บทที่ 5

การสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน

5.1 บทนำ

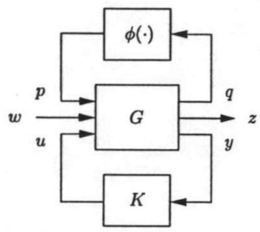
ในบทนี้จะใช้ผลจากการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนในบทที่แล้ว ในการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอนในเมทริกซ์พลวัต, เมทริกซ์สมรรถนะขาออกและเมทริกซ์สัญญาณออก ที่มีเงื่อนไขเซกเตอร์ ตัวควบคุมที่ได้มีอันดับเท่ากับระบบ เป้าหมายการควบคุมคือทำให้สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบมีค่าต่ำสุดเมื่อระบบมีความไม่แน่นอนอยู่ภายใต้เงื่อนไขเซกเตอร์ โดยหาตัวควบคุม K ที่ป้อนกลับแล้วทำให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณได้จากเงื่อนไขการวิเคราะห์สมรรถนะคงทนมีค่าต่ำสุด จากบทที่แล้วทำให้ทราบว่าความผิดพลาดที่เกิดจากการวัดทำให้เกิดความไม่แน่นอนในเมทริกซ์สัญญาณออกที่ได้จากการวัดและเมทริกซ์สมรรถนะขาออก ซึ่งความไม่แน่นอนดังกล่าวเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบและยังส่งผลถึงการสังเคราะห์ตัวควบคุมคงทน

เงื่อนไขในการคำนวณหาตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ซึ่งเป็นปัญหา NP แบบยาก ในวิทยานิพนธ์นี้จะประยุกต์ใช้หลักการของฮอมอโทปี (Richter และ De Carlo, 1983) [22] ในการหาคำตอบโดยเปลี่ยนปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ให้เป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยใช้การวนซ้ำระหว่างการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (Popov multiplier) และการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม จนกว่าค่าฟังก์ชันจุดประสงค์จะลู่เข้าสู่คำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้นี้จะเป็นคำตอบเฉพาะที่เท่านั้น และจากงานที่ผ่านมา [9, 10] พบว่าการลู่เข้าของคำตอบเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย §5.2 นำเสนอการกำหนดปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน §5.3 นำเสนอขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม ซึ่งประกอบไปด้วย 2 ขั้นตอนคือ §5.3.1 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ และ §5.3.2 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม นอกจากนี้ใน §5.3.3 ยังได้กล่าวถึงวิธีฮอมอโทปีและขั้นตอนการออกแบบ และ §5.4 เป็นการวิเคราะห์ผลที่ได้ และ §5.5 เป็นบทสรุป

5.2 กำหนดปัญหา

พิจารณาระบบ LTI ที่แทนความไม่แน่นอนด้วยการป้อนกลับด้วยฟังชันไม่เชิงเส้น อธิบายได้ด้วยระบบสมการ (5.1) และแสดงดังรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1: แผนภาพบล็อกสำหรับปัญหาสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w + B_u u \\
q &= C_q x \\
z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zu} u \\
y &= C_y x + D_{yp} p + D_{yw} w \\
p &= \phi(q) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1(q_1) \\ \vdots \\ \phi_{n_p}(q_{n_p}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

เมื่อ $x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ คือตัวแปรสถานะ, $w : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_w}$ คือสัญญาณรบกวนขาเข้า, $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_u}$ คือสัญญาณเข้า, $z : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_z}$ คือสัญญาณสมรรถนะขาออก, $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_y}$ คือสัญญาณออก, $q : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_p}$ และ $p : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_p}$ คือสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ϕ_i กำหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเซกเตอร์ $[0, l_i]$ นั่นคือ $\phi \in \Phi$ โดยที่

$$
\Phi := \left\{ \begin{array}{l} \phi : \mathbf{R}^{n_p} \to \mathbf{R}^{n_p},\ \phi(q) = \left[\phi_1(q_1), \ldots, \phi_{n_p}(q_{n_p})\right]^T, \\ 0 \le \phi_i(q_i)/q_i \le l_i,\ \phi_i(0) = 0 \end{array} \right\}
$$

