



บทที่ 3

การคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงดัน เริ่มต้นด้วยวิธีจำลองแบบประจุ

สนามไฟฟ้าในแก๊ปของอิ เล็กโทรดแท่งกลมปลายมนกับระนาบถือว่าเป็นสนามไฟฟ้าแบบไม่สม่ำเสมอ ฉะนั้นการคำนวณแรงดัน เริ่มต้นที่อาจคำนวณได้โดยอาศัยเงื่อนไขของทฤษฎีสตรีมเมอร์ตั้งที่ได้กล่าวแล้วในข้อ 2.4 โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการ (2.23) การคำนวณโดยอาศัยสมการนี้จำเป็นต้องทราบค่าสนามไฟฟ้ากระจาย $E(x)$ ในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการหาสนามไฟฟ้ากระจายของอิ เล็กโทรดแท่งกลมปลายมนกับระนาบโดยวิธีจำลองแบบประจุ

3.1 หลักพื้นฐานของวิธีจำลองแบบประจุ

การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีจำลองแบบประจุทำได้โดยการสมมติว่ามีประจุกระจายบนผิว หรือตามแนวแกนของตัวนำที่จะทำการคำนวณ จากนั้นจะทำการคำนวณศักย์ไฟฟ้าที่ละจุดแล้วนำมารวมกันโดยอาศัยหลักการซูเปอร์โพสิชัน

นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^N p_{ij} q_j = \phi_j \quad (3.1)$$

โดยที่ p_{ij} คือ สัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้า

q_j คือ ประจุจำลองที่จุด j

ϕ_i คือ ศักย์ไฟฟ้าของตำแหน่งที่ต้องการคำนวณ

N คือ จำนวนประจุจำลอง

กรณีที่สมมติว่ามีประจุจำลองมากกว่า 1 จุด จะเขียนความสัมพันธ์ของ p , q และ ϕ ในรูปเมตริกซ์ได้ คือ

$$[P] [Q] = [\phi]$$

นั่นก็คือ

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_N & P_{N2} & \dots & P_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

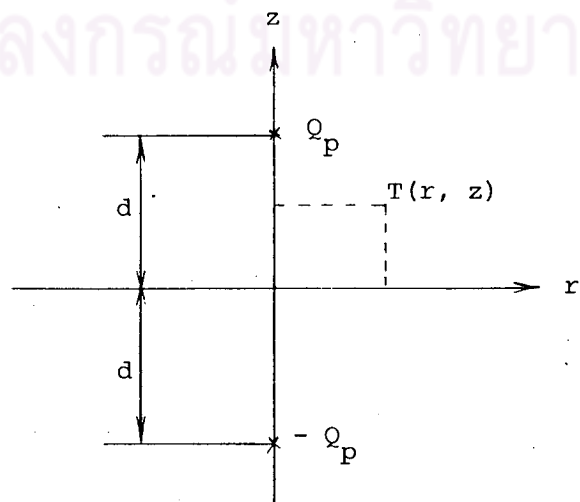
เพื่อให้สามารถคำนวณหาขนาดของประจุจำลอง Q ในเมตริกซ์นี้ได้ จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมและอาศัยทฤษฎีภาพเงา (ดูรายละเอียดในภาคผนวก) ช่วยในการคำนวณเพื่อหาสัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้า P หลังจากนั้นก็สามารถคำนวณหาศักย์ไฟฟ้า ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ในแก๊สระหว่างอิเล็กโทรดที่กำหนดนั้นได้ เพื่อให้เกิดความมั่นใจว่าประจุที่จำลองขึ้นนั้นสามารถแทนจำนวนประจุที่มีอยู่จริงของอิเล็กโทรดได้ จำเป็นต้องทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณศักย์ไฟฟ้าที่ได้จากการสมมติประจุจำลองขึ้นกับค่าที่ควรจะเป็นตามเงื่อนไข

การคำนวณสนามไฟฟ้านั้นสามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์

$$E = -\nabla\phi$$

วิธีจำลองแบบประจุที่ใช้สำหรับคำนวณหาศักย์และสนามไฟฟ้าอาจแบ่งเป็น 3 ประเภทตามชนิดของประจุจำลอง คือ

1. ประจุจำลองแบบจุด (Point charge) [18]



รูปที่ 3.1 แสดงประจุจำลองแบบจุด

เมื่อ Q_p เป็นประจุจำลองแบบจุด ค่าของศักย์ไฟฟ้าที่จุด $T(r, z)$ มีค่าดังนี้

$$\phi(r, z) = \frac{Q_p}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{[r^2 + (z-d)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (z+d)^2]^{1/2}} \right]$$

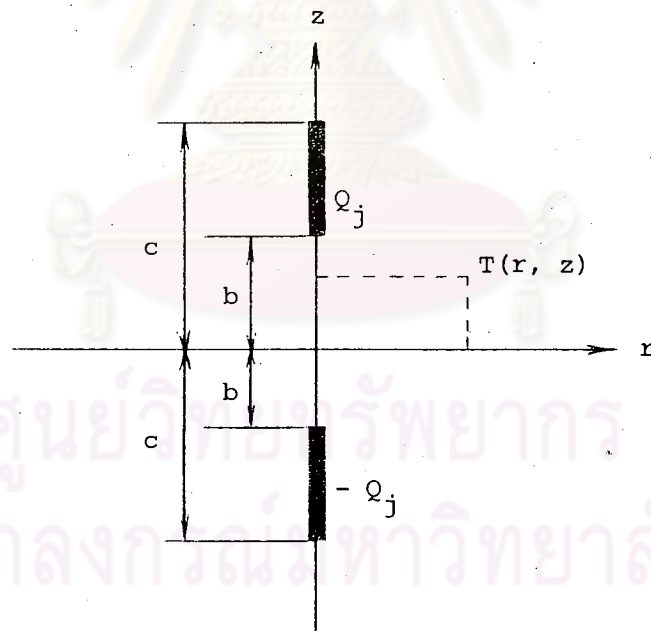
ค่าของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน r ที่จุด $T(r, z)$ มีค่าดังนี้

$$E_r(r, z) = \frac{Q_p}{4\pi\epsilon} \left[\frac{r}{[r^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{r}{[r^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right]$$

ค่าของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z ที่จุด $T(r, z)$ มีค่าดังนี้

$$E_z(r, z) = \frac{Q_p}{4\pi\epsilon} \left[\frac{z-d}{[r^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{z+d}{[r^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right]$$

2. ประจุจำลองแบบเชิงเส้น (Finite line charge) [13]



รูปที่ 3.2 แสดงประจุจำลองแบบเชิงเส้น

เมื่อ Q_j เป็นประจุจำลองเชิงเส้น

ดังนั้น ค่าของศักย์ไฟฟ้าที่จุด $T(r, z)$ จะมีค่า

$$\phi(r, z) = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{c-b} \ln \left[\frac{(c-z+\gamma_1)(b+z+\gamma_2)}{(b-z+\delta_1)(c+z+\delta_2)} \right]$$

ค่าของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน r ที่จุด $T(r, z)$ จะมีค่า

$$E_r(r, z) = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{c-b} \left[\frac{c-z}{r\gamma_1} - \frac{c-z}{r\delta_1} + \frac{b+z}{r\gamma_2} - \frac{c+z}{r\delta_2} \right]$$

ค่าของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z ที่จุด $T(r, z)$ จะมีค่า

$$E_z(r, z) = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{c-b} \left[\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\delta_2} \right]$$

$$\text{โดยที่ } \gamma_1 = [r^2 + (c-z)^2]^{1/2}$$

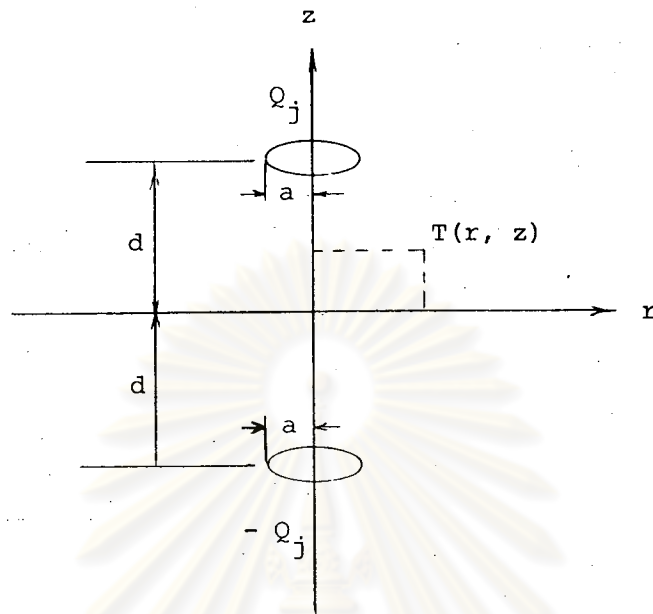
$$\gamma_2 = [r^2 + (b+z)^2]^{1/2}$$

$$\delta_1 = [r^2 + (b-z)^2]^{1/2}$$

$$\delta_2 = [r^2 + (c+z)^2]^{1/2}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. ประจุจำลองแบบวงแหวน (Ring charge) [13]



รูปที่ 3.3 แสดงประจุจำลองแบบวงแหวน

เมื่อ Q_j เป็นประจุจำลองแบบวงแหวน

ดังนั้น ค่าของศักย์ไฟฟ้าที่จุด $T(r, z)$ จะเป็น

$$\phi(r, z) = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon} \frac{2}{r} \left[\frac{K(k_1)}{\alpha_1} - \frac{K(k_2)}{\alpha_2} \right]$$

ค่าของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน r ที่จุด $T(r, z)$ จะเป็น

$$E_r(r, z) = \frac{-Q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \left[\frac{[a^2 - r^2 + (z-d)^2] E(k_1) - \beta_1^2 K(k_1)}{\alpha_1 \beta_1^2} - \frac{[a^2 - r^2 + (z+d)^2] E(k_2) - \beta_2^2 K(k_2)}{\alpha_2 \beta_2^2} \right]$$

ค่าของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z ที่จุด $T(r, z)$ จะเป็น

$$E_z(r, z) = \frac{-Q_j}{4\pi\epsilon} \frac{2}{\pi} \left[\frac{(a-z)E(k_1)}{\alpha_1\beta_1^2} + \frac{(a+z)E(k_2)}{\alpha_2\beta_2^2} \right]$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [(r+a)^2 + (z-d)^2]^{1/2} \\ \alpha_2 &= [(r+a)^2 + (z+d)^2]^{1/2} \\ \beta_1 &= [(r-a)^2 + (z-d)^2]^{1/2} \\ \beta_2 &= [(r-a)^2 + (z+d)^2]^{1/2} \\ k_1 &= 2\sqrt{ra}/\alpha_1 \\ k_2 &= 2\sqrt{ra}/\alpha_2 \end{aligned}$$



ความหมายของ $K(k)$ และ $E(k)$ คือ เอลลิปติกอินทิกรัลประเภทที่ 1 และที่ 2 (Elliptic integral of first and second kind) ตามลำดับ โดยมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} K(k) &= \pi/2 \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \frac{1225}{16384}k^8 + \dots \right) \\ &= \pi/2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(1/2)_m k^m}{m!} \right]^2 \end{aligned}$$

เมื่อ $(1/2)_m$ คือ ผลคูณจำนวน $(1)(1/2)(1/2 + 1)(1/2 + 2) \dots$

$$\begin{aligned} E(k) &= \pi/2 \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{5}{256}k^6 - \frac{175}{16385}k^8 - \dots \right) \\ &= \pi/2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-2M} \frac{(-1/2)_m^2}{m!} k^{2m} \end{aligned}$$

