บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยนั้นแยกออกเป็น 2 ส่วนดังนี้

- ส่วนแรกเกี่ยวกับทฤษฎีแถวคอย (**Queueing Theory**)
- ส่วนที่สองเกี่ยวกับเทคนิคการจำลองแบบ (**Simulation Technique**)

2.1 ทฤษฎีคิวหรือแถวคอย

2.1.1 ความหมายของคิว สถานการณ์ที่เกิดคิวนั้นจะเกิดเมื่อมีผู้รับบริการเข้ามาในสถานีบริการ (**Service Station**) เมื่อผู้ให้บริการไม่สามารถให้บริการได้ทันทีซึ่งอาจเนื่องมาจากมีคนรับบริการอยู่ก่อนแล้วคือสถานีบริการไม่ว่างก็จะเกิดคิวขึ้น ตัวอย่างแถวคอยที่เห็นอยู่เป็นประจำเช่น ในโรงพยาบาลโดยเฉพาะห้องรับบัตรจะมีแถวคอยที่ยาวมากตลอดเวลา; ในร้านตัดผมที่มีคนนิยมมากๆและอื่นๆ

ส่วนการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้แถวคอยคือนิสิตที่เข้าแถวรอรับบริการด้านการลงทะเบียน ผู้ให้บริการคือเจ้าหน้าที่บัณฑิตวิทยาลัย

ในการลงทะเบียนครั้งนี้มีขั้นตอนการลงทะเบียนทั้งหมด 9 ขั้นตอนแต่ละขั้นตอนนั้นจะเรียงกันอยู่ในรูปแบบอนุกรมคือเมื่อนิสิตเข้ามาทำการลงทะเบียนวิชาเรียนที่ขั้นตอนที่ 1 (ขั้นตอนนี้ทำหน้าที่เกี่ยวกับการตรวจสอบดูความถูกต้องว่าแต่ละคนลงวิชาเรียนอะไร เขียนถูกต้องหรือยัง) เมื่อเสร็จที่ขั้นตอนที่ 1 ก็จะเข้าสู่ขั้นตอนที่ 2 ต่อจากนั้นก็ไปสู่ขั้นตอนอื่นๆจนถึงขั้นตอนที่ 9 ก็สิ้นสุดการรับบริการ

การศึกษาระบบแถวคอยทำให้ทราบถึงค่าลักษณะการดำเนินงานซึ่งได้แก่

L_s , L_q, W_s , W_q ซึ่งให้ค่าจำกัดความไว้ในบทที่ 1 นอกจากนี้หัวให้หราบค่าการใช้ประโยชน์เจ้าหน้าที่โดยเฉลี่ย (**Average Utilization**)

ค่าต่างๆที่กล่าวมาข้างต้นนี้ไม่สามารถทำการคำนวณโดยใช้สูตรทางทฤษฎีแถวคอยได้เนื่องจากสาเหตุดังนี้

– เวลาการให้บริการ นั้นมีรูปแบบการแจกแจงไม่อยู่ในรูปแบบที่จะใช้สูตรที่มีอยู่โดยตรงได้ เช่น รูปแบบเอกซโปเนนเชียล, แกมม่าฯลฯซึ่งการทดสอบรูปแบบนี้ใช้วิธีการทดสอบภาวะสารรูปสนิทดี

– รูปแบบแถวคอยของการลงทะเบียนมีรูปแบบเป็นลักษณะข่ายงานนี้ตามธรรมดาก็ยากต่อการคำนวณอยู่แล้ว ดังนั้นจึงนำเอาทฤษฎีการจำลองแบบมาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้นซึ่งสะดวกกว่าการนำเอาทฤษฎีแถวคอยมาประยุกต์ใช้ซึ่งไม่สามารถหาสูตรที่จะใช้ในการคำนวณโดยตรง

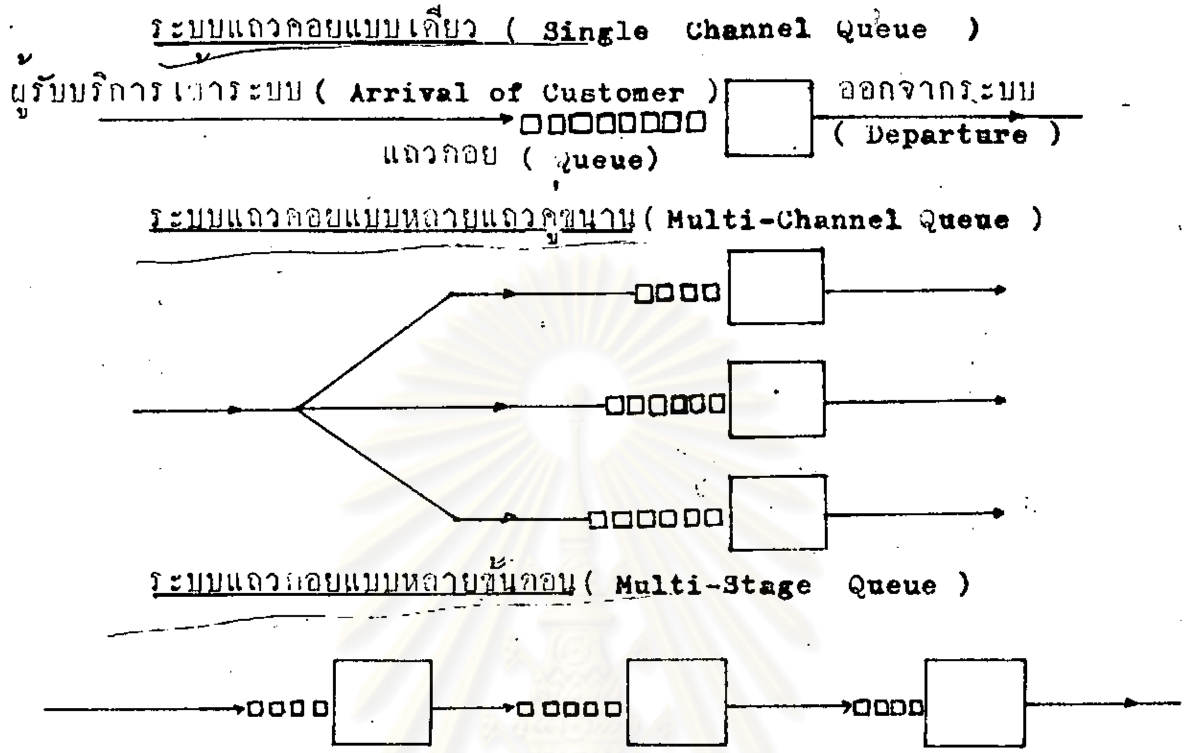
เพื่อความเข้าใจในปัญหาของแถวคอยจะขอนำเอาทฤษฎีและนิยามต่างๆมาอธิบายในหัวข้อต่อไปโดยสังเขป

2.1.2 องค์ประกอบหลักของระบบคิว

1. กลไกการให้บริการ (**Service Mechanism**) กลไกการให้บริการประกอบด้วยสิ่งต่างๆดังต่อไปนี้

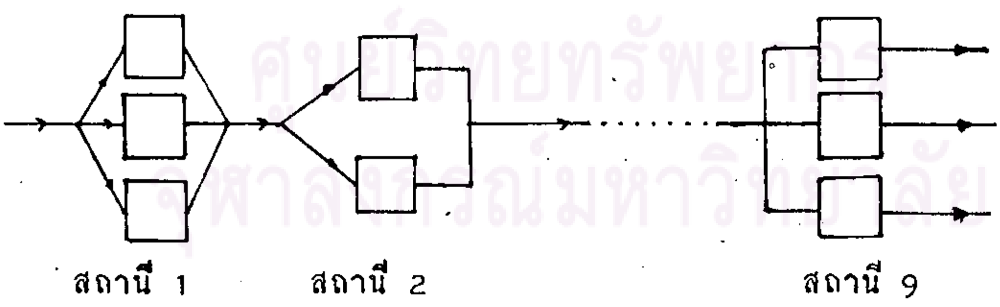
1. ช่องทางการให้บริการ (**Service Channel**) หรือจำนวนผู้ให้บริการในแต่ละสถานีบริการจะมีจำนวนผู้ให้บริการแตกต่างกันไปเพื่อความเข้าใจง่ายขึ้นจะแสดงให้เห็นในรูปที่ 2.1