เมื่อ $l = (l_1, \ldots, l_{n_p})$ เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตเซกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และกำหนดให้ $D_{qu} = 0$ เพื่อความง่ายในการวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวควบคุม

สำหรับระบบลูเรในรูปทั่วไปที่มีเงื่อนไขเซกเตอร์แตกต่างจากปัญหาที่กำหนด สามารถใช้การแปลงวงรอบ ในการแปลงขอบเขตเซกเตอร์ให้อยู่ในรูปเดียวกับปัญหาที่กำหนดได้ ดังรายละเอียดใน §4.3

ในขั้นแรกพิจารณาการป้อนกลับของระบบลูเร (5.1) ผ่านตัวควบคุม K ที่ถูกกำหนดโดย

$$
K = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0 \end{array} \right] \tag{5.2}
$$

หรือเขียนในรูปสมการสถานะได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\dot{x_c} &= A_c x_c + B_c y \\
u &= C_c x_c
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

จัดรูปใหม่โดยกำหนดให้ $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & x_c^T \end{bmatrix}^T$ จะได้

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_p p + \tilde{B}_w w \\ q &= \tilde{C}_q \tilde{x} \\ z &= \tilde{C}_z \tilde{x} + \tilde{D}_{zp} p \\ p &= \phi(q) \end{aligned} \tag{5.4}$$

โดยที่

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_p & \tilde{B}_w \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_{qp} & \tilde{D}_{qw} \\ \hline \tilde{C}_z & \tilde{D}_{zp} & \tilde{D}_{zw} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c|c} A & B_u C_c & B_p & B_w \\ B_c C_y & A_c + B_c D_{yu} C_c & B_c D_{yp} & B_c D_{yw} \\ \hline C_q & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_z & D_{zu} C_c & D_{zp} & 0 \end{array}\right]$$

สังเกตได้ว่าตัวระบบป้อนกลับนี้มีทั้งผลจากความไม่แน่นอนในสัญญาณออก D_{yp} ที่เกิดจากความผิดพลาดในการวัดและผลจากความไม่แน่นอนในเมทริกซ์สมรรถนะขาออกในเมทริกซ์ D_{zp} เราพบว่าปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเร (5.1) คือการกำหนดให้ $\phi \in \Phi$ เมื่อ l เป็นค่าที่กำหนด และหาตัวควบคุม K ที่กำหนดโดย (5.2) ที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร (5.4) มีค่าต่ำที่สุด นั่นคือการประยุกต์ใช้การวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนกับระบบ (5.4) นั่นเอง ดังนั้นปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนคือการหาค่าเมทริกซ์ A_c, B_c, และ C_c ที่ทำให้ค่า $\gamma_2^2 \geq \mathcal{J}_2^2$ โดยที่ γ^2 มีค่าต่ำสุดดังปัญหาต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{Tr}\ \tilde{B}_w^T[\tilde{P} + \tilde{C}_q^T L \Lambda \tilde{C}_q]\tilde{B}_w \\ \text{subject to} & T \geq 0,\ \Lambda \geq 0\ ,\ P > 0, \text{ และ} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} + \tilde{C}_z^T\tilde{C}_z & (\cdot)_{2,1}^T \\ \tilde{B}_p^T\tilde{P} + \Lambda\tilde{C}_q^T\tilde{A} + TL\tilde{C}_q^T + \tilde{D}_{zp}^T\tilde{C}_z & \Lambda\tilde{C}_q\tilde{B}_p + \tilde{B}_p^T\tilde{C}_q^T\Lambda^T + \tilde{D}_{zp}^T\tilde{D}_{zp} - 2T \end{bmatrix} \leq 0 \tag{5.5}$$