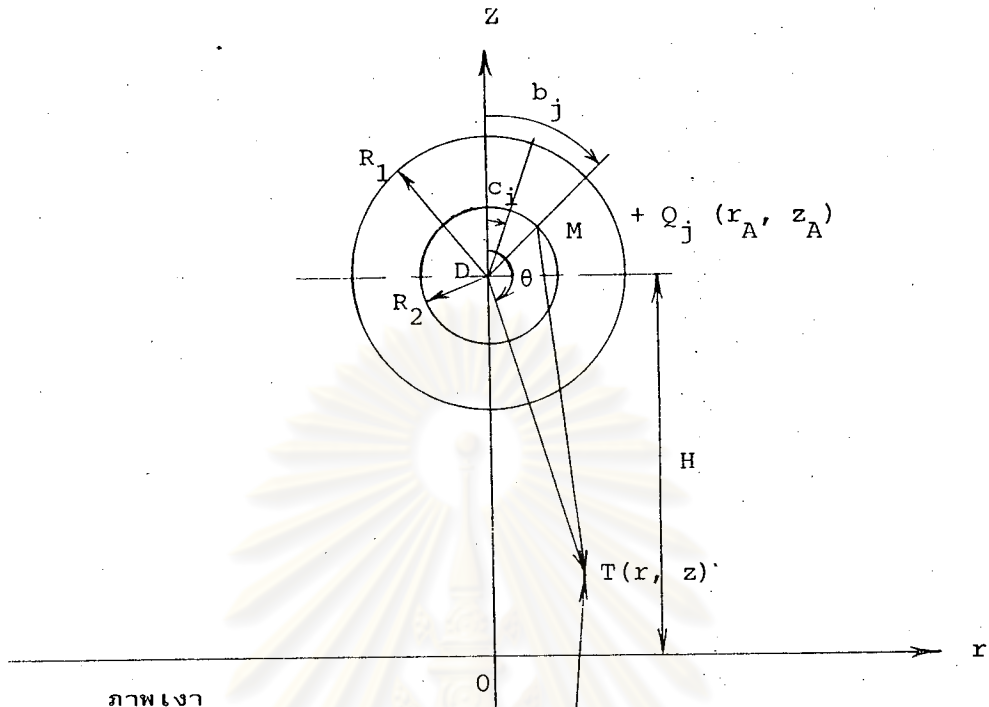
เมื่อ $(-1/2)_m$ คือ $\frac{(1)(-1/2)(-1/2 - 1) \dots (-1/2 - m + 1)}{m!}$

3.2 การพิสูจน์การใช้วิธีจำลองแบบประจุในการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า

เพื่อให้เกิดความมั่นใจได้ว่าการนำเอาวิธีจำลองแบบประจุมาใช้ในการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้านั้น มีความเป็นไปได้และถูกต้องมากน้อยเพียงใด สมควรที่จะวิเคราะห์โดยอาศัยรูปลักษณะอิเล็กโทรดที่มีรูปร่างลักษณะสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีคณิตศาสตร์วิเคราะห์ ซึ่งในที่นี้ได้เลือกเอาอิเล็กโทรดแบบแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบ

3.2.1 ศักย์และสนามไฟฟ้าของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบ

ในการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยวิธีจำลองแบบประจุของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบนี้ จะมีลักษณะทำนองเดียวกับตัวนำสายควบที่วางหรือขึงขนานกับพื้นดิน ซึ่ง Abou - Seada ได้คำนวณสนามไฟฟ้าของสายควบด้วยวิธีจำลองแบบประจุโดยการจำลองประจุเป็นเชิงเส้นขนานตามแนวความยาวตัวนำจำนวน 16 เส้น และได้ชี้ให้เห็นว่าผลการคำนวณผิดพลาด 0.1% [5, 6] ดังนั้นการคำนวณหาศักย์และสนามไฟฟ้าของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบในที่นี้จึงได้ทดลองเลือกจำลองประจุแบบเชิงเส้นจำนวน 16 เส้น ในแต่ละเส้นจะมีค่าของประจุจำลองและระยะห่างระหว่างแนวเส้นไม่เท่ากัน แนวเส้นประจุจำลองนี้อยู่บนทรงกระบอกที่มีรัศมี R_2 และทำมุมกับแนวตั้งที่เส้นแกนศูนย์กลางของแท่งกลม ดังในรูปที่ 3.4 โดยอาศัยหลักการของภาพเงาจึงจะสามารถคำนวณหาศักย์และสนามไฟฟ้าได้ จากนั้นได้ทำการพิสูจน์โดยการหาศักย์ไฟฟ้าเปรียบเทียบกับเงื่อนไขขอบเขตพบว่ามีความผิดพลาดน้อยกว่า 0.8%



ภาพเงา

R_1 คือ รัศมีของแท่งกลม

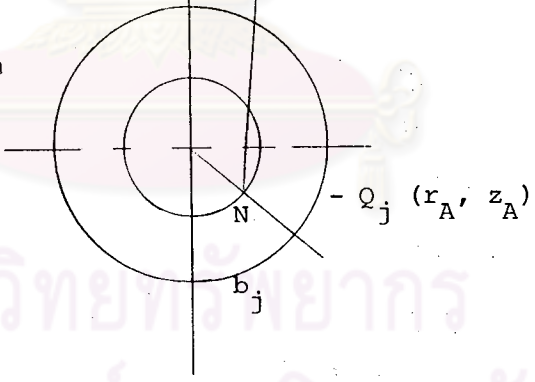
R_2 คือ รัศมีของตำแหน่งของ
ประจุจำลอง

Q_j คือ ประจุจำลองแบบเชิงเส้น

b_j คือ มุมของตำแหน่งของ
ประจุจำลอง

c_i คือ มุมของตำแหน่งของจุด
ขอบเขตที่รัศมี R_1

H คือ ระยะห่างจากพื้นระนาบถึง
จุดศูนย์กลางของแท่งกลม



รูปที่ 3.4 แสดงประจุจำลองของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบ

$\phi(r, z)$ ที่จุด T เนื่องจาก Q_j โดย Q_j เป็นความหนาแน่นของประจุจำลองแบบ
เชิงเส้นต่อความยาว 1 หน่วย ฉะนั้นศักย์ไฟฟ้าที่จุด T จึงเขียนไว้ว่า

$$\phi_T(r, z) = - \sum_{j=1}^N q_j \ln \frac{MT}{NT} \quad (3.2)$$

โดยที่ $q_j = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon}$

$$MT = [(r_A - r)^2 + (z_A - z)^2]^{1/2}$$

$$NT = [(r_A - r)^2 + (z_A + z)^2]^{1/2}$$

และ $r_A = R_2 \sin b_j$

$$z_A = H + R_2 \cos b_j$$

$$r = DT \sin \theta$$

$$z = H + DT \cos \theta$$

เมื่อ $\theta =$ คือ มุมระหว่างจุดที่ต้องการคำนวณหาศักย์ไฟฟ้ากับ
แกนแนวตั้ง (แกน Z ตามรูปที่ 3.4)

ดังนั้นสนามไฟฟ้า E จะหาได้จาก

$$E = - \nabla \phi(r, z) \quad (3.3)$$

นั่นคือ $E(r, z) = E_r(r, z) + E_z(r, z)$

ค่าของสนามไฟฟ้าในแนวแกน r จะหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= \sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{MT}{NT} \\ &= \sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{[(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j - z)^2]^{1/2}}{[(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j + z)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^N q_j \left[\frac{R_2 \sin b_j - r}{(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j + z)^2} - \frac{R_2 \sin b_j - r}{(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j - z)^2} \right] \quad (3.4)$$

ส่วนสนามไฟฟ้าในแนวแกน z มีค่า ดังนี้

$$\begin{aligned} E_z(r, z) &= \sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{MT}{NT} \\ &= \sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{[(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j - z)^2]^{1/2}}{[(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j + z)^2]^{1/2}} \\ &= \sum_{j=1}^N q_j \left[\frac{z - H - R_2 \cos b_j}{(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j - z)^2} - \frac{H + R_2 \cos b_j + z}{(R_2 \sin b_j - r)^2 + (H + R_2 \cos b_j + z)^2} \right] \quad (3.5) \end{aligned}$$

การคำนวณหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้า จำเป็นจะต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

1.) ที่ผิวของแท่งกลม กำหนดให้ศักย์ไฟฟ้ามีค่า = 1 หน่วย

นั่นคือ $\phi(c) \Big|_{c=c_i} = 1$

จะหาค่าของ $\phi(c) \Big|_{c=c_i}$ โดยใช้สมการที่ (3.2)

ดังนั้น $\phi(c) \Big|_{c=c_i} = - \sum_{j=1}^N q_j \ln \frac{MT}{NT}$

$$= - \sum_{j=1}^N q_j \ln \frac{[R_2 \sin b_j - R_1 \sin c_i]^2 + (R_2 \cos b_j - R_1 \cos c_i)^2]^{1/2}}{[R_2 \sin b_j - R_1 \sin c_i]^2 + (2H + R_2 \cos b_j + R_1 \cos c_i)^2]^{1/2}}$$

(3.6)

$$= - \sum_{j=1}^N q_j \ln \frac{(R+S)^{1/2}}{(R+Z)^{1/2}} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } R &= (R_2 \sin b_j - R_1 \sin c_i)^2 \\ S &= (R_2 \cos b_j - R_1 \cos c_i)^2 \\ Z &= (2H + R_2 \cos b_j + R_1 \cos c_i)^2 \end{aligned}$$

2.) อนุพันธ์ที่ 1, 2, 4 ของสมการศักย์ไฟฟ้าที่ผิวของแท่งกลม = 0

$$\text{นั่นคือ } \left. \frac{d^n}{dc} \phi(c) \right|_{c=c_i} = 0 ; n = 1, 2, 4$$

ค่าของอนุพันธ์ที่ 1, 2, 4 มีดังนี้

จากสมการที่ (3.7)

$$\begin{aligned} \therefore \left. \frac{d}{dc} \phi(c) \right|_{c=c_i} &= - \sum_{j=1}^N q_j \left[\frac{R_1 R_2 \sin (c_i - b_j)}{(R_2 \sin b_j - R_1 \sin c_i)^2 + (R_2 \cos b_j - R_1 \cos c_i)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2HR_1 \sin c_i + R_1 R_2 \sin (b_j + c_i)}{(R_2 \sin b_j - R_1 \sin c_i)^2 + (2H + R_2 \cos b_j + R_1 \cos c_i)^2} \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$= - \sum_{j=1}^N q_j \left[\frac{TT}{R+S} + \frac{X+Y}{R+S} \right] \quad (3.9)$$

โดยที่ R, S และ Z มีค่าตามสมการที่ (3.7)

$$\begin{aligned} \text{และ } TT &= R_1 R_2 \sin (c_i - b_j) \\ X &= 2H(R_1 \sin c_i) \\ Y &= R_1 R_2 \sin (b_j + c_i) \end{aligned}$$

รายละเอียดการหาอนุพันธ์ที่ 2 และ ที่ 4 จะปรากฏในภาคผนวกที่ 4 ในที่นี้จะ

แสดงผลที่ได้จากการหาอนุพันธ์แล้วกล่าวคือ

$$\left. \frac{d^2}{dc^2} \phi(c) \right|_{c=c_i} = - \sum_{j=1}^N q_j \left[\frac{D}{R+S} - \frac{2(TT)^2}{(R+S)^2} + \frac{U+W}{R+Z} + \frac{2(X+Y)^2}{(R+Z)^2} \right] \quad (3.10)$$

โดยที่ R, S, TT, Z, X, Y มีค่าตามสมการที่ (3.7) และ (3.9)

$$\text{และ } D = R_1 R_2 \cos(b_j - c_i)$$

$$U = 2HR_1 \cos c_i$$

$$W = R_1 R_2 \cos(b_j + c_i)$$

$$\begin{aligned} \text{และค่า } \left. \frac{d^4}{dc^4} \phi(c) \right|_{c=c_i} = & - \sum_{j=1}^N q_j \left[- \frac{D}{R+S} - \frac{6D^2 - 8T^2}{(R+S)^2} - \frac{48D(TT)^2}{(R+S)^3} \right. \\ & - \frac{48(TT)^4}{(R+S)^4} - \frac{U+W}{R+Z} + \frac{6(U+W)^2 - 8(X+Y)^2}{(R+Z)^2} \\ & \left. + \frac{48(U+W)(X+Y)^2}{(R+Z)^3} + \frac{48(X+Y)^4}{(R+Z)^4} \right] \end{aligned}$$

โดยที่ $D, R, S, TT, U, W, Z, X, Y$ มีค่าตามสมการที่ (3.7), (3.9) และ

$$(3.10) \text{ และ } T = R_1 R_2 \sin(b_j - c_i)$$

3.) พื้นระนาบมีค่าของศักย์ไฟฟ้า = 0 ตามทฤษฎีภาพเงา

3.2.2 การกำหนดตำแหน่งของประจุจำลองและตำแหน่งขอบเขต

เพื่อที่จะทำให้เกิดผิวสมศักย์ที่ผิวของแท่งกลม จำเป็นจะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นที่เหมาะสม คือ ค่าของ R_2 , c_i และ b_j ซึ่ง Abou - Seada [5, 6] ได้จำลองประจุเป็นเชิงเส้น 16 เส้น โดยกำหนดค่าของ c_i 4 ค่า และ b_j 16 ค่า ซึ่งมีตำแหน่งดังต่อไปนี้

$$c_1 = 0.0 \quad ; \quad c_2 = 1.5708 \quad ; \quad c_3 = 3.1416 \quad ; \quad c_4 = 4.7124$$

$$b_1 = 0.3927 \quad ; \quad b_2 = 0.7500 \quad ; \quad b_3 = 1.1752 \quad ; \quad b_4 = 1.6000$$

$$b_5 = 1.9635 \quad ; \quad b_6 = 2.3500 \quad ; \quad b_7 = 2.7489 \quad ; \quad b_8 = 3.1000$$

$$b_9 = 3.5343 \quad ; \quad b_{10} = 3.9000 \quad ; \quad b_{11} = 4.3197 \quad ; \quad b_{12} = 4.7000$$

$$b_{13} = 5.1051 \quad ; \quad b_{14} = 5.5000 \quad ; \quad b_{15} = 5.8905 \quad ; \quad b_{16} = 6.1000$$

