

## บทที่ 4

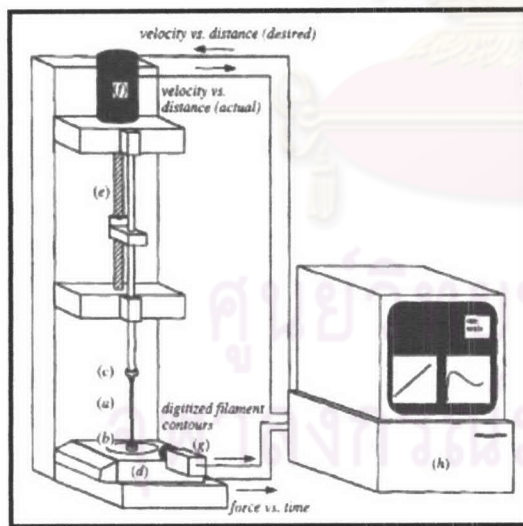
### การประยุกต์ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะกับ ปัญหาการยืดขึ้นประกอบของของไหลนิวโตเนียน

ในบทนี้เราจะศึกษาปัญหาการยืดขึ้นประกอบของของไหลนิวโตเนียน โดยพิจารณาพฤติกรรมของไหลและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหลขณะยืด ณ เวลาต่างๆ กัน ในที่นี้จะจำลองปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะมาช่วยในการหาผลเฉลย รวมทั้งการศึกษาการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของการคำนวณเชิงตัวเลข เช่น จำนวนขึ้นประกอบและลักษณะของโครงข่าย

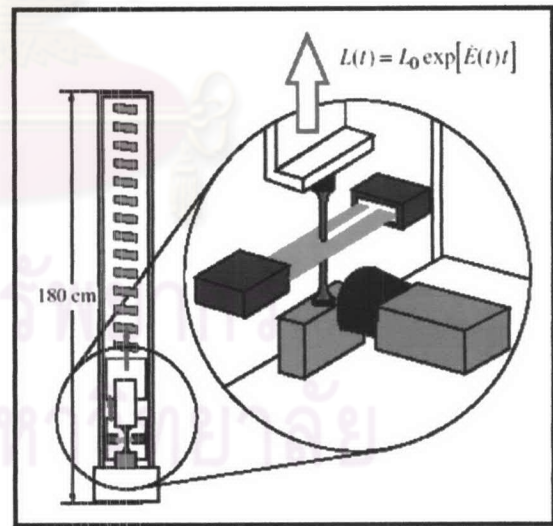
#### 4.1 การกำหนดปัญหา (Problem description)

##### 4.1.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหาที่เราศึกษาคือปัญหาการยืดขึ้นประกอบของของไหลนิวโตเนียน ในเครื่องมือทดสอบการดึงยืดที่เรียกว่ารีโอมิเตอร์ (rheometer) ซึ่งเครื่องมือนี้มีผู้ประดิษฐ์ขึ้นอยู่หลายรูปแบบดังรูปที่ 4.1 คือ รูปแบบที่ 1 ของ Spiegelberg et al. [4] และ รูปแบบที่ 2 ของ McKinley [50]



(ก) แบบที่ 1

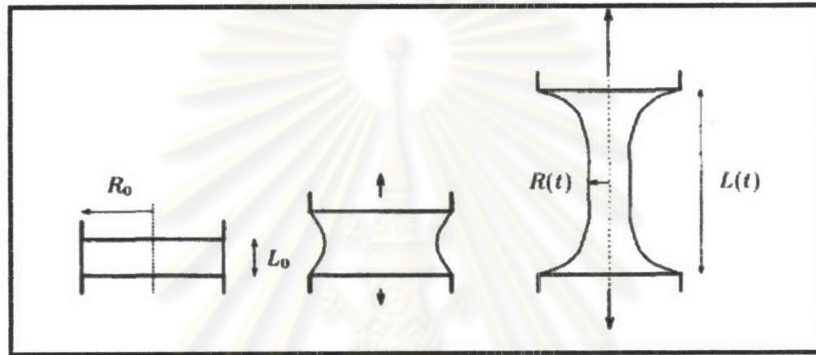


(ข) แบบที่ 2

รูปที่ 4.1 รีโอมิเตอร์

เครื่องมือนี้จะค่อยๆทำการยืดของไหลจากอยู่นิ่งแล้วยืดไปในเวลาต่างๆ ซึ่งของไหลจะอยู่ระหว่างแผ่นโลหะรูปวงกลม 2 แผ่นและใช้กล้องจุลทรรศน์ความเร็วสูงคอยจับพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหลแล้วส่งข้อมูลต่อไปยังเครื่องมือวัดค่าการเปลี่ยนแปลง

ในที่นี้เราจะพิจารณาบริเวณการยืดของของไหลลักษณะเป็นรูปทรงกระบอกสูง  $L_0$  และรัศมี  $R_0$  โดยมีแผ่นโลหะกลม 2 แผ่นติดอยู่ที่ปลายทั้งสองข้างของของไหลและจะทำการดึงแผ่นโลหะทั้งสองออกในทิศตรงกันข้ามด้วยความเร็วที่เท่ากัน จะเห็นได้ว่าที่เวลา  $t$  ใดๆ ของไหลจะยืดออกในแนวแกน  $z$  เป็นระยะ  $L(t)$  และจะหดลงในแนวแกน  $r$  เป็นระยะ  $R(t)$  เพื่อยังคงอนุรักษ์มวลให้คงเดิม ดังรูปที่ 4.2



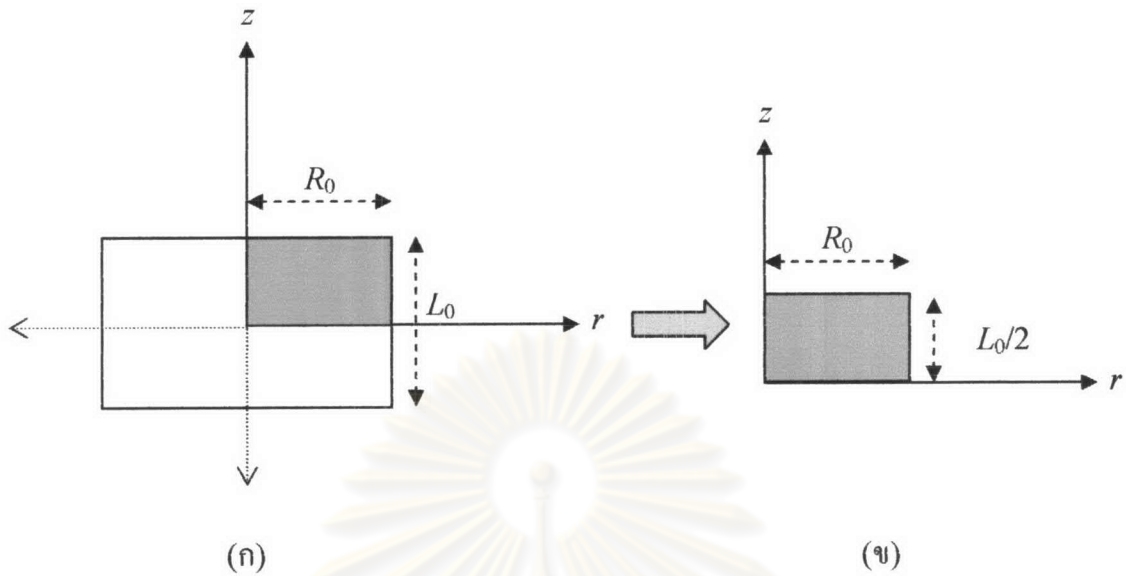
รูปที่ 4.2 แสดงลักษณะการยืดของของไหล

ทำการศึกษาพฤติกรรมของไหลและการเปลี่ยนแปลงของค่าต่างๆ เช่น ความเร็วและความดันตลอดระยะเวลาของการยืดรวมทั้งพิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหลบริเวณผิวอิสระ ซึ่งในที่นี้เป็นการศึกษาปัญหาภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่าของไหลไม่มีการบีบอัดตัว (incompressible flow) ไม่ขึ้นกับแรงโน้มถ่วงของโลก ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ (isothermal case) และไม่มีการลื่นไถล (slip) ระหว่างของไหลกับแผ่นโลหะ โดยพิจารณาการไหลในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ

พิจารณาการยืดแผ่นโลหะที่ติดอยู่กับของไหลใน 2 ทิศทางด้วยความเร็วที่เท่ากัน โดยใช้ข้อสมมติฐานข้างต้น รวมทั้งจากคุณสมบัติการสมมาตรแกน (symmetric axis) ทำให้เราสามารถพิจารณาโดเมนของปัญหาเป็นเพียง 1 ใน 4 ของบริเวณทั้งหมดดังรูปที่ 4.3

#### 4.1.2 เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition)

ในการเริ่มต้นของปัญหา ให้กำหนดของไหลมีลักษณะอยู่นิ่งไม่ถูกรบกวน นั่นหมายถึง ความเร็วทั้งสองทิศทางมีค่าเป็นศูนย์สำหรับที่ผิวอิสระยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง แต่ผิวอิสระมีลักษณะตั้งฉากกับแผ่นโลหะทั้งสอง



รูปที่ 4.3 แสดงโดเมนของปัญหาเป็นเพียง 1 ใน 4 ของบริเวณทั้งหมด

#### 4.1.3 เงื่อนไขขอบ (Boundary condition)

เงื่อนไขขอบเป็นสิ่งจำเป็นมากในการคำนวณเชิงตัวเลข เพราะเป็นตัวกำหนดแนวทางของผลเฉลย ซึ่งจะต้องกำหนดเงื่อนไขขอบให้สอดคล้องกับปัญหา ดังนั้นเงื่อนไขขอบแบบดิริชเลต์ (Dirichlet boundary condition) และเงื่อนไขขอบแบบนอยมันน์ (Neumann boundary condition) จะกำหนดในส่วนนี้ โดยพิจารณาเงื่อนไขขอบที่แต่ละขอบดังรูปที่ 4.6

**ขอบด้านบน ( $\Gamma_{up}$ )** เป็นขอบที่แสดงการเคลื่อนที่ของแผ่น โลหะ ในแนวแกน  $z$  ด้วยความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าของเหลวที่ติดอยู่กับแผ่น โลหะ ไม่มีการลื่นไถล ความเร็วกำหนดดังต่อไปนี้

$$u_r = 0 \text{ และ } u_z = \frac{\dot{\varepsilon} L_0}{2} \exp(\dot{\varepsilon} t) \quad (4.1)$$

**ขอบด้านซ้าย ( $\Gamma_{sym}$ )** เป็นขอบด้านที่สมมาตรตามแนวแกน  $z$  เงื่อนไขที่ขอบด้านนี้จึงต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขการสมมาตร (symmetry condition) นั่นคือ ความเร็วตั้งฉากกับแกนสมมาตรมีค่าเป็นศูนย์และความเค้นสัมผัสมีค่าเป็นศูนย์

$$u_r = 0 \quad (4.2)$$

**ขอบด้านล่าง ( $\Gamma_{mid}$ )** เป็นขอบด้านที่สมมาตรตามแนวแกน  $r$

$$u_z = 0 \quad (4.3)$$

**ขอบด้านขวา ( $\Gamma_{free}$ )** เป็นขอบที่ผิวอิสระ

$$p = 0 \quad (4.4)$$



นอกจากนี้ที่บริเวณผิวอิสระจะได้รับผลกระทบจากแรงตึงผิว (surface tension) จึงต้องกำหนดทั้งเงื่อนไขขอบแบบพลศาสตร์ (dynamic boundary condition) และเงื่อนไขขอบแบบจลนศาสตร์ (kinematic boundary condition) ดังนี้

เงื่อนไขขอบแบบพลศาสตร์

เป็นเงื่อนไขขอบที่มาจากความต่อเนื่องของแรงที่กระทำ (contact force) ตลอดผิวอิสระ กำหนดดังนี้

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{n} = - \left( p_{atm} + \chi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) \hat{n} \quad (4.5)$$

โดยที่  $\hat{n}$  คือ เวกเตอร์ฉากหน่วยมีทิศพุ่งออก

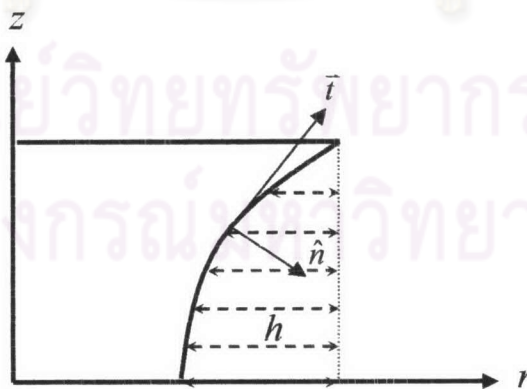
$p_{atm}$  คือ ความดันบรรยากาศ (atmospheric pressure)

$\chi$  คือ สัมประสิทธิ์ของแรงตึงผิว

$R_1$  และ  $R_2$  คือ รัศมีความโค้ง (radius of curvature) ของผิวอิสระ ที่พิจารณาละเอียดได้จากหนังสือของ Levich [51] และงานวิจัยของ Keunings [52] มีค่าดังนี้

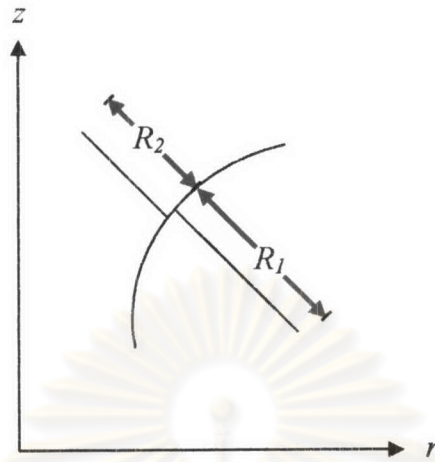
$$R_1 = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}} \quad \text{และ} \quad R_2 = -h \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

เมื่อ  $h$  คือ ระยะกระจัดตั้งฉากกับผิวอิสระเริ่มต้น ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาและจะมีค่าต่างๆ กัน ณ ระดับความสูง  $z$  ต่างๆ กัน ตำแหน่งและความหมายของตัวแปรแสดงได้ดังรูปที่ 4.4 และรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.4 แสดงตำแหน่งและความหมายของตัวแปรที่ผิวอิสระ





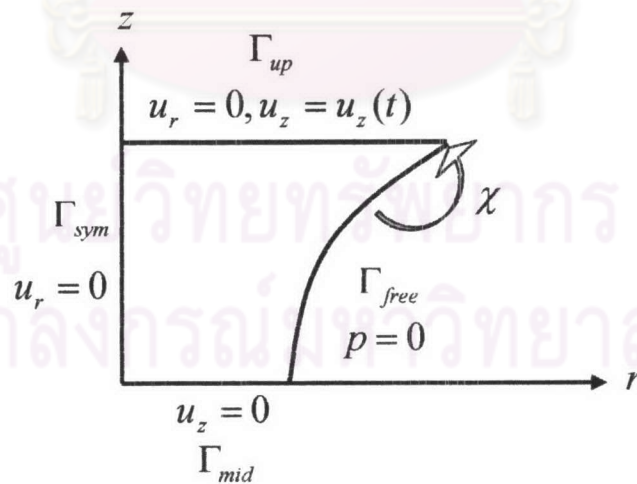
รูปที่ 4.5 แสดงรัศมีความโค้งของผิวอิสระ

#### เงื่อนไขขอบแบบจลนศาสตร์

เป็นเงื่อนไขที่มาจากข้อเท็จจริงที่ว่าผิวอิสระเป็นเส้นวัสดุ (material line) กำหนดดังนี้

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_r - u_z \frac{\partial h}{\partial z}; \quad \forall t \quad (4.7)$$