จากการสังเกตพบว่าฟังก์ชันจุดประสงค์เชิงเส้นที่ต้องการหาค่าต่ำสุดและเงื่อนไขอสมการใน (5.5) เป็นฟังก์ชันของ $(\tilde{P}, \Lambda, T)$ และ (A_c, B_c, C_c) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุม นอกจากนั้นยังมีพจน์ที่เป็นผลคูณของตัวแปรทั้งสองกลุ่มดังกล่าวทำให้ทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์เชิงเส้นและเงื่อนไขอสมการใน (5.5) เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ซึ่งเป็นปัญหา NP แบบยาก ในกรณีนี้เราจะแก้ปัญหานี้โดยใช้วิธีฮอมอโทปี คือการแบ่งปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ออกเป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังที่จะนำเสนอในตอนถัดไป §5.3

ข้อสังเกต 5.1 *ถ้ากำหนดพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) ปัญหา (5.5) จะกลายเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และสามารถคำนวณหาค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรที่ป้อนกลับด้วยตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) จากการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (5.5)*

5.3 ขั้นตอนการออกแบบ

เนื่องจากปัญหาการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ และเป็นที่ทราบกันว่าปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่เป็นปัญหา NP แบบยาก ในวิทยานิพนธ์นี้จะแก้ปัญหา (5.5) โดยการแทนเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ ด้วยเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองเงื่อนไขและใช้การวนซ้ำจนกว่าจะได้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ต่ำสุดในย่าน

จากการสังเกตพบว่าเราสามารถแบ่งตัวแปรได้เป็นสองกลุ่ม คือ ตัวคูณโปปอฟ (Λ, T) และพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) เมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่จะได้ว่าปัญหา (5.5) จะเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นบน $(\tilde{P}, \Lambda, T)$ และในกรณีที่กำหนดให้ตัวคูณโปปอฟ (Λ, T) มีค่าคงที่จะได้ว่าปัญหา (5.5) สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นบนตัวแปร $(\tilde{P}, A_c, B_c, C_c)$ ได้

วิธีการออกแบบตัวควบคุมที่จะนำเสนอจะใช้บทตั้ง 2.1 (Elimination Lemma) ในการกำจัดตัวแปร A_c และจัดรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพื่อให้การลู่เข้าของคำตอบเร็วขึ้น และใช้การวนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหา นั่นคือการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ §5.3.1 และการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม §5.3.2 จนกว่าค่าฟังก์ชันจุดประสงค์จะลู่เข้าสู่ค่าต่ำสุดเฉพาะที่ ดังสรุปขั้นตอนวิธีใน §5.3.3

5.3.1 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ

กำหนดให้ (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่ ปัญหา (5.5) จะกลายเป็นปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนของระบบลูเร (5.1) เมื่อป้อนกลับด้วยตัวควบคุม (5.2) ซึ่งเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

กำหนดให้เมทริกซ์ $\tilde{P}$ เป็นเมทริกซ์บล็อกดังนี้

$$\tilde{P} := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

แทนค่าลงในฟังก์ชันจุดประสงค์ใน (5.5) จะได้

$$\mathbf{Tr}\left[B_w^T(P_{11} + C_q^T L\Lambda C_q)B_w + B_w^T P_{12} B_c D_{yw} + D_{yw}^T B_c^T P_{12}^T B_w + D_{yw}^T B_c^T P_{22} B_c D_{yw}\right] \tag{5.7}$$

และเงื่อนไขอสมการใน (5.5) เป็น

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} A^T P_{11} + P_{11} A + C_y^T B_c^T P_{12}^T \\ +P_{12} B_c C_y + C_z^T C_z \end{matrix} & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T \\ \hline \begin{matrix} C_c^T B_u^T P_{11} + A_c^T P_{12}^T \\ +P_{12}^T A + P_{22} B_c C_y \end{matrix} & \begin{matrix} C_c^T B_u^T P_{12} + P_{12}^T B_u C_c \\ +C_c^T D_{zu}^T D_{zu} C_c \end{matrix} & (\cdot)_{3,2}^T \\ \hline \begin{matrix} B_p^T P_{11} + D_{yp}^T B_c^T P_{12}^T \\ +\Lambda C_q A + T C_q + D_{zp}^T C_z \end{matrix} & \begin{matrix} B_p^T P_{12} + D_{yp}^T B_c^T P_{22} \\ +D_{zp}^T D_{zu} C_c + \Lambda C_q B_u C_c \end{matrix} & \begin{matrix} \Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda \\ D_{zp}^T D_{zp} - 2T \end{matrix} \end{array}\right] \leq 0 \tag{5.8}$$