โดยที่ $R_2 = 0.5$ ซม. , c_i และ b_j มีหน่วยเป็นเรเดียน

3.2.3 ขั้นตอนการคำนวณหาศักย์และสนามไฟฟ้า

จากเงื่อนไขขอบเขตและการกำหนดตำแหน่งของประจุจำลองและตำแหน่งของขอบเขตจะสามารถคำนวณหาค่าของประจุจำลองแบบเชิงเส้นได้จากสมการที่ (3.1) คือ

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} q_j = \phi_i$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} F_0(c_1; b_1) & \dots & F_0(c_i; b_{16}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_0(c_4; b_1) & \dots & F_0(c_4; b_{16}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_1(c_1; b_1) & \dots & F_1(c_1; b_{16}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_1(c_4; b_1) & \dots & F_1(c_4; b_{16}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_2(c_1; b_1) & \dots & F_2(c_1; b_{16}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_2(c_4; b_1) & \dots & F_2(c_4; b_{16}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_4(c_1; b_1) & \dots & F_4(c_1; b_{16}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_4(c_4; b_1) & \dots & F_4(c_4; b_{16}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ F_0 คือ $\phi(c) \Big|_{c=c_i} = 1$ ดังสมการที่ (3.7)

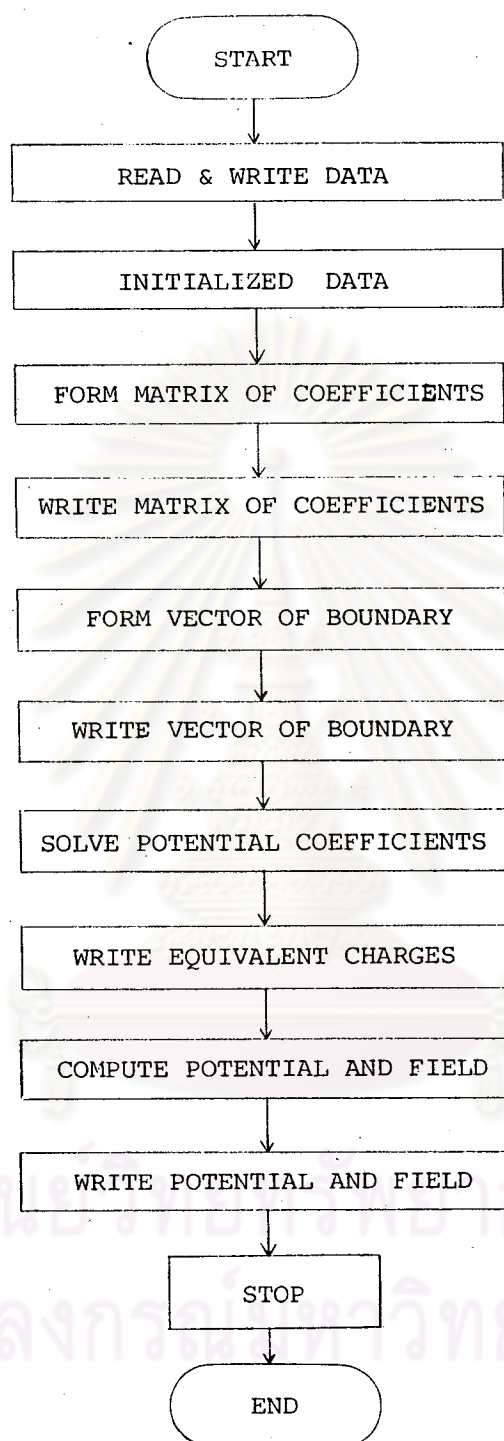
F_1 คือ $\frac{d}{dc} \phi(c) \Big|_{c=c_i} = 0$ ดังสมการที่ (3.9)

F_2 คือ $\frac{d^2}{dc^2} \phi(c) \Big|_{c=c_i} = 0$ ดังสมการที่ (3.10)

F_4 คือ $\frac{d^4}{dc^4} \phi(c) \Big|_{c=c_i} = 0$ ดังสมการที่ (3.11)

การหาค่าของ [Q] เราใช้โปรแกรมซิมูลิน ชื่อ SIMQ ซึ่งใช้เทคนิคของเกาส์ (Gaussian algorithm) [19] เมื่อได้เงื่อนไขต่าง ๆ แล้ว เราสามารถคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าตามสมการที่ (3.2) และสนามไฟฟ้าตามสมการที่ (3.3) โดยใช้คอมพิวเตอร์คำนวณหาค่าต่าง ๆ ดังโปรแกรมดังรูปที่ (3.5) ผลการคำนวณได้แสดงไว้ในภาคผนวกที่ 2

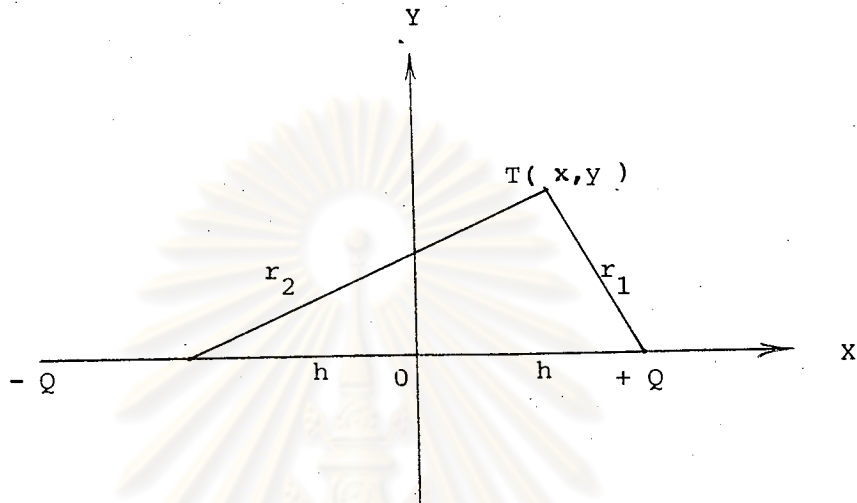
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.5 แสดง FLOW CHART การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าของ
อิเล็กโทรดแท่งกลมวางขนานกับระนาบ

3.3 การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบด้วยวิธีคณิตศาสตร์วิเคราะห์

การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบด้วยวิธีคณิตศาสตร์วิเคราะห์ อาจคำนวณได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.6 แสดงประจุเชิงเส้น $-Q$ และ $+Q$

ประจุเชิงเส้น $+Q$ และ $-Q$ วางห่างกัน $2h$ ตามรูปที่ 3.6 ดังนั้นศักย์ไฟฟ้าที่จุด T เนื่องจากประจุเชิงเส้น $+Q$ และ $-Q$ อาจคำนวณได้ดังสมการ [20]

$$V_T = \frac{2Q}{4\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.12)$$

ในกรณีที่ต้องการหาเส้นทางเดินของมิวสมัตกัย เราต้องให้ V_T มีค่าคงที่ นั่นก็คือ

$$\frac{r_2}{r_1} = A \quad (3.13)$$

เมื่อ A คือค่าคงที่

จากรูปที่ 3.6 เราจะเห็นว่า

$$r_1^2 = (x - h)^2 + y^2 \quad (3.14)$$

$$r_2^2 = (x + h)^2 + y^2 \quad (3.15)$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง ของสมการที่ (3.13) จะได้

$$r_2^2 = A^2 r_1^2 \quad (3.16)$$

จากสมการที่ (3.14), (3.15) และ (3.16) จะได้ว่า

$$(x + h)^2 + y^2 = A^2 [(x - h)^2 + y^2]$$

โดยการจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$x^2 + 2hx \frac{1 + A^2}{1 - A^2} + y^2 = -h^2$$

บวกทั้ง 2 ข้างด้วย $h^2 \frac{(1 + A^2)^2}{(1 - A^2)^2}$ จะได้

$$x^2 + 2hx \frac{1 + A^2}{1 - A^2} + h^2 \frac{(1 + A^2)^2}{(1 - A^2)^2} = h^2 \left[\frac{(1 + A^2)^2}{(1 - A^2)^2} - 1 \right]$$

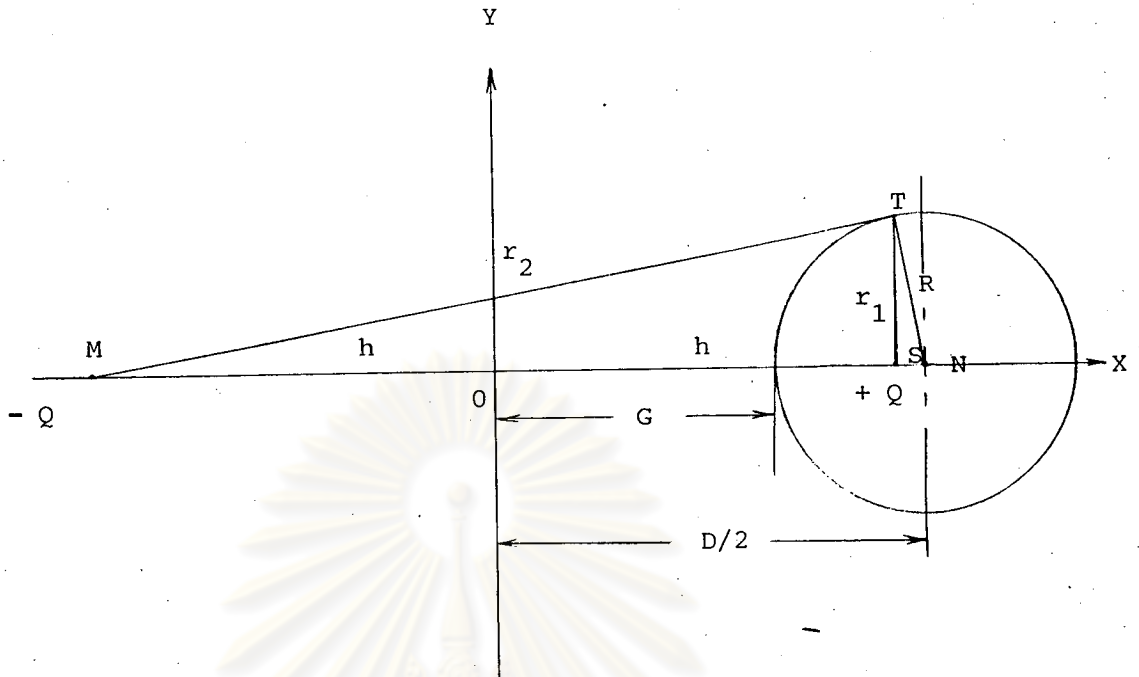
$$\text{นั่นก็คือ } \left[x - h \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1} \right]^2 + y^2 = \left[\frac{2hA}{A^2 - 1} \right]^2 \quad (3.17)$$

สมการที่ (3.17) คือ สมการของวงกลมที่มีรัศมี $R = \frac{2hA}{A^2 - 1}$ โดยมีจุดศูนย์กลาง

อยู่ที่

$$\left[\frac{h(A^2 + 1)}{A^2 - 1} ; 0 \right]$$

ผลของสมการที่ (3.17) เราสามารถแสดงได้ด้วยรูปดังในรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 แสดงเส้นผิวสมศักย์

