & N_{12} = F_1(\xi)F_4(\eta), & N_{13} = F_3(\xi)F_4(\eta).
\end{array}\right\} \tag{3.22}$$

ฟังก์ชัน F_1 ถึง F_4 ในสมการที่ (3.22) นิยามโดย

$$\left.\begin{array}{l}
F_1(u) = \dfrac{1}{4}(u^3 - 3u + 2) \\
F_2(u) = \dfrac{1}{4}(-u^3 + 3u + 2) \\
F_3(u) = \dfrac{1}{8}(u^3 - u^2 - u + 1) \\
F_4(u) = \dfrac{1}{8}(u^3 + u^2 - u - 1)
\end{array}\right\} \tag{3.23}$$

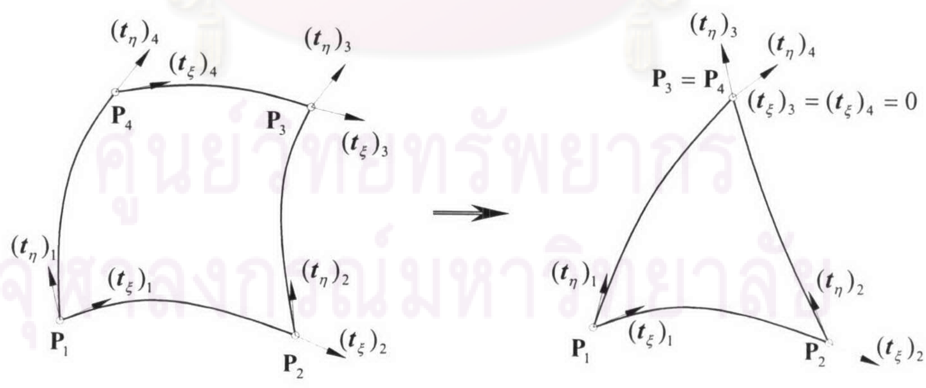
โดยที่ u คือตัวแปรพิกัดเฉพาะที่ ξ หรือ η.



รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

<u>การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต</u>

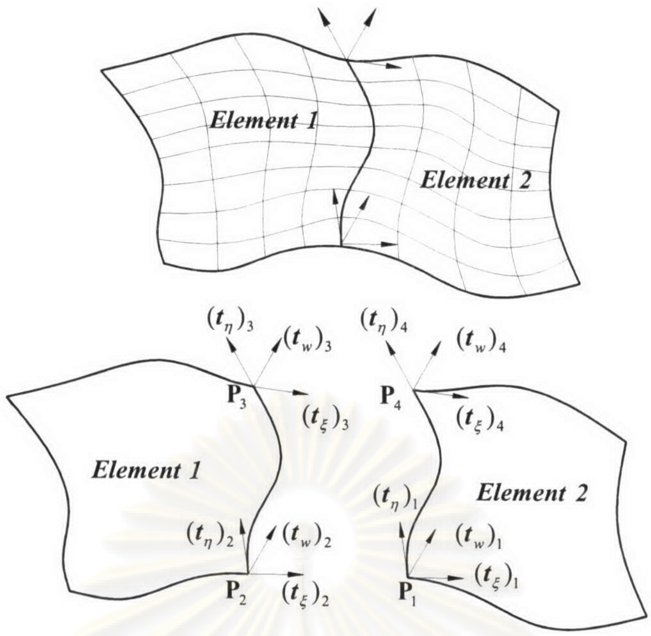
การแบ่งเอลิเมนต์บนขอบเขตบางชนิด เช่น ผิวของทรงกลมและทรงรี ไม่สามารถแบ่งให้เป็นเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมทั้งหมดได้อย่างเหมาะสม. ในกรณีดังกล่าวจะใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมเข้าช่วย. วิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตสร้างเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมโดยวิธีการลดรูป(Degeneration). ผลการศึกษาเทคนิกการลดรูปนี้ยังไม่ปรากฏในเอกสารอ้างอิงต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงเลข. การลดรูปทำได้โดยให้พิกัดสองจุดใดๆ ที่อยู่ใกล้กันมีค่าเท่ากัน และให้เวกเตอร์สัมผัสที่อยู่ในทิศทางของพิกัดทั้งสองจุดนั้นมีค่าเท่ากับ 0 ส่วนเวกเตอร์บิดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0. เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จะมีลักษณะดังรูปที่ 3.6.