จะได้ว่าเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) จะหาค่าตัวคูณโปปอฟ (Λ, T) ได้จากการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (5.7) \\ \text{subject to} & (5.8),\ \tilde{P} > 0,\ \Lambda \geq 0,\ T \geq 0 \end{array} \tag{5.9}$$

5.3.2 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม

จากการสังเกตเงื่อนไขอสมการในปัญหา (5.5) พบว่าเมทริกซ์ A_c ปรากฏอยู่เพียงตำแหน่งเดียวคือใน $\tilde{A}$ ดังนั้นเราสามารถลดจำนวนตัวแปรโดยการกำจัด A_c ออกจากอสมการได้โดยกำหนดให้

$$\tilde{A}_0 := \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & B_c D_{yu} C_c \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \tilde{J} := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\tilde{A}$ สามารถเขียนได้เป็น $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \tilde{J} A_c \tilde{J}^T$, และเงื่อนไขอสมการในปัญหา (5.5) จัดรูปได้เป็น

$$\tilde{G} + V A_c^T U^T + U A_c V^T < 0 \tag{5.10}$$

โดยที่ $\tilde{G}$, V, และ U มีค่าดังนี้

$$\tilde{G} := \begin{bmatrix} \tilde{A}_0^T \tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}_0 + \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z & (\cdot)_{2,1}^T \\ \tilde{B}_p^T \tilde{P} + \Lambda \tilde{C}_q^T \tilde{A} + TL\tilde{C}_q^T + \tilde{D}_{zp}^T \tilde{C}_z & \Lambda \tilde{C}_q \tilde{B}_p + \tilde{B}_p^T \tilde{C}_q^T \Lambda^T + \tilde{D}_{zp}^T \tilde{D}_{zp} - 2T \end{bmatrix} \leq 0 \tag{5.11}$$

$$V := \begin{bmatrix} \tilde{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad U := \begin{bmatrix} \tilde{P}\tilde{J} \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากบทตั้ง 2.1 (Elimination Lemma) จะได้ว่าอสมการ (5.10) เป็นจริงก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$V_\perp^T \tilde{G} V_\perp < 0 \tag{5.12}$$

$$U_\perp^T \tilde{G} U_\perp < 0 \tag{5.13}$$

โดยที่ $V_\perp$ และ $U_\perp$ คือส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ V และ U, กำหนดให้

$$V_\perp = \begin{bmatrix} \tilde{J}_\perp & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad U_\perp = \begin{bmatrix} \tilde{P}^{-1}\tilde{J}_\perp & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

กำหนดให้เมทริกซ์ $\tilde{P}$ และ $\tilde{Q}$ เป็น

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \tilde{Q} = \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$$

เมื่อ P_{11} และ Q_{11} เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และเมทริกซ์ Q_{12} มีความสัมพันธ์กับ P_{11}, Q_{11}, และ P_{12} โดย $Q_{12} = (I - Q_{11}P_{11})P_{12}^{-T}$, กำหนดให้ $Y := C_c Q_{12}^T$ และ $Z := P_{12}B_c$, จาก (5.12) จะได้

$$\begin{bmatrix} A^T P_{11} + P_{11}A + C_y^T Z^T + Z C_y + C_z^T C_z & (\cdot)_{2,1}^T \\ B_p^T P_{11} + D_{yp}^T Z^T + \Lambda C_q A + TLC_q + D_{zp}^T C_z & \Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda + D_{zp}^T D_{zp} - 2T \end{bmatrix} \leq 0 \tag{5.14}$$