ให้ระยะจากจุด 0 ถึงจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็น $D/2$

$$\text{จะเขียนได้ว่า } \frac{D}{2} = h \frac{(A^2 + 1)}{A^2 - 1} \quad (3.18)$$

ดังนั้นจะคำนวณค่าของ R ตามรูปที่ 3.7 ได้ดังนี้

$$R = \frac{2hA}{A^2 - 1}$$

ยกกำลังสองแล้วบวกด้วย h^2 ทั้งสองข้าง

$$R^2 + h^2 = h^2 \frac{(A^2 + 1)^2}{(A^2 - 1)^2}$$

$$h^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - R^2$$

$$= \left(\frac{D}{2} + R\right) \left(\frac{D}{2} - R\right)$$



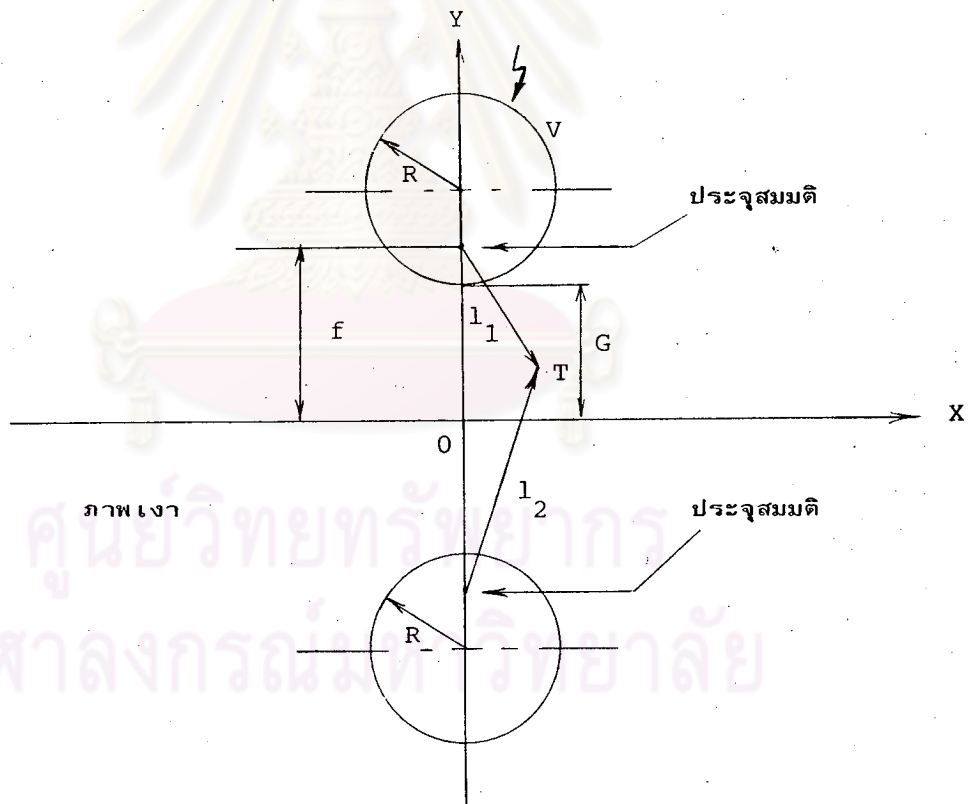
$$= G(G + 2R) \tag{3.19}$$

จากรูปที่ 3.7 สามเหลี่ยม TMN และสามเหลี่ยม TSN เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R}{\frac{D}{2} - h} \tag{3.20}$$

จากสมการที่ (3.12) ถึงสมการที่ (3.20) อาจสรุปได้ว่า ประจุเชิงเส้น $-Q$ และ $+Q$ วางห่างกัน $2h$ จะทำให้เกิดผิวสมศักย์ซึ่งมีรัศมี $R = \frac{2Ah}{A^2 - 1}$ โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ห่างจากจุด O เท่ากับ $\frac{D}{2}$

เมื่อได้ผลสรุปข้างต้น เรามาพิจารณาอิเล็กโทรดแท่งกลมวางขนานกับพื้นรายละเอียดดังในรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 แสดงตำแหน่งของประจุสมมติพร้อมทั้งภาพเงาของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบ

กำหนดให้ประจุเชิงเส้นอยู่ที่ระยะ f ซึ่งทำให้เกิดผิวสมศักย์ขึ้นที่ผิวของแท่งกลม โดยมีจุดศูนย์กลางของแท่งกลมอยู่ที่ $G + R$ จากแกน x รัศมีของผิวสมศักย์เป็นรัศมีของแท่งกลม มีค่าเท่ากับ R

$$\text{จากสมการที่ (3.19) จะได้ว่า } f^2 = (G + 2R)G \quad (3.21)$$

ศักย์ที่จุด T ที่เกิดจากประจุเชิงเส้นมีค่าดังนี้

$$\phi_T = K \ln (l_2/l_1) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{โดย } l_2 &= [x^2 + (y + a)^2]^{1/2} \\ l_1 &= [x^2 + (y - a)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

เงื่อนไขที่กำหนดให้ คือ ให้แท่งกลมที่มีรัศมี R มีแรงดัน = V

$$\text{ดังนั้น } \phi_{\text{รัศมี } R} = K \ln (l_2/l_1)$$

จากสมการที่ (3.13) ค่าของ l_2/l_1 ที่ทำให้เกิดผิวสมศักย์ที่เส้นรอบวงของแท่งกลม จะต้องมามีค่าเท่ากับ A

จากสมการที่ (3.13) และ (3.20) เมื่อพิจารณาสัญลักษณ์ตามรูปที่ 3.8 ค่าของ A จะได้

$$A = \frac{R}{G + R - f}$$

โดยอาศัยสมการที่ (3.21)

$$\text{ดังนั้น } A = \frac{G + R + f}{R} \quad (3.23)$$

และค่าของศักย์ไฟฟ้าที่รัศมี R มีค่า คือ

$$\phi_{\text{รัศมี } R} = K \ln A$$

แทนค่าศักย์ไฟฟ้าที่รัศมี R ตามเงื่อนไขที่กำหนด และแทนค่า A จากสมการที่ (3.23)

$$\text{จะได้ } V = K \ln \frac{(G + R + f)}{R}$$

$$\text{หรือ } K = \frac{V}{\ln \frac{(G + R + f)}{R}} \quad (3.24)$$

การหาค่าสนามไฟฟ้าจะทำได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ ดังนี้

$$E = - \nabla \phi_T = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_T + \frac{\partial}{\partial y} \phi_T \right) \quad (3.25)$$

ค่าของสนามไฟฟ้าในแนวแกน x จะมีค่า

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial}{\partial x} \phi_T \\ &= - K \frac{1}{l_2} \left[l_1 \frac{\partial l_2}{\partial x} - l_2 \frac{\partial l_1}{\partial x} \right] / l_1^2 \\ &= K \left[\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

ค่าของสนามไฟฟ้าในแนวแกน y จะมีค่า

$$\begin{aligned} E_y &= - \frac{\partial}{\partial y} \phi_T \\ &= - K \frac{1}{l_2} \left[l_1 \frac{\partial l_2}{\partial y} - l_2 \frac{\partial l_1}{\partial y} \right] / l_1^2 \\ &= K \left[\frac{y - f}{l_1^2} - \frac{y + f}{l_2^2} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

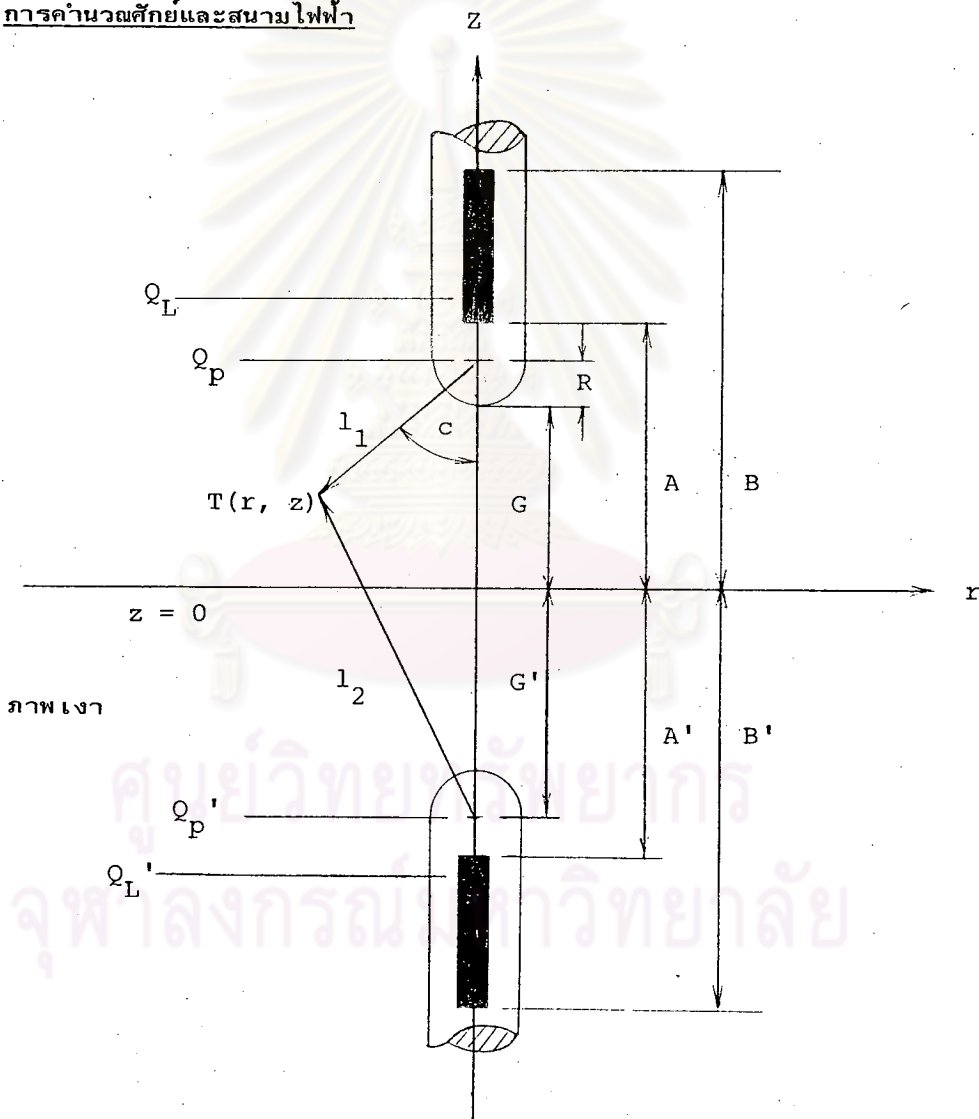
การคำนวณหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยวิธีคณิตศาสตร์วิเคราะห์ของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบ สามารถคำนวณได้ตามสมการที่ (3.22) และสมการที่ (3.25) ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับการคำนวณด้วยวิธีจำลองแบบประจุตามที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.2 นั้น ปรากฏว่ามีความถูกต้องอยู่ในเกณฑ์ 99.2% ซึ่งทำให้เกิดความมั่นใจได้ว่าการคำนวณด้วยวิธีจำลองแบบประจุสามารถนำไปใช้คำนวณหาศักย์และสนามไฟฟ้าได้

ผลการคำนวณของศักย์และสนามไฟฟ้าของแท่งกลมวางขนานกับพื้นระนาบด้วยวิธีคณิตศาสตร์วิเคราะห์ เปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธีจำลองแบบประจุโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ปรากฏในภาคผนวกที่ 2 และ 3

3.4 การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าของแท่งกลมปลายมนกับระนาบ

ในข้อ 3.2 และข้อ 3.3 ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยวิธีจำลองแบบประจุมีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจ เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีคณิตศาสตร์วิเคราะห์ ตอนนี้เราจะทำการคำนวณหาศักย์และสนามไฟฟ้าในแท่งของอิเล็กโทรดแท่งกลมปลายมนกับระนาบ ซึ่งสามารถเปลี่ยนค่าแฟกเตอร์สนามไฟฟ้าได้ง่ายดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทนำ

3.4.1 การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า



รูปที่ 3.9 แสดงประจุจำลองของแท่งกลมปลายมนกับระนาบพร้อมทั้งภาพเงา

การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าของแท่งกลมปลายมนกับระนาบตั้งในรูปที่ 3.9 ซึ่งมีระยะแก๊ปเท่ากับ G และแท่งกลมปลายมนมีรัศมีเท่ากับ R ด้วยวิธีจำลองแบบประจุนั้น ได้ทำการจำลองประจุของแท่งกลมปลายมนด้วยการสมมติให้ประจุเป็นจุด (Q_P) รวมทั้งจุดศูนย์กลางของครึ่งทรงกลมของปลายมน ซึ่งจะเป็นประจุแทนปลายมน และส่วนที่เป็นแท่งกลมต่อจากครึ่งทรงกลมแทนด้วยประจุเชิงเส้น (Q_L) ตามแนวแกนของแท่งกลม จากประจุที่จำลองขึ้นนี้ทำให้สามารถคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าได้จากสมการ