ดังนั้นรูปร่าง (geometry) ของปัญหาและเงื่อนไขขอบของปัญหาการยึดฟิลาเมนต์สำหรับของไหลนิวโตเนียนเป็นดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 รูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบของปัญหาการยึดฟิลาเมนต์สำหรับของไหลนิวโตเนียน

#### 4.1.4 พารามิเตอร์ของวัสดุ (Material parameter)

ในการคำนวณกรณีการยืดของไหลนิวโตเนียน ค่าพารามิเตอร์ของวัสดุจะกำหนดบนพื้นฐานของข้อมูลแบบเฉือนที่สถานะคงตัว (steady shear data) ที่ทำการศึกษามาแล้วจากงานของ McKinley [53] โดยของไหลที่นำมาพิจารณาเป็น ของไหลโบเกอร์พอลิไอโซบิวทีลีน-พอลิบิวเทน (polyisobuthylene-polybutene Boger fluid) ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ค่าพารามิเตอร์ของวัสดุ

$\rho$ (ความหนาแน่น)	890 (kg m <sup>-3</sup> )
$\dot{\epsilon}$ (อัตราการดึง)	1.6 (s <sup>-1</sup> )
$L_0$ (ความยาวเริ่มต้น)	2*10 <sup>-3</sup> (m)
$R_0$ (รัศมีเริ่มต้น)	3.5*10 <sup>-3</sup> (m)
$\chi$ (สัมประสิทธิ์แรงตึงผิว)	28.9*10 <sup>-3</sup> (n m <sup>-1</sup> )
<b>การคำนวณกรณีนิวโตเนียน</b>	
$\eta$ (ความหนืดเฉือน)	98 (Pa s <sup>-1</sup> )

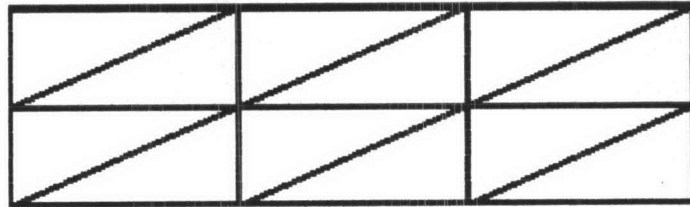
#### 4.1.5 ปัญหาที่นำมาศึกษา (Problem specification)

ปัจจัยที่มีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยโดยระเบียบวิธีชั้นประกอบอันตะคือ จำนวนชั้นประกอบ ลักษณะของโครงข่ายและค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่ใช้ในการคำนวณ รวมทั้งวิธีที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลย

ตารางที่ 4.2 การแบ่งโดเมนเป็นโครงข่ายที่มีความละเอียดแตกต่างกัน

กรณี	ชื่อ	จำนวนแถว	จำนวนหลัก	จำนวนชั้นประกอบ	ลักษณะของโครงข่าย
1	2x3 uniform	2	3	12	Uniform
2	3x5 uniform	3	5	30	Uniform
3	4x7 uniform	4	7	56	Uniform
4	4x7 bias	4	7	56	Bias

ในที่นี้เราจะแบ่งกรณีศึกษาการยืดของของไหลนิวโตเนียนออกเป็น 4 กรณี ดังแสดงไว้ในตารางที่ 4.2 แต่ละกรณีศึกษาสามารถแสดงเป็นภาพได้ดังรูปที่ 4.7



(ก) แบบ 2x3 uniform



(ข) แบบ 3x5 uniform



(ค) แบบ 4x7 uniform



(ง) แบบ 4x7 bias

รูปที่ 4.7 รูปแสดงการแบ่งชิ้นประกอบแบบต่างๆ ตามกรณีศึกษา



## 4.2 วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Computational method)

หลังจากกำหนดลักษณะและขอบเขตของปัญหาในรูปสมการคณิตศาสตร์ ให้จัดรูปแบบของสมการใหม่เพื่อสะดวกต่อการเขียนโปรแกรม (กล่าวรายละเอียดไว้ในบทที่ 3) และพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการหาผลเฉลย ซึ่งขั้นตอนการดำเนินงานของโปรแกรมได้กล่าวไว้ในหัวข้อนี้

### 4.2.1 ขั้นตอนการดำเนินงานโปรแกรม (Algorithm)

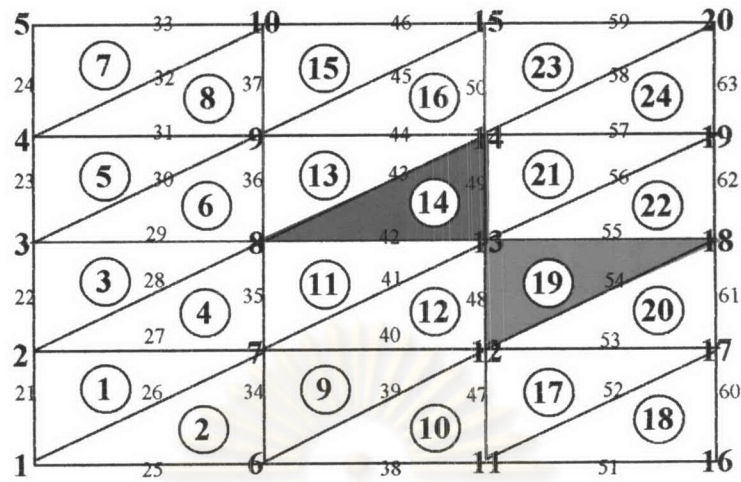
ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีขั้นประกอบอันตะ จะเริ่มต้นจากการแบ่งพื้นที่โดเมนของปัญหาออกเป็นชั้นประกอบย่อยๆ พร้อมกำหนดจุดเชื่อมโนดของแต่ละชั้นประกอบและเงื่อนไขต่างๆ ที่แต่ละโนดให้สอดคล้องกับปัญหา แล้วจึงทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิตเพื่อคำนวณค่าตัวแปรที่ไม่ทราบ (unknown variable) เช่น ความเร็วและความดันที่แต่ละโนดของชั้นประกอบนั้นๆ สำหรับปัญหาการยืดชั้นประกอบของไหลนิวโตเนียน พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยของปัญหา ในที่นี้ทำการเขียนโปรแกรมขึ้นด้วยภาษาซี จำนวน 2 โปรแกรมคือ โปรแกรม GENGRID และโปรแกรม FILAMENT\_NEWTONIAN ซึ่งทั้งสองโปรแกรมนี้สามารถทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (personal computer) ได้ ต่อจากนั้นจะทำการแสดงผลภาพนามธรรม (visualization) แล้วจึงทำการวิเคราะห์ผลเฉลยที่คำนวณได้

### 4.2.2 โปรแกรม GENGRID

โปรแกรม GENGRID เป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นเพื่อแบ่งโดเมนออกเป็นชั้นประกอบย่อยๆ โดยที่แต่ละชั้นประกอบจะประกอบด้วยโนดจุดยอดและโนดกึ่งกลาง ซึ่งมีจุดเชื่อมโนดของแต่ละชั้นประกอบเป็นตัวบอกลำดับของเลขโนดในแต่ละชั้นประกอบนั้นรวมทั้งกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขที่ขอบให้แต่ละโนด

หลักการกำหนดเลขชั้นประกอบ เลขโนดและจุดเชื่อมโนดของแต่ละชั้นประกอบของปัญหาการยืดของของไหลที่ใช้ในวิทยานิพนธ์เป็นดังนี้

พิจารณาโดเมนของปัญหาคงรูปที่ 4.3 (ข) แล้วแบ่งโดเมนออกเป็นชั้นประกอบย่อย ดังตัวอย่างรูปที่ 4.8 แบ่งตามแกน  $z$  ออกเป็น 4 ส่วนและแบ่งตามแกน  $r$  ออกเป็น 3 ส่วน เราจะได้ชั้นประกอบรูปสามเหลี่ยมแบบ 6 โนดจำนวน 24 ชั้นประกอบและมีจำนวนโนดทั้งหมด 63 โนด ซึ่งมีการเรียงลำดับของเลขชั้นประกอบและเลขโนดคงรูปที่ 4.8

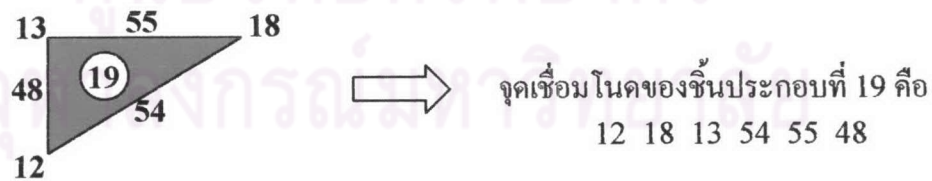


รูปที่ 4.8 แสดงการเรียงลำดับของเลขชั้นประกอบและเลข โหนด

สำหรับจุดเชื่อม โหนดของแต่ละชั้นประกอบ ให้เริ่มต้นกำหนดจากเลข โหนดที่น้อยที่สุดในแต่ละชั้นประกอบก่อนแล้วเรียงเลขในทิศทางวนเข็มนาฬิกา โดยจะเรียงจากโหนดจุดยอดก่อนแล้วตามด้วยโหนดกึ่งกลาง เช่นรูปที่ 4.8 ถ้าเราพิจารณาชั้นประกอบที่ 14 และชั้นประกอบที่ 19 เราจะได้จุดเชื่อม โหนดของแต่ละชั้นประกอบดังรูปที่ 4.9



(ก) ชั้นประกอบที่ 14



(ข) ชั้นประกอบที่ 19

รูปที่ 4.9 จุดเชื่อม โหนด

โดยรายละเอียดขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม GENGRID แสดงในภาคผนวก ก



### 4.2.3 การดำเนินงานโปรแกรม FILAMENT\_NEWTONIAN

ในส่วนของโปรแกรม FILAMENT\_NEWTONIAN นี้จะเป็นส่วนที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความเร็ว ความดันและระยะที่เปลี่ยนไปของผิวอิสระ โดยจะนำเพิ่มข้อมูลออกของโปรแกรม GENGRID มาเป็นเพิ่มข้อมูลเข้าของโปรแกรมนี้อีกแล้วต่อจากนั้นจะนำความรู้ที่ได้จากบทที่ 3 ในการปรับรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมาเป็นสมการพีชคณิต โดยใช้หลักการของเซมิอิมพลิชิตเทย์เลอร์กาลีเลอ์คินเพรชเซอร์คอร์ดเรชัน มาเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณค่าต่างๆที่ต้องการ แล้วนำผลที่ได้ไปทำการแสดงผลภาพนามธรรม (visualization) แล้วทำการวิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้นต่อไป โดยรายละเอียดขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม FILAMENT\_NEWTONIAN แสดงในภาคผนวก ข

### 4.3 ผลที่ได้จากการคำนวณ (Result)

เราจะพิจารณาผลที่ได้จากการคำนวณออกเป็น 2 ช่วง คือ ช่วงที่ 1 ตรวจสอบและเปรียบเทียบผลกระทบของโครงข่ายแบบต่างๆ ตามกรณีศึกษา ที่มีผลต่อผลเฉลยที่คำนวณได้ และในช่วงที่ 2 จะแสดงผลการคำนวณที่ได้จากโครงข่ายแบบที่ดีที่สุดในการศึกษา

#### 4.3.1 ตรวจสอบและเปรียบเทียบผลกระทบของโครงข่ายแบบต่างๆ ตามกรณีศึกษา

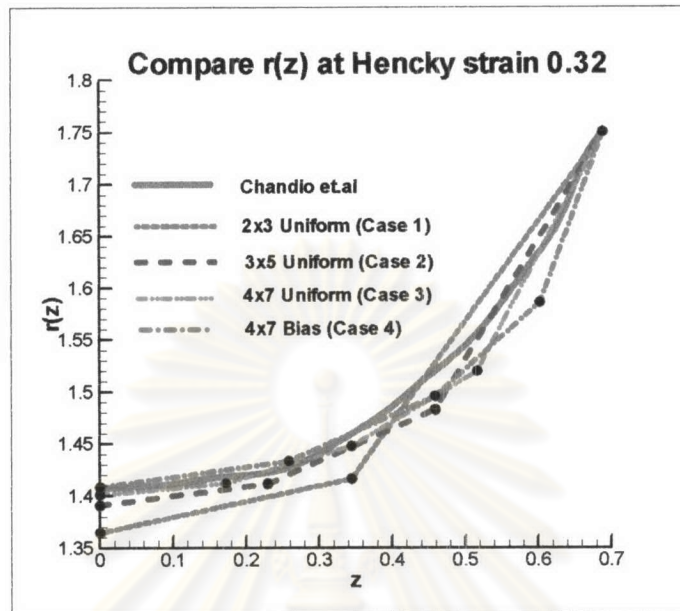
##### 4.3.1.1 ผลกระทบของโครงข่ายที่ผิวอิสระ

ในการคำนวณระยะผิวอิสระ จะเริ่มต้นจากการคำนวณผิวอิสระคร่าวๆก่อนโดยใช้การประมาณค่าการสังเชิงวงรีโดยทราบระยะของแกนเอกจากระยะที่ยึดออก  $\left(\frac{L(t)}{2}\right)$  และระยะของแกนโทจากการคาดการณ์โดยใช้สมการ  $R(t) = \frac{R_0}{L_0} \exp\left(-\frac{\varepsilon t}{2}\right)$  ซึ่งเป็นสมการแบบไร้หน่วย แล้วต่อจากนั้นจึงจะคำนวณระยะผิวอิสระจริงๆที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบแบบจลนศาสตร์ ซึ่งผลการเปรียบเทียบของผิวอิสระ  $r(x)$  ที่ได้มาจากการคำนวณ โดยใช้โครงข่ายแบบต่างๆ คือกรณีที่ 1 กรณีที่ 2 กรณีที่ 3 และกรณีที่ 4 ดังตารางที่ 4.2 มาเปรียบเทียบกับผลของ Chandio et al. [14] เมื่อค่าความเครียดเหนติย เป็น 0.32 และ 1.60 ตามลำดับแสดงดังรูปที่ 4.10 แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 ช่วงคือ ช่วงใกล้ขอบล่างของระนาบกึ่งกลาง (mid-plane) กับช่วงใกล้ขอบด้านบน เนื่องจากเป็นช่วงที่มีความแตกต่างของข้อมูลอย่างเห็นได้ชัด เมื่อพิจารณาช่วงใกล้ขอบล่างของระนาบกึ่งกลาง จะเห็นได้ว่าระยะผิวอิสระที่ได้จากกรณีที่ 3 และกรณีที่ 4 ให้ค่าใกล้เคียงกับผลของ Chandio et al. มากที่สุดและเมื่อค่าความเครียดเหนติยเพิ่มขึ้น ผลจากกรณีที่ 4 จะยังให้ค่าใกล้เคียงกับระยะผิวอิสระที่ได้ของ Chandio et al. มากกว่ากรณีที่ 3 กรณีที่ 2 และกรณีที่ 1 ตามลำดับ แต่เมื่อพิจารณาบริเวณใกล้ขอบด้านบน จะพบว่าที่ค่าความเครียดเหนติยเป็น 0.32 ระยะผิวอิสระที่คำนวณได้จากโครงข่ายทุกแบบจะให้ผลใกล้เคียงกัน แต่เมื่อค่าความเครียดเหนติยเพิ่มขึ้นจะเห็นว่าแนวโน้มของผลเฉลยจะเปลี่ยนแปลงไป โดยพิจารณาที่ความเครียดเหนติยเป็น 1.60 เห็นได้ชัดเจนว่ากรณีที่ 4 ให้ผล