และจาก (5.13)

$$\left[\begin{array}{c|c} Q_{11}A^T + AQ_{11} + Y^T B_u^T + B_u Y & (\cdot)^T_{2,1} \\ +(C_zQ_{11} + D_{zu}Y)^T(C_zQ_{11} + D_{zu}Y) & \\ \hline B_p^T + \Lambda C_q A Q_{11} + \Lambda C_q B_u Y & \Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda \\ +TLC_qQ_{11} + D_{zp}^T C_z Q_{11} & +D_{zp}^T D_{zp} - 2T \end{array}\right] < 0 \tag{5.15}$$

ใช้ส่วนเติมเต็มของชูร์ (Schur complement) อสมการ 5.15 เขียนใหม่ได้เป็น

$$\left[\begin{array}{c|c|c} Q_{11}A^T + AQ_{11} + Y^T B_u^T + B_u Y & (\cdot)^T_{2,1} & (\cdot)^T_{3,1} \\ \hline B_p^T + \Lambda C_q A Q_{11} + \Lambda C_q B_u Y & \Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda & 0 \\ +TLC_qQ_{11} + D_{zp}^T C_z Q_{11} & +D_{zp}^T D_{zp} - 2T & \\ \hline (C_zQ_{11} + D_{zu}Y) & 0 & -I \end{array}\right] < 0 \tag{5.16}$$

จากบทตั้ง 2.2 (Completion Lemma) สำหรับเมทริกซ์ $Q_{11} > 0$, $P_{11} \geq Q_{11}^{-1}$ เมทริกซ์บล็อกด้านล่างขวาขนาด $n \times n$ ของ $\tilde{P}$ และของ $\tilde{Q}$ จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์ $P_{22} = P_{12}^T(P_{11} - Q_{11}^{-1})^{-1}P_{12}$ และ $Q_{22} = Q_{12}^T(Q_{11} - P_{11}^{-1})^{-1}Q_{12}$, ถ้า $\tilde{P} > 0$ และ $\tilde{P}\tilde{Q} = I$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.17}$$

ดังนั้นเราจะได้อสมการเงื่อนไขทั้งสิ้น สามอสมการคือ (5.14), (5.16) และ (5.17) และพบว่าอสมการ (5.14) และ (5.17) อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้ สำหรับอสมการ (5.16) เป็น BMI โดยมีพจน์ผลคูณระหว่าง (Q, Y) ซึ่งเป็นตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม และ (Λ, T) ซึ่งเป็นตัวคูณโปปอฟ

ต่อไปเราจะพิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ในปัญหา (5.5) จากการแทนค่าโดยตรงจะได้

$$\mathbf{Tr}\begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} + C_q^T L \Lambda C_q & Z \\ Z^T & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

เมื่อมีเมทริกซ์สมมาตร $X \in \mathbf{R}^{n_y \times n_y}$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} X &\geq B_c^T P_{22} B_c \\ &\geq Z^T(P_{11} - Q_{11}^{-1})^{-1}Z \end{aligned} \tag{5.19}$$

ใช้ส่วนเติมเต็มของชูร์ อสมการ (5.19) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} X & Z^T & 0 \\ Z & P_{11} & I \\ 0 & I & Q_{11} \end{bmatrix} > 0 \tag{5.20}$$

จะสังเกตได้ว่าเงื่อนไขอสมการ (5.20) ครอบคลุมเงื่อนไขในอสมการ (5.17) ด้วย ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องพิจารณาอสมการ (5.17) อีก และจะได้ว่าเมื่อกำหนดให้ตัวคูณโปปอฟ (Λ, T) มีค่าคงที่จะหาค่าตัวแปรที่

เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม $(P_{11}, Q_{11}, X, Y, Z)$ ได้จากการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (5.18) \\ \text{subject to} & (5.14),\ (5.16),\ (5.20),\ \tilde{P} > 0 \end{array} \tag{5.21}$$

จากนั้นเราสามารถหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม K ได้จาก

$$B_c = P_{12}^{-1} Z \tag{5.22}$$

$$C_c = Y(I - P_{11}Q_{11})^{-1} P_{12} \tag{5.23}$$

เมื่อ P_{12} เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่สามารถหาตัวผกผันได้ เหตุผลที่เราสามารถเลือกเมทริกซ์ P_{12} ได้เพราะว่าตัวแปรสถานะของตัวควบคุม x_c สามารถเปลี่ยนพิกัด (coordinates) ได้นั่นเอง