ตัวอย่างของสถานีบริการแบบมี 1 ช่องทางการให้บริการ –การให้บริการแบบนี้จะมีผู้ใช้บริการเพียง 1 คน(ลูกค้าที่มารับบริการจะใช้ครั้งละ 1 คน) ผู้ที่ตามมาจะต้องคอย(หรือไม่ต้องคอยในบางกรณี)ถ้าขณะนั้นผู้ให้บริการไม่ว่าง เช่นร้านตัดผมกรณีที่มีช่างตัดผมคนเดียวลูกค้าที่มาใหม่เมื่อมาพบช่างไม่ว่างก็จะต้องคอย



<u>รูปภาพที่ 2.1</u> แสดงลักษณะสถานีการให้บริการบางรูปแบบ

การวิจัยครั้งนี้มีลักษณะของสถานีบริการแบบหลายสถานีบริการและแต่ละสถานีมีหลายช่องทางการให้บริการ เช่น ขั้นตอนที่ 1 มีจำนวนช่องผู้ให้บริการ 3ช่อง และขั้นตอนอื่นๆก็เหมือนกันมีจำนวนผู้ให้บริการมากกว่า 1 คน ดังแสดงในรูปที่ 2.2



<u>รูปภาพที่ 2.2</u> แสดงลักษณะสถานีการให้บริการของการลงทะเบียนวิชาเรียนโดยสังเขป

2. เวลาให้บริการ(Service Time) หมายถึงเวลาการให้บริการ เช่นร้านตัดผม เวลาที่ช่างตัดผมใช้ในการตัดผมนั่นเอง แต่ในวิทยานิพนธ์นี้เวลาการให้บริการคือเวลาที่เจ้าหน้าที่สำนักทะเบียนให้บริการแก่นิสิตแต่ละคนโดยเฉลี่ย ค่าเฉลี่ยที่ได้มานี้เป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่งของ ทฤษฎีแถวคอยใช้สัญญลักษณ์ " $1/\mu$ "(สัญญลักษณ์ μ อ่านว่า " มิว") เช่นในขั้นตอนที่ 1 นิสิตที่รับบริการที่สถานีบริการนี้โดยเฉลี่ย 15.11 วินาทีเป็นต้น

2. ขบวนการเข้ามา (Input Process) ประกอบด้วย

1. จำนวนผู้รับบริการ(Customer) ที่รอคอยซึ่งมีลักษณะการคอยหลายแบบเช่น แบบจำกัด (Finite Queue) เช่นร้านตัดผม,ร้านอาหารฯลฯ แบบไม่จำกัด(Infinite Queue) เช่น โรงพยาบาลในแผนกคนไข้ภายนอก ผู้รับบริการคือคนไข้ที่มารับบริการจะมีจำนวนมากที่จะประมาณได้ว่ามีจำนวนไม่จำกัด

2. จำนวนผู้รับบริการที่เข้ามาในระบบในเวลาหนึ่งๆ

ผู้รับบริการหรือลูกค้าเหล่านี้อาจมาทีละหนึ่งหน่วยหรืออาจมาเป็นกลุ่มๆ ซึ่งจำนวนกลุ่มนี้อาจมีลักษณะคงที่หรือไม่คงที่ก็ได้เช่น บางครั้ง 2 คน บางครั้งมา 3คน

3. ช่วงเวลาการมาของแต่ละคน(Interval Between Arrival) จะมีลักษณะที่เป็นไปได้ดังนี้คือ มีค่าคงที่ (Constant),มีลักษณะการแจกแจงเช่นแบบเอกซโปเนนเชียล(Exponential),และแบบเออร์แลงก์ (Erlang) เป็นต้น

4. อัตราการเข้ามา(Arrival Rate) คือจำนวนผู้รับบริการโดยเฉลี่ยที่เข้ามารับบริการต่อ 1 หน่วยเวลา ในการวิจัยครั้งนี้ได้ใช้อัตราการเข้ามาเป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่งใช้สัญญลักษณ์ " λ " อ่านว่า "แลมด้า"

3. กฎของคิว (Queue Discipline) มีหลายรูปแบบเช่น มาก่อน-รับบริการก่อน(First Come First Serve=FCFS) ,มาทีหลังรับบริการก่อน(Last Come First Serve)เช่นในกรณีโรงพยาบาลมีผู้ป่วยอาการรุนแรงมาถึงก็จะได้รับบริการก่อน,สิทธิพิเศษ (Priority),บริการอย่างสุ่ม(Random Order)เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยครั้งนี้กฎของแถวคอยมีรูปแบบมาก่อนรับบริการก่อน คือนิสิตที่เข้าสู่ระบบงานใครมาก่อนก็ได้รับบริการก่อน (คนที่อยู่แถวข้างหน้าก่อนจะได้รับบริการก่อนคนที่อยู่ข้างหลัง)

2.1.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในทฤษฎีแถวคอย

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในทฤษฎีแถวคอยใช้เพื่ออธิบายรูปแบบการแจกแจงการเข้ามารับบริการในระบบ อาจมีการแจกแจงเป็นแบบปัวซอง (Poisson Distribution) หรือเอกซโปเนนเชียล (Exponential Distribution), การแจกแจงแบบแกมมาร์ (Gamma Distribution), การแจกแจงแบบเออร์แลงก์ (Erlang Distribution) เป็นต้น

ส่วนการวิจัยครั้งนี้การแจกแจงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องมี 3 รูปแบบคือ การแจกแจงแบบปัวซอง, การแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียลและการแจกแบบปกติ

1. การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง (Poisson Distribution)

ถ้าให้ X แทน ตัวแปรสุ่ม (Random Variables) ของเหตุการณ์ที่สนใจ การหาค่าฟังก์ชันของความน่าจะเป็นในการแจกแจงแบบปัวซองนั้นต้องทราบค่าเฉลี่ย (λ) ของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นหรือที่ไปสังเกตมา

โอกาสที่จะมีเหตุการณ์ที่สนใจเกิดขึ้น 0, 1, 2, ... ครั้ง จะหาโดยการแทนค่า X ด้วย 0, 1, 2, ... ในสมการ

$$f(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

โดยที่ $e = 2.7182$ และ $X = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

ดังนั้นความน่าจะเป็น (โอกาส) ที่จะมีนิสิต 0, 1, 2, ... คน ที่เข้ามาลงทะเบียนวิชาเรียนในทุกๆ 1 นาที หาได้โดยการแทนค่า X ในสูตรข้างต้น

การแจกแจงแบบปัวซองจะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับค่าความแปรปรวนเท่ากับ λ

2. การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล (**Exponential Distribution**)

ถ้า X แทนตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (**Continuous Random Variable**) การหาค่าฟังก์ชันของความน่าจะเป็นในการแจกแจงนี้จะต้องทราบค่า พารามิเตอร์ คือ u (ค่าเฉลี่ยของอัตราการให้บริการมีหน่วยเป็นจำนวนคน/ 1 หน่วยเวลา)

จะได้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} u e^{-ux} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

จะได้ความน่าจะเป็นสะสม (**Cumulative Probability Density Function**) ให้ **c.d.f** เท่ากับ **F(x)**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = 1 - e^{-ux} \quad ; \; x \geq 0$$

การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากับ และ $1/u$ ตามลำดับ $1/u^2$

3. การแจกแจงแบบปกติ (**Normal Distribution**)

การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง มีลักษณะโค้งเป็นแบบระฆังคว่ำ (**Bell Shape**) การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปกติจะขึ้นกับ พารามิเตอร์ 2 ตัวคือ ค่าเฉลี่ย (u) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (**Standard deviation** ; σ) เมื่อ $f(x; u, \sigma)$ แทน ฟังก์ชันความน่าจะเป็น ของ x จะได้ว่า

$$f(x; u, \sigma) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left((x-u)/\sigma\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \qquad -\infty < x < \infty$$

เมื่อ $\pi = 3.1415$, $e = 2.7182$

การหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติ จะหาได้โดยการหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ ในการหาพื้นที่ใต้โค้งปกติอาจกระทำโดยการแปลงค่า **x** ซึ่งเป็นตัวแปร