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}$$

โดยอาศัยทฤษฎีภาพเงาทำให้คำนวณหาศักย์ไฟฟ้าได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \phi(r, z) &= \frac{Q_P}{4\pi\epsilon l_1} + \frac{Q_{P'}}{4\pi\epsilon l_2} + \frac{Q_L}{4\pi\epsilon} \int_A^{\infty} \frac{dB}{[r^2 + (B - z)^2]^{1/2}} \\ &+ \frac{Q_{L'}}{4\pi\epsilon} \int_A^{\infty} \frac{dB}{[r^2 + (B + z)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

เมื่อ A คือ ระยะเริ่มต้นของประจุแบบเชิงเส้น

และ B คือ ระยะใด ๆ ของประจุแบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } Q_P &= -Q_{P'} \quad \text{และ} \quad Q_L = -Q_{L'} \\ \text{และกำหนดให้ } q_P &= \frac{Q_P}{4\pi\epsilon} \quad \text{และ} \quad q_L = \frac{Q_L}{4\pi\epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \phi(r, z) &= \frac{q_P}{l_1} - \frac{q_P}{l_2} + \Sigma q_L \left[\int_A^{\infty} \frac{dB}{[r^2 + (B - z)^2]^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \int_A^{\infty} \frac{dB}{[r^2 + (B + z)^2]^{1/2}} \right] \\ &= \frac{q_P}{l_1} - \frac{q_P}{l_2} + \Sigma q_L \left[\ln \left| \frac{B - z + [r^2 + (B - z)^2]^{1/2}}{B + z + [r^2 + (B + z)^2]^{1/2}} \right| \right]_A^{\infty} \end{aligned}$$

$$= q_p \left[\frac{1}{[r^2 + (G + R - z)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (G + R + z)^2]^{1/2}} \right] \\ + \sum q_L \ln \left| \frac{A + z + [r^2 + (A + z)^2]^{1/2}}{A - z + [r^2 + (A - z)^2]^{1/2}} \right|$$

หรืออาจเขียนสั้น ๆ ได้ว่า

$$\phi(r, z) = q_p S(r, z) + \sum q_L W(r, z, A) \quad (3.28)$$

$$\text{โดยที่ } S(r, z) = \frac{1}{[r^2 + (G + R - z)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (G + R + z)^2]^{1/2}}$$

$$\text{และ } W(r, z, A) = \ln \left| \frac{A + z + [r^2 + (A + z)^2]^{1/2}}{A - z + [r^2 + (A - z)^2]^{1/2}} \right|$$

ส่วนค่าของสนามไฟฟ้าจะสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ของสมการ

$$E = -\nabla\phi(r, z) \\ = -E_r(r, z) - E_z(r, z) \quad (3.29)$$

ค่าของสนามไฟฟ้าในแนวแกน R จะหาได้ ดังนี้

$$E_r(r, z) = q_p \left[\frac{\partial}{\partial r} S(r, z) \right] + \sum q_L \frac{\partial}{\partial r} [W(r, z, A)] \\ = q_p \left[\frac{r}{[r^2 + (G + R) + z]^2]^{3/2}} - \frac{r}{[r^2 + (G + R) - z]^2]^{3/2}} \right] \\ + \sum q_L \left[\frac{r}{[r^2 + (A + z)^2]^{1/2} [A + z + [r^2 + (A + z)^2]^{1/2}]^2} \right] \\ - \frac{r}{[r^2 + (A - z)^2]^{1/2} [A - z + [r^2 + (A - z)^2]^{1/2}]^2} \right]$$

(3.30)

ในทำนองเดียวกันค่าของสนามไฟฟ้าในแนวแกน z จะหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 E_z(r, z) &= q_p \left[\frac{\partial}{\partial z} S(r, z) \right] + \Sigma q_L \frac{\partial}{\partial z} [W(r, z, A)] \\
 &= q_p \left[\frac{G + R - z}{[r^2 + (G + R - z)^2]^{3/2}} + \frac{G + R + z}{[r^2 + (G + R + z)^2]^{3/2}} \right] \\
 &\quad + \Sigma q_L \left[\frac{1 + [(A + z)/[r^2 + (A + z)^2]^{1/2}]}{A + z + [r^2 + (A + z)^2]^{1/2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 + (A - z)/[r^2 + (A - z)^2]^{1/2}}{A - z + [r^2 + (A - z)^2]^{1/2}} \right] \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

การคำนวณหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้า จำเป็นจะต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดัง

ต่อไปนี้

- 1.) ส่วนที่เป็นแท่งกลม ให้ศักย์ไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 1 หน่วย

$$\text{นั่นคือ } \phi(R, z_j) = 1 \quad \text{ที่ } z_j \geq G + R$$

- 2.) ทำนองเดียวกันที่ปลายบนจะมีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับ 1 หน่วย

$$\text{นั่นคือ } \phi(0, G) = 1$$

- 3.) เพื่อช่วยให้การคำนวณมีประสิทธิภาพดีขึ้น ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ที่ 2 และที่ 4 ของสมการศักย์ไฟฟ้าที่ปลายบนแล้วให้มีค่าเท่ากันศูนย์.

จากรูปที่ 3.9 จะได้ว่า

$$r = R \sin c$$

$$z = G + R - R \cos c$$

แทนค่า r และ z ซึ่งปรากฏในเทอมของมุม c ในสมการที่ (3.28)

$$\text{ดังนั้น } \phi(c) = \alpha_p S(c) + \Sigma \alpha_L W(c, A) \quad (3.32)$$

$$\text{โดยที่ } S(c) = \frac{1}{R} - \frac{1}{[R^2 \sin^2 c + [2(G+R) - R \cos c]^2]^{1/2}}$$

$$\text{และ } W(c, A) = \frac{A+G+R-R \cos c + [R^2 \sin^2 c + (A+G+R-R \cos c)^2]^{1/2}}{A-G-R+R \cos c + [R^2 \sin^2 c + (A-G-R+R \cos c)^2]^{1/2}}$$

ทำการอนุพันธ์ที่ 2 และที่ 4 สมการที่ (3.32) จะได้

$$\left. \frac{d}{dc} \phi(c) \right|_{c=c_i} = \frac{d}{dc} S(c) + \frac{d}{dc} W(c, A) ; n = 2, 4 \quad (3.33)$$

รายละเอียดการหาอนุพันธ์ที่ 2 และที่ 4 จะปรากฏในภาคผนวกที่ 5 ในที่นี้จะแสดงผลที่ได้จากการอนุพันธ์แล้ว กล่าวคือ

$$\left. \frac{d}{dc} \phi(c) \right|_{c=0} = \frac{2R(G+R)}{(2G+R)^3} + \frac{R(A+G) + R(A+G+R)}{2(A+G)^2} + \frac{R(A-G) + R(A-G-R)}{2(A-G)^2} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dc} \phi(c) \right|_{c=0} &= \frac{-36R^2(G+R)^2}{[2(G+R)-R]^5} - \frac{2R(G+R)}{[2(G+R)-R]^3} - \frac{R}{2(A+G)} \\ &\quad - \frac{3R^2 + 2R(A+G+R)}{4(A+G)^2} - \frac{6R^2(A+G+R)}{4(A+G)^3} \\ &\quad - \frac{9R^2(A+G+R)^2}{4(A+G)^4} - \frac{R}{2(A-G)} \\ &\quad + \frac{3R^2 - 2R(A-G-R)}{4(A-G)^2} + \frac{6R^2(A-G-R)}{4(A-G)^3} \\ &\quad + \frac{9R^2(A-G-R)^2}{4(A-G)^4} \quad (3.35) \end{aligned}$$

3.4.2 การกำหนดตำแหน่งของประจุจำลองและตำแหน่งขอบเขต

เพื่อที่จะทำให้เกิดผิวสมศักย์ที่ผิวของอิเล็กโทรด จำเป็นที่จะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นที่เหมาะสม คือ ค่าของ Z และ A ซึ่ง Abou - Seada [21] ได้กำหนดไว้ดังนี้

$$z_i = G + R, G + R + 1.0, G + R + 4.0, G + R + 14.0, \\ G + R + 39.0, G + R + 139.0, G + R + 439.0 ; i = 1, 7$$

$$A_j = G + R, G + R + 0.1, G + R + 0.2, G + R + 0.5, G + R + 1.0, \\ G + R + 9.0, G + R + 24.0, G + R + 89.0, G + R + 239.0 ; j = 1, 9$$

ค่าของ G คือ ระยะแก๊ป ส่วน R คือ ขนาดของรัศมีของอิเล็กโทรด

3.4.3 ขั้นตอนการคำนวณหาศักย์และสนามไฟฟ้า

จากเงื่อนไขขอบเขตและการกำหนดตำแหน่งของประจุจำลองและตำแหน่งของขอบเขตจะสามารถคำนวณหาค่าของประจุจำลองแบบจุดและแบบเชิงเส้นได้จากสมการที่ (3. 1) คือ

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^N p_{ij} q_j = \phi_i$$

หรือ เขียนในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} V_1(z_1; A_1) & \dots & V_1(z_1; A_9) & P_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ V_1(z_7; A_1) & \dots & V_1(z_7; A_9) & P_1 \\ V_0(G; A_1) & \dots & V_0(G; A_9) & P_0 \\ V_2(G; A_1) & \dots & V_2(G; A_9) & P_2 \\ V_4(G; A_1) & \dots & V_4(G; A_9) & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ V_0 และ P_0 คือ สัมประสิทธิ์ของศักย์ที่เกิดจากประจุแบบเชิงเส้นและแบบเชิงจุดตามลำดับ ตามเงื่อนไขขอบเขตข้อที่ 2.) ค่าของ V_0 และ P_0 นี้ปรากฏในสมการที่ (3.28)

ส่วนค่า V_1 และ P_1 คือ สัมประสิทธิ์ของศักย์ที่เกิดจากประจุแบบเชิงเส้นและแบบเชิงจุดตามลำดับตามเงื่อนไขขอบเขตข้อที่ 1) ค่าของ V_1 และ P_1 นี้ปรากฏในสมการที่ (3.32)

ส่วนค่า V_2, V_4 และ P_2, P_4 คือ สัมประสิทธิ์ของศักย์ที่เกิดจากประจุแบบเชิงเส้นและแบบเชิงจุดตามลำดับตามเงื่อนไขข้อที่ 3.) ค่าของ V_2, V_4, P_2 และ P_4 ปรากฏในสมการที่ (3.34) และ (3.35)

การหาค่าของ $[Q]$ เราใช้โปรแกรมซิมูเทินชื่อ SIMQ ซึ่งใช้เทคนิคของเกาส์ (Gaussian algorithm) [19] เมื่อได้เงื่อนไขต่าง ๆ แล้ว จะสามารถคำนวณศักย์ไฟฟ้าได้ตามสมการที่ (3.28) และสนามไฟฟ้าได้ตามสมการที่ (3.29) โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณหาค่าต่าง ๆ ดังโปรแกรมในรูปที่ 3.13

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.5 การคำนวณหาแรงดันเริ่มต้น

การคำนวณหาแรงดันเริ่มต้นหรือแรงดันเบรคควอน์โดยตรงของแก๊สแห้งกลบปลายมณกับระนาบในก๊าซซึ่งจัดว่าเป็นสนามไฟฟ้าแบบไม่สม่ำเสมอ อาจคำนวณได้โดยใช้ทฤษฎีของสตรีมเมอร์ดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ซึ่งมีเงื่อนไขว่าจำนวนอิเล็กตรอนหรือไอออนบวกได้ 10^8 จำนวนอิเล็กตรอนหรือไอออนบวกนั้นหาได้จากการอินทิเกรต $\int \alpha dx$ ดังในสมการที่ (2.21)

$$\text{นั่นคือ} \quad \int_0^x \alpha dx = \ln N_c = K \quad (2.21)$$

ซึ่ง α อยู่ในฟังก์ชันของ $\frac{E}{P}$ คือ

$$\frac{\alpha}{P} = C \left[\frac{E}{P} (x) - \left(\frac{E}{P} \right)_c \right]^n \quad (2.22)$$

ในกรณีของอากาศจะได้ว่า [13]

$$C = 0.191 \text{ kV}^{-2}$$

$$\left(\frac{E}{P} \right)_c = 24.4 \text{ kV/cm-bar}$$

$$n = 2$$

ในกรณีของก๊าซ SF_6 จะได้ว่า [13]

$$C = 27 \text{ kV}^{-1}$$

$$\left(\frac{E}{P} \right)_c = 87.7 \text{ kV/cm-bar}$$

$$n = 1$$

เมื่อแทนค่าสมการ (2.22) ในสมการ (2.21) จะได้

$$\int_0^x \left[\frac{E}{P} (x) - \left(\frac{E}{P} \right)_c \right]^n dx = \frac{K}{PC} \quad (3.36)$$