และเมื่อเราทราบค่า $\tilde{P}$, Λ, T, B_c และ C_c ก็สามารถหาค่า A_c ที่สอดคล้องกับอสมการ (5.10) ได้ ซึ่งอาจจะพิจารณาเป็นปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น หรืออาจจะหา A_c จากวิธีวิเคราะห์ (analytical solution) ได้อีกวิธีหนึ่ง [9]

5.3.3 วิธีฮอมอโทปีและขั้นตอนการออกแบบ

ใน §5.3.1 และ §5.3.2 เราได้นำเสนอการแบ่งปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน ซึ่งเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ออกเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหา คือปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (5.9) และปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม (5.21) การแก้ปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนทำได้โดยการวนซ้ำแก้ปัญหาโดยการกำหนดให้ค่า (Λ, T) มีค่าคงที่และแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม จากนั้นกำหนดให้ค่า (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่และแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟสลับกันไปจนกว่าค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ลู่เข้าสู่ค่าต่ำสุดเฉพาะที่

อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหาด้วยวิธีดังกล่าวอาจจะไม่สามารถหาคำตอบได้ เนื่องจากปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ที่สามารถหาคำตอบได้ (feasible) เมื่อแปลงไปเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นแล้วอาจจะไม่สามารถหาคำตอบได้ (infeasible) ถ้าเรากำหนดค่า (Λ, T) หรือ (A_c, B_c, C_c) ไม่เหมาะสม ดังนั้นเราจะนำหลักการของวิธีฮอมอโทปี (homotopy) (Richter และ De Carlo, 1983) [22] มาใช้เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

หลักการของวิธีฮอมอโทปี คือการเริ่มต้นจากการแก้ปัญหาง่ายก่อน แล้วค่อยๆ เพิ่มความยากของปัญหาจนกระทั่งแก้ปัญหาที่ต้องการซึ่งเป็นปัญหายากได้ นั่นคือปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ ที่เป็นปัญหายากจะถูกแบ่งออกเป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ที่ง่ายลง ในแต่ละช่วงของการแก้ปัญหาจะได้ค่า (Λ, T) และ (A_c, B_c, C_c) ที่สอดคล้องกับความยากของปัญหาในระดับนั้น ทำให้สามารถใช้ค่าดังกล่าว ในการแก้ปัญหาโดยการแปลงปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ เป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหาดังที่กล่าวไว้ข้างต้นได้ หลักการของการกำหนดปัญหาสำหรับวิธีฮอมอโทปีเป็นดังนี้

พิจารณาเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่

$$F(K, \tilde{P}, \Lambda, T) < 0 \tag{5.24}$$

กำหนดฮอมอโทปีเป็น

$$H(K, \tilde{P}, \Lambda, T, \lambda) = F((1-\lambda)K_F + \lambda K, \tilde{P}, \Lambda, T) \tag{5.25}$$

เมื่อ K_F เป็นตัวควบคุมเริ่มต้นที่กำหนดโดย $K_F = C_F(sI - A_F)^{-1}B_F$ และ $\lambda \in \mathbf{R}$ อยู่ในช่วง $[0,1]$ นั่นคือ $H(K, \tilde{P}, \Lambda, T, \lambda)$ เป็นค่าประมาณแบบฮอมอโทปีในช่วงระหว่างตัวควบคุมเริ่มต้นและตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่ต้องการ ดังนี้

$$H(K, \tilde{P}, \Lambda, T, \lambda) = \begin{cases} F(K_F, \tilde{P}, \Lambda, T), & \lambda = 0 \\ F(K, \tilde{P}, \Lambda, T), & \lambda = 1 \end{cases} \tag{5.26}$$