รูปที่ 3.6 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

<u>ความต่อเนื่องระดับ C^1 หรือ G^1 ระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต</u>

ความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีตที่อยู่ติดกันกำหนดโดยเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์บิดที่มุมของเอลิเมนต์ดังรูปที่ 3.7[10]. ความต่อเนื่องที่ด้านซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างเอลิเมนต์ที่ 1 และเอลิเมนต์ที่ 2 กำหนดโดย



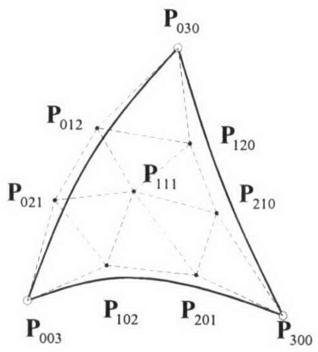
รูปที่ 3.7 การกำหนดความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามสองตัวแปรรูปแบบแอร์มีต

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_4, \\ (\boldsymbol{t}_\eta)_2 = (\boldsymbol{t}_\eta)_1,\ (\boldsymbol{t}_\eta)_3 = (\boldsymbol{t}_\eta)_4, \\ (\boldsymbol{t}_\xi)_2 = k_1(\boldsymbol{t}_\xi)_1,\ (\boldsymbol{t}_\xi)_3 = k_2(\boldsymbol{t}_\xi)_4, \\ (\boldsymbol{t}_w)_2 = k_3(\boldsymbol{t}_w)_1,\ (\boldsymbol{t}_w)_3 = k_4(\boldsymbol{t}_w)_4. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

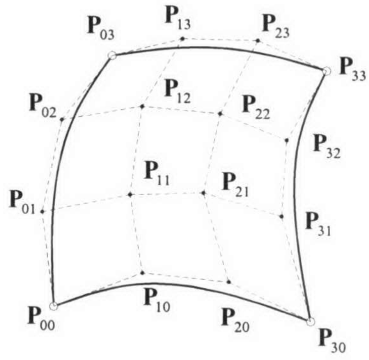
(ด้านซ้ายของแต่ละสมการในชุดสมการที่ (3.24) คือข้อมูลของเอลิเมนต์ที่ 1 ส่วนด้านขวาคือข้อมูลของเอลิเมนต์ที่ 2.) เมื่อ $k_1,k_2 = 1$, $k_3,k_4 = 0$ หรือ 1 ความต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างเอลิเมนต์ทั้งสองจะเป็นความต่อเนื่องระดับ C^1 แต่เมื่อ $k_1,k_2 \neq 1$ และ $k_1,k_2 > 0$, $k_3,k_4 \neq 1$ และ $k_3,k_4 \geq 0$ ความต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างเอลิเมนต์ทั้งสองจะเป็นความต่อเนื่องระดับ G^1.

3.5 ฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสาม

การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมจากฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสามใช้ข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมด 10 ตัวและ 16 ตัวตามลำดับ ซึ่งข้อมูลนี้เรียกว่า จุดควบคุม(Control Point). พื้นผิวที่ได้จะไม่ผ่านจุดควบคุมทุกจุดแต่จะผ่านเฉพาะจุดควบคุมที่มุมของเอลิเมนต์. รูปที่ 3.8 แสดงตัวอย่างพื้นผิวที่สร้างจากฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสาม โดยที่จุด $\mathbf{P}$ ในรูปคือ จุดควบคุมของเอลิเมนต์.