สุ่มปกติให้เป็นค่ามาตรฐาน (Standard Score; Z) ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 โดยใช้สูตร $Z = (X - u)/\sigma$
และใช้ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ (Table of Area Under The Normal Curve) ก็จะได้ความน่าจะเป็นในช่วงต่างๆได้

2.1.4 การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี (Goodness of fit Test)

เมื่อทำการเก็บรวบรวมข้อมูลมาเรียบร้อยแล้วจะนำเอาข้อมูลนั้นมาหารูปแบบของการแจกแจงว่าข้อมูลนั้นมีรูปแบบการแจกแจงเข้ากับรูปแบบใด การวิจัยนี้มีข้อมูล 2 ลักษณะคือ ข้อมูลเกี่ยวกับการเข้ามารับบริการและข้อมูลเวลาการให้บริการ การทดสอบว่าข้อมูลจะมีการแจกแจงแบบใดนั้นจะทดสอบด้วยวิธีการทางสถิติที่เรียกว่า การทดสอบไคสแควร์ (Chi-Square Test) ในการทดสอบไคสแควร์นั้นจะต้องทราบค่าความถี่คาดหวัง (Expected Frequency) กับทราบความถี่จากเหตุการณ์ที่ไปสังเกตุมา (Observed Frequency) ซึ่งค่าความถี่จากการคาดหวังนี้จะหาได้เมื่อทราบ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่เราคาดว่าข้อมูลที่ได้มานั้นจะมีการแจกแจงแบบใดแบบหนึ่งที่กำหนดขึ้น

สมมติมีเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$

ความถี่ที่ได้จากการไปสังเกตุมา $O_1, O_2, O_3, \ldots\ldots, O_n$

ความถี่คาดหวัง $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots, E_n$

ค่าความถี่คาดหวังนี้หาได้จากการเอาความถี่รวม (N) คูณกับความน่าจะเป็น $f(x_i)$ ที่ได้มาจากหัวข้อ 2.1.3 ที่ผ่านมา ดังนั้นจะได้ความถี่คาดหวังดังต่อไปนี้

$$E_1 = N.\ f(x_1)\ ,\ E_2 = N.\ f(x_2)\ ,\ \ldots\ldots, E_n = N.\ f(x_i)$$

หาผลต่างระหว่างความถี่ที่เราไปสังเกตุ(O_i) กับความถี่คาดหวัง (E_i)

$(O_1 - E_1)$, $(O_2 - E_2)$, ..., $(O_n - E_n)$

ดังนั้นจะได้ ตัวสถิติสำหรับการทดสอบคือ

$$\chi^2_{test} = (O_1 - E_1)^2 / E_1 + (O_2 - E_2)^2 / E_2 + \ldots\ldots (O_n - E_n)^2 / E_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (O_i - E_i)^2 / E_i$$

การนำเอาการทดสอบแบบ χ^2 (ไคสแควร์) มาใช้ในการทดสอบภาวะสารูปสนิทดี มีขั้นตอนที่สรุปได้ดังต่อไปนี้

ก. ตั้งสมมติฐานว่าการแจกแจงของข้อมูลมีรูปแบบการแจกแจงแบบใด

ข. หาความถี่ของข้อมูลที่สุ่มเก็บมาและได้มาจากเหตุการณ์จริง

ค. คำนวณหาความถี่คาดหวังโดยใช้การแจกแจงความถี่ที่ตั้งไว้ในข้อ ก.

ง. หา χ^2_{table} ที่ระดับนัยสำคัญ (α) ซึ่งหาได้โดยการเปิดตารางมาตรฐานของไคสแควร์

ฉ. เปรียบเทียบค่า χ^2_{test} กับ χ^2_{table} โดยดูว่าจะยอมรับสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือปฏิเสธสมมติฐานที่ตั้งไว้ (จะยอมรับสมมติฐานที่ตั้งไว้เมื่อ χ^2_{test} น้อยกว่า χ^2_{table} และจะปฏิเสธสมมติฐานที่ตั้งไว้เมื่อ χ^2_{test} มากกว่าหรือเท่ากับ χ^2_{table})

2.1.5 <u>ระบบแถวคอยที่น่าสนใจ</u>

เพื่อความเข้าใจในระบบแถวคอยต่างๆดีขึ้นขอนำเอาสัญญลักษณ์ที่ใช้ในทฤษฎีแถวคอยมาอธิบายดังต่อไปนี้

– สัญญลักษณ์ที่ใช้แทนระบบคิวมีรูปแบบดังนี้ (a/b/c):(d/e/f)

โดยที่ a = การแจกแจงการเข้ามา

b = การแจกแจงการออก(การแจกแจงเวลาการให้บริการ)

c = ช่องทางการให้บริการ (จำนวนผู้ให้บริการ)

d = กฎของคิว (ระเบียบการให้บริการ)

e = จำนวนผู้รับบริการที่มากที่สุดที่จะให้อยู่ในระบบ

f = แหล่งกำเนิดของผู้รับบริการ (Population size)

– สัญญลักษณ์ a , b นี้อาจแทนด้วย

M หมายถึง อัตราการเข้ามารับบริการกับการจากไปมีการแจกแจงแบบปัวซองหรือช่วงเวลาการเข้ามารับบริการและการจากไปมีการแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียล

D หมายถึง ช่วงเวลาการมาหรือการจากไปมีช่วงเวลาคงที่

E_k หมายถึง ช่วงเวลาการมาหรือการให้บริการมีการแจกแจงแบบเออแลงก์หรือแบบแกมม่า โดยมีพารามิเตอร์ k

– สัญญลักษณ์ c เป็นเลขจำนวนเต็มบวกแทนจำนวนช่องทางการให้บริการ

– สัญญลักษณ์ d เป็นกฎของคิว เช่น มาก่อนรับบริการก่อน (First Come First Serve=FCFS), มาทีหลังรับบริการก่อน (Last Come First Serve =LCFS) แบบใดก็ได้ (General Discipline = G.D.)

– สัญญลักษณ์ e และ f แทนตัวเลขที่นับได้และนับไม่ได้

ตัวอย่างเช่น $(M/M/1):(G.D./K/\infty)$ หมายถึงอัตราการเข้ามารับบริการมีรูปแบบการแจกแจงเป็นแบบปัวซอง เวลาการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียล มีช่องทางการให้บริการ 1 ช่องทาง มีกฎของคิวเป็นแบบใดก็ได้(G.D.) ซึ่งอาจจะเป็น FCFS หรือ LCFS หรืออื่นๆก็ได้ จำนวนผู้รับบริการ(ลูกค้า)ในระบบมีได้มากสุด k คน (โดยรวมทั้งผู้ที่กำลังรับบริการและผู้ที่รอคอย) ซึ่งมีจำนวนที่นับได้และมาจากประชากรที่มีจำนวนไม่จำกัด

1. ระบบแถวคอยแบบ (M / M / 1) : (G.D./∞/∞)

ระบบแถวคอยแบบนี้เป็นรูปแบบแถวคอยที่มีรูปแบบอย่างง่าย (Simple Queue) โดยมีจำนวนการเข้ามารับบริการเป็นแบบปัวซองและเวลาการให้บริการมีการแจกแจงเป็นแบบเอกซโปเนนเชียล มีช่องทางการให้บริการ 1 ช่องทาง ผู้รับบริการมีได้ไม่จำกัดและมาจากประชากรไม่จำกัด มีสูตรที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ดังนี้

1. ความน่าจะเป็นที่ระบบจะไม่ว่างหรือความสามารถในการทำงานของระบบใช้สัญญลักษณ์ " ρ "

$\rho = \lambda / u$ (ρ = traffic intensity)

เมื่อ λ = อัตราเฉลี่ยของการเข้ามารับบริการ (Arrival Rate)

u = อัตราเฉลี่ยการให้บริการ (Service Rate)

2. ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$P_o = 1 - \rho$

3. ความน่าจะเป็นที่จะมีคน j คน ในระบบ

$P_j = \rho^j (1 - \rho)$; $j = 0,1,2,3,\ldots\ldots$

4. จำนวนคนโดยเฉลี่ยในแถวคอย

$L_q = \lambda^2 / u (u - \lambda)$

5. จำนวนคนในระบบโดยเฉลี่ย

$L_s = \lambda / (u - \lambda)$

6. เวลาที่ใช้ในการคอยโดยเฉลี่ย

$W_q = \lambda / (u - \lambda) u$

7. เวลาในระบบโดยเฉลี่ย

$W_s = 1 / (u - \lambda)$

2. ระบบแถวคอยแบบ (M/M/c) : (G.D./∞/∞)

