บทที่ 2

ตรรกวิทยาคลาสสิคของประพจน์ (Classical Propositional Logic)

ระบบ PM

1. ไวยากรณภาค (syntax) ไวยากรณภาคของภาษา L_p ของระบบ PM ประกอบด้วย

1.1 สัญลักษณ์พื้นฐาน (primitive symbols)

1) ตัวแปรประพจน์ (propositional variables) p, q, r, . . .

2) ตัวเชื่อม (operator)

$\sim$ [ตัวเชื่อมปฏิเสธ (negation)]

$\vee$ [ตัวเชื่อมให้เลือก(disjunction)]

และเพิ่ม (,) เป็นเครื่องหมายบอกวรรคตอน

นิยาม

นิพจน์ (expression) คือสัญลักษณ์จำนวนจำกัดของ L_p ที่วางเรียงกัน

สูตรปรมาณู (atomic formula) คือตัวแปรประพจน์ที่เขียนเดี่ยวๆ

สูตรมาตรฐาน (well-formed formula) คือนิพจน์ที่สร้างขึ้นด้วยกฎการสร้างสูตร

1.2 กฎการสร้างสูตร (formation rules)

1) สูตรปรมาณูเป็นสูตรมาตรฐาน

2) ถ้า ϕ เป็นสูตรมาตรฐาน แล้ว $\sim\phi$ ก็เป็นสูตรมาตรฐาน

3) ถ้า ϕ, ψ เป็นสูตรมาตรฐาน แล้ว $(\phi \vee \psi)$ ก็เป็นสูตรมาตรฐาน

1.3 สัจพจน์ (axioms)

A1. $(\sim(p \vee p) \vee p)$

A2 $(\sim q \vee (p \vee q))$

A3 $(\sim(p \vee q) \vee (q \vee p))$

A4 $(\sim(\sim q \vee r) \vee ((\sim(p \vee q) \vee (p \vee r)))$

นิยาม เมื่อ ϕ, ψ เป็นสูตรมาตรฐานใดๆ

1) $[\longrightarrow]$ $(\phi \longrightarrow \psi) =_{df} (\sim\phi \vee \psi)$

2) $[\cdot\ ]$ $(\phi \cdot \psi) =_{df} \sim(\sim\phi \vee \sim\psi)$

3) $[\longleftrightarrow]$ $(\phi \longleftrightarrow \psi) =_{df} ((\phi \longrightarrow \psi) . (\psi \longrightarrow \phi))$

$=_{df}$ หมายถึง "เขียนย่อแทน"

หมายเหตุ สัจพจน์A1, A2, A3, A4 เขียนได้อีกแบบคือ A1′ , A2′ , A3′ , A4′ โดยใช้นิยามดังนี้

A1′. $((p \vee p) \longrightarrow p)$

A2′. $(q \longrightarrow (p \vee q))$

A3′. $((p \vee q) \longrightarrow (q \vee p))$

A4′. $(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \vee q) \longrightarrow (p \vee r))$

1.4 กฎการอนุมาน (rule of inference)

1) กฎการแทนที่ (rule of substitution)

ถ้า ϕ เป็นสูตรมาตรฐานที่ประกอบด้วยตัวแปรประพจน์ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ และ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ เป็นตัวแปรประพจน์(ไม่จำเป็นต้องต่างกัน)แล้วสรุป $\phi(\beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2, \ldots, \beta_n/\alpha_n)$ ได้

$\phi(\beta_i/\alpha_i)$ หมายถึง β_i แทน α_i ใน ϕ

2) กฎการยืนยันเงื่อนไข (rule of modus ponens)

จาก ϕ และ $\phi \longrightarrow \psi$ ให้สรุป ψ

<u>นิยาม</u>

ข้อพิสูจน์ (proof) ของระบบPM คืออนุกรม (sequence) ของสูตรมาตรฐานของL_p ซึ่งสูตรมาตรฐานแต่ละสูตรเป็นสัจพจน์ของ PM หรือได้จากสูตรมาตรฐานที่มาก่อนในอนุกรมนั้นโดยใช้กฎการอนุมาน หรือได้จากสูตรมาตรฐานที่มาก่อนโดยใช้นิยาม