ก. เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกำลังสาม แบบเบทซิเอ



ข. เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสาม แบบเบทซิเอ

รูปที่ 3.8 เอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ

เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์ที่สร้างจากฟังก์ชันเบทซิเอกำลังสามอยู่ในรูปของ

<u>เอลิเมนต์สามเหลี่ยม</u>

$$\mathbf{P}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i,j,k} \mathbf{P}_{ijk} B_{i,j,k}(L_1, L_2, L_3) \tag{3.25}$$

$$B_{i,j,k}(L_1, L_2, L_3) = \frac{6}{i!\,j!k!} L_1^i L_2^j L_3^k \tag{3.26}$$

<u>เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม</u>

$$\mathbf{P}(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{ij} B_i(\xi) B_j(\eta) \tag{3.27}$$

$$B_i(\xi) = \frac{3(1+\xi)^i (1-\xi)^{3-i}}{4i!(3-i)!} \tag{3.28}$$

โดย $\mathbf{P}_{ijk}$, $\mathbf{P}_{ij}$ คือจุดควบคุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม ตามลำดับ,

i, j, k คือหมายลำดับจุดควบคุมบนเอลิเมนต์ โดย $i, j, k \in \{0,1,2,3\}$,

ξ และ η คือพิกัดเฉพาะที่ โดย $-1 \le \xi \le 1$ และ $-1 \le \eta \le 1$,

L_1, L_2 และ L_3 คือพิกัดพื้นที่ มีค่าดังที่แสดงในสมการที่ (3.12) และ

$B_{i,j,k}(L_1, L_2, L_3)$ และ $B_i(u)$, $B_j(v)$ คือพหุนามเบิร์นสไตน์(Bernstein Polynomial)ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม ตามลำดับ.

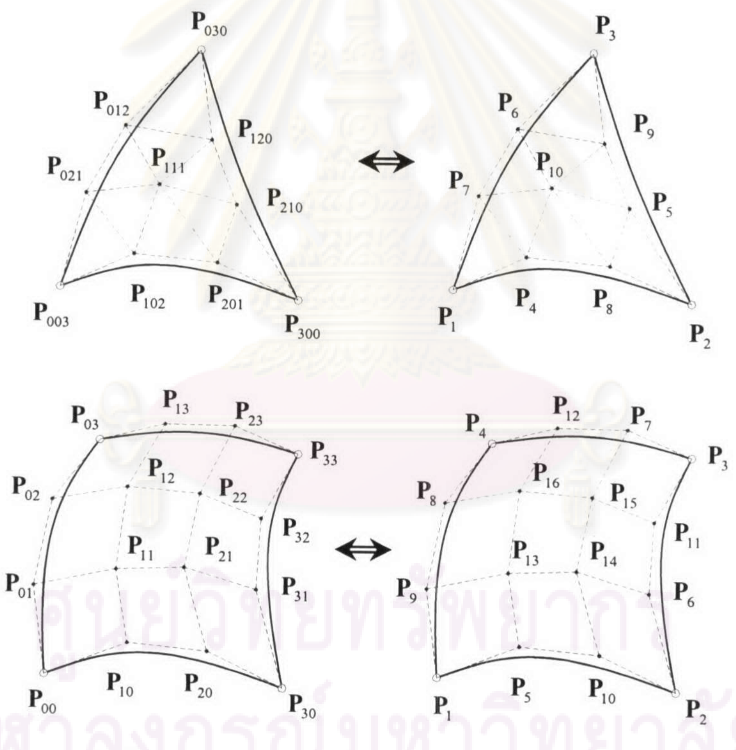
เวกเตอร์พิกัดของเอลิเมนต์ในสมการที่ (3.25) และ (3.27) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการที่ (2.3) ได้เป็น

$$\mathbf{P}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{u=1}^{10} N_u \mathbf{P}_u \tag{3.29}$$

และ

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = \sum_{u=1}^{16} N_u \mathbf{P}_u \tag{3.30}$$

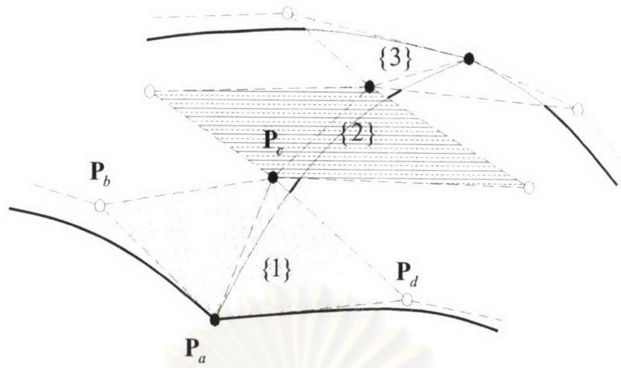
ตามลำดับ โดยเวกเตอร์พิกัด $\mathbf{P}_u$ สามารถแทนด้วยเวกเตอร์พิกัด $\mathbf{P}_{ijk}$ หรือ $\mathbf{P}_{ij}$ ดังรูปที่ 3.9 ส่วนฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ(N_u)สามารถจับคู่ได้เช่นเดียวกับ $\mathbf{P}_u$.