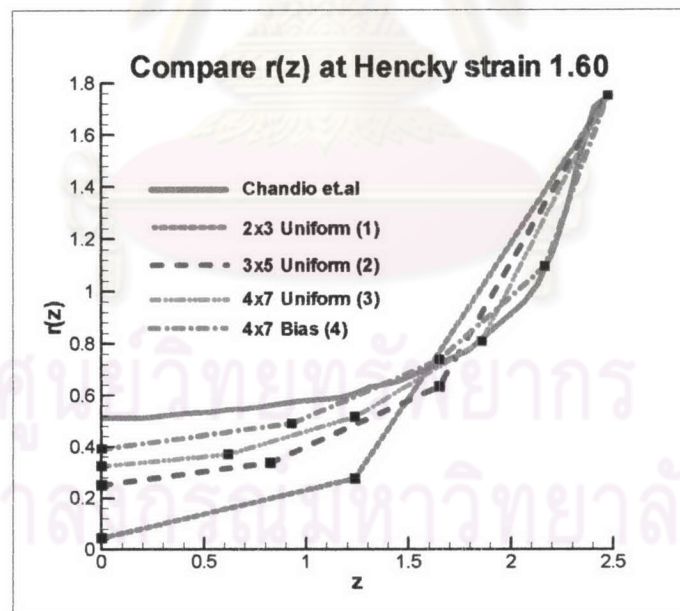


ใกล้เคียงกับของ Chandio et al. มากที่สุดทั้งบริเวณใกล้ขอบด้านบน และบริเวณใกล้ขอบล่างของระนาบกึ่งกลาง จากผลการคำนวณระยะผิวอิสระจะเห็นได้ว่าอิทธิพลจากการส่งเชิงวงรีจะส่งผลมากต่อกรณีที่โครงข่ายมีความละเอียดสูง แต่เมื่อโครงข่ายที่มีความละเอียดผิวอิสระต่ำดังจะเห็นได้จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ผลเฉลยบริเวณใกล้ขอบด้านบน จะมีลักษณะเป็นเส้นตรง เนื่องจากไม่มีตัวแทนของตำแหน่งโนด ผลเฉลยที่คำนวณได้จึงไม่ได้รับอิทธิพลของการประมาณค่าการส่งเชิงวงรีเลย จึงทำให้เมื่อค่าความเครียดเหนี่ยวนำเพิ่มขึ้น การคำนวณที่ได้จะมีแนวโน้มออกห่างจากค่าที่ควรจะเป็นมากขึ้น ซึ่งต่างจากการพิจารณากรณีที่ 3 และกรณีที่ 4 ซึ่งให้ผลเฉลยที่ดีกว่าและสอดคล้องกับพฤติกรรมในธรรมชาติของของไหลขณะยึดที่บริเวณใกล้ขอบด้านบน จะมีความเป็นเชิงเส้นน้อย (มีความโค้งมาก) เนื่องจากของไหลบริเวณที่ติดกับขอบบนที่มีการเคลื่อนที่ (moving-plate) อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่าของไหลไม่มีการถื่นไถล และเมื่อเราพิจารณาระหว่างกรณีที่ 3 และกรณีที่ 4 จะเห็นได้ว่ากรณีที่ 4 จะให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกว่า นั้นแสดงให้เห็นว่า เมื่อเราเพิ่มอัตราการโอนเอียง (bias) ของชั้นประกอบใกล้ผิวอิสระเข้าไปถึงแม้ว่าเราจะใช้จำนวนชั้นประกอบเท่าเดิม จะทำให้ผลเฉลยมีแนวโน้มใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จาก Chandio et al. มากขึ้นซึ่งเขาใช้โครงข่ายขนาด  $12 \times 40$  และขนาด  $12 \times 106$  ดังนั้น รูปแบบของโครงข่ายที่มีความละเอียดมาก โดยเฉพาะบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของการไหลมากๆ เช่น บริเวณใกล้ผิวอิสระและบริเวณใกล้ขอบบนที่มีการเคลื่อนที่ จะสามารถอธิบายพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของการไหลได้ดีกว่าโครงข่ายที่มีความละเอียดน้อย อย่างไรก็ตามเวลาที่ใช้ในการคำนวณและประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์จึงต้องการมากขึ้นตามไปด้วยในการทำวิธานิพันธ์นี้จำกัดเวลาและประสิทธิภาพของการคำนวณสูงสุดไว้เพียงโครงข่ายแบบ  $4 \times 7$  bias เพื่อเป็นกรณีศึกษาเบื้องต้น นอกจากนี้ถ้าสามารถเลือกการประมาณค่าผิวอิสระเริ่มต้นได้ใกล้เคียงกับพฤติกรรมจริงมากขึ้นผลที่คำนวณได้ควรจะใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แท้จริงมากขึ้น

จากที่กล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่าระยะผิวอิสระที่บริเวณขอบล่างของระนาบกึ่งกลาง ( $R_{\min}$ ) ที่ซึ่งค่ารัศมีความโค้งภายในของของไหลมีค่าน้อยที่สุด เป็นตัววัดความสามารถในการยึดที่สำคัญอย่างหนึ่งของการคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยที่โครงข่ายแบบใดคำนวณได้ค่า  $R_{\min}$  มากแสดงว่าโครงข่ายแบบนั้นมีความสามารถในการยึดต่อไป (ยังไม่ขาดออกจากกัน) ได้มาก ดูได้จากค่า  $r(z)$  ที่ตำแหน่ง  $z$  มีค่าเป็นศูนย์กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 มีค่า  $r(0)$  ใกล้ศูนย์ (ใกล้ขาด) มากกว่ากรณีที่ 3 และกรณีที่ 4 ดังรูปที่ 4.10 (จ) ดังนั้นจึงนำค่า  $R_{\min}$  ที่คำนวณได้จากกรณีทั้ง 4 มาทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) ซึ่งเป็นผลที่ได้มาจากการหล่อลื่น (lubrication model) ดังสมการ 4.8 และเปรียบเทียบกับผลของการไหลชนิดที่เป็นแบบยึดดึงทางเดียวในอุดมคติ (ideal uniaxial elongational flow) ดังสมการ 4.9 ที่ค่าความเครียดเหนี่ยวนำต่างๆ ตลอดการยึด แสดงดังรูปที่ 4.11



(ก) ค่าความเครียดเฮนคีย์ เป็น 0.32



(ข) ค่าความเครียดเฮนคีย์ เป็น 1.60

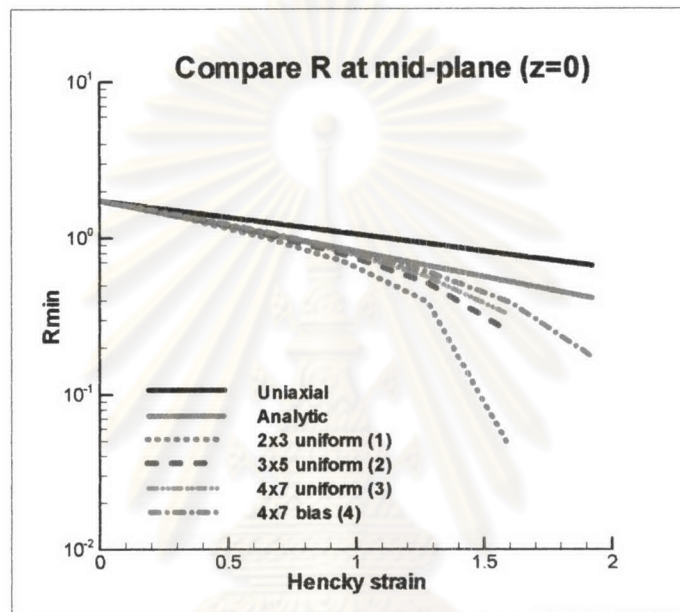
รูปที่ 4.10 แสดงการเปรียบเทียบของผิวอิสระ  $r(z)$  ของโครงข่ายแบบต่างๆ กับผลที่ได้จากการคำนวณของ Chandio et al.

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากตัวแบบการหล่อเย็น

$$R_{\min}(t) = \frac{R_0}{L_0} \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{4}\right) \quad (4.8)$$

ผลเฉลยแบบยัดคั้งทางเดียว

$$R_{\min}(t) = \frac{R_0}{L_0} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (4.9)$$



รูปที่ 4.11 แสดงการเปรียบเทียบค่า  $R_{\min}$  ของโครงข่ายแบบต่างๆ กับผลเฉลยแบบยัดคั้งทางเดียวและผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ ตลอดการยัด

โดยจากรูปแสดงให้เห็นว่า เมื่อทำการยัด ก่อนถึงค่าความเครียดเฮนคีย์ เป็น 0.64 โครงข่ายทุกแบบจะให้ผลของ  $R_{\min}$  สอดคล้องกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์คือ ความชันของ  $R_{\min}$  ที่เปลี่ยนไปจะมีค่าลดลงในลักษณะของเอกซ์โปเนนเชียลแบบราบเรียบ (smooth exponential fashion) และที่ระดับค่าความเครียดเฮนคีย์ เกินกว่า 0.64 ค่า  $R_{\min}$  จะมีลักษณะลดลงในรูปแบบที่ซับซ้อน (complicated fashion) และเมื่อค่าความเครียดเฮนคีย์เพิ่มมากขึ้นจะเห็นว่าทั้ง 4 กรณี จะให้ค่า  $R_{\min}$  ที่มีแนวโน้มห่างออกจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยแบบยัดคั้งทางเดียว โดยเฉพาะโครงข่ายแบบ 2x3 uniform จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าค่า  $R_{\min}$  ที่คำนวณได้เมื่อค่าความเครียดเฮนคีย์เป็น 1.60 ให้ค่าห่างไกลมากๆ ซึ่งแสดงว่าไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมของการไหลเมื่อยัดออกไปมากๆ ได้ ส่วนโครงข่ายแบบ 4x7 bias จะให้ผลใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มากที่สุด จนกระทั่งค่าความเครียดเฮนคีย์เป็น 1.28 และค่าที่คำนวณได้จะคลาดเคลื่อนมากขึ้น เมื่อค่าความเครียดเฮนคีย์เพิ่มสูงขึ้น ดังนั้นโครงข่ายแบบ 4x7 bias มีความสามารถยัดได้ถึงค่าความเครียดเฮนคีย์



เป็น 1.92 ก่อนที่จะขาดในการยึดครั้งถัดไป ส่วนโครงข่ายแบบอื่นๆ มีความสามารถในการยึดได้ถึงค่าความเครียดเหนืยเป็น 1.60 เท่านั้น และเมื่อยึดต่อไปจะทำให้ค่า  $R_{\min} < 0$  ซึ่งหมายถึงไม่สามารถยึดต่อไปได้อีก ถึงแม้ว่าโครงข่ายแบบ 4x7 bias จะสามารถหาผลเฉลยยึดที่ค่าความเครียดเหนืยเป็น 1.92 แต่ความแม่นยำของผลเฉลยยังไม่ดีพอต่อการอธิบายถึงพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติได้ ซึ่งเหตุนี้เป็ผลมาจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่บริเวณตรงกลางของคอลัมน์ของไหล (fluid column) มีค่ามากแต่ลักษณะของโครงข่ายยังไม่ละเอียดเพียงพอที่จะให้ผลเฉลยครอบคลุมพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริง ดังนั้นโครงข่ายที่แบ่งจำนวนชิ้นประกอบยิ่งมากขึ้น รวมทั้งเพิ่มอัตราการโอนเียง เข้าไปที่บริเวณที่ต้องการความละเอียดมาก เช่น บริเวณใกล้ผิวอิสระและบริเวณใกล้ขอบบนที่มีการเคลื่อนที่ จะสามารถอธิบายพฤติกรรมและคำนวณหาระยะความโค้งงอของผิวอิสระได้ถูกต้องและละเอียดยิ่งขึ้น

#### 4.3.1.2 ผลกระทบของลักษณะโครงข่ายกับความเร็ว

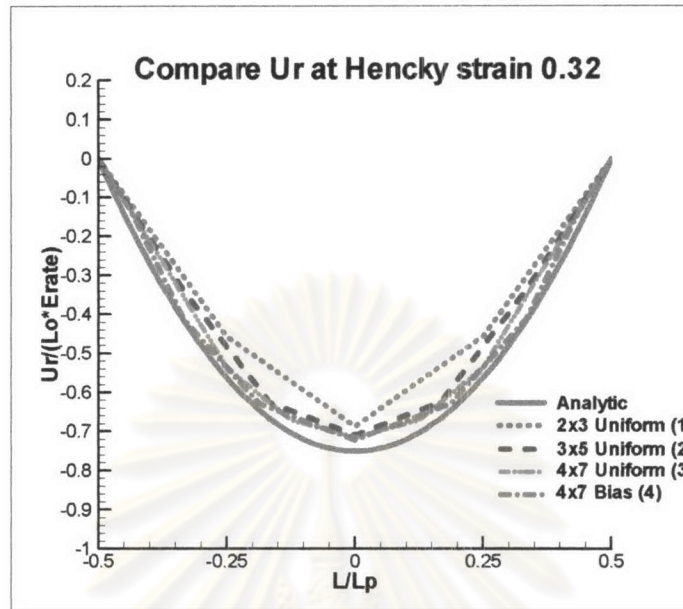
การคำนวณหาผลเฉลยของตัวแปรต่างๆ เช่น ความเร็ว ความดันและพิคัดของโนด จะมีความสัมพันธ์ต่อกัน และจากที่ทราบข้างต้นว่าลักษณะของโครงข่ายมีผลกระทบกับระยะผิวอิสระ ดังนั้นค่าของตัวแปรอื่นๆ ย่อมต้องมีการเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะของโครงข่ายด้วย อย่างที่ได้แสดงให้เห็นดังรูปที่ 4.12 และรูปที่ 4.13 ซึ่งแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข พิจารณาจากสมการ (4.10) และสมการ (4.11) ของค่าความเร็วในแนวแกน  $r$  และความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่ได้จากโครงข่ายทั้ง 4 แบบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ค่าความเครียดเหนืยเป็น 0.32 และ 1.60 ตามลำดับ ผลของความเร็วทั้ง 2 ทิศทางให้ผลใกล้เคียงกันที่ค่าความเครียดเหนืยต่ำ แต่เมื่อค่าความเครียดเหนืยสูงผลการคำนวณได้จากกรณีที่ 4 จะให้ผลใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มากที่สุด

สำหรับการไหลชนิดที่ไม่เป็นแบบของไหลยึดคิงทางเดียวบริสุทธิ์ (not purely uniaxial flow) Spiegelberg et al. [4] ได้นำเสนอผลเฉลยจากทฤษฎีตัวแบบการหล่อลื่น (lubrication theory solution) ซึ่งในที่นี้นำมาใช้เป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับของไหลนิวโตเนียน การประมาณค่านี้จะให้ผลเฉลยที่เป็นจริงเฉพาะที่ค่าความเครียดเหนืยต่ำ ดังนั้นเราจะทำการเปรียบเทียบการคำนวณความเร็วในแนวแกน  $r$  ที่ผิวอิสระและความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่เส้นตรงกลาง ( $r = 0$ ) ด้วยสมการต่อไปนี้