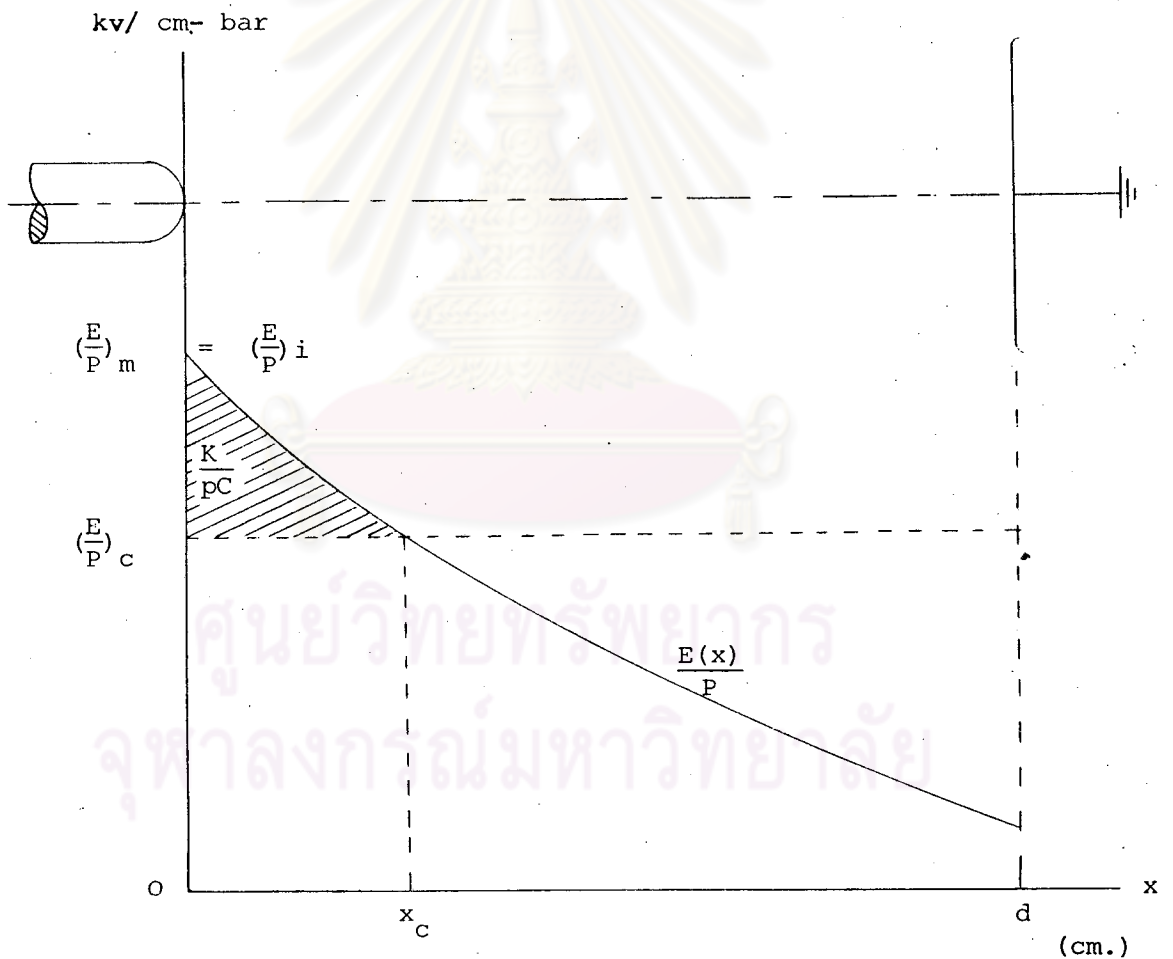
3.5.1 แรงดันเริ่มต้นของก๊าซ SF₆

ในกรณีของก๊าซ SF₆ สมการ (3.36) จึงเขียนได้ว่า .

$$\int_0^x \left[\frac{E}{P}(x) - \left(\frac{E}{P} \right)_c \right] dx = \frac{K}{PC}$$

$$\int_0^x \frac{E}{P}(x) dx - \left(\frac{E}{P} \right)_c x_c = \frac{K}{PC} \quad (3.37)$$

จากความสัมพันธ์ของสมการที่ (3.37) อาจเขียนแสดงด้วยกราฟในรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 แสดงการหาพื้นที่วิกฤต $\frac{K}{PC}$ ของก๊าซ SF₆

3.5.2 แรงดันเริ่มต้นของอากาศ

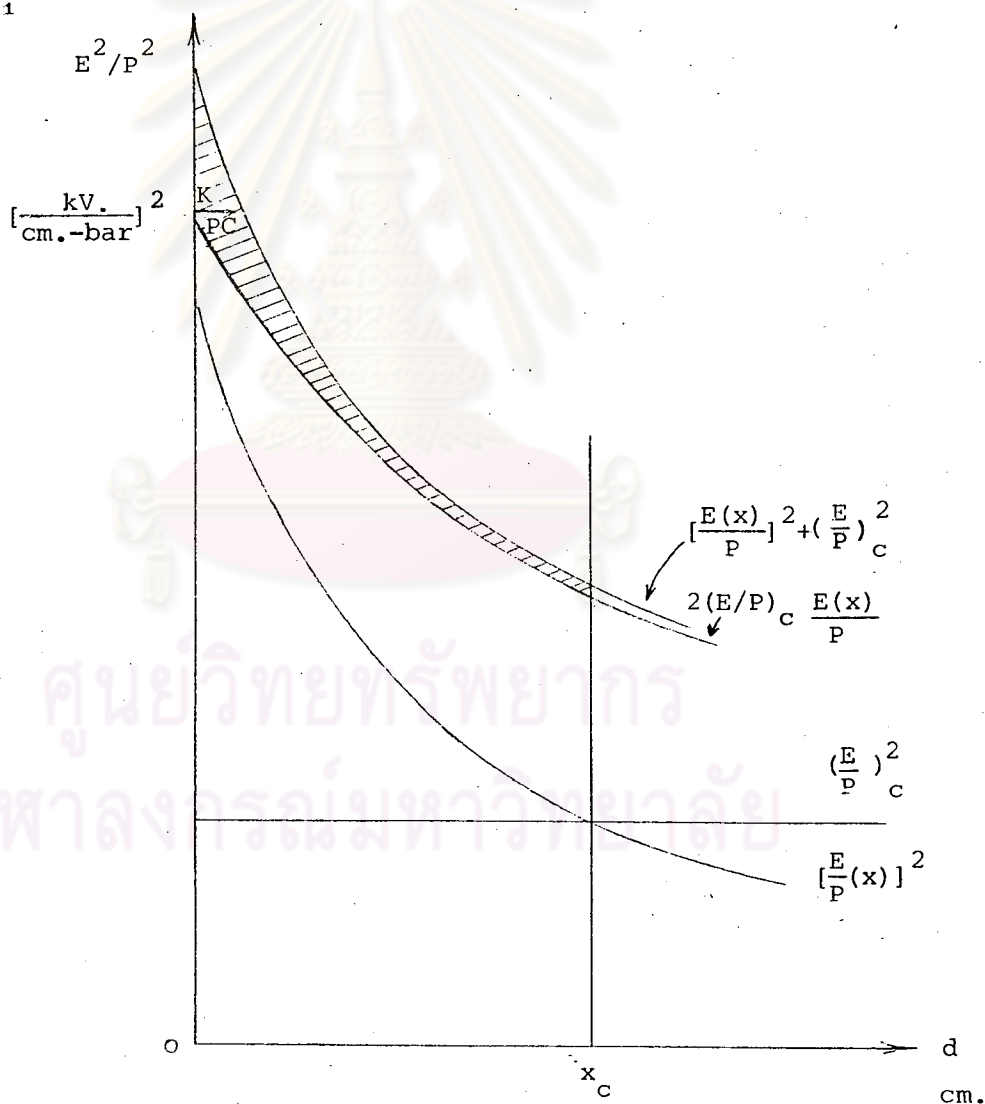
ในกรณีของอากาศสมการ (3.36) จึงเขียนได้ว่า

$$\int_0^{x_c} \left[\frac{E}{P}(x) - \left(\frac{E}{P} \right)_c \right]^2 dx = \frac{K}{PC}$$

$$\int_0^{x_c} \left[\frac{E(x)}{P} \right]^2 dx - 2 \left(\frac{E}{P} \right)_c \int_0^{x_c} \frac{E(x)}{P} dx + \left(\frac{E}{P} \right)_c^2 x_c \quad (3.38)$$

จากความสัมพันธ์ของสมการที่ (3.38) อาจเขียนแสดงด้วยกราฟเช่นเดียวกับรูปที่ 3.10

ดังในรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 แสดงการหาพื้นที่วิกฤต $\frac{K}{PC}$ ของอากาศ

ดังนั้น เงื่อนไขที่ทำให้เกิดเบรคดาวนหรือเกิดโคโรนาเริ่มเกิดสำหรับกรณีโคโรนา
นำเบรคดาวน ก็คือพื้นที่วิกฤต $\frac{K}{PC}$ การคำนวณหาค่าแรงดันเริ่มต้นนี้ทำได้โดยใช้โปรแกรม
คอมพิวเตอร์ดังปรากฏในข้อ 3.4 รูปที่ 3.13

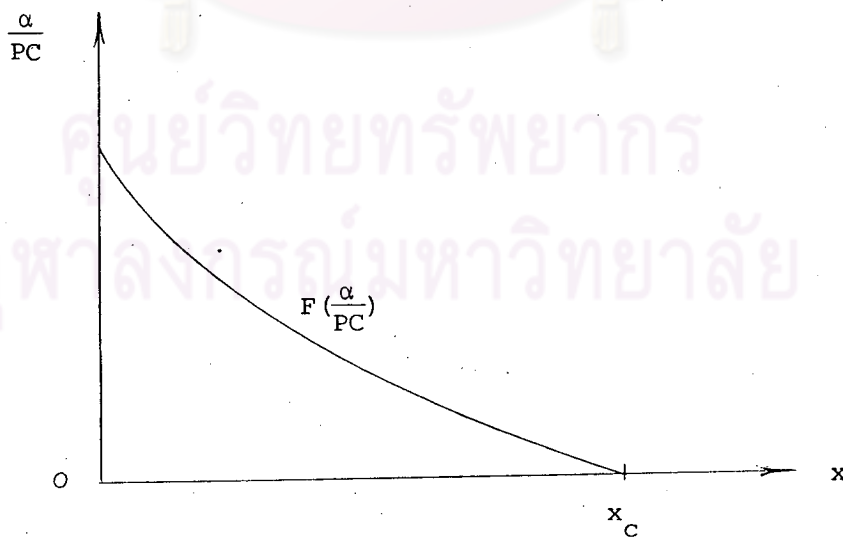
3.6 การคำนวณหาระยะวิกฤต (x_c)

ระยะวิกฤต (x_c) หมายถึง ระยะความยาวของอะวาลานซ์ที่มีจำนวนอิเล็กตรอนใน
อะวาลานซ์ได้เงื่อนไขสตรีมเมอร์ที่ทำให้เกิดแรงดันเริ่มต้นหรือแรงดันเบรคดาวน นั่นคือ จำนวน
อิเล็กตรอน $e^{\alpha x}$ เท่ากับ 10^8

การหาระยะวิกฤตเราใช้เทคนิคของ Newton Raphson [22] กล่าวคือ

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{\frac{df(x^k)}{dx}} \quad (3.29)$$

เมื่อพิจารณากราฟของสมการ $\frac{\alpha}{P}$ ในฟังก์ชันของ $\frac{E}{P}$ ซึ่ง $\frac{E}{P}$ อยู่ในฟังก์ชันของระยะ x
ก็จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ดังในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 แสดงความสัมพันธ์ของ $\frac{\alpha}{PC}$ กับระยะ x

ในสมการ (3.39) แทนค่า $F(x)$ ด้วย $F(\frac{\alpha}{PC})$ จากสมการ (2.22) จะได้

$$\begin{aligned}
 x^{k+1} &= x^k - \frac{f(\alpha/PC)}{df(\alpha/PC)} \\
 &= x^k - \frac{[\frac{E}{P}(x) - (\frac{E}{P})_c]^n}{\frac{d}{dx}[\frac{E}{P}(x) - (\frac{E}{P})_c]^n} \\
 &= x^k - \frac{\frac{E}{P}(x) - (\frac{E}{P})_c}{n \frac{d}{dx}[\frac{E}{P}(x)]} \\
 &= x^k - \frac{E(x) - P[(\frac{E}{P})_c]}{n \frac{d}{dx} E(x)} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