ดังนั้นเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (5.24) ที่พิจารณาก็จะกลายเป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่

$$H(K, \tilde{P}, \Lambda, T, \lambda) < 0 \tag{5.27}$$

โดยที่ค่าของ λ เพิ่มจาก 0 ไปเป็น 1

สำหรับปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน ปัญหาที่เราต้องการแก้ก็คือหาตัวควบคุมที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดมีค่าต่ำสุดเมื่อขอบเขตของเซกเตอร์มีค่าตามที่กำหนด ในกรณีที่ขนาดขอบเขตเซกเตอร์มีขนาดใหญ่ ปัญหานี้ถือว่าเป็นปัญหายาก ถ้าเราใช้การวนซ้ำ (5.9) และ (5.21) ในการแก้ปัญหา อาจจะไม่ได้คำตอบที่ต้องการ แต่เราจะประยุกต์ใช้หลักการของฮอมอโทปีโดยเริ่มต้นแก้ปัญหาที่ง่ายก่อน นั่นคือกำหนดให้ขอบเขตเซกเตอร์มีขนาดเล็ก l_0 แล้วแก้ปัญหา ตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) ที่ได้จะเป็นตัวควบคุมที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดมีค่าต่ำสุดเมื่อขอบเขตเซกเตอร์มีขนาด l_0 และ (Λ, T) ก็เป็นตัวคูณโปปอฟที่สอดคล้อง เมื่อเราได้คำตอบของปัญหาง่ายแล้ว ก็เพิ่มขอบเขตเซกเตอร์ให้มากขึ้นแล้วนำคำตอบที่ได้ ทั้ง (A_c, B_c, C_c) และ (Λ, T) มาเป็นค่าเริ่มต้นของการแก้ปัญหาต่อไป ทำซ้ำจนกว่าปัญหาที่พิจารณาจะกลายเป็นปัญหาที่เราต้องการหาคำตอบ

จากหลักการที่กล่าวมาสามารถนำไปออกแบบขั้นตอนวิธีสำหรับแก้ปัญหาสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนได้ดังที่แสดงไว้ด้านล่าง โดยวงรอบนอกจะใช้หลักการของวิธีฮอมอโทปีในการออกแบบ และในวงรอบในจะเป็นการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ โดยการเปลี่ยนให้เป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหา โดยการกำหนดตัวแปรบางส่วนให้เป็นค่าคงที่แล้วแก้ปัญหาด้วยการวนซ้ำระหว่างอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นทั้งสอง ดังที่กล่าวถึงใน §5.3.1 และ §5.3.2

ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน

1. กำหนดให้ขอบเขตเซกเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ (ความไม่แน่นอนมีค่าเป็นศูนย์) และหาค่าเริ่มต้นของ (A_c, B_c, C_c) โดยการออกแบบตัวควบคุม LQG หรือตัวควบคุมคงทนที่ออกแบบได้ง่าย
2. หาค่าเริ่มต้นของ (Λ, T) โดยแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (5.9) เมื่อพารา-มิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่
3. เพิ่มค่าขอบเขตเซกเตอร์
4. ทำซ้ำ { **[วงรอบนอก]**
   (a) ทำซ้ำ { **[วงรอบใน]**
      i. แก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม (5.21) นั่นคือการหาค่า $(P_{11}, Q_{11}, X, Y, Z)$ เมื่อ (Λ, T) มีค่าคงที่ และจากบทตั้ง 2.2 (Completion Lemma) เราสามารถคำนวณหา $\tilde{P}$, B_c และ C_c ได้ และในขั้นนี้จะได้ค่า γ_2^2 ซึ่งเป็นค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ดังแสดงใน (4.8) หรือเทียบเท่ากับฟังก์ชันจุดประสงค์ ใน (4.10)
      ii. หาค่า A_c โดยแก้ปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ (feasibility problem) ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (5.10) หรือใช้วิธีวิเคราะห์
      iii. หาค่า (Λ, T) โดยแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (5.9) เมื่อพารา- มิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่