ทฤษฎีบท (theorem) คือสูตรมาตรฐานสูตรสุดท้ายของข้อพิสูจน์ใดๆ

จากนิยามนี้ สัจพจน์ก็เป็นทฤษฎีบทด้วย

เมื่อกำหนดสัจพจน์ และมีกฎการอนุมานแล้ว ก็ใช้สิ่งเหล่านี้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของ PM นี่คือตัวอย่างการพิสูจน์ทฤษฎีบท

$$(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

A4′	: $(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \vee q) \longrightarrow (p \vee r))$	(1)
(1)$(\sim p/p)$*	: $(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((\sim p \vee q) \longrightarrow (\sim p \vee r))$	(2)
(2)XDef$\longrightarrow$ **	: $(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$	(3)

บันทัดสุดท้ายของข้อพิสูจน์คือทฤษฎีบทของ PM โดยวิธีนี้ เราจะได้ทฤษฎีบทมาจำนวนหนึ่ง

2. <u>อรรถภาค</u> (semantics)

2.1 <u>อรรถการ</u> (interpretation)

ขอบเขตของตัวแปรประพจน์ p, q, r, . . . คือประพจน์ (proposition) หรือประโยคในภาษาพูดธรรมดา เฉพาะที่เป็นจริง (T) หรือเป็นเท็จ (F)ได้ อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวในสถานการณ์(situation) ที่กำหนดให้ การให้อรรถการของตัวแปรประพจน์คือการกำหนดค่าความจริง(truth-value) T หรือ F ให้แก่ตัวแปรนั้นๆ การกำหนดเช่นนี้ในกรณีหนึ่งๆเป็นอรรถการหนึ่ง

---

*แทน p ด้วย ~p ใน (1)

**จาก (2) ใช้นิยามของ $\longrightarrow$

2.2 <u>ความจริง</u> (truth)

การหาค่าความจริงของสูตรมาตรฐาน เช่น p, $p \vee q$, $p . q$, $p \longrightarrow q$ และ $p \longleftrightarrow q$ หาได้จากตารางความจริง (truth-table) ซึ่งกำหนดดังนี้ โดยให้ 1 แทน "จริง" และ 0 แทน "เท็จ"

	~
1	0
0	1

.	1	0
1	1	0
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\longrightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\longleftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าความจริงของสูตรมาตรฐาน $\sim(p \longrightarrow \sim q) \longrightarrow q$ เมื่อกำหนดค่าความจริงของ p, q คือ 1, 0 ตามลำดับ

~	(p	$\longrightarrow$	~	q)	$\longrightarrow$	q
0	1	1	1	0	$\boxed{1}$	0

ดูค่าความจริงของสูตรนี้ภายใต้ตัวเชื่อมสำคัญ จะได้ว่าสูตรนี้มีค่าความจริงเป็น 1 (จริง)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าความจริงของสูตรมาตรฐาน $((p \longrightarrow q).p) \longrightarrow q$

กรณีที่โจทย์ไม่ได้กำหนดสถานการณ์ หรืออรรถการของตัวแปรประพจน์แต่ละตัว การวิเคราะห์หาค่าความจริง จึงต้องวิเคราะห์หาในทุกอรรถการ (ทุกกรณีที่ค่าความจริงของแต่ละตัวแปรจะเป็นไปได้ ซึ่งจะมีได้ 2^n กรณี เมื่อ n คือจำนวนของตัวแปร)

p	q	$((p \longrightarrow q)$	$.p)$	$\longrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

วิเคราะห์แล้วได้ว่าสูตรมาตรฐานนี้มีค่าความจริงเป็น 1 (จริง)ทุกอรรถการ

การกำหนดค่าความจริงของสูตรมาตรฐาน อาจกำหนดได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้ ให้ V เป็นฟังก์ชั่น(function) ที่กำหนดค่า 1 หรือ 0 แก่สูตรมาตรฐานที่ประกอบด้วยตัวเชื่อม เมื่อกำหนดค่าความจริงของแต่ละตัวแปรมาให้ เขียน $V(p) = 1$ เมื่อต้องการบอกว่า V กำหนดค่า 1 แก่ p (V assigns the value 1 to p) เขียน $V(q) = 0$ หมายความว่า V กำหนดค่า 0 แก่ q หรือ q มีค่าความจริงเป็น 0 เมื่อเขียนตารางความจริงให้อยู่ในรูปฟังก์ชั่น V จะได้ดังนี้

1) สำหรับตัวแปรประพจน์แต่ละตัว, p_i จะได้ $V(p_i) = 1$ หรือมิฉะนั้น $V(p_i) = 0$ อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