ระบบแถวคอยแบบนี้มีรูปแบบการเข้ามารับบริการมีการแจกแจงแบบปัวซอง ส่วนเวลาการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียล ช่องทางการให้บริการ มี c ช่องทางการให้บริการกฎของคิวหรือระเบียบการให้บริการเป็นแบบทั่วๆไป (G.D.) จำนวนลูกค้าที่มากที่สุดในระบบและประชากรมีได้ไม่จำกัด

สูตรที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยแบบนี้มีดังต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่ระบบจะไม่ว่างหรือความสามารถในการทำงานของระบบ กรณีนี้ค่า $\rho = a/c$ เมื่อ $a = \lambda/u$ = offer load (offer load หมายถึงค่าเฉลี่ยของจำนวนความต้องการใช้บริการในระหว่างเวลาบริการ $1/u$)

ρ = traffic intensity เป็นตัววัดประสิทธิภาพในการทำงานของระบบแถวคอย

2. จำนวนคนโดยเฉลี่ยในแถวคอย

$$L_q = \frac{\lambda u (\lambda/u)^c}{(c-1)!\,(cu-\lambda)} P_o$$

3. จำนวนคนในระบบโดยเฉลี่ย

$$L_s = L_q + \rho$$

4. เวลาที่ใช้ในการคอยโดยเฉลี่ย

$$W_q = L_q/\lambda$$

5. เวลาในระบบโดยเฉลี่ย

$$W_s = L_s/\lambda$$

6. ความน่าจะเป็นที่จะมีคน j คน อยู่ในระบบ

$$P_j = \begin{cases} \dfrac{a}{j!} P_o & j = 0,1,2,3,\ldots,c \\ \dfrac{a}{c!\,c^{(j-c)}} P_o & j = c,c+1,c+2,\ldots\ldots \end{cases}$$

7. ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

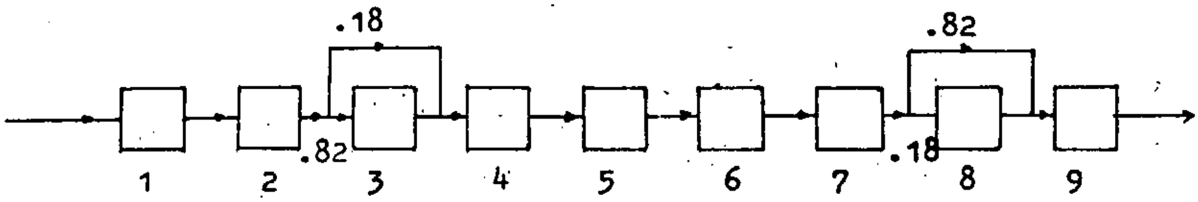
$$P_o = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{(c-1)!\,(c-a)} \right]^{-1}$$

นอกจากนี้ก็มีรูปแบบแถวคอยแบบอื่นๆ อีกมากมายซึ่งยุ่งยากสลับซับซ้อนกว่าระบบที่กล่าวมา เช่น ($M^b/M/1$):(G.D./∞/∞) หมายถึงการเข้ามารับบริการจะมาแบบกลุ่ม กลุ่มละ b คน ส่วนลักษณะอื่นก็เหมือนเดิม การคำนวณค่าลักษณะการดำเนินงานก็จะยากกว่าระบบที่ผ่านมา

3. <u>ระบบข่ายงานของระบบแถวคอยแบบปัวซอง</u> (**Network of Poisson Queue**)

ระบบข่ายงานของระบบแถวคอยนี้มีลักษณะการดำเนินงานแตกต่างไปจากระบบแถวคอยที่ผ่านมาโดยจะมีความน่าจะเป็นมาเกี่ยวข้องในการคำนวณค่าลักษณะ-การดำเนินงานของระบบข่ายงานของแถวคอย ระบบข่ายงานของแถวคอยอาจมีรูปแบบการเข้ามารับบริการและการจากไปแจกแจงเป็นปัวซอง (ในแต่ละสถานีบริการ) แต่ถ้ารูปแบบการเข้ามารับบริการและการจากไปไม่มีรูปแบบดังกล่าว การวิเคราะห์ระบบจะยุ่งยากซับซ้อนมาก ดังเช่นการวิจัยครั้งนี้ระบบการลงทะเบียนวิชาเรียนของนิสิตบัณฑิตวิทยาลัยมีลักษณะของระบบแถวคอยเป็นแบบข่ายงานดังรูปที่ 2.5 ซึ่งมีรูปแบบการเข้ามารับบริการเป็นแบบปัวซองแต่การจากไปนั้นไม่มีรูปแบบการแจกแจงเป็นแบบปัวซอง

ลักษณะของระบบข่ายงานมีลักษณะของการทำงานโดยที่งานแต่ละงานที่มาสู่ระบบจะต้องผ่านหลายขั้นตอนของการให้บริการจึงจะสิ้นสุดการรับบริการ การรับ-บริการอาจรับบริการตามลำดับขั้นตอนหรืออาจมีการข้ามขั้นตอนไปบ้าง ตัวอย่างของระบบข่ายงานที่เห็นได้ เช่น การเดินเรื่อง

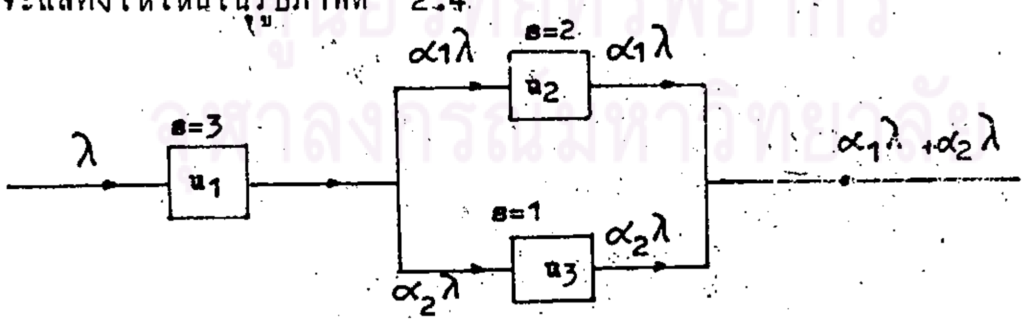


<u>รูปที่ 2.3</u> แสดงลักษณะข่ายงานของระบบการลงทะเบียนวิชาเรียน

จากรูปที่ 2.3 ที่ขั้นตอนที่ 3 ของการลงทะเบียนวิชาเรียนเมื่อเสร็จสิ้นการรับบริการที่ขั้นตอนที่ 2 มีนิสิตบางคนจะข้ามไปที่ขั้นตอนที่ 4 เลย และความน่าจะเป็นที่จะเข้าสู่ขั้นตอนที่ 3 เท่ากับ .82 (82 %) ส่วนในขั้นตอนที่ 8 นั้นมีความน่าจะเป็นที่นิสิตจะเข้าไปรับบริการเท่ากับ .18(18%) (รายละเอียดในบทที่ 3 หัวข้อ 3.1)

รูปแบบของลักษณะระบบข่ายงานที่เป็นแบบปัวซอง

การรับบริการของระบบข่ายงานนี้จะมีลักษณะแตกต่างไปจากระบบงานทั่วๆไป โดยระบบข่ายงานนี้จะต้องผ่านการรับบริการหลายสถานีบริการแต่ละสถานีมีจำนวนเจ้าหน้าที่ต่างๆกัน สำหรับระบบข่ายงานที่เป็นแบบปัวซองนี้จะมีการเข้ามารับบริการด้วยอัตราเฉลี่ย ที่มีการแจกแจงแบบปัวซองและเวลาการให้บริการแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียล จะได้ว่าการออกจากสถานีบริการแห่งนั้นด้วยอัตราเฉลี่ยที่มีการแจกแจงเป็นปัวซองด้วยเช่นกัน เพื่อที่จะเข้าใจระบบข่ายงานแบบปัวซองดีขึ้นจะแสดงให้เห็นในรูปภาพที่ 2.4