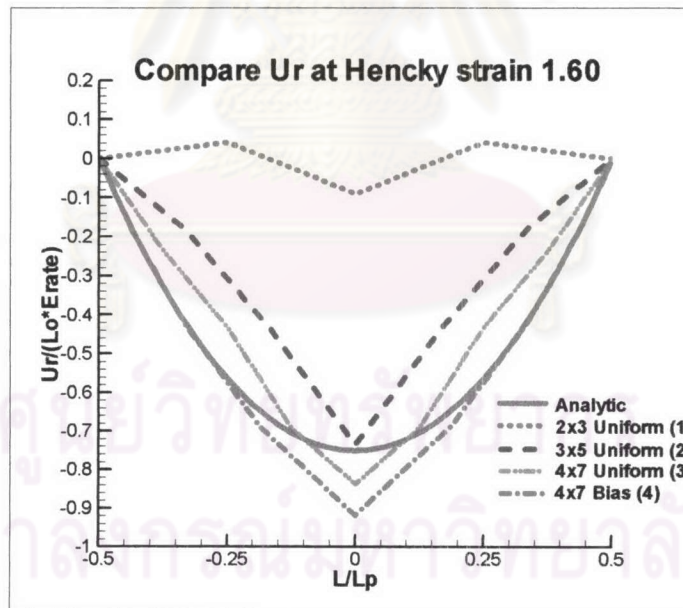
$$u_r = -3\dot{\varepsilon}_0 L(t) \left(1 - \frac{z}{L_p}\right) \left(\frac{z}{L_p}\right) \quad (4.10)$$

$$u_z = -\dot{L}_p \left(3 - 2\frac{z}{L_p}\right) \left(\frac{z}{L_p}\right) \quad (4.11)$$

เมื่อ  $L_p = L_0 \exp(\dot{\varepsilon}_0 t)$

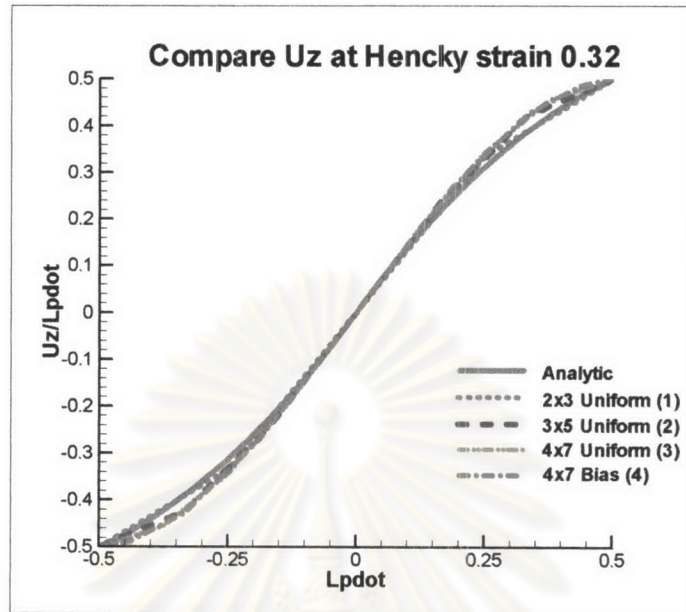


(ก) ค่าความเครียดเฮนคีย์ เป็น 0.32

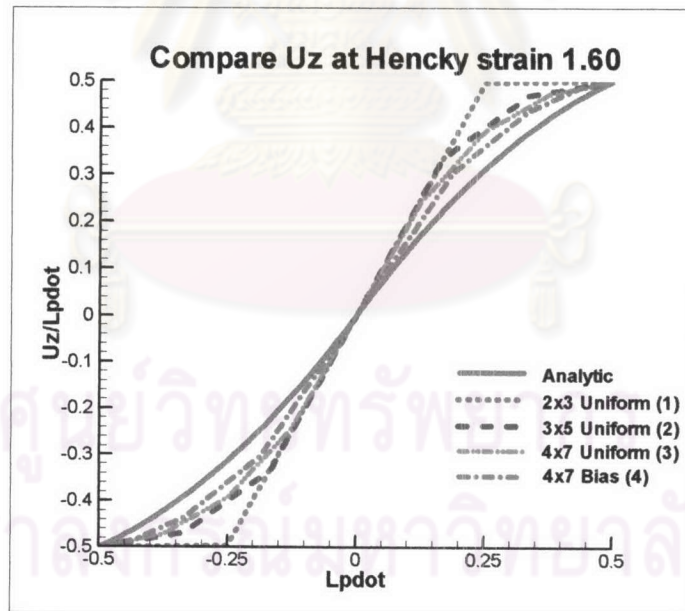


(ข) ค่าความเครียดเฮนคีย์ เป็น 1.60

รูปที่ 4.12 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วในแนวแกน  $r$  ที่ผิวอิสระจากโครงข่ายทั้ง 4 แบบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



(ก) ค่าความเครียดเฮนคีย์ เป็น 0.32



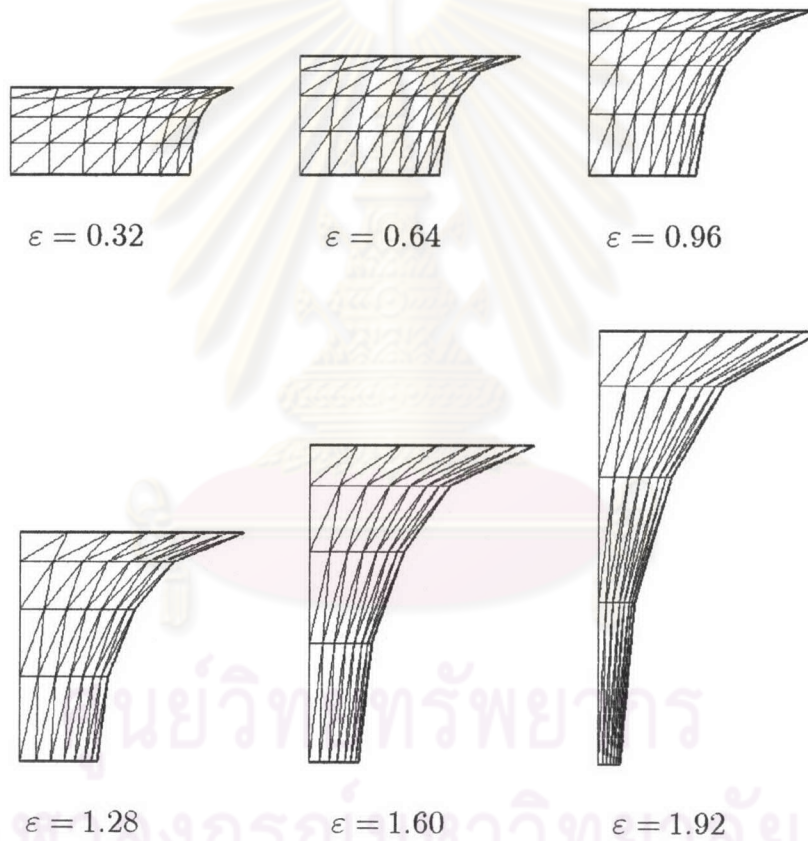
(ข) ค่าความเครียดเฮนคีย์ เป็น 1.60

รูปที่ 4.13 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่เส้นตรงกลาง ( $r = 0$ ) จากโครงข่ายทั้ง 4 แบบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



#### 4.3.2 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าต่างๆ ที่คำนวณได้จากการยึดตัวของฟิลาเมนต์

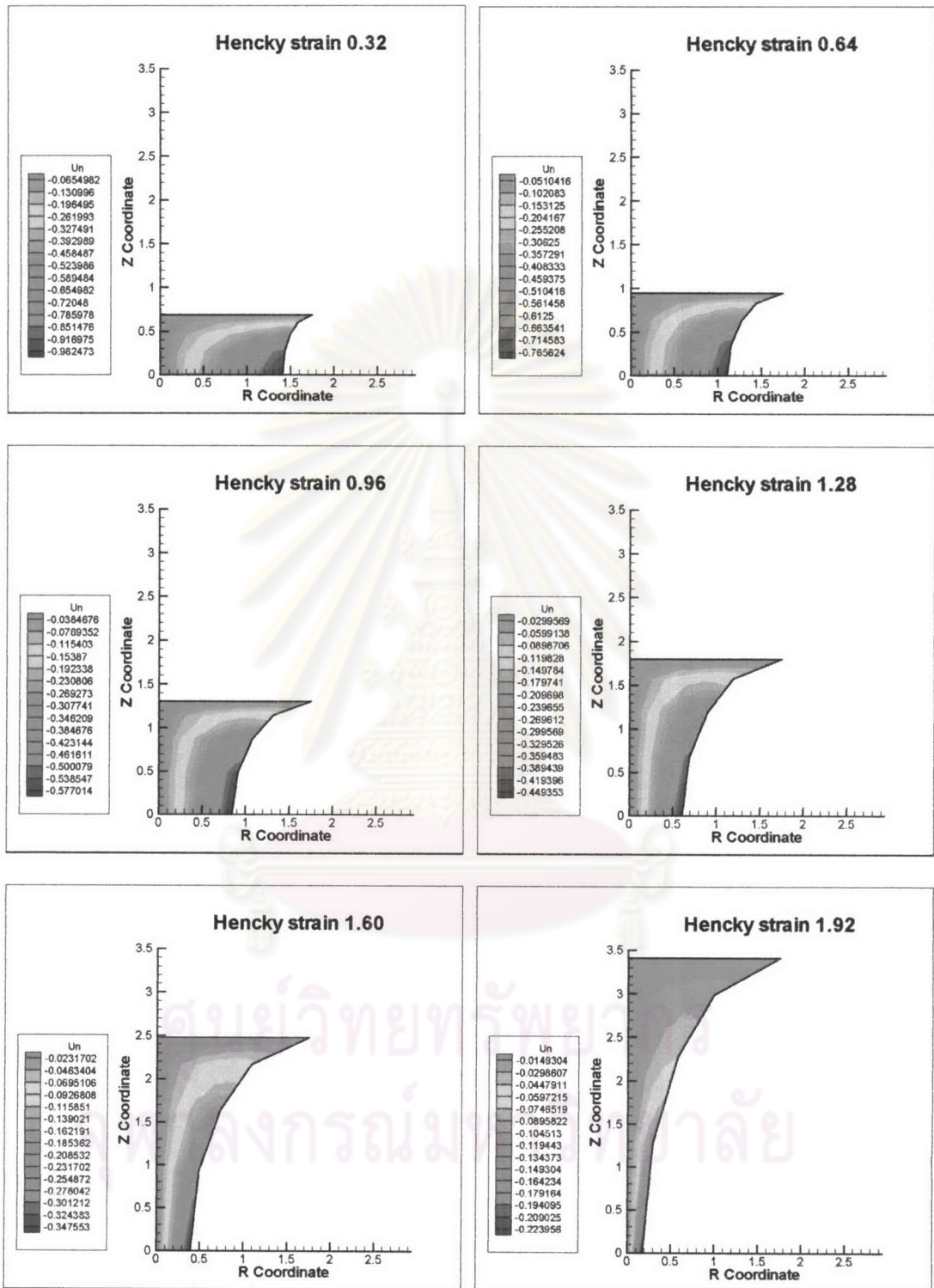
ในหัวข้อนี้จะพิจารณาตัวแปรของความเร็ว ความดัน ความเค้น อัตราการเฉือน อัตราการดึงและรูปร่างของฟิลาเมนต์ที่ค่าความเครียดเฉือนคี่ต่างๆ จากรูปที่ 4.14 จะพบว่ารัศมีที่แต่ละจุดเปลี่ยนแปลงตลอดฟิลาเมนต์และจะมีค่าน้อยที่สุดที่ตำแหน่งบริเวณระนาบสมมาตรแกน  $r$  โดยที่ค่ารัศมีจะเปลี่ยนแปลงทุกๆ เวลาของการยึดเพื่อยังคงอนุรักษ์ปริมาตรไว้ ฉะนั้นเมื่อทำการยึดต่อไปเรื่อยๆ ที่บริเวณตรงกลางของฟิลาเมนต์จะขาดก่อน เนื่องจากไม่ได้รับผลกระทบของการดูดกัน (suction effect) เพราะของไหลมีค่าความหนืดคงตัวให้อ่านเพิ่มเติมจากจาก R.Sazaire และ V. Legat [6]



รูปที่ 4.14 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของฟิลาเมนต์แบบ 4x7 bias