      } **[วงรอบใน]** จนกว่า γ_2^2 มีค่าลดลงน้อยกว่าเงื่อนไขที่กำหนด สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้กำหนดเงื่อนไขในการหยุดการวนซ้ำเมื่อ ค่าผิดพลาดสมบูรณ์ (absolute error) และค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ (relative error) มีค่าน้อยกว่า 0.01

   (b) เพิ่มค่าของขอบเขตเซกเตอร์และความชันขึ้นหนึ่งขั้น และกำหนดค่าเริ่มต้นของ (Λ, T) ในรอบถัดไปด้วยค่าในรอบที่แล้ว

} **[วงรอบนอก]** จนกว่าจะได้ความคงทน (robustness) ตามต้องการ หรือไม่สามารถหาคำตอบที่สอดคล้องกับอสมการได้

5.4 วิเคราะห์ผล

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน โดยใช้หลักการวนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหาที่นำเสนอนั้นจะคล้ายกับงาน [15] แต่ข้อแตกต่างสำคัญคือ [15] จะวนซ้ำเพื่อหาค่า $(\tilde{P}, \Lambda, T)$ และ (A_c, B_c, C_c) ในปัญหาเดิม (5.5) แต่สำหรับวิธีที่นำเสนอจะกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุม A_c ออกไปจากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในการหาค่า (A_c, B_c, C_c) ด้วย แล้วจึงคำนวณหาค่า A_c ในภายหลัง ซึ่งทำให้การลู่เข้าของคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็วกว่า [15] มาก

จากในขั้นตอนของการหาค่าเหมะที่สุดของตัวคูณโปปอฟใน §5.3.2 และการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุมใน §5.3.3จะมีเมทริกซ์ที่เกิดจากความไม่แน่นอนของเมทริกซ์สัญญาณออกที่วัดได้ D_{yp} และความไม่แน่นอนของเมทริกซ์สมรรถนะขาออก D_{zp} รวมอยู่ในอสมการเงื่อนไขทั้ง 2 ขั้นตอน

จากการใช้หลักการของวิธีฮอมอโทปี อาจมีข้อที่ต้องพิจารณาคือการเพิ่มระดับความยากของปัญหา แนวทางหนึ่งในการเพิ่มระดับความยากของปัญหาคือ กำหนดให้ค่า λ เป็น $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N}{N}$ และแก้ปัญหาในกรณีที่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ให้เพิ่มค่า N เป็นสองเท่าแล้วแก้ปัญหา ถ้าเพิ่มค่า N จนมีค่ามากกว่าค่าที่กำหนดก็สรุปได้ว่าขั้นตอนวิธีล้มเหลว

คำตอบที่ได้ไม่รับรองว่าจะเป็นคำตอบที่ดีที่สุดในวงกว้าง แต่จาก [9] จะกล่าวได้ว่าคำตอบที่ได้จะเป็นค่าที่ดีที่สุดในย่าน และเงื่อนไขในการคำนวณทั้งหมดอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งหาคำตอบได้ด้วยการโปรแกรมกึ่งแน่นอน

5.5 สรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนอขั้นตอนวิธีในการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอนแบบไม่เชิงเส้น เงื่อนไขอสมการที่ใช้ในการคำนวณได้มาจากเงื่อนไขสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนของระบบลูเรในบทที่ 3 เงื่อนไขที่ได้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ ซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้โดยการ วนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และใช้หลักการของวิธีฮอมอโทปี การกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุมออกจากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สำหรับการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม มีผลทำให้การลู่เข้าของคำตอบเป็นไปได้อย่างรวดเร็ว โดยแนวทางในการแก้ปัญหาดังกล่าวได้นำมาจาก [9, 10] เนื่องจากค่าผิดพลาดจากการวัดจะมีผลต่อการสังเคราะห์ตัวควบคุมคงทนของระบบ เราจึงควรพิจารณาขอบเขตของความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นเป็นความไม่แน่นอนของเมทริกซ์สมรรถนะขาออก D_{zp} และความไม่แน่นอนของเมทริกซ์สัญญาณออกที่ได้จากการวัด (D_{yp}) จะทำให้การสังเคราะห์ตัวควบคุมคงทนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น