สมการที่ (3.40) เป็นสมการทั่วไปในการหาระยะเวลาชักรุก x_c ซึ่งค่าของ $(\frac{E}{P})_c$ และ n ขึ้นกับชนิดของก๊าซและ $E(x)$ ขึ้นอยู่กับลักษณะของอิเล็กทรอนิกส์

จากรูปที่ 3.9 ค่าของ $\frac{\partial}{\partial x} E(x)$ ก็คือ $\frac{\partial}{\partial z} E(z)$ ดังนั้นจากสมการที่ (3.31) จะได้ค่าอนุพันธ์ของ $E_z(r, z)$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} E_z(r, z) &= q_p \frac{\partial^2}{\partial z^2} S(r, z) + q_L \frac{\partial^2}{\partial z^2} W(r, z, A) \\
 &= q_p \left[\frac{2}{(G+R-z)^3} - \frac{2}{(G+R+z)^3} \right] + \Sigma q_L \frac{4Az}{(A^2 - z^2)^2} \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่า x_c อาจคำนวณได้จากสมการที่ (3.40) และ (3.41) ดังแสดงใน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์รูปที่ 3.13

3.7 การคำนวณแฟกเตอร์สนามไฟฟ้า (η^*)

จากนิยามค่าแฟกเตอร์สนามไฟฟ้าดังที่ได้กล่าวแล้วในข้อ 2.3 คือ

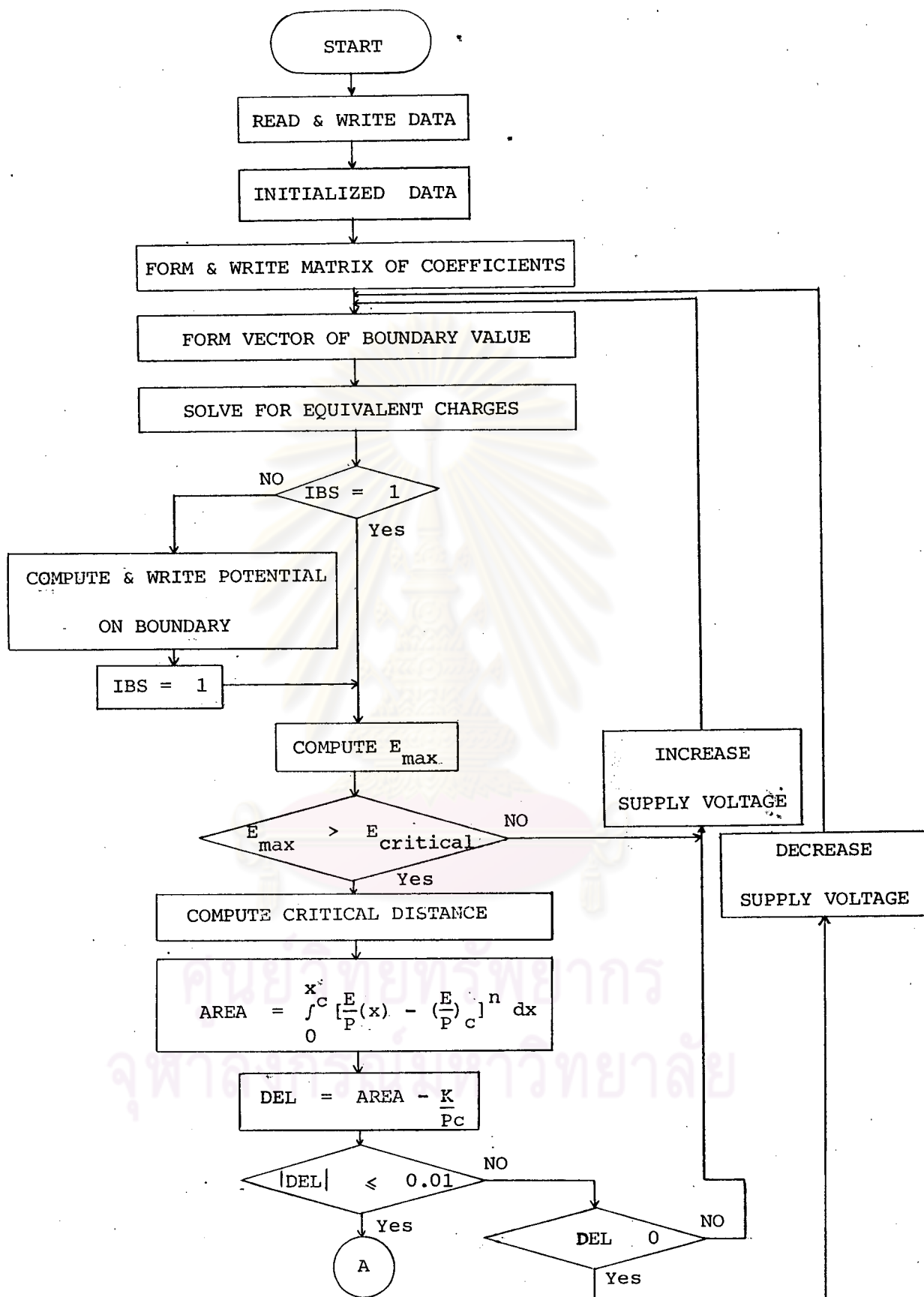
$$\eta^* = \frac{E_{ave.}}{E_{max.}} \times 100\%$$

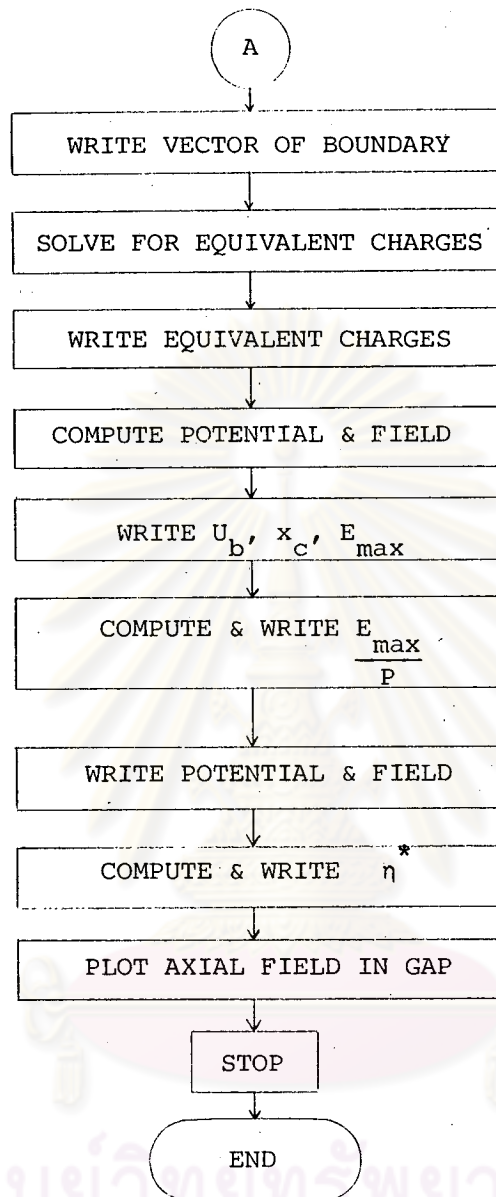
โดยที่ $E_{ave.}$ คือ ค่าสนามไฟฟ้าเฉลี่ยและ $E_{max.}$ คือ ค่าสนามไฟฟ้าสูงสุด ซึ่งทั้งค่า $E_{ave.}$ และ $E_{max.}$ นี้ได้จากการคำนวณค่าสนามไฟฟ้ากระจายในแก๊ปของอิเล็กโทรดที่กำหนดที่แรงดันค่าใดค่าหนึ่งด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์

3.8 การคำนวณหาสนามไฟฟ้ากระจายที่แรงดันเริ่มต้น

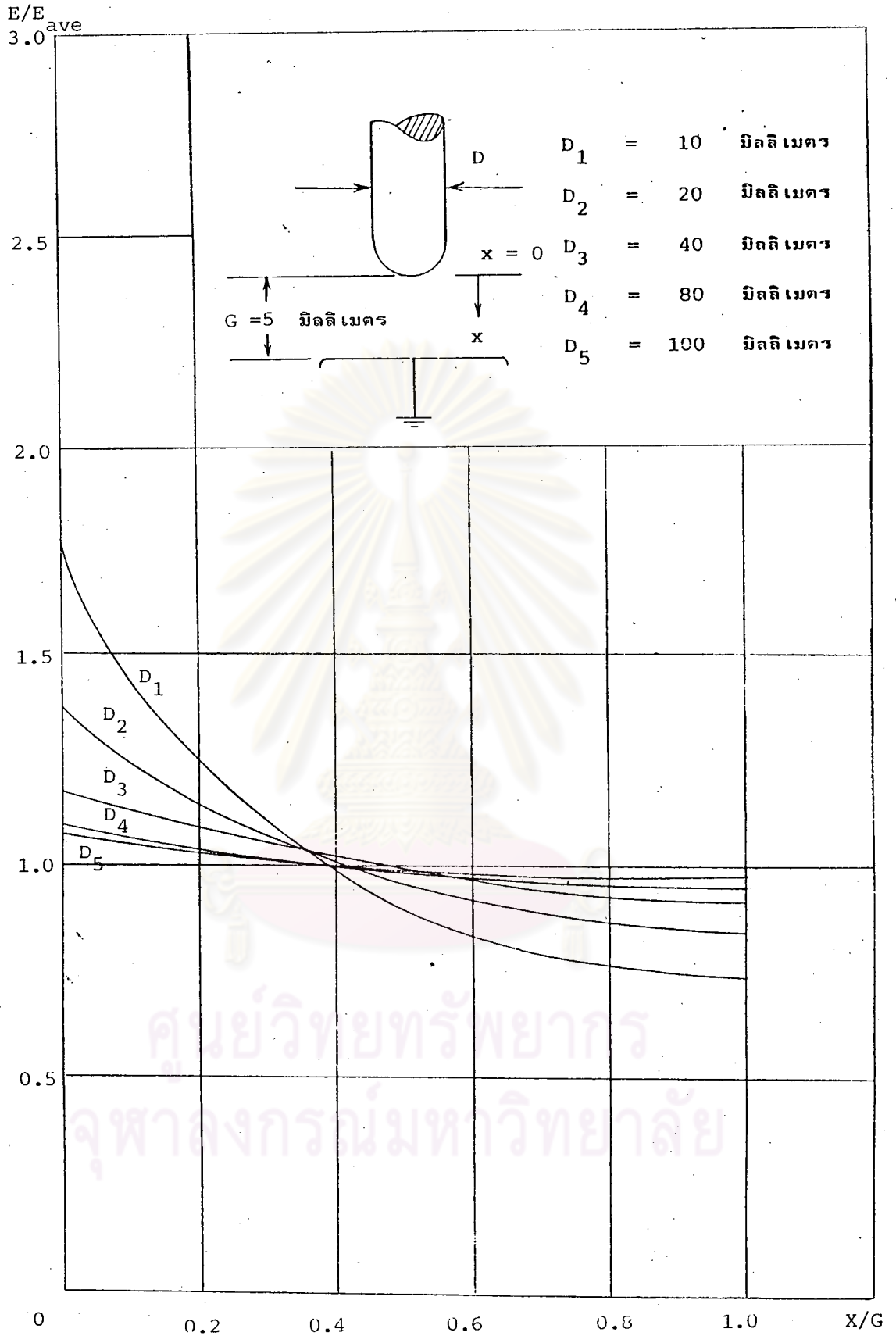
เพื่อความเข้าใจในการเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของสนามไฟฟ้าในแก๊ปจึงทำการคำนวณหาสนามไฟฟ้ากระจายเทียบกับสนามไฟฟ้าเฉลี่ยคือ $E/E_{ave.}$ ของอิเล็กโทรดขนาดต่าง ๆ ที่ระยะแก๊ปคงที่ คือ 5, 10, 20 และ 40 มิลลิเมตร ตามลำดับ ค่าที่คำนวณได้แสดงเปรียบเทียบในรูปที่ 3.14, 3.15, 3.16 และ 3.17 ตามลำดับ จากกราฟจะเห็นได้ว่าความเครียดสนามไฟฟ้าสูงสุด เกิดที่ผิวยอดสุดของอิเล็กโทรดปลายมนและจะมีค่าสูงขึ้นเมื่ออิเล็กโทรดมีขนาดเล็กลง ค่าที่คำนวณได้จะมีค่าสูงถึงประมาณ 7 เท่า ของค่าสนามไฟฟ้าเฉลี่ยเมื่ออิเล็กโทรดมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 มิลลิเมตร ที่ระยะแก๊ป 40 มิลลิเมตร หรือที่แฟกเตอร์สนามไฟฟ้า 14.2%