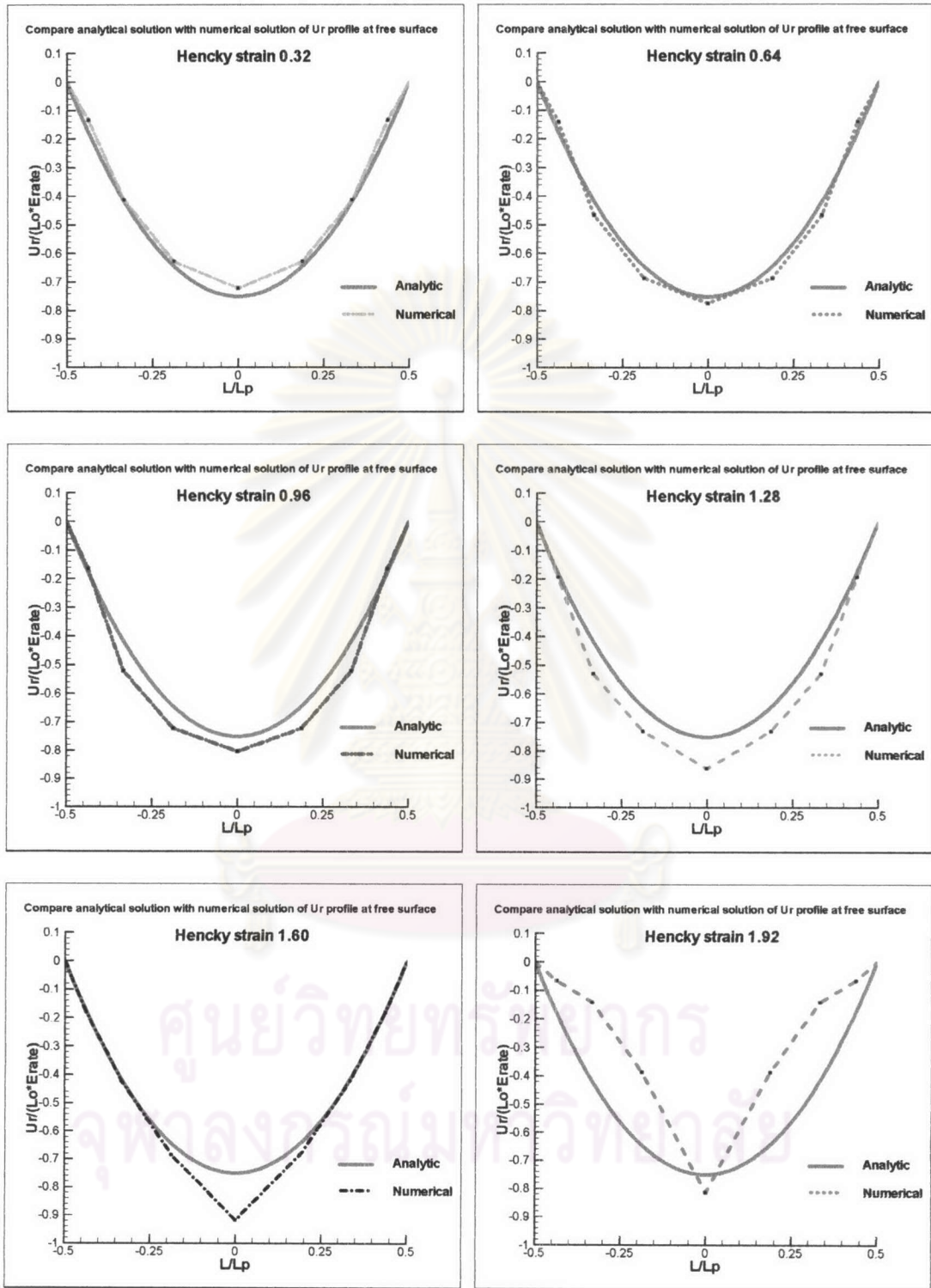
### ความเร็วในแนวแกน $r (u_r)$

ความเร็วในแนวแกน  $r$  ที่ยึดไปตามค่าความเครียดHenckyที่คำนวณได้มีค่าค่อนข้างน้อยซึ่งเห็นการเปลี่ยนแปลงค่ามากที่สุดที่ผิวอิสระ โดยที่มุมด้านล่างขวาจะแสดงผลเป็นค่าติดลบที่มากที่สุดแล้วค่าที่คำนวณได้จะติดลบน้อยลงอย่างต่อเนื่อง จนกระทั่งได้ค่าเป็นศูนย์ที่ขอบด้านซ้ายและขอบด้านบนตามเงื่อนไขขอบที่กำหนด เนื่องจากที่ขอบด้านบนยึดติดไว้กับแผ่นโลหะภายใต้สมมติฐานไม่มีการลื่นไถล ส่วนที่ขอบด้านล่างสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ ดังนั้นเมื่อเราทำการยึดฟิลาเมนต์ของไหลจะเคลื่อนที่ขึ้นในทิศ  $z$  และจะเคลื่อนที่หคเข้าในทิศสวนทางกับทิศ  $r$  เพื่อยังคงอนุรักษ์ปริมาตรไว้ จึงทำให้ความเร็วในแนวแกน  $r$  มีค่าติดลบและจะเห็นได้ว่าที่บริเวณมุมล่างขวาเป็นบริเวณที่เคลื่อนที่หคเข้ามากที่สุดจึงทำให้มีค่าติดลบมากที่สุดที่บริเวณนี้ และเมื่อยึดที่ค่าความเครียดHenckyสูงขึ้นความเร็วในแนวแกน  $r$  ยิ่งให้ค่าเข้าใกล้ศูนย์ เนื่องจาก  $R_{\min}$  จะลดลงในลักษณะของเอกซ์โปเนนเชียล นั่นคือลดลงด้วยอัตราเร็วที่ช้าลงซึ่งสามารถสังเกตได้จากค่าที่มุมด้านล่างขวามีค่าติดลบน้อยลงอย่างต่อเนื่อง ดังรูปที่ 4.15 จากรูปพบว่าความเร็วในแนวแกน  $r$  เป็นแพ็คเกจหลักในการเคลื่อนที่ของผิวอิสระ เมื่อค่าของความเร็วในแนวแกน  $r$  มาก ค่าของ  $R_{\min}$  จะน้อยและยังมีอิทธิพลต่อการคำนวณตำแหน่งผิวอิสระให้ถูกต้อง อีกทั้งยังช่วยในการรักษาเสถียรภาพของผลเฉลยที่ค่าความเครียดHenckyสูงจาก Chandio et al. เมื่อเรานำค่าความเร็วในแนวแกน  $r$  ที่บริเวณผิวอิสระมาวาดกราฟ ดูการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน  $z$  ที่ค่าความเครียดHenckyต่างๆเปรียบเทียบกับผลของการประมาณเชิงวิเคราะห์ ซึ่งเป็นผลของการประมาณการหล่อลื่น จากสมการ (4.10) ดังรูปที่ 4.16 จะเห็นได้ว่าที่ค่าความเครียดHenckyน้อยๆ ค่าความเร็วในแนวแกน  $r$  ที่บริเวณผิวอิสระที่คำนวณได้จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าของการประมาณเชิงวิเคราะห์ ซึ่งสอดคล้องกับผลการคำนวณของ Yao and McKinley [7], Sizaire and Legat [6] และ Chandio et al. [14] และเมื่อค่าความเครียดHenckyเพิ่มขึ้น ค่าความเร็วที่คำนวณได้ยิ่งห่างไกลจากค่าของการประมาณเชิงวิเคราะห์มากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ค่าความเครียดHenckyเป็น 1.92 ค่าที่คำนวณได้ผิดพลาดไปอย่างชัดเจนมาก ทำให้ต้องยุติการยึดที่ค่าความเครียดHenckyเป็น 1.92 เนื่องจากผลกระทบจากลักษณะของโครงข่าย ที่มีความละเอียดน้อยเกินขีดความสามารถที่จะคำนวณให้แม่นยำได้ดังที่กล่าวมาข้างต้น เราสามารถแสดงการเปรียบเทียบกันระหว่างค่าความเร็วในแนวแกน  $r$  ของทุกค่าความเครียดHenckyที่คำนวณมา ดังรูปที่ 4.17



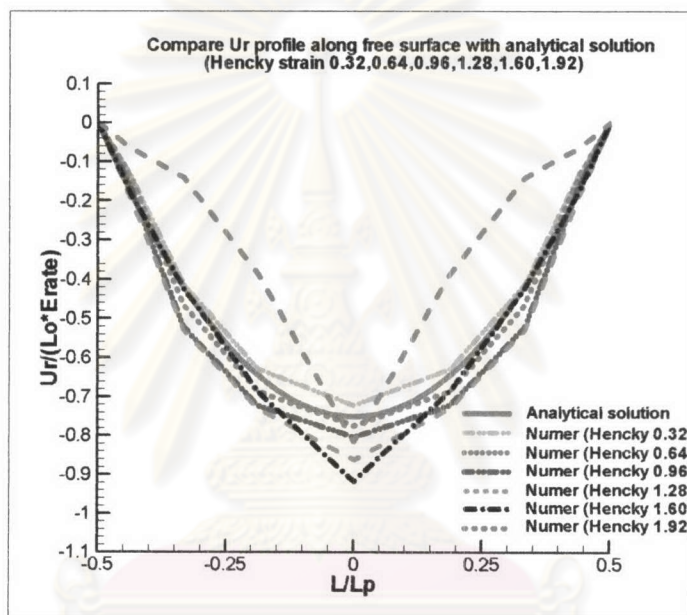
รูปที่ 4.15 แสดงความเร็วในแนวแกน  $r$  ที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ





รูปที่ 4.16 แสดงการเปรียบเทียบความเร็วในแนวแกน  $r$  ตลอดผิวอิสระกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่แต่ละค่าความเครียดเฉือนคือ





รูปที่ 4.17 แสดงการเปรียบเทียบความเร็วในแนวแกน  $r$  ตลอดผิวอิสระกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์  
ที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ

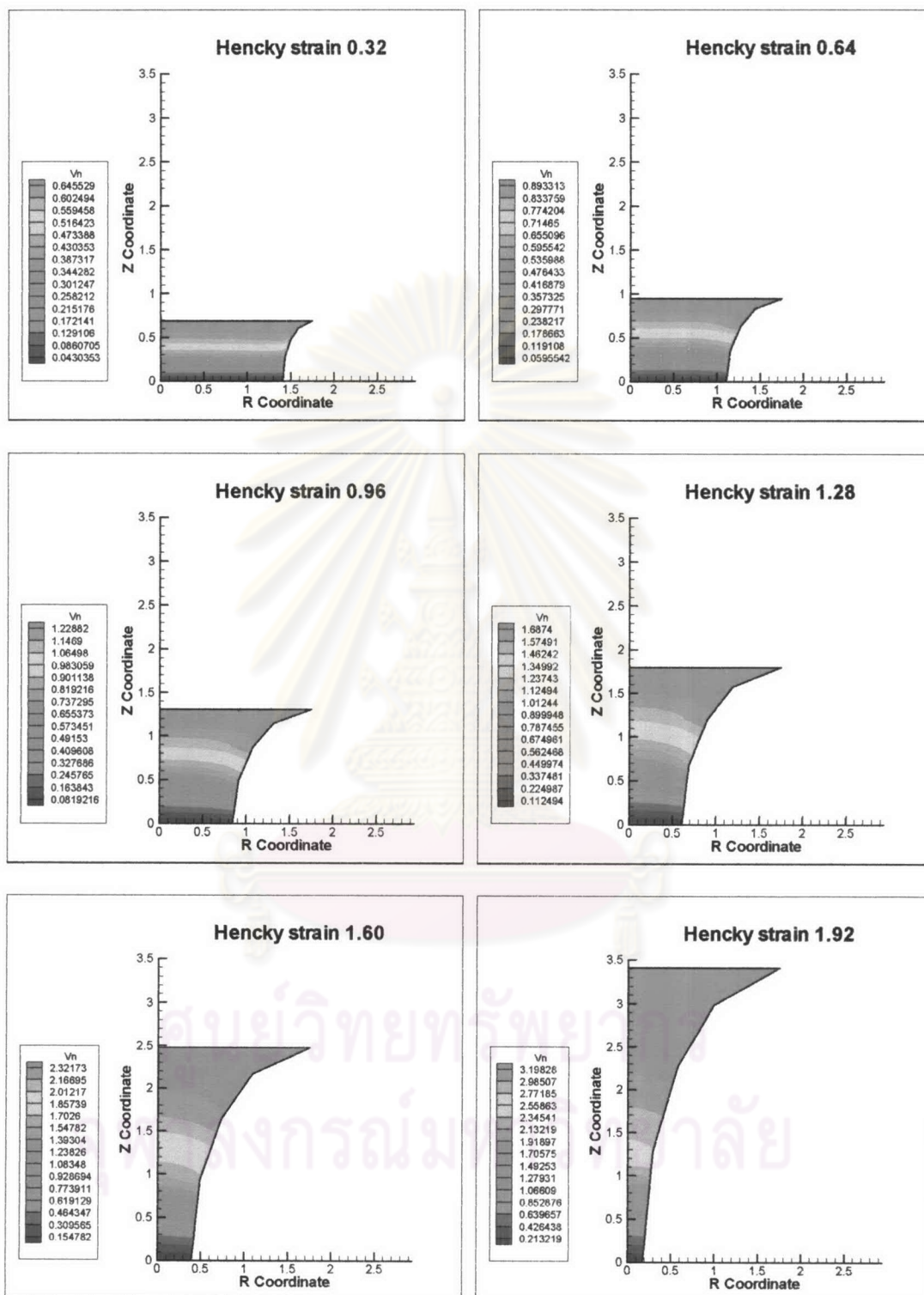
ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### ความเร็วในแนวแกน $z$ ( $u_z$ )

ความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่ค่าความเครียดเฉือนคี่ต่างๆ ให้ผลดังรูปที่ 4.18 จากรูปจะเห็นว่าความเร็วในแนวแกน  $z$  มีการยืดคี่สมมาตรตลอดฟิลาเมนต์และความยาวของของไหลมีการเปลี่ยนแปลงแบบไม่คงตัว โดยจะมีค่ามากที่สุดที่ขอบด้านบนเนื่องจากการยืดของเหลวที่ขอบด้านบนในทิศทางตามแกน  $z$  ดังนั้นของเหลวที่ติดอยู่กับขอบด้านบนจะมีค่าความเร็วตามแผ่นโลหะที่ยืด โดยเมื่อระยะห่างจากขอบด้านบนเพิ่มขึ้น ความเร็วจะมีค่าลดลงจนกระทั่งมีค่าเป็นศูนย์ที่ขอบด้านล่างตามเงื่อนไขขอบที่กำหนด และเนื่องจากค่าความเร็วของแผ่นโลหะที่ยืดเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาในลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ตามสมการ (4.1) ของนิพจน์ด้านขวา ดังนั้นทำให้ค่าความเร็วที่ขอบด้านบนมีค่ามากขึ้นเมื่อค่าความเครียดเฉือนคี่เพิ่มขึ้น

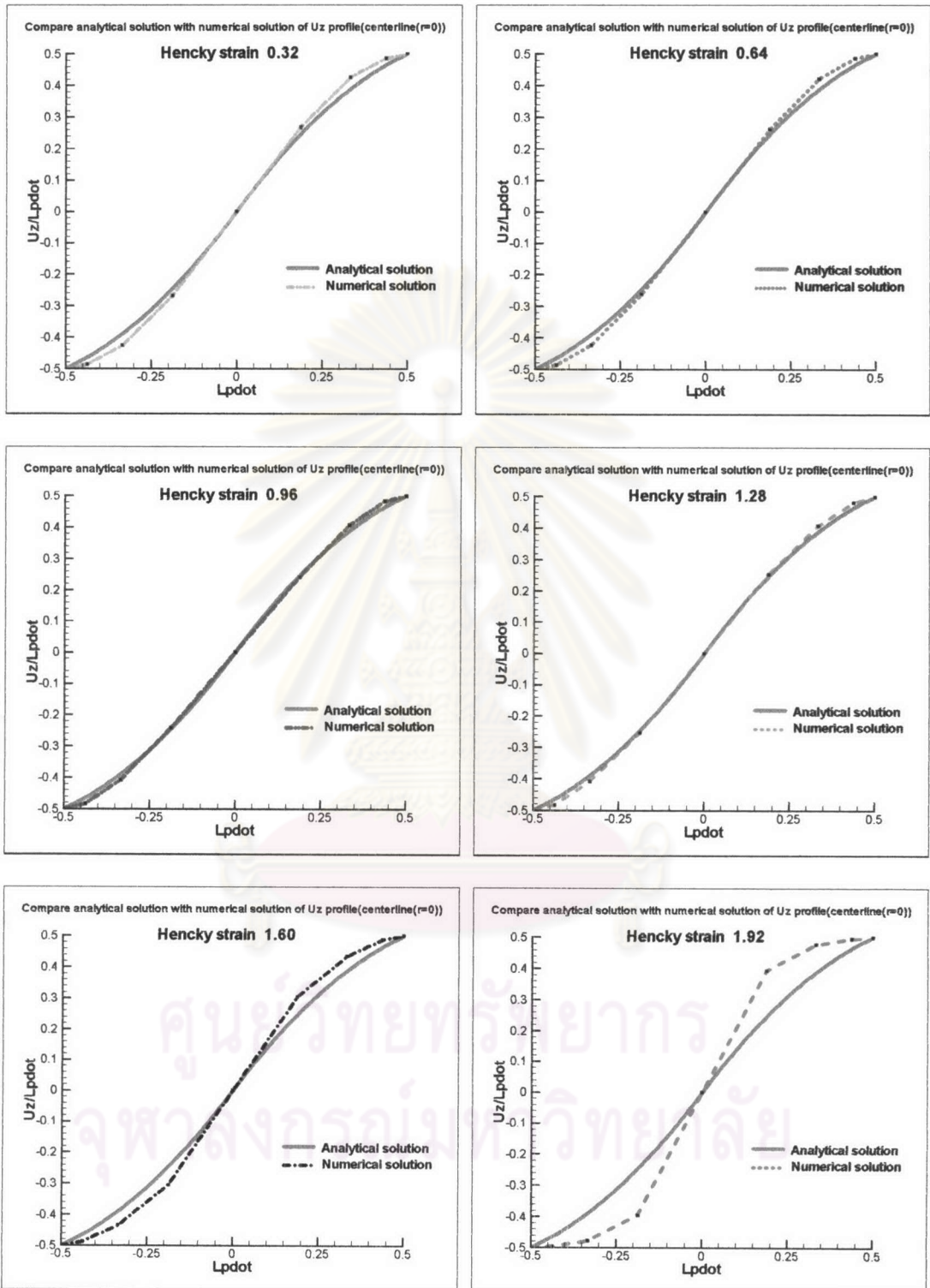
จากที่ทราบว่าค่าความเร็วในแนวแกน  $z$  จะมีการเปลี่ยนแปลงตามระดับความสูง  $z$  ต่างๆ กัน จึงนำผลของความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่ระดับความสูง  $z$  ต่างๆ ที่บริเวณเส้นตรงกลาง ( $r = 0$ ) มาทำการเปรียบเทียบกับค่าประมาณเชิงวิเคราะห์ ที่แต่ละค่าของความเครียดของเฉือนคี่ ดังรูปที่ 4.19 จากรูปจะเห็นว่าที่ความเครียดของเฉือนคี่น้อยๆ ค่าความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่คำนวณได้จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าของการประมาณเชิงวิเคราะห์มาก ซึ่งให้ผลสอดคล้องกับการคำนวณของ Yao and McKinley [7], Sizaire and Legat [6] และ Chandio et al. [14] และเมื่อค่าความเครียดเฉือนคี่เพิ่มขึ้นผลการคำนวณค่าความเร็วในแนวแกน  $z$  จะให้ค่าผิดพลาดมากขึ้นแต่ยังไม่มากนักเมื่อเทียบกับค่าความเร็วในแนวแกน  $r$  จนถึงค่าความเครียดเฉือนคี่เป็น 1.60 และหลังจากนั้นโครงข่ายในลักษณะนี้จะเริ่มไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมการยืดได้ สังเกตได้จากรูปที่ 4.19 พบว่าเมื่อค่าความเครียดเฉือนคี่เป็น 1.92 ค่าความเร็วที่ได้มีความผิดพลาดค่อนข้างสูง และสามารถแสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่บริเวณเส้นตรงกลาง (centerline) ของทุกค่าความเครียดเฉือนคี่ได้ดังรูปที่ 4.20

ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

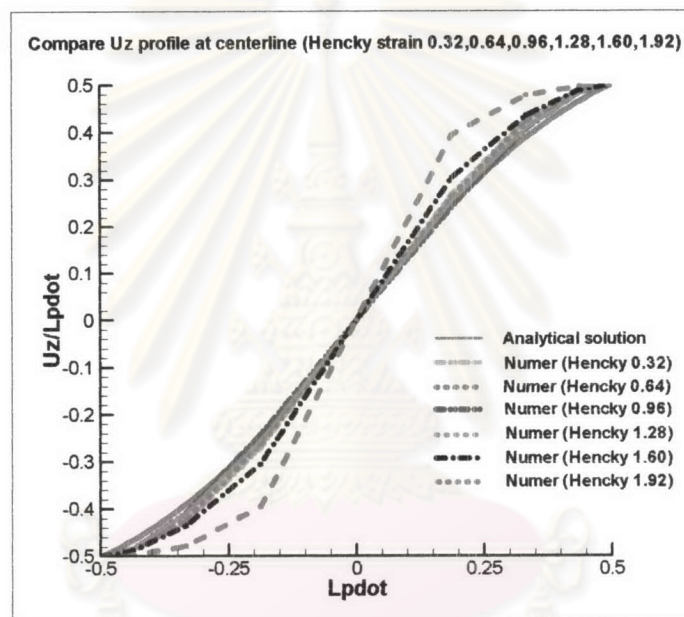


รูปที่ 4.18 แสดงความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่ค่าความเครียดเฉือนคี่ต่างๆ



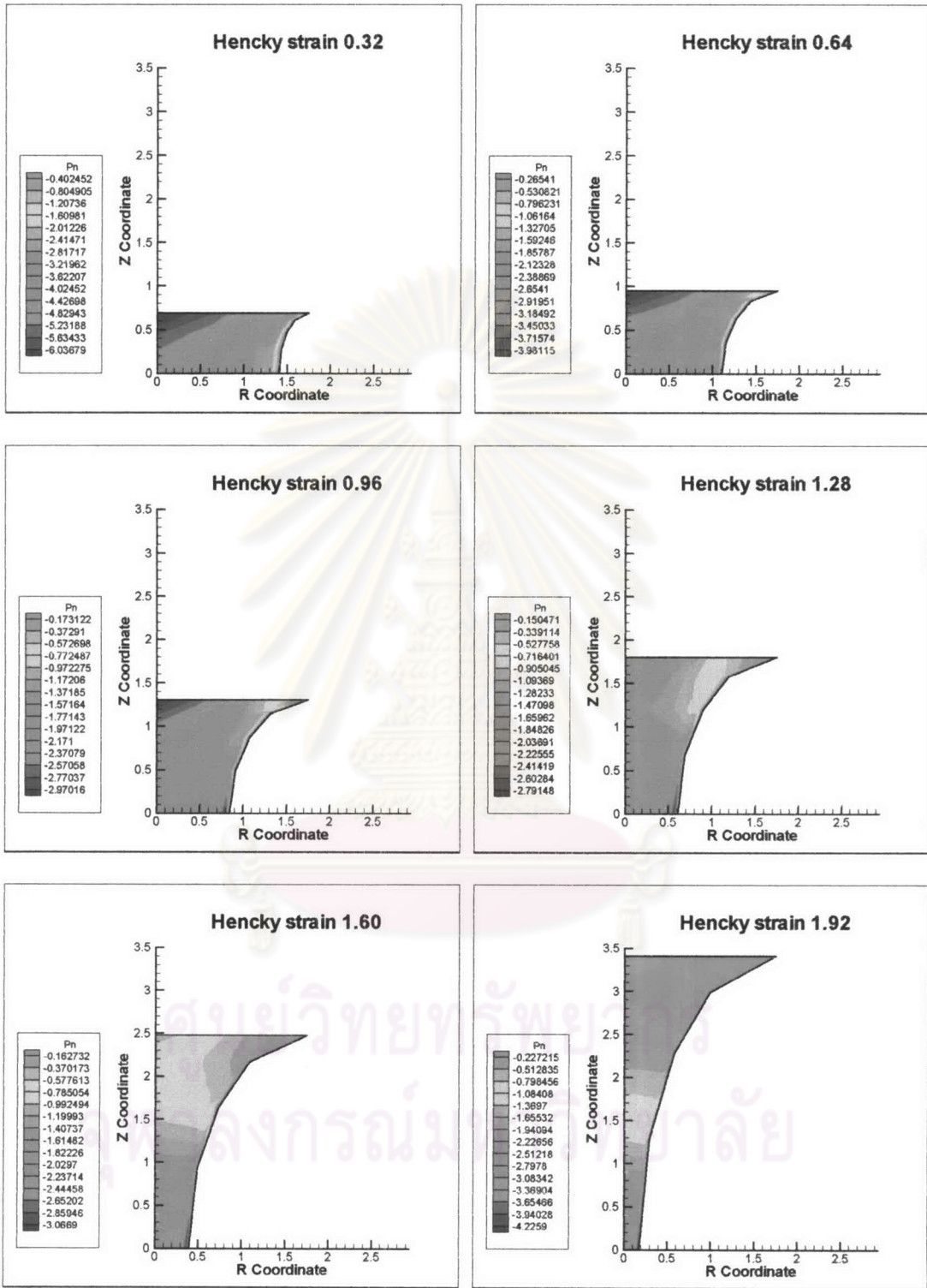


รูปที่ 4.19 แสดงการเปรียบเทียบความเร็วในแนวแกน ที่ตำแหน่งเส้นตรงกลาง ( $r = 0$ ) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่แต่ละค่าความเครียดเฉือน



รูปที่ 4.20 แสดงการเปรียบเทียบความเร็วในแนวแกน ที่ตำแหน่งเส้นตรงกลาง ( $r = 0$ ) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.21 แสดงความดันที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ



### ความดัน

ความดันที่คำนวณได้ให้ผลดังรูปที่ 4.21 และพบว่าเมื่อเริ่มต้นกำหนดให้ผิวอิสระมีค่าความดันเป็นศูนย์ซึ่งเป็นความดันเกจ (gauge pressure) เนื่องจากบริเวณผิวอิสระเป็นบริเวณที่ของไหลสัมผัสกับอากาศ ทำให้การคำนวณค่าความดันที่ค่าความเครียดเฉือนมีค่าน้อยจะได้ว่าความดันมีการเปลี่ยนแปลงค่าไปตามระยะห่างจากผิวอิสระโดยจะมีค่าน้อยที่บริเวณมุมซ้ายบน นั่นหมายความว่า ความดันบรรยากาศที่บริเวณผิวอิสระกดของเหลวให้เคลื่อนที่เข้าไป จึงทำให้ความดันติดลบและที่มุมซ้ายบนจะเป็นบริเวณที่ได้รับแรงกดจากอากาศน้อย แต่เมื่อยืดขึ้นไปทีค่าความเครียดเฉือนสูงขึ้น ความดันบรรยากาศจะมีผลกระทบเข้ามาในโดเมนมากขึ้นเรื่อยๆ โดยเฉพาะบริเวณมุมขวาบนจะเห็นได้ชัดเจน โดยค่าความดันที่คำนวณได้จะมีค่าเข้าใกล้ค่าศูนย์ตามค่าความดันบรรยากาศและบริเวณที่มีค่าความดันน้อยที่สุดจะเปลี่ยนจากมุมซ้ายบนไปเป็นบริเวณขอบด้านล่างแทนส่วนความดันที่ขอบด้านบนจะมีค่าเป็นศูนย์

### เทนเซอร์ความเค้น

การประมาณเทนเซอร์ความเค้นภายในโดเมน ซึ่งเป็นปริมาณที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่ สามารถหาได้ยากในการทดลอง จากบทที่ 2 ค่าของเทนเซอร์ความเค้นจะสอดคล้องตามสมการ  $\vec{T} = \mu(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}')$  สำหรับกรณีของการไหลแบบยืดดึงทางเดียวในอุดมคติ

$$u_z = \dot{\epsilon}_0 z \quad \text{และ} \quad u_r = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_0 r^2 \quad \text{ที่ทุกๆ เวลา } t$$

ดังรูปที่ 4.22



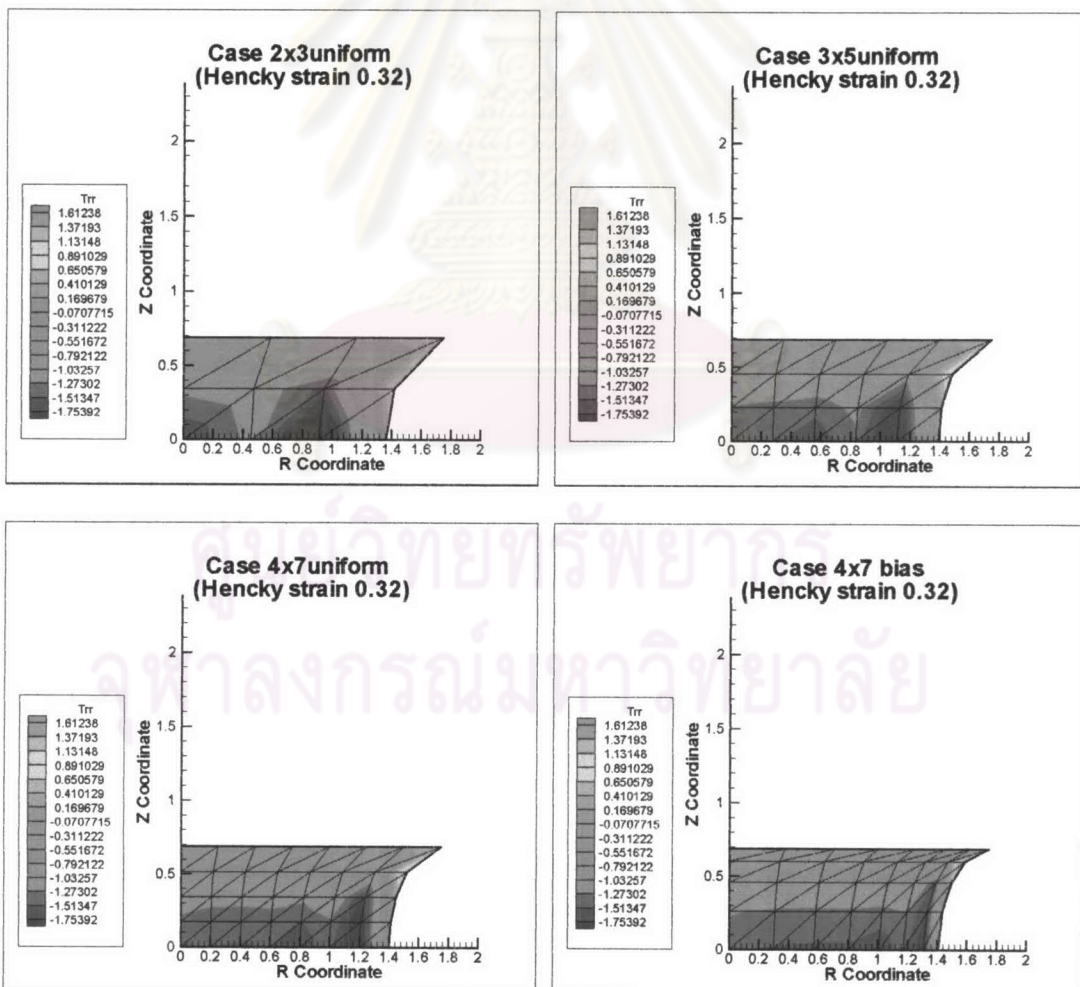
รูปที่ 4.22 การยืดดึงทางเดียวในอุดมคติ

นั่นคือ  $T_{rr} = \dot{\epsilon}_0$ ,  $T_{rz} = 0$ ,  $T_{zz} = 2\dot{\epsilon}_0$  และ  $T_{\theta\theta} = 0$  หมายความว่า การไหลที่ได้จะเป็นการไหลแบบอิสระจากการเฉือน (shear-free flow) ซึ่งดูได้จากค่า  $T_{rz} = 0$

สำหรับกรณีการไหลในธรรมชาติปกติ จะพิจารณาเป็นการไหลภายใต้อิทธิพลของการเฉือนเนื่องจากเงื่อนไขขอบที่ไม่มีการลื่นไถลซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดในแต่ละส่วนประกอบดังนี้

ความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  ( $T_{rr}$ )

ค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  เป็นความเค้นในแนวแกน  $r$  จากรูปที่ 4.23 แสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของขนาดโครงข่ายที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่ำ พบว่าทุกโครงข่าย ความเค้นส่วนประกอบ  $rr$  มีค่าต่ำที่บริเวณด้านล่าง โดยมีแนวโน้มสูงขึ้นตามแกน  $z$  เนื่องจากที่ขอบด้านบนใช้เงื่อนไขที่ไม่มี การลื่นไถล (no slip) และบริเวณผิวอิสระให้สังเกตตำแหน่งโนดประชิด (adjacent node) กับขอบด้านบนจะมีค่าสูงสุดเสมอ และเปลี่ยนตำแหน่งไปตามความละเอียดและอัตราการ โอนเอียงของโครงข่าย ดังเห็นได้ว่าค่าสูงสุดเปลี่ยนตำแหน่งไปใกล้ขอบด้านบนมากขึ้น เป็นผลมาจากการคำนวณค่าเทนเซอร์ความเค้นด้วยวิธีกริดเด้นตรีคัพเวอร์รี ดังรายละเอียดในหัวข้อที่ 3.5.3



รูปที่ 4.23 แสดงความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  ที่ได้รับอิทธิพลจากโครงข่ายทั้ง 4 กรณี

สำหรับความเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน  $r$  พบว่าบริเวณที่มีค่าต่ำสุดเปลี่ยนแปลงตำแหน่งเข้าใกล้ผิวอิสระมากขึ้นเมื่อความละเอียดและอัตราการโอนเียงของโครงข่ายสูงขึ้น กรณีพิจารณาการเปลี่ยนแปลงที่แต่ละค่าความเครียดเหนี่ยวนำจนถึง 1.92 ดังแสดงในรูปที่ 4.24 ค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  ที่บริเวณขอบด้านล่างมีแนวโน้มต่ำลง โดยบริเวณใกล้รอยต่อระหว่างผิวด้านบนและผิวอิสระมีค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  เป็นศูนย์มากขึ้น เนื่องจากระยะ  $h$  ที่ขอบด้านล่างมากขึ้นแปรตามค่าความเครียด เนื่องจากรูปทรงของฟิลาเมนต์เปลี่ยนแปลงมาก แต่ที่บริเวณใกล้รอยต่อระหว่างผิวด้านบนและผิวอิสระมีรูปทรงของฟิลาเมนต์เปลี่ยนแปลงน้อย