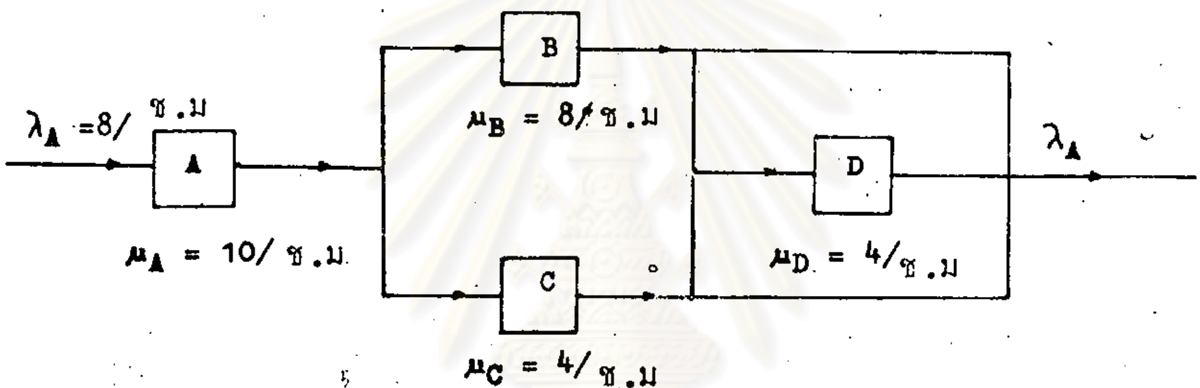
<u>รูปภาพที่ 2.4</u> แสดงลักษณะระบบข่ายงานแบบปัวซอง

จากรูปภาพที่ 2.4 จะเห็นได้ว่าการเข้ามารับบริการที่สถานีบริการที่ 1 ที่มีระบบคิวแบบ (M/M/3):(GD/∞/∞) ด้วยอัตราเฉลี่ย λ ที่มีการแจกแจงแบบปัวซอง เวลาการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วยอัตราเฉลี่ย μ_1 จะได้ว่าการออกจากสถานีบริการที่ 1 ด้วยอัตราเฉลี่ย λ ที่มีการแจกแจงแบบปัวซอง จากนั้นก็จะเข้าสู่สถานีบริการที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ α_1 และจะเข้าสู่สถานีบริการที่ 3 ด้วยความน่าจะเป็น α_2 ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) การเข้าสู่สถานีบริการที่ 2 มีระบบคิวแบบ (M/M/2):(GD/∞/∞) ด้วยอัตราเฉลี่ย $\alpha_1\lambda$ ที่มีการแจกแจงแบบปัวซอง การให้บริการด้วยอัตราเฉลี่ย μ_2 ที่มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลจะได้ว่าการออกจากสถานีบริการที่ 2 ก็ออกมาด้วยอัตราเฉลี่ย $\alpha_1\lambda$ ด้วยในทำนองเดียวกันที่สถานีที่ 3 มีรูปแบบคิวแบบ (M/M/1) : (GD/∞/∞) โดยมีอัตราการเข้ามารับบริการด้วยอัตราเฉลี่ย $\alpha_2\lambda$ บริการด้วยอัตราเฉลี่ย μ_3 ซึ่งมีการแจกแจงแบบปัวซองและแบบเอกซ์โปเนนเชียลตามลำดับ ส่วนอัตราการออกจากสถานีบริการที่ 3 ด้วยอัตราเฉลี่ย $\alpha_3\lambda$ ที่มีการแจกแจงแบบปัวซองด้วย

ตัวอย่างที่นำเอาไปใช้ได้เช่น ในการบริการห้องสมุดซึ่งมีบริการสั่งจองหนังสือผู้สั่งจองจะมีใบเสนอความต้องการส่งไปยังนาย A ใบเสนอความต้องการที่ส่งไปยังนาย A จะแยกออกเป็น 2 ส่วน คือ ใบเสนอความต้องการวารสารและด้านตำราเรียน ใบเสนอความต้องการที่เป็นตำราเรียนจะส่งไปยังนาย B ถ้าใบเสนอความต้องการเป็นวารสารจะส่งไปยังนาย C นาย B และนาย C จะต้องตรวจสอบใบเสนอความต้องการ ถ้าปรากฏว่าหนังสือมีอยู่ในห้องสมุดอยู่แล้วก็จะงดการสั่งซื้อ (คือออกจากระบบไป) แต่ถ้าหนังสือไม่มีในห้องสมุด นาย B และนาย C ก็จะส่งใบเสนอความต้องการต่อไปยังนาย D จากการสำรวจที่ผ่านๆมานั้นทางห้องสมุดสำรวจได้ว่า ความน่าจะเป็นที่นิสิตจะเสนอความต้องการสั่งซื้อตำราด้วยความน่าจะเป็น .70 (70%) และจากการสำรวจที่ผ่านมาเช่นกันจะพบว่าความน่าจะเป็นที่หนังสือและวารสารจะมีในห้องสมุดอยู่แล้วแต่นิสิตไปสั่งจองด้วยความน่าจะเป็น .60 (60%)

ระบบแถวคอยแบบข่ายงานนี้มีรูปแบบการเข้ามารับบริการที่สถานีบริการแรกเป็นแบบปัวซองมาด้วยอัตรา 8 ฉบับ/ช.มและเวลาการให้บริการของ A ,B C , D มีอัตราการให้บริการที่ นาย A ได้ 10 ฉบับ/ช.ม นายB ให้บริการได้ 8 ฉบับ/ช.ม นายC ให้บริการได้ 4 ฉบับ/ช.มและนายD บริการได้ 4 ฉบับ/ช.ม

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์จะนำมาวาดเป็นรูปข่ายงานได้ดังรูปที่ 2.5



<u>รูปภาพที่ 2.5</u> แสดงรูปแบบข่ายงานของแถวคอยแบบปัวซอง

จากรูปที่ 2.5 จะเห็นได้ว่า อัตราการเข้ามาที่สถานีบริการแรก(นาย A) ด้วยอัตรา 8 ฉบับ/ช.ม

อัตราการเข้ามาที่สถานีบริการที่ 2 คือ λ_B = ความน่าจะเป็น .7คูณกับ λ_A

$= (.7)\ 8$

$= 5.6$ ฉบับ/ช.ม

อัตราการเข้ามาที่สถานีบริการที่ 3 คือ $\lambda_C = (.3)\ 8$

$= 2.4$ ฉบับ/ช.ม

ส่วนอัตราการเข้ามาที่สถานีบริการ D นั้นหาได้จากการที่เอา อัตราการ-ออกจากระบบเท่า $\lambda_B + \lambda_C$ คูณด้วยความน่าจะเป็นที่ใบสั่งซื้อจะถูกส่งไปยังนาย D .

$$\lambda_D = (5.6 - 2.4)\ 0.4$$

$$= 3.2 \text{ ฉบับ / ช.ม}$$

เมื่อเราหาอัตราการเข้ามารับบริการของแต่ละสถานีบริการได้เรียบร้อยแล้วก็จะทำให้ได้ค่าลักษณะการดำเนินงานต่างๆได้ดังต่อไปนี้

ค่าลักษณะการดำเนินงาน	A	B	C	D
L_s	4	2.33	1.5	4
L_q	3.2	1.633	0.9	3.2
W_s	0.5	0.4166	0.625	1.25
W_q	0.4	0.2916	0.375	1.00
P_o	0.2	0.3	0.4	0.2

ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีเอกสารเข้ามาเลยทั้งระบบ

$$P_o = P_{Ao} \cdot P_{Bo} \cdot P_{Co} \cdot P_{Do}$$

$$= (1 - \rho_A) \cdot (1 - \rho_B) \cdot (1 - \rho_C) \cdot (1 - \rho_D)$$

$$= 0.0048$$

จำนวนใบเสนอความต้องการในระบบโดยเฉลี่ย

$$L_s = L_A + L_B + L_C + L_D$$

$$= 4 + 2.33 + 1.5 + 4$$

$$= 11.833 \text{ ฉบับ}$$

เวลาที่คาดหวังในระบบ(**Expected Time in System**)

$$= 0.7(W_A + W_B + W_D) + 0.3(W_A + W_C + W_D)$$

$$= 0.7(0.5 + 0.4166 + 1.25) + 0.3(0.625 + 1.25)$$

$$= 2.229 \text{ ช.ม}$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าระบบข่ายงานของแถวคอยแบบปัวซองจะมีการวิเคราะห์ที่สะดวกก็ต่อเมื่อมีรูปแบบการเข้ามารับบริการเป็นแบบปัวซองและเวลาการให้บริการทุกสถานีเป็นแบบเอกซโปเนนเชียล แต่ในการทำวิจัยนี้มีรูปแบบการเข้ามารับบริการเป็นแบบปัวซองที่สถานีบริการแรก ส่วนเวลาการให้บริการที่สถานีบริการต่างๆนั้นไม่มีรูปแบบการแจกแจงเป็นแบบเอกซโปเนนเชียลหรือแบบอื่นๆที่กล่าวผ่านมา การคำนวณโดยใช้ทฤษฎีแถวคอยจึงทำไม่ได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำเอาเทคนิคการจำลองแบบมาช่วยในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยแบบข่ายงานนี้

2.2 ทฤษฎีการจำลองแบบ

2.2.1 ความหมายของการจำลองแบบ

การจำลองแบบ (**Simulation**) เป็นแขนงหนึ่งของสาขาวิชาการวิจัย–ดำเนินงาน(**Operations Research**) การจำลองแบบกล่าวได้ว่าเป็นเทคนิคที่มีขีดความสามารถสูง เทคนิคหนึ่งที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาต่างๆได้อย่างกว้างขวาง ตัวอย่างของความสำเร็จของการนำเทคนิคการจำลองแบบไปใช้แก้ปัญหาต่างๆเช่น ระบบโทรศัพท์, ระบบสายผลิตในโรงงาน, ระบบคอมพิวเตอร์(**Time Sharing**) ระบบงานในเหมืองแร่ และการจัดตารางผลิตเป็นต้น

ความหมายของการจำลองแบบหมายถึง การทดลอง(**Experiment**) ตัวแบบ (**Model**) ของระบบที่จำลองขึ้นเพื่อศึกษาพฤติกรรม(**Behavior**) หรือสถานการณ์ (**Phenomena**) ของระบบหรือยุทธวิธีการของระบบ กล่าวสั้นๆ

ได้ว่า การจำลองแบบคือ เทคนิคการแก้ปัญหา ด้วยวิธีการทดลอง(**Experiment Problem-Solving Technique**)

สาเหตุที่ต้องใช้เทคนิคการจำลองแบบ อาจเนื่องมาจากเหตุหลายประการดังต่อไปนี้

– เนื่องจากความอยากรู้เหตุการณ์ในอนาคต เช่นการส่งมนุษย์ไปกับยานอวกาศ ครั้งแรกไม่มีข้อมูลเพียงพอหรือไม่มีเลย ในการจำลองแบบจะทำให้ได้ข้อมูลต่างๆออกมา ซึ่งผลการทดลองนี้จะไม่มีผลกระทบต่างๆที่จะเกิดกับนักบินอวกาศคล้ายๆกับควบคุมตัวแปรต่างๆที่ไม่ต้องการได้ ถ้าไปทำการทดลองจริงก็จะต้องเสียค่าใช้จ่ายสูงมากและอาจจะต้องเสียชีวิตมนุษย์ด้วย

– ระบบที่ทำการศึกษามีองค์ประกอบต่างๆทั้งภายในและภายนอกที่เกี่ยวข้องกับระบบอาจมีความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนมากเกินไปจนไม่อาจสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ (**Mathematical Model**) ให้สามารถที่จะหาค่าตอบได้โดยใช้วิธีวิเคราะห์ (**Analytical Model**) เช่นในการวิจัยครั้งนี้มีระบบแถวคอย(**Queueing System**) แบบมีหลายสถานีบริการ (ขั้นตอน) เป็น **Multi-Stage** เรียงกันอยู่ในลักษณะอนุกรม (**Series**) และขนาน (**Parallel**) ดังนั้นในการที่จะใช้วิธีวิเคราะห์ (**Analytical Method**) ของทฤษฎีคิวมาวิเคราะห์นั้นทำได้ยากมาก จึงนำเอาเทคนิคการจำลองแบบมาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหานี้

– ในกรณีที่สร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์(**Mathematical Model**) มาอธิบายระบบหรือปัญหา ที่สนใจได้ แต่อาจไม่สามารถหาค่าตอบจากตัวแบบนั้นได้ด้วยวิธีวิเคราะห์โดยตรงก็จะนำเอาเทคนิคการจำลองแบบมาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหานี้ได้

นอกจากนี้เหตุผลต่างๆที่กล่าวข้างต้นยังมีเหตุผลอื่นๆอีกเช่น วิธีการจำลองแบบสามารถที่จะทำการศึกษาถึงผลกระทบหรือความสัมพันธ์ที่สลับซับซ้อนขององค์ประกอบภายในระบบได้ รายละเอียดของระบบที่ได้จากการจำลองแบบทำให้เข้าใจในระบบได้ดีขึ้นและอาจได้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงระบบได้ดีกว่าซึ่งวิธีอื่นอาจจะ

ทำไม่ได้

2.2.2 การผลิตเลขสุ่ม (**Generating Random Number**)

โดยทั่วไปการจำลองแบบขึ้นอยู่กับคุณภาพของตัวเลขสุ่มและอัลกอริทึม (**Algorithm**) ที่ใช้เป็นส่วนใหญ่ การผลิตเลขสุ่มจึงมีความสำคัญมากในการจำลองแบบปัญหา

ในการจำลองแบบปัญหาเมื่อเราตรวจสอบเหตุการณ์จริงว่าการแจกแจงของข้อมูลมีการแจกแจงใกล้เคียงกับรูปแบบการแจกแจงแบบมาตราฐานแบบใดก็จะทำการผลิตเลขสุ่มขึ้นโดยอาศัยพารามิเตอร์ที่สำคัญซึ่งได้มาจากข้อมูลของเหตุการณ์จริงและการแจกแจงมาตราฐานโดยวิธีการนี้เราจะได้เลขสุ่มขึ้นชุดหนึ่ง ซึ่งถือได้ว่าเป็นตัวแทนของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริงและเลขสุ่มเหล่านี้คือ ตัวเลขที่ใช้ในการจำลองแบบปัญหา

สำหรับวิธีการผลิตเลขสุ่มนั้นมีหลายวิธีและที่นำเอามาใช้ในงานคอมพิวเตอร์ในการจำลองแบบคือ การผลิตเลขสุ่มจากความสัมพันธ์ซ้ำซากโดยอาศัยเลขปัจจุบันหรือกลุ่มตัวเลขในอดีต ดังนั้นตัวเลขสุ่มนี้ไม่ใช่ตัวเลขสุ่มที่แท้จริง เรียกว่าเลขสุ่มคล้าย (**Pseudo-random Number**)

เลขสุ่มคล้ายที่สำคัญคือเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ(**Uniform Distribution**)ซึ่งสามารถนำไปผลิตเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบอื่นๆได้ เช่นแบบเอกซ์โปเนนเชียล, แบบปกติ ฯลฯ และจะพบวิธีการเหล่านี้ได้ในหนังสือเกี่ยวกับการจำลองแบบในส่วนของการผลิตเลขสุ่ม

สำหรับการวิจัยครั้งนี้จะผลิตเลขสุ่มโดยอาศัยโปรแกรม **GPSS** 1100 ซึ่งมีวิธีการผลิตโดยย่อดังนี้

วิธีการผลิตเลขสุ่มโดยโปรแกรม GPSS 1100 นี้เรียกว่า วิธีลิเนียร์และมิคลิเนียร์คอนกรูเอ็นเชียล (**Linear or Mix-linear Congruential Method**)

สมการที่ใช้ในการผลิตเลขสุ่มคือ

$$X_{n+1} = m X_n + I \pmod{2^{35}} \ ; \ n=0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

โดยที่ m = ตัวคูณ (multiplier) , I = ค่าส่วนเพิ่ม (increment)

และ X_0 = ค่าเริ่มต้น (Seed)