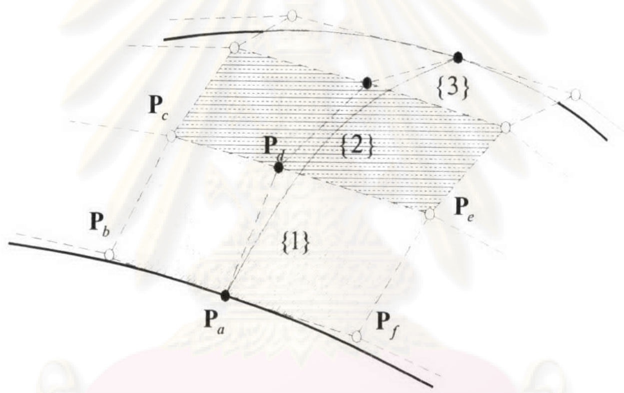
รูปที่ 3.9 การจับคู่ของเวกเตอร์พิกัด $\mathbf{P}_{ijk}$ หรือ $\mathbf{P}_{ij}$ กับ $\mathbf{P}_u$

<u>ความต่อเนื่องระดับ G^1 ระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ</u>

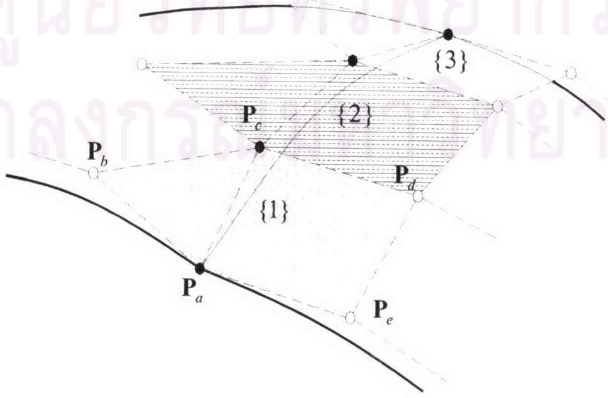
ความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอกำหนดโดยตำแหน่งของจุดควบคุมที่อยู่ติดกับขอบของเอลิเมนต์ดังรูปที่ 3.10 [11]. เราสามารถจำลองขอบเขตโดยที่มีความต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอในระดับ G^1 โดยให้จุดควบคุมดังกล่าวอยู่บนระนาบเดียวกัน. ตัวอย่างระนาบที่กำหนดจากจุดควบคุมบนเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอมีดังนี้.



ก. ระหว่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับสามเหลี่ยม



ข. ระหว่างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับสี่เหลี่ยม



ค. ระหว่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับสี่เหลี่ยม

รูปที่ 3.10 การกำหนดความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์กำลังสามแบบเบทซิเอ

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับสามเหลี่ยม

เวกเตอร์พิกัดของจุดควบคุมบนระนาบที่ {1} คือ $\mathbf{P}_a$, $\mathbf{P}_b$, $\mathbf{P}_c$ และ $\mathbf{P}_d$.

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับสี่เหลี่ยม

เวกเตอร์พิกัดของจุดควบคุมบนระนาบที่ {1} คือ $\mathbf{P}_a$, $\mathbf{P}_b$, $\mathbf{P}_c$, $\mathbf{P}_d$, $\mathbf{P}_e$ และ $\mathbf{P}_f$.

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับสี่เหลี่ยม

เวกเตอร์พิกัดของจุดควบคุมบนระนาบที่ {1} คือ $\mathbf{P}_a$, $\mathbf{P}_b$, $\mathbf{P}_c$, $\mathbf{P}_d$ และ $\mathbf{P}_e$.

ในแต่ละลักษณะของรูปที่ 3.10 จะต้องกำหนดความเป็นระนาบของจุดควบคุมทั้ง 3 ระนาบ.