### ความเค้นของส่วนประกอบ $rz$ ( $T_{rz}$ )

ค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $rz$  เป็นความเค้นเฉือน ดังแสดงในรูปที่ 4.25 ซึ่งเห็นได้ว่าขอบด้านซ้าย และขอบด้านล่างมีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากเงื่อนไขสมมาตรรอบแกน เมื่อพิจารณาค่าความเครียดเหนี่ยวนำเป็น 0.32 ค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $rz$  มีค่าสูงสุดอย่างชัดเจนบริเวณใกล้รอยต่อระหว่างผิวด้านบนและผิวอิสระ เนื่องจากผลกระทบของการเฉือน (shearing effect) ซึ่งพบว่าของไหลมีพฤติกรรมไม่สอดคล้องตามหลักของไหลยึดคิงทางเคียวริสซูทรีดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น

พิจารณาค่าความเครียดเหนี่ยวนำที่เพิ่มขึ้นตามลำดับจนถึง 1.92 พบว่าบริเวณใกล้รอยต่อระหว่างผิวด้านบนและผิวอิสระมีค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $rz$  ลดลงจนกระทั่งมีค่าเป็นศูนย์อย่างชัดเจนตลอดแนวขอบด้านบน ด้วยเหตุผลเดียวกับความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  ที่ว่ารูปทรงของฟิลาเมนต์เปลี่ยนแปลงน้อย และบริเวณที่มีค่าสูงสุดในฟิลาเมนต์มีการเปลี่ยนตำแหน่งจากเดิมที่บริเวณใกล้รอยต่อระหว่างผิวด้านบนและผิวอิสระ ไปอยู่ที่ตำแหน่งโนดช่วงกลางบนผิวอิสระแทน เมื่อกรณียืดเหนี่ยวนำเป็น 1.92 แล้วเป็นที่น่าสังเกตว่าการกระจายตัวของความเค้นของส่วนประกอบ  $rz$  มีค่าใกล้ศูนย์ เนื่องด้วยผลกระทบของการเฉือนลดน้อยลง หรือเรียกได้ว่าเป็นการไหลแบบอิสระจากการเฉือน (shear-free flow)

### ความเค้นของส่วนประกอบ $zz$ ( $T_{zz}$ )

ค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $zz$  เป็นความเค้นในแนวแกน  $z$  ดังแสดงในรูปที่ 4.26 พบว่าบริเวณที่มีค่ามากที่สุดอยู่ที่ขอบด้านล่าง ส่วนที่บริเวณขอบด้านบนมีค่าน้อยที่สุด เนื่องจากของไหลที่พิจารณายึดติดอยู่กับขอบด้านบนแต่ที่ขอบด้านล่างเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ จึงทำให้สามารถยืดตัวได้มาก และค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $zz$  กำหนดจากเกรเดียนต์ของความเร็วในแนวแกน  $z$  เทียบกับระยะ  $z$  ซึ่งจากรูปที่ 4.18 พบว่าความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่บริเวณใกล้ขอบด้านล่างมีอัตรา



การเปลี่ยนแปลงค่ามากส่วนบริเวณใกล้ขอบด้านบนมีอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าความเร็วในแนวแกน  $z$  น้อย

สำหรับในบริเวณใกล้ผิวอิสระมีค่าค่อนข้างผิดจากปกติ เนื่องจากเกิดความไม่ต่อเนื่องเล็กน้อย ในทำนองเดียวกับค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  เมื่อค่าความเครียดเฮนคีย์สูงขึ้น ระยะของขอบด้านล่างยังมีขนาดลดลง ทว่ายังคงต้องรับแรงในการดึงเท่าเดิม ดังนั้นค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $zz$  จึงมีค่าสูงขึ้น

### ความเค้นของส่วนประกอบ $\theta\theta$ ( $T_{\theta\theta}$ )

ค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $\theta\theta$  เป็นความเค้นในแนวแกน  $\theta$  ซึ่งเป็นค่าที่แสดงถึงการหมุนหรือการดึงในแนวเส้นรอบวง ผลที่คำนวณได้แสดงดังรูปที่ 4.27 จะเห็นได้ว่าค่าความเค้นของส่วนประกอบ  $\theta\theta$  มีค่าน้อยมากเนื่องจากในงานนี้เป็นการยึดดึงทางเดียวและตามข้อสมมติฐานที่ว่าไหลเป็นแบบลามินาร์ (laminar flow) ซึ่งการเคลื่อนตัวจะมีลักษณะเป็นชั้น ทำให้การหมุนในแนวแกน  $\theta$  มีน้อยมาก ส่วนบริเวณขอบด้านบนจะมีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ  $T_{\theta\theta} = 2\mu \frac{u_r}{r}$  ซึ่งมีเงื่อนไขขอบด้านบนที่ให้ออกของเหลวไม่มีการลื่นไถล ( $u_r = 0$ ) ดังนั้น  $T_{\theta\theta} = 0$

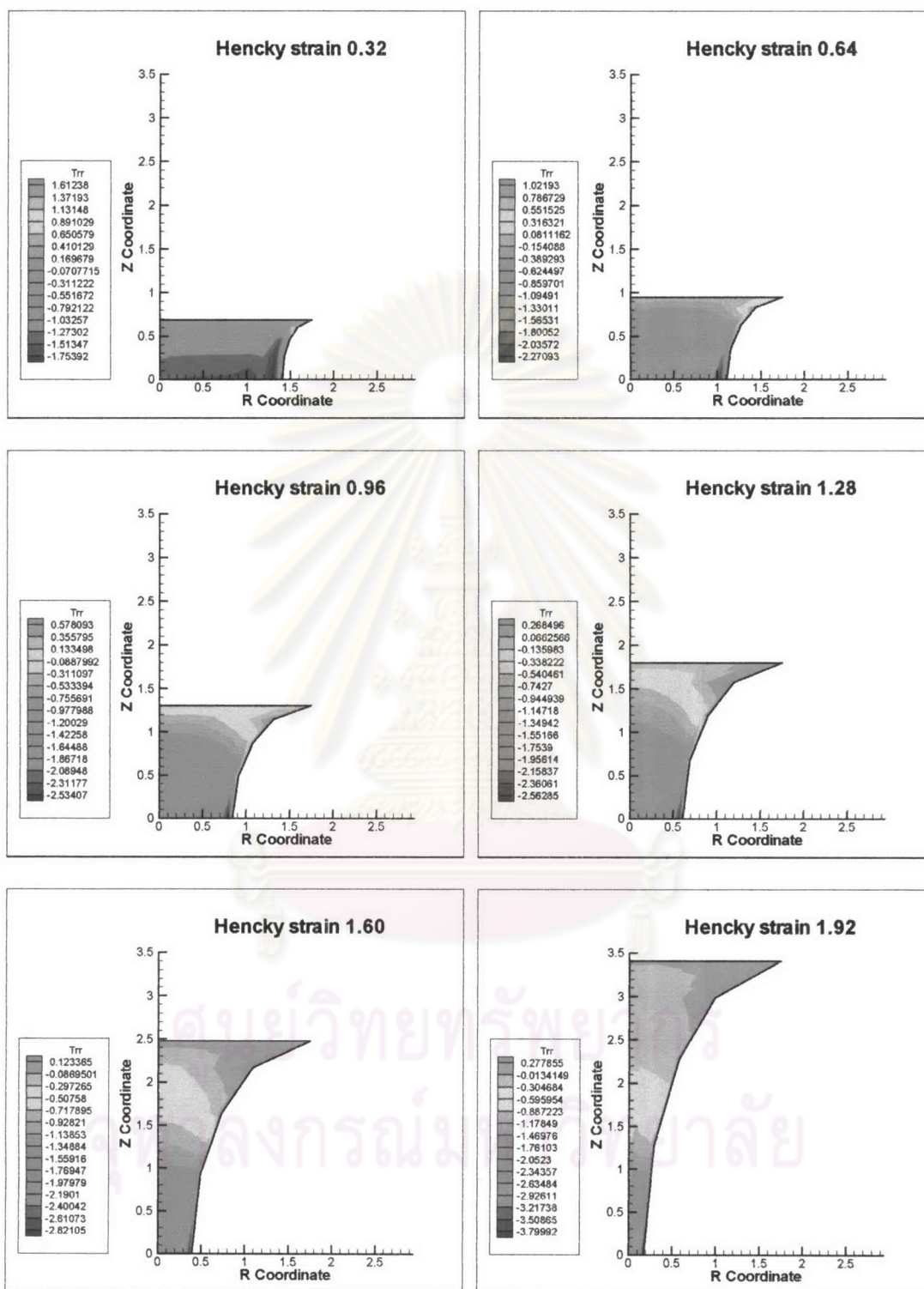
### อัตราเฉือน

ค่าอัตราการเฉือนบอกให้ทราบถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ถ้าอัตราเฉือนมากอัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากแต่ถ้าอัตราเฉือนน้อยอัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะน้อย รูปที่ 4.28 แสดงถึงอัตราเฉือนที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ ที่คำนวณมาจากสมการ (2.31) โดยผ่านการทำเกรเดียนต์ริคฟ์เวอรี เพื่อหาเกรเดียนต์ความเร็ว เช่นเดียวกับการหาค่าความเค้นของส่วนประกอบต่างๆ จากรูปจะพบว่าค่าความเครียดเฮนคีย์มีค่าน้อย ( $\varepsilon = 0.32$ ) ทำให้บริเวณใกล้ผิวอิสระที่คำนวณ ค่าอัตราเฉือนเกิดความไม่ต่อเนื่องเช่นเดียวกับการหาค่าส่วนประกอบของความเค้น เนื่องจากสมการอัตราการเฉือนจะมีนิพจน์  $\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)$  เป็นนิพจน์ที่มีผลต่อการคำนวณมากที่สุด ถ้าเพิ่มความละเอียดของโครงข่ายให้มากขึ้น ผลของอัตราการเฉือนควรจะมีความต่อเนื่องมากขึ้น และถ้ายืดออกไปที่ค่าความเครียดเฮนคีย์สูงๆ อัตราเฉือนจะมีค่าสูงขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณที่ขอบด้านล่างจะมีค่าอัตราเฉือนมาก นั่นหมายถึงว่าบริเวณนี้จะเสียรูปได้ง่าย

### อัตราการค้า

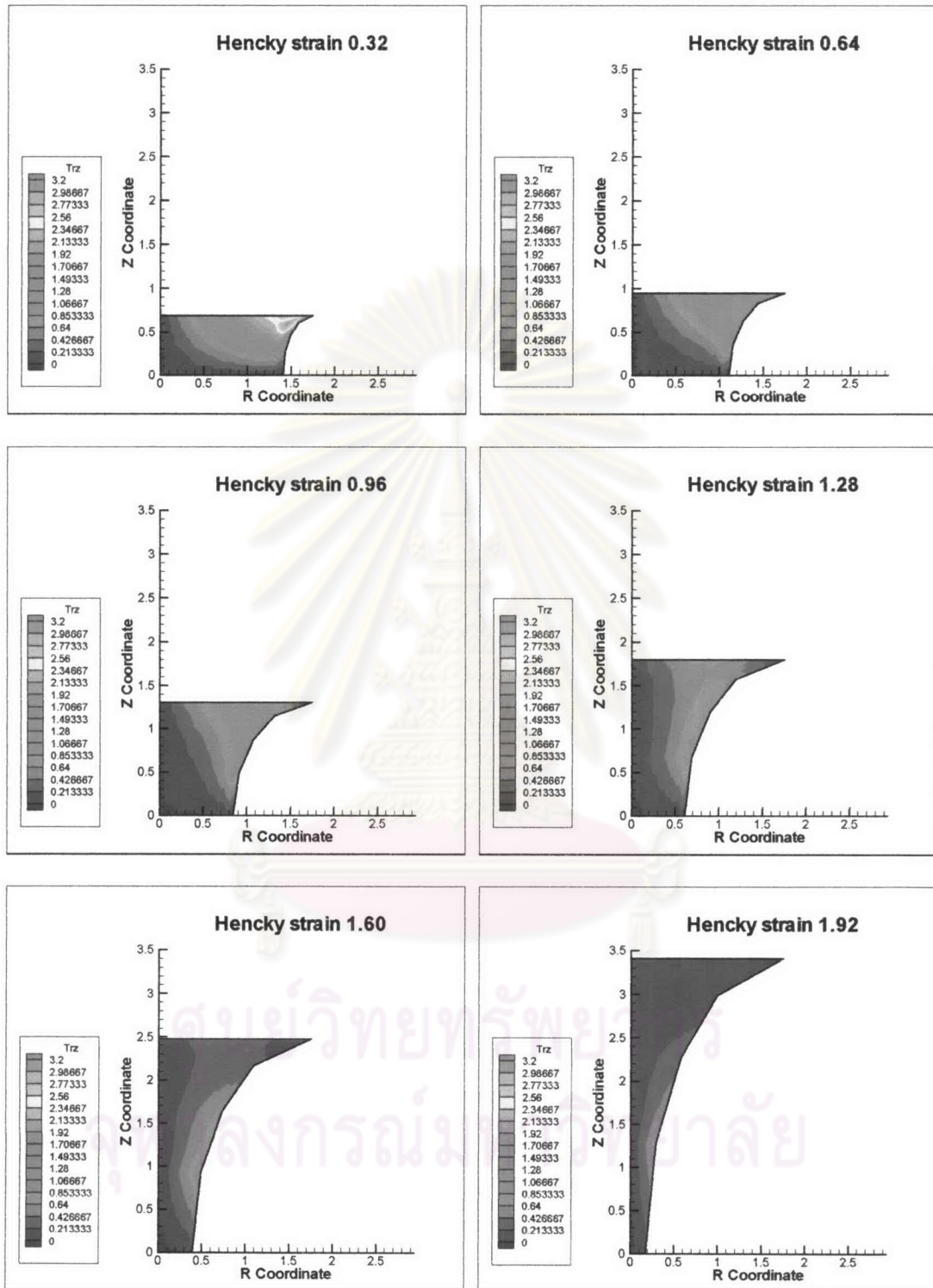
อัตราการค้าเป็นปริมาณที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่ง ในการศึกษาการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของของไหลขณะยึด รวมทั้งเป็นตัวบ่งบอกถึงความสามารถในการยึดและความแข็งแรงที่บริเวณต่างๆ ของของไหล ผลการคำนวณค่าอัตราการค้าที่ค่าความเครียดเส้นคีย์ต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 4.29 ซึ่งคำนวณมาจากสมการ (2.32) และผ่านการทำเกรเดียนต์รีคิฟเวอรี โดยมีนิพจน์  $\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)$  เป็นนิพจน์ที่มีผลต่อการคำนวณมากที่สุด จึงได้รับผลกระทบจากลักษณะของโครงข่าย เช่นเดียวกับค่าอัตราเฉือน สังกัดได้จากการเกิดความไม่ต่อเนื่องของอัตราการค้าที่ค่าความเครียดเส้นคีย์เป็น 0.32 ที่บริเวณใกล้ผิวอิสระ นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าค่าอัตราการค้าจะมีค่าสูงขึ้นตามค่าความเครียดเส้นคีย์ที่เพิ่มขึ้น โดยเฉพาะที่ขอบด้านล่างเมื่อค่าความเครียดเส้นคีย์เป็น 1.92 จะมีค่ามาก ดังนั้นเมื่อยึดของไหลนิวโตเนียน (ความหนืดคงที่) บริเวณที่มีอัตราการค้าสูงสุดจะเป็นบริเวณที่มีความเปราะบางหรือฉีกขาดได้ง่ายที่สุด