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



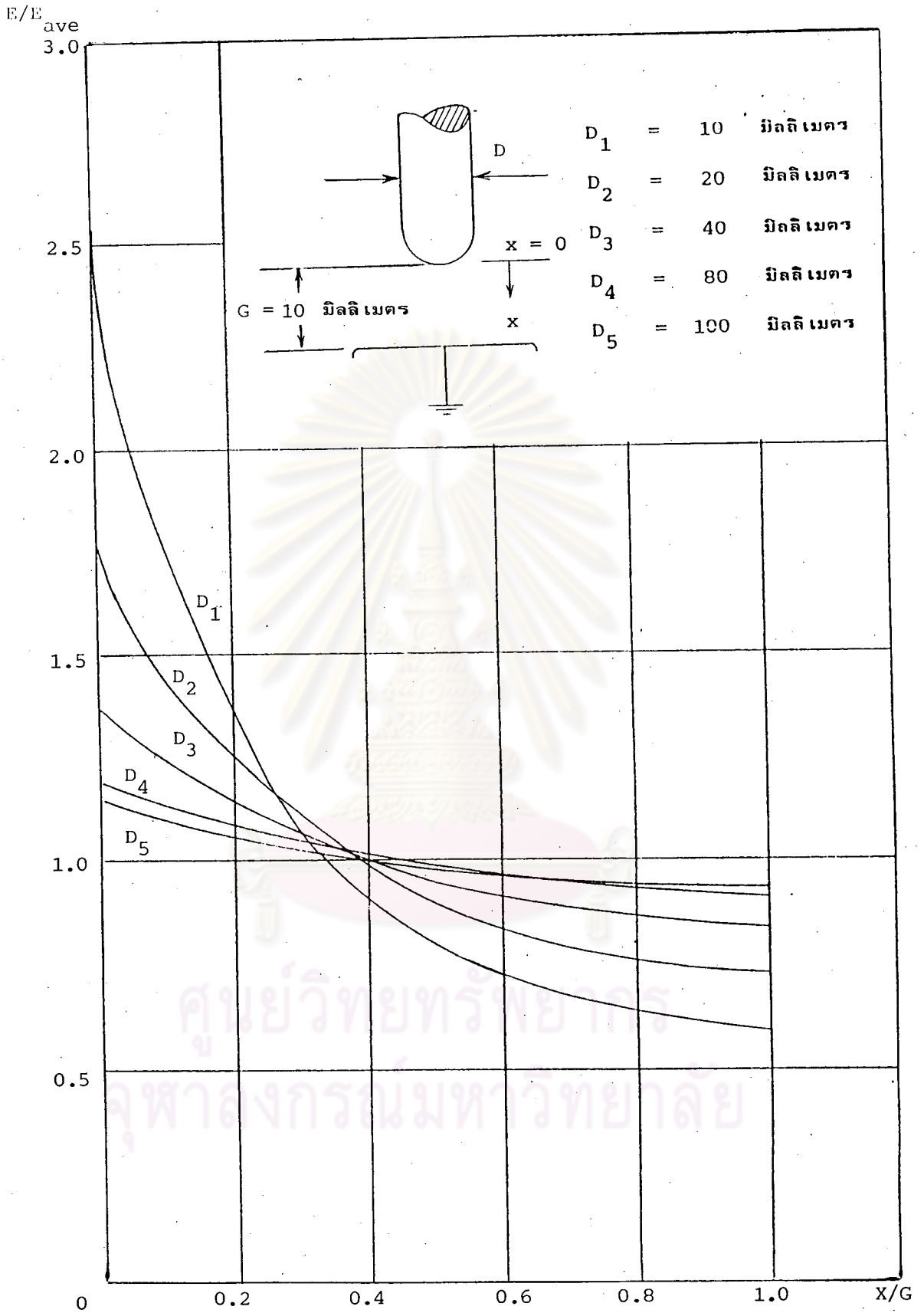


รูปที่ 3.13 แสดง FLOW CHART การคำนวณของอิเล็คโทรดแท่งกลมปลายมน
กับระนาบ

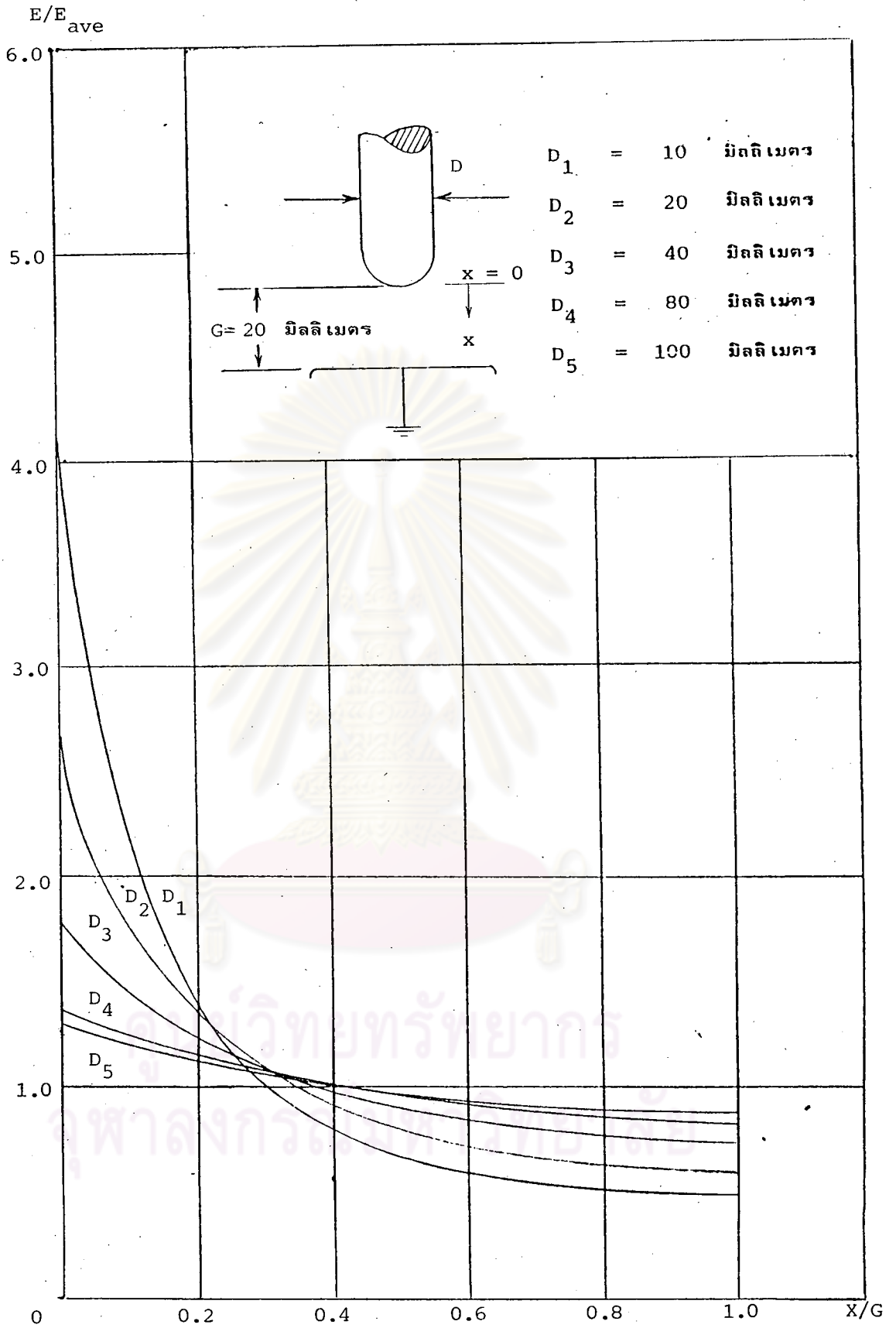


รูปที่ 3.14 แสดงการเปรียบเทียบสนามไฟฟ้ากระจายของอิเล็กโทรดขนาดต่าง ๆ

ในแก๊ป 5 มิลลิเมตร

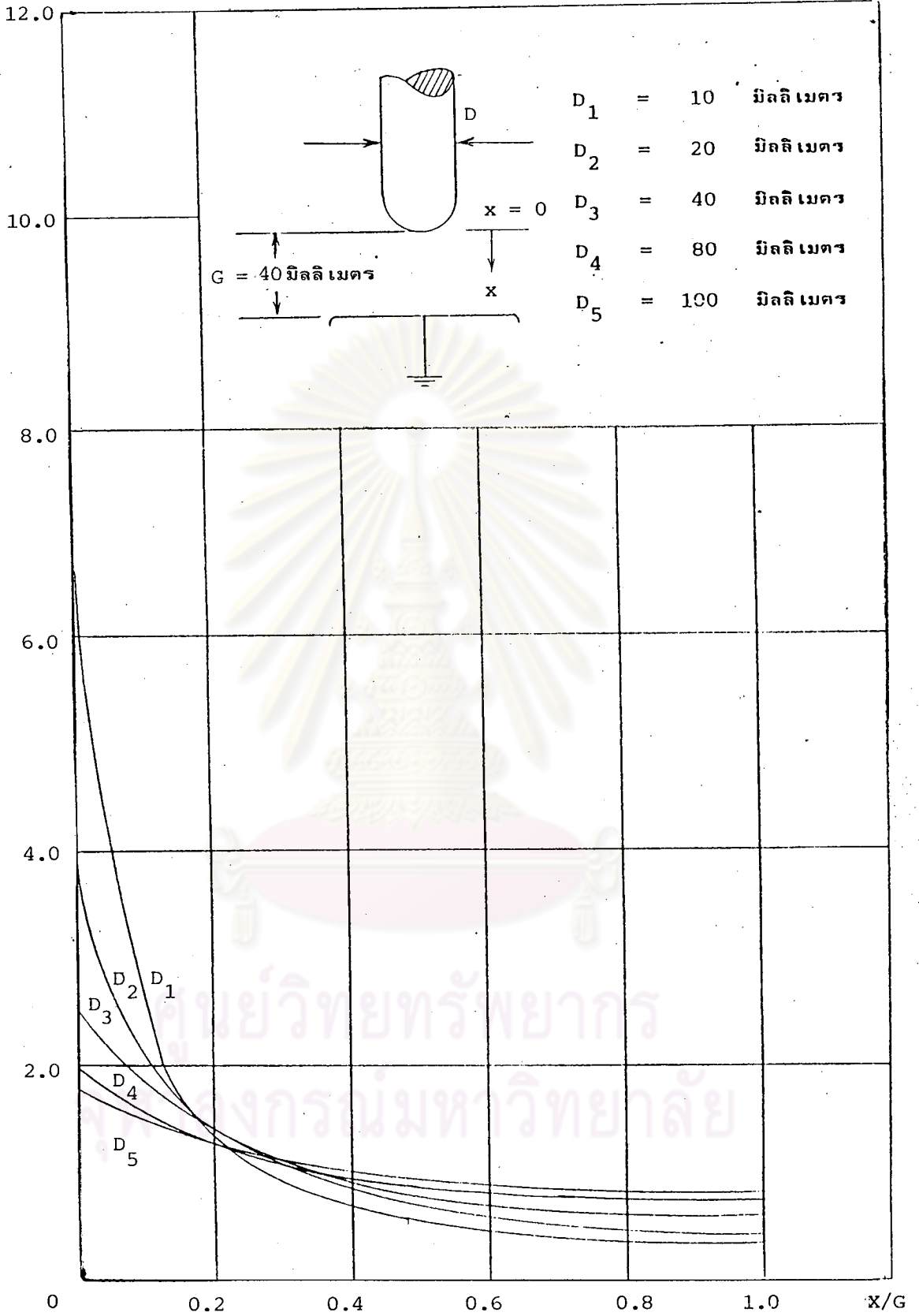


รูปที่ 3.15 แสดงการเปรียบเทียบสนามไฟฟ้ากระจายของอิเล็กโทรดต่าง ๆ
ในแก๊ป 10 มิลลิเมตร



รูปที่ 3.16 แสดงการเปรียบเทียบสนามไฟฟ้ากระจายของอิเล็กโทรดต่าง ๆ
ในแก๊ส 20 มิลลิเมตร

E/E_{ave}



รูปที่ 3.17 แสดงการเปรียบเทียบสนามไฟฟ้ากระจายของอิเล็กโทรดต่าง ๆ
ในแก๊ป 40 มิลลิเมตร