ถ้า $I = 0$ การผลิตเลขสุ่มนี้จะเป็นวิธีลิเนียร์คอนกรูเอ็นเชียล

$I \neq 0$ การผลิตเลขสุ่มชุดนี้จะเป็นวิธีมิคลิเนียร์คอนกรูเอ็นเชียล

ค่าส่วนเพิ่มและค่าเริ่มต้นจะเป็นเลขจำนวนเต็มซึ่งมีค่าเป็นไปได้อยู่ในช่วงอันตรภาค $(0, 2^{35})$ ส่วนค่าตัวคูณจะเป็นเลขคี่ที่เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าที่เป็นไปได้อยู่ในช่วง $(10^{10}, 2^{35})$ สำหรับรายละเอียดต่างๆจะพบได้ใน **Manaul GPSS-1100**

<u>ตัวอย่างของการจำลองแบบระบบแถวคอยแบบง่าย (M/M/1):(FCFS/∞/∞)</u>

สัญญลักษณ์ที่ใช้ในการจำลองแบบ

t = เวลาปัจจุบัน (**Present Time**)

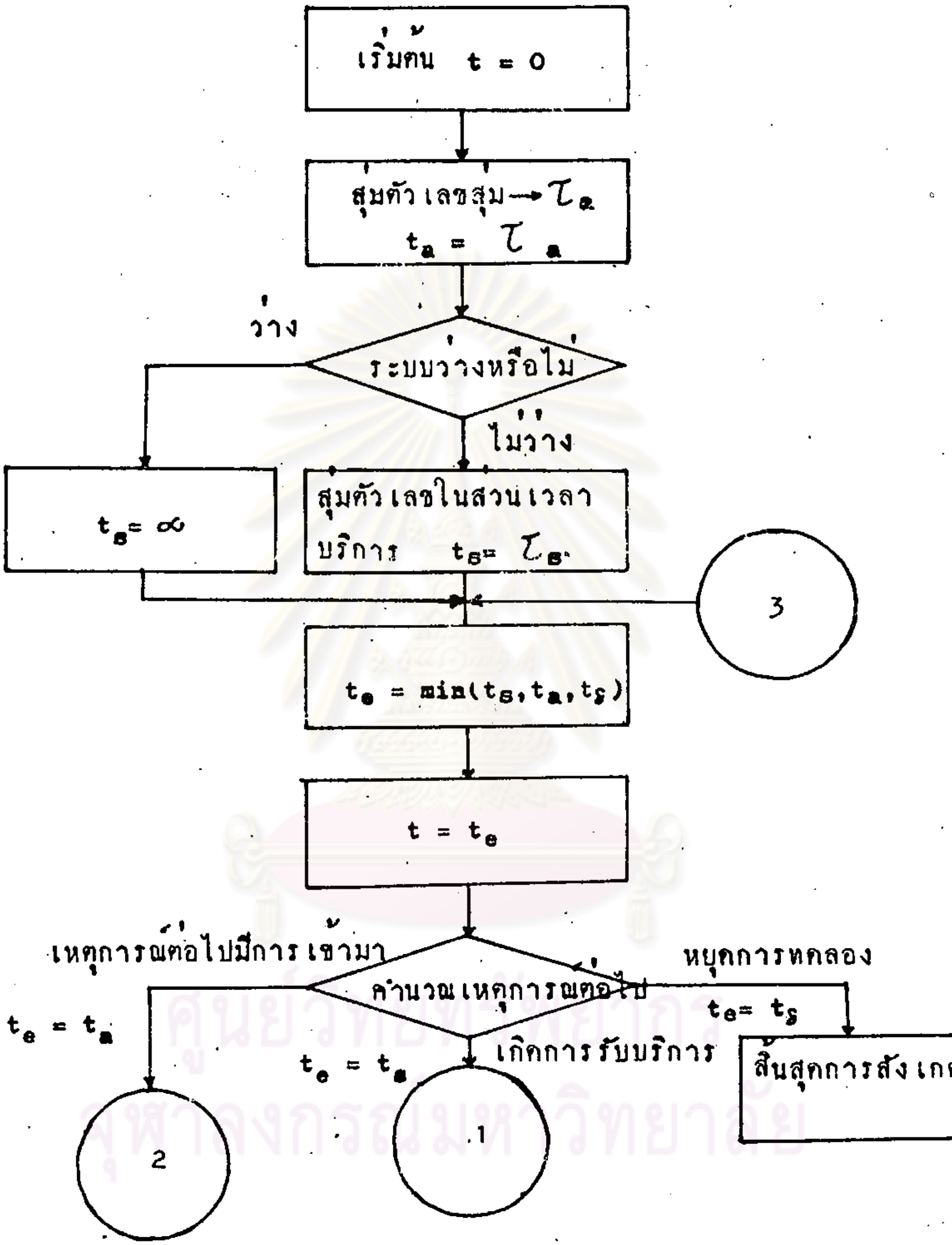
t_g = เวลาที่จะสิ้นสุดการรับบริการ (**Terminate Time**)

τ_s = เวลาที่ใช้ในการให้บริการ (**Service Time**)

t_s = เวลาที่ใช้ในการให้บริการครั้งต่อไปโดยวัดจาก $t=0$ มีค่าเท่ากับ $\tau_s + t$

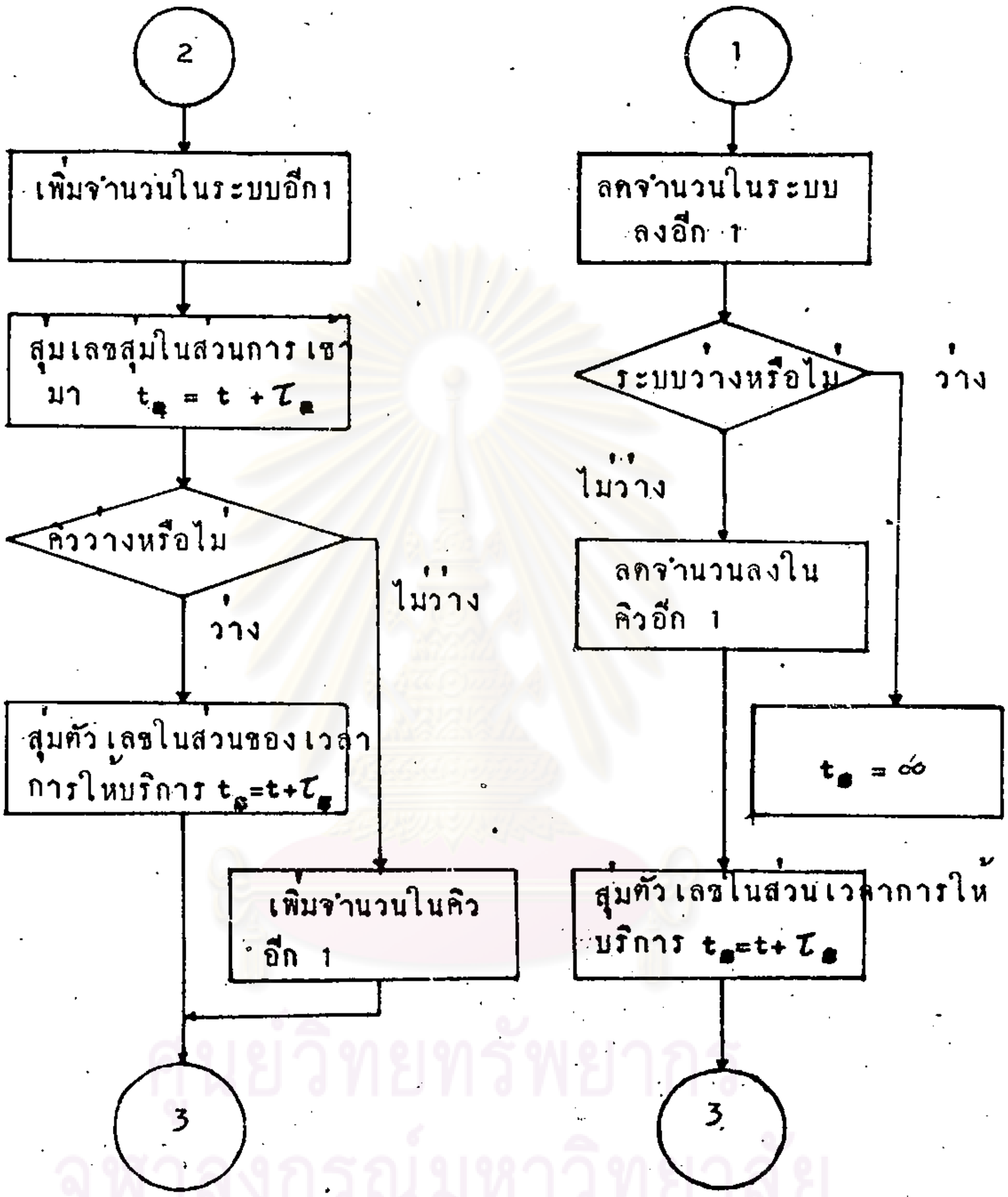
τ_a = เวลาจนกระทั่งคนต่อมาเข้ามา (**Time Until Next Arrival**)

t_a = เวลาที่คนต่อไปจะเข้ามาวัดจาก $t = 0$ มีค่าเท่ากับ $t + \tau_a$



รูปภาพที่ 2.6 **Flowchart** ของเหตุการณ์ในระบบการจำลองแถวคอยแบบ 1 ช่องทางการให้บริการ