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

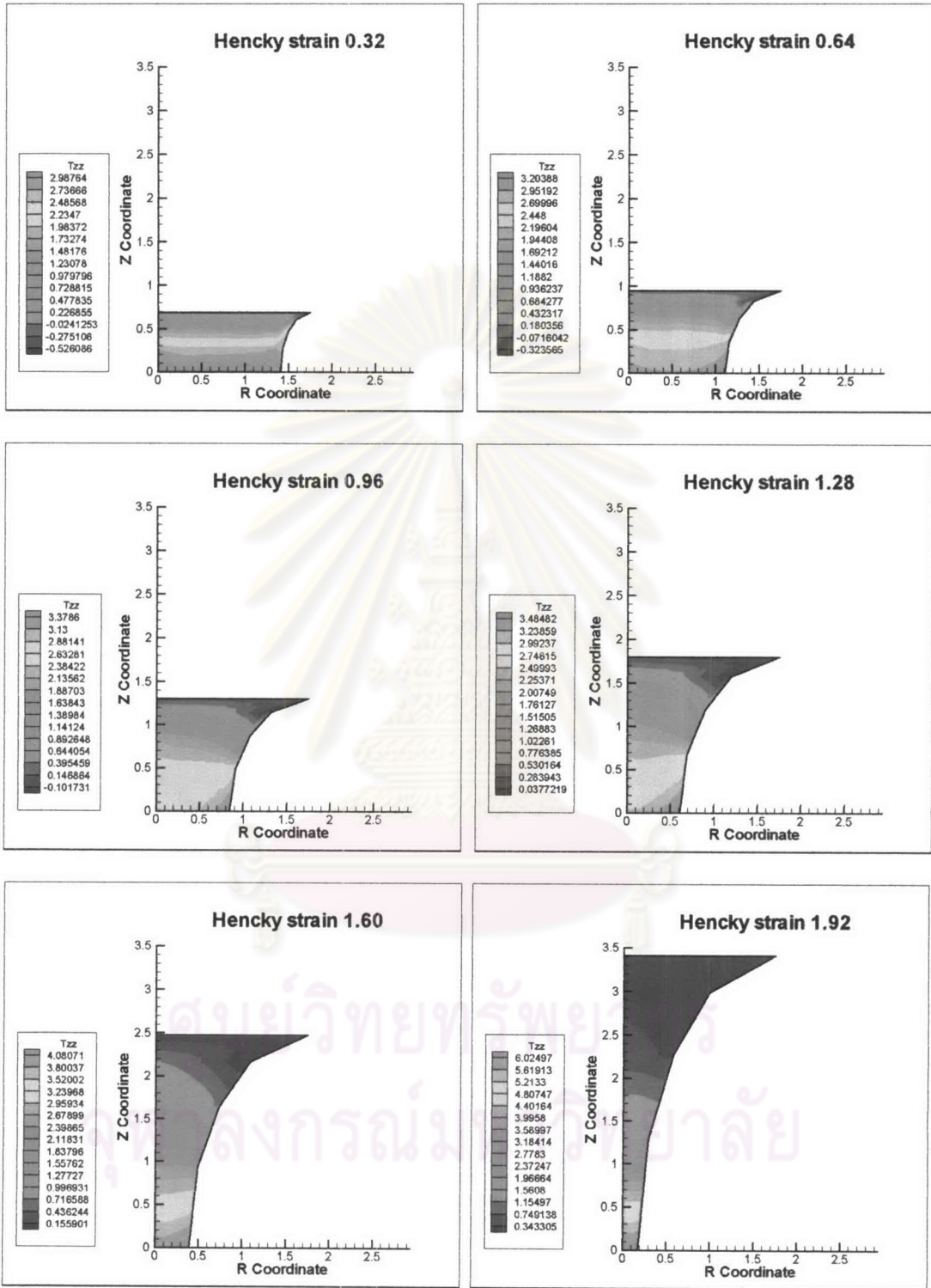


รูปที่ 4.24 แสดงความเค้นของส่วนประกอบ  $rr$  ที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ

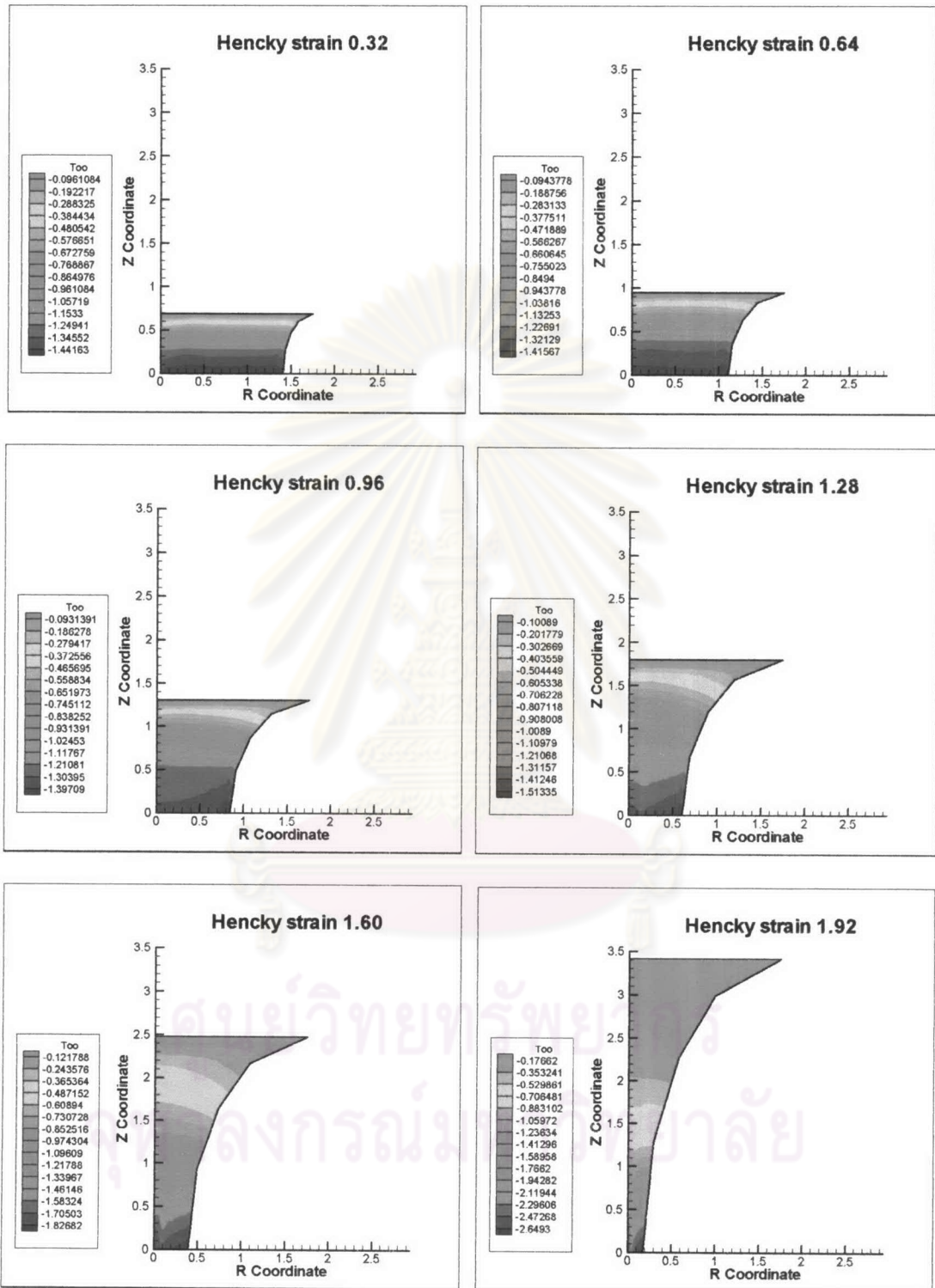




รูปที่ 4.25 แสดงความเค้นของส่วนประกอบ  $r_z$  ที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ

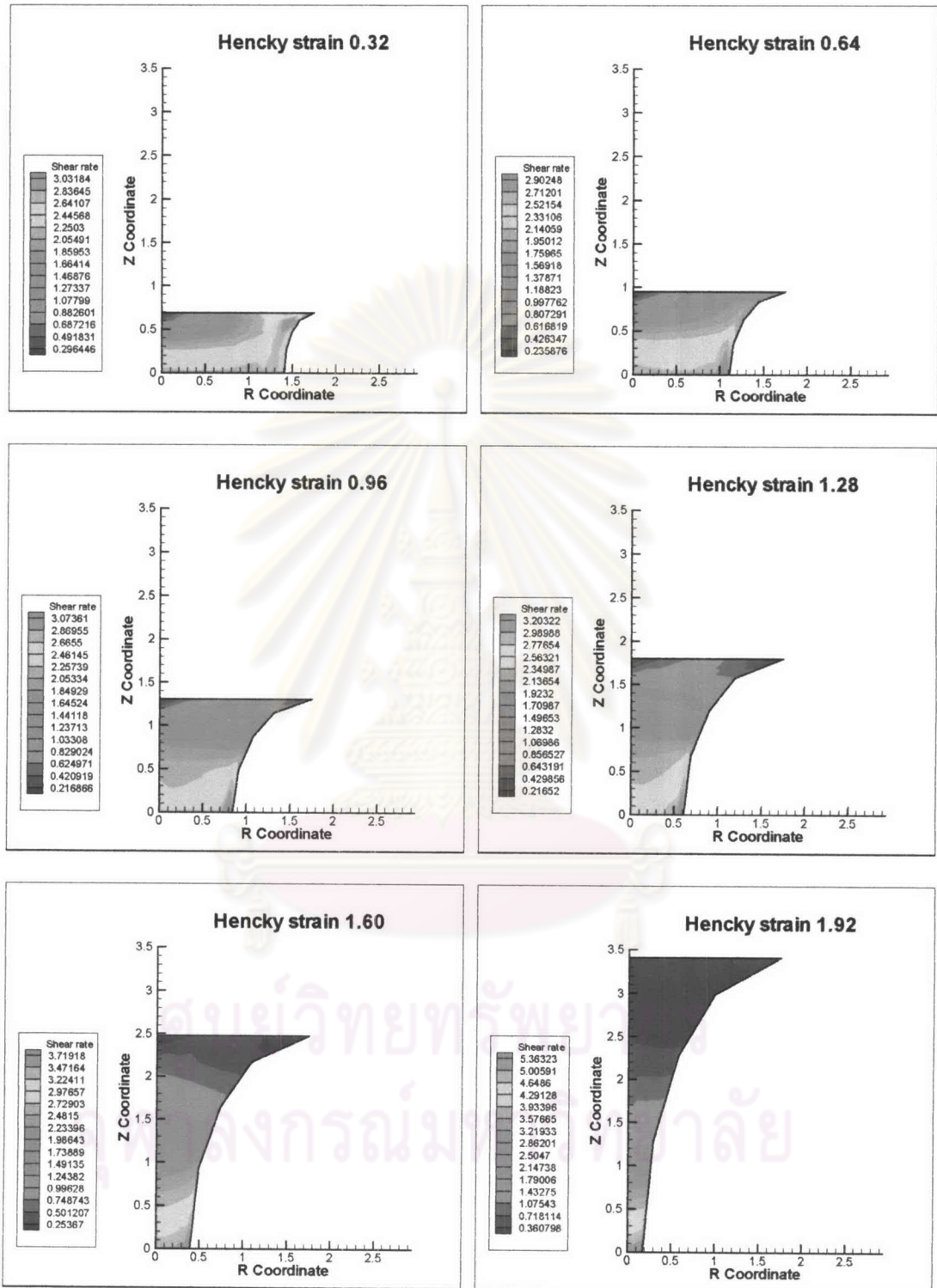


รูปที่ 4.26 แสดงความเค้นของส่วนประกอบ  $zz$  ที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ

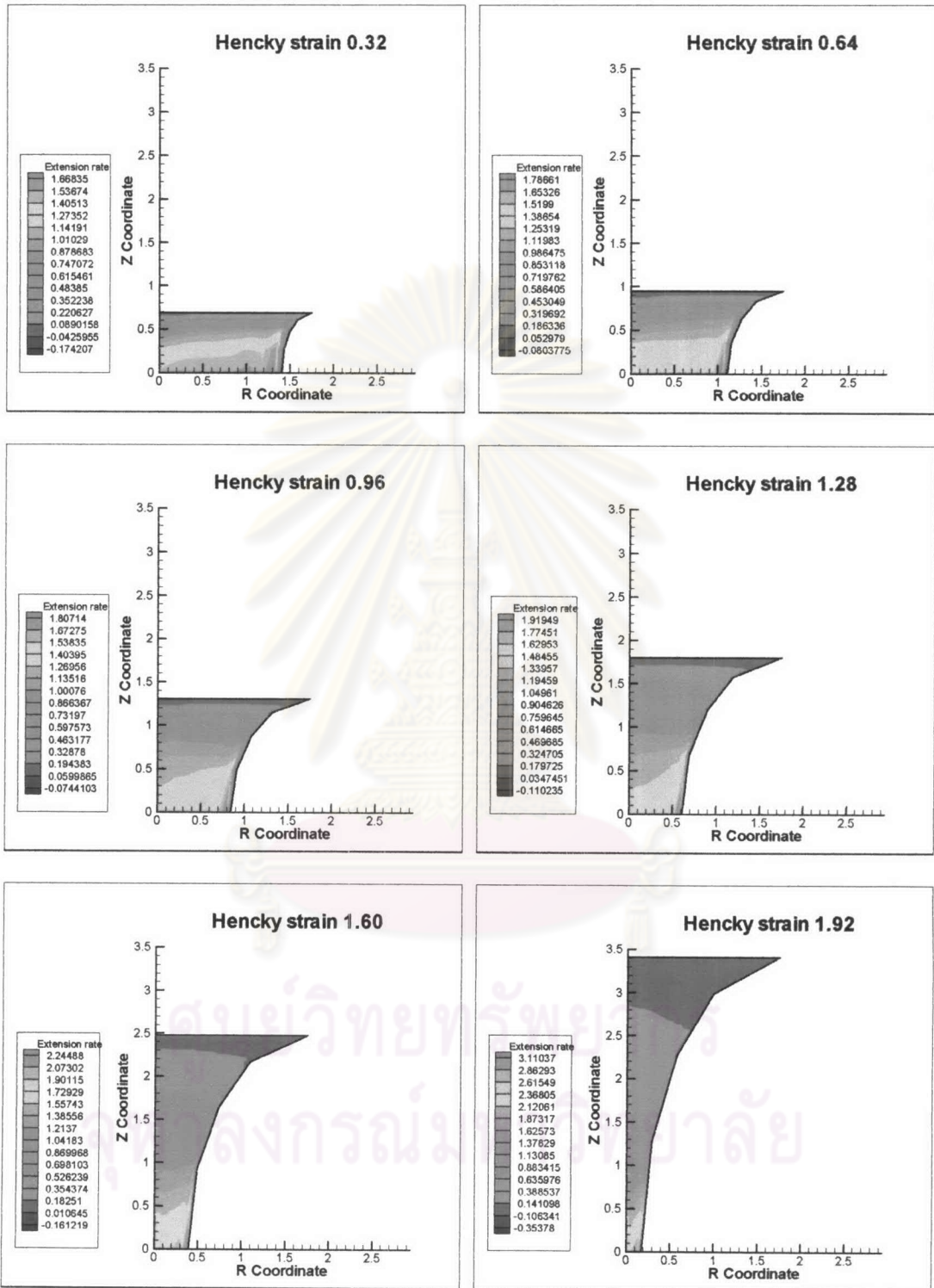


รูปที่ 4.27 แสดงความเค้นของส่วนประกอบ  $\sigma_{\theta\theta}$  ที่ค่าความเครียด Hencky ต่างๆ





รูปที่ 4.28 แสดงอัตราการเฉือนที่ค่าความเครียดเฉือนต่างกัน



รูปที่ 4.29 แสดงอัตราการดึงที่ค่าความเครียดเฮนคีย์ต่างๆ