2)[$V\sim$] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ, $V(\sim\phi) = 1$ ถ้า $V(\phi) = 0$ นอกจากนี้ $V(\sim\phi) = 0$

3)[$V\vee$] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ และ ψ ใดๆ, $V(\phi\vee\psi) = 1$ ถ้า $V(\phi) = 1$ หรือ $V(\psi) = 1$ นอกจากนี้ $V(\phi\vee\psi) = 0$

4)[$V.$] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ และ ψ ใดๆ, $V(\phi.\psi) = 1$ ถ้า $V(\phi) = 1$ และ $V(\psi) = 1$ นอกจากนี้ $V(\phi.\psi) = 0$

5)[$V\longrightarrow$] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ และ ψ ใดๆ, $V(\phi\longrightarrow\psi) = 1$ ถ้า $V(\phi) = 0$ หรือ $V(\psi) = 1$ นอกจากนี้ $V(\phi\longrightarrow\psi) = 1$

6)[$V\longleftrightarrow$] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ และ ψ ใดๆ, $V(\phi\longleftrightarrow\psi) = 1$ ถ้า $V(\phi) = V(\psi)$ นอกจากนี้ $V(\phi\longleftrightarrow\psi) = 0$

2.3 <u>ความจริงสมบูรณ์</u>(validity)

สูตรมาตรฐานที่มีค่าความจริงเป็น 1 ทุกอรรถการ เป็นสูตรมาตรฐานที่จริงสมบูรณ์ หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า สูตรมาตรฐานนี้เป็นสัจประพจน์ (tautology)

การตรวจสอบว่าสูตรมาตรฐานสูตรหนึ่งจริงสมบูรณ์หรือไม่ ทำได้โดยการใช้ตารางความจริงของตัวเชื่อม $\sim$, . , $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ โดยการตรวจสอบทุกอรรถการ ซึ่งจะมีได้ทั้งหมด 2^n อรรถการ ถ้ามีแม้เพียงหนึ่งอรรถการที่สูตรมาตรฐานนั้นมีค่าความจริงเป็น 0 (เท็จ) สูตรมาตรฐานนั้นไม่จริงสมบูรณ์

จากตัวอย่างก่อน สูตรมาตรฐาน $(p \longrightarrow q).p) \longrightarrow q$ เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์หรือเป็นสัจประพจน์

3. ความสอดคล้องในระบบ(consistency) และความสมบูรณ์(completeness)

3.1 ความสอดคล้องในระบบ

มีปัญหาว่าระบบสัจพจน์เช่นนี้จะมีการขัดแย้งกันเองในระบบหรือไม่ นั่นคือถามว่าระบบสัจพจน์เช่นนี้สอดคล้องในระบบหรือไม่ ระบบสัจพจน์ใด สอดคล้องในระบบถ้าไม่มีสูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ ซึ่งทั้ง ϕ และ $\sim\phi$ เป็นทฤษฎีบทของระบบ เพราะถ้าระบบนั้นไม่สอดคล้องในระบบก็ไม่มีค่าอะไร

ระบบ PM นั้นสอดคล้องในระบบตามความหมายนี้

3.2 ความสมบูรณ์

เช่นเดียวกันอาจมีคำถามว่าระบบสัจพจน์หนึ่งสมบูรณ์หรือไม่ คือสัจพจน์ของระบบนั้นเพียงพอหรือมีกำลัง(powerful) พอหรือไม่ ที่จะพิสูจน์(derive) ทุกสูตรมาตรฐานที่จริงสมบูรณ์ของ PC* นั่นคือระบบสัจพจน์ของ PC ระบบหนึ่งสมบูรณ์ถ้าทุกสูตรมาตรฐานของ PC ที่จริงสมบูรณ์ เป็นทฤษฎีบทของระบบนั้น

สำหรับระบบ PM นั้น สมบูรณ์ในความหมายนี้**

---

* คือตรรกวิทยาคลาสสิคของประพจน์(propositional calculus)

** การพิสูจน์ความสอดคล้องในระบบ และความสมบูรณ์ของระบบ ค่อนข้างยุ่งยาก และไม่อยู่ในขอบข่ายของวิทยานิพนธ์นี้ จึงเพียงแต่กล่าวไว้โดยไม่แสดงการพิสูจน์ ผู้สนใจโปรดดู Hughes and Londey. The Element of Formal Logic. (London : Methuen & Co., 1965) pp.137-141