I16026421


2
เพิ่มจำนวนในระบบอีก 1
สุ่มเลขสุ่มในส่วนการเข้ามา $t_a = t + \tau_a$
คิวว่างหรือไม่
ว่าง
ไม่ว่าง
สุ่มตัวเลขในส่วนของเวลาการให้บริการ $t_s = t + \tau_s$
เพิ่มจำนวนในคิวอีก 1
3
1
ลดจำนวนในระบบลงอีก 1
ระบบว่างหรือไม่
ว่าง
ไม่ว่าง
ลดจำนวนลงในคิวอีก 1
$t_s = \infty$
สุ่มตัวเลขในส่วนเวลาการให้บริการ $t_s = t + \tau_s$
3

รูปภาพที่ 2.6 ต่อ

t_e = เวลาเหตุการณ์ต่อไป

$= \min(t_s, t_a, t_g)$

ระบบแถวคอยแบบ (M/M/1):(FCFS/∞/∞)นี้มีลักษณะการเข้ามาแบบไม่จำกัด คือ เมื่อมีผู้มาใช้บริการแล้วก็จะมีคนต่อๆมารับบริการเรื่อยๆ ซึ่งลักษณะการทำงานของระบบการจำลองแบบดังรูปภาพที่ 2.6

จากรูปภาพที่ 2.6 จะเห็นได้ว่าระบบงานประกอบด้วยเวลาการเข้ามารับบริการ , เวลาที่ใช้ในการให้บริการและค่าบสุดท้ายของการจำลองแบบ

เพื่อความเข้าใจในตัวอย่างนี้ได้กำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้ดังนี้

i = เหตุการณ์ที่เราสนใจ ($i = 0,1,2,3, \ldots, m$)

N_{si} = จำนวนหน่วยในระบบที่เหตุการณ์ i

t_i = เวลาที่เกิดขึ้นที่เหตุการณ์ i

N_{qi} = จำนวนหน่วยในคิวที่เหตุการณ์ i

t_o = เป็นเวลาเริ่มต้น ($t_o = 0$)

$t_m = t_g$ = เวลาสุดท้ายของการจำลองแบบ

k = จำนวนผู้รับบริการทั้งหมดที่เข้าใช้บริการ

จากนั้นจะได้ค่าลักษณะการดำเนินงานของระบบแถวคอยดังนี้

จำนวนหน่วยในระบบโดยเฉลี่ย $= \frac{1}{t_m} \sum_{i=0}^{m-1} N_{si} (t_{i+1} - t_i)$

จำนวนหน่วยโดยเฉลี่ยในแถวคอย $= \frac{1}{t_m} \sum_{i=0}^{m-1} N_{qi} (t_{i+1} - t_i)$

เวลาในระบบโดยเฉลี่ย $= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m-1} N_{si} (t_{i+1} - t_i)$

เวลาที่ใช้ในการคอยโดยเฉลี่ย $= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m-1} N_{qi} (t_{i+1} - t_i)$

ต่อไปนี้จะขอนำเอาตัวเลขเข้ามาประกอบการอธิบาย โดยที่กำหนดให้อัตราการเข้ามารับบริการโดยเฉลี่ยเท่ากับ 10 หน่วย/ ปี และอัตราการให้บริการเท่ากับ 20 หน่วย/ ปี คาบเวลาการจำลองแบบ 1 ปี ($t_f = 1$) ดังนั้นเหตุการณ์แรก $t = 0$, $t_s = \infty$ (เพราะว่ายังไม่มีผู้เข้ามารับบริการ เวลาการให้บริการจึงยังไม่มี กำหนดให้เป็น ∞) ดังนั้น $t_e = \min(t_a, t_s, t_f) = t_a$

ส่วนเหตุการณ์อื่นจะพบได้ในตารางที่ 2.1

จากตารางที่ 2.1 จะได้ค่าลักษณะการดำเนินงานดังนี้

จำนวนหน่วยในระบบโดยเฉลี่ย $= \frac{1}{1.0}(1.16) = 1.16$

จำนวนหน่วยโดยเฉลี่ยในแถวคอย $= \frac{1}{1.00}(0.54) = 0.54$

เวลาในระบบโดยเฉลี่ย $= \frac{1}{10}(1.15) = 0.115$

เวลาที่ใช้ในการคอยโดยเฉลี่ย $= \frac{1}{10}(0.54) = 0.054$

ตารางที่ 2.1 แสดงการจำลองแบบของระบบแถวคอยแบบ M/M/1 สำหรับ 1 ปี

Event number i	t	Service			Arrival				Number in system, N_{si}	Number in queue, N_{qi}	$N_{si}(t_{i+1}-t_i)$	$N_{qi}(t_{i+1}-t_i)$
		Random number	τ_s	t_s	Random number	τ_a	t_a	$\min(t_s, t_a, t_f)$				
0	0.00	—	∞	∞	0.34	0.12	0.12	$t_a = 0.12$	0	0	0.00	0.00
1	0.12	0.77	0.01	0.13	0.43	0.08	0.20	$t_s = 0.13$	1	0	0.01	0.00
2	0.13	—	∞	∞			0.20	$t_a = 0.20$	0	0	0.00	0.00
3	0.20	0.40	0.05	0.25	0.22	0.15	0.35	$t_s = 0.25$	1	0	0.05	0.00
4	0.25	—	∞	∞			0.35	$t_a = 0.35$	0	0	0.00	0.00
5	0.35	0.04	0.16	0.51	0.12	0.21	0.56	$t_s = 0.51$	1	0	0.16	0.00
6	0.51	—	∞	∞			0.56	$t_a = 0.56$	0	0	0.00	0.00
7	0.56	0.02	0.19	0.75	0.88	0.01	0.57	$t_a = 0.57$	1	0	0.01	0.00
8	0.57			0.75	0.68	0.04	0.61	$t_a = 0.61$	2	1	0.08	0.04
9	0.61			0.75	0.20	0.16	0.77	$t_s = 0.75$	3	2	0.42	0.28
10	0.75	0.41	0.04	0.79			0.77	$t_a = 0.77$	2	1	0.04	0.02
11	0.77			0.79	0.88	0.01	0.78	$t_a = 0.78$	3	2	0.03	0.02
12	0.78			0.79	0.51	0.07	0.85	$t_s = 0.79$	4	3	0.04	0.03
13	0.79	0.70	0.02	0.81			0.85	$t_s = 0.81$	3	2	0.06	0.04
14	0.81	0.29	0.06	0.87			0.85	$t_a = 0.85$	2	1	0.08	0.04
15	0.85			0.87	0.26	0.13	0.98	$t_s = 0.87$	3	2	0.06	0.04
16	0.87	0.53	0.03	0.90			0.98	$t_s = 0.90$	2	1	0.06	0.03
17	0.90	0.48	0.04	0.94			0.98	$t_s = 0.94$	1	0	0.04	0.00
18	0.94	—	∞	∞			0.98	$t_a = 0.98$	0	0	0.00	0.00
19	0.98			∞	0.55	0.06	1.04	$t_f = 1.00$	1	0	0.02	0.00
20	1.00			∞			1.04		1	0	—	—

* For $\lambda = 10$, $\mu = 20$, $t_f = 1.00$.