4. ระบบสัจพจน์ของ PC ระบบอื่นๆ

นอกจากระบบPM แล้ว ยังมีอีกหลายระบบด้วยกัน ซึ่งต่างกันที่สัจพจน์ จำนวนของสัจพจน์ สัญลักษณ์พื้นฐาน และกฎการอนุมาน จะเลือกมาแสดง 3 ระบบดังนี้

4.1 ระบบ TB

ระบบนี้คิดขึ้นโดยทาร์สกี (A. Tarski) และเบอร์เนย์ส(P. Berneys) ในปี ค.ศ. 1930 ซึ่งมีตัวเชื่อมอย่างเดียวคือตัวเชื่อมเงื่อนไข (implication) ส่วนกฎการอนุมานเหมือนPM มีสัจพจน์ดังนี้

(1) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

(2) $((p \longrightarrow q) \longrightarrow p) \longrightarrow p$

(3) $p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$

4.2 ระบบ PM^+

ระบบนี้ผู้เขียนวิทยานิพนธ์สมมุติขึ้น โดยมีทุกอย่างเหมือน PM แต่เพิ่มสัจพจน์เข้าไปหนึ่งอัน โดยเลือกจากสูตรมาตรฐานที่ไม่จริงสมบูรณ์ สัจพจน์ของระบบ PM^+ มีดังนี้

(1) - (4) เหมือนระบบ PM

(5) $(p \vee q) \longrightarrow p$

4.3 ระบบ K

เป็นระบบของเมนเดลสัน(Mendelson) มีตัวเชื่อม 2 อย่างคือ $\sim$ กับ $\longrightarrow$ กฎการอนุมาน คือกฎการยืนยันเงื่อนไข มีสัจพจน์ดังนี้

(1) $p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$

(2) $(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

(3) $(\sim q \longrightarrow \sim p) \longrightarrow ((\sim q \longrightarrow p) \longrightarrow q)$

5. จะเลือกระบบใด

มีปัญหาว่าในแต่ละระบบเหล่านี้ เมื่อทุกระบบสมบูรณ์ คือทุกสัจประพจน์ที่ประกอบด้วยตัวเชื่อมในระบบนั้นๆสามารถพิสูจน์ได้ในระบบ (คือทุกสัจประพจน์เป็นทฤษฎีบท) แล้วเราจะเลือกระบบใดที่ดีที่สุด สิ่งที่เราต้องการในระบบคือสัจประพจน์ แต่ทุกระบบก็

พิสูจน์สัจประพจน์ได้ เราจะเลือกระบบที่สามารถพิสูจน์สัจประพจน์ได้หมด (เป็นระบบที่ประกอบด้วยประพจน์ที่จริงสมบูรณ์ทุกประพจน์) พิจารณาแต่ละระบบดังนี้

5.1 <u>ระบบ TB</u>

ระบบนี้สามารถพิสูจน์สัจประพจน์ที่ใช้ตัวเชื่อม $\longrightarrow$ นี้เพียงอย่างเดียว แต่พิสูจน์สัจประพจน์ที่ใช้เครื่องหมายอื่นด้วย เช่น $\sim$ ไม่ได้ ระบบนี้จึงไม่เหมาะ เพราะได้สัจประพจน์น้อยไป

5.2 <u>ระบบ PM^+</u>

ระบบนี้สามารถพิสูจน์สัจประพจน์ได้หมดเหมือนระบบ PM คือทุกประพจน์ที่จริงสมบูรณ์อยู่ในระบบนี้หมด แต่ระบบนี้สามารถพิสูจน์ประพจน์ที่ไม่ใช่สัจประพจน์ได้ด้วย ระบบเช่นนี้เราจะไม่เลือกใช้เช่นเดียวกัน เพราะมีสิ่งที่เราไม่ต้องการปะปนอยู่

5.3 <u>ระบบ K</u>

ระบบนี้สามารถพิสูจน์สัจประพจน์ที่ใช้ตัวเชื่อม $\longrightarrow$ และ $\sim$ ได้หมด และสามารถพิสูจน์สัจประพจน์ที่ใช้เครื่องหมายอื่นอีกเหมือนในระบบ PM เพราะมีนิยามที่จะเปลี่ยนให้อยู่ในรูปตัวเชื่อมอื่นได้ นั่นคือระบบนี้สามารถพิสูจน์สัจประพจน์ได้เท่ากับระบบ PM จึงใช้ได้เช่นเดียวกับระบบ PM