บทที่ 2

สมการพื้นฐานของการไหล (Basic Flow Equation)

บทนี้เป็นการแสดงโครงสร้างของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (differential equation system) ที่ใช้ในการอธิบายตำแหน่ง และการเคลื่อนไหวของอนุภาคในปรากฏการณ์ไหลแบบราบเรียบสองมิติที่เวลาหนึ่ง โดยใช้หลักการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) และหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) เพื่อศึกษาลักษณะการไหล ที่เกี่ยวกับความเร็ว ความดัน และความเค้นที่ขึ้นกับความหนืด (viscosity) ในเงื่อนไขขอบที่เหมาะสมบนโดเมนของการไหล (flow domain)

2.1 ประเภทของของไหล (Category of fluid)

ในการแก้ปัญหาการไหล สมมติให้สสารมีภาวะต่อเนื่องโดยไม่มีช่องว่างในสสารนั้น เพื่อสามารถวิเคราะห์คุณสมบัติของสสารซึ่งเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องเทียบกับตำแหน่งและเวลา

จากกฎของนิวตันที่กล่าวไว้ในหนังสือของ รศ.ดร. ณรงค์ฤทธิ์ และ ผศ.ดร. ชาคริต [1] และของ Morton และ Jones [2] สามารถแบ่งของไหลได้เป็น 2 ชนิด คือของไหลที่มีสมบัติเป็นไปตามกฎของนิวตัน เรียกว่าของไหลนิวโตเนียน (Newtonian fluid) และของไหลที่มีสมบัติไม่เป็นไปตามกฎของนิวตัน เรียกว่าของไหลนอนนิวโตเนียน (non-Newtonian fluid)

ของไหลนิวโตเนียนเป็นของไหลที่มีขนาดโมเลกุลเล็ก ๆ เช่น น้ำ สารละลาย เป็นต้น ของไหลชนิดนี้มีความหนืดคงตัว เนื่องจากอัตราส่วนของความเค้นเฉือนต่ออัตราการเฉือนคงตัว

ส่วนของไหลนอนนิวโตเนียน จะมีสมบัติแตกต่างจากนิวโตเนียน คือ ความหนืดในรูปแบบของแรงเฉือนจะเปลี่ยนไป เมื่อมีการเปลี่ยนอัตราความเครียดเฉือน เช่น ยาสีฟัน น้ำแป้ง พอลิเมอร์ เป็นต้น

2.2 สมการพื้นฐาน (Basic equation)

ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของหลักการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัม เป็นสมการเริ่มต้นในการแก้ปัญหาการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad (2.1)$$

สมการ (2.1) สามารถกระจายได้ดังนี้

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.2}$$

ให้ $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ และ $v = \frac{\partial y}{\partial t}$

จะได้ว่า

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho_x u + \rho_y v + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.3}$$

เมื่อของไหลมีความหนาแน่นคงตัว สมการ (2.3) สามารถจัดรูปได้ใหม่เป็น

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \tag{2.4}$$

โดยที่

t คือ เวลา

ρ คือ ความหนาแน่น

$\vec{U}$ คือ เวกเตอร์ความเร็ว

∇ คือ ตัวดำเนินการเกรเดียนต์

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมใน 2 มิติ คือ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \vec{U}) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \vec{U}) = \rho f_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \tag{2.6}$$

โดยที่

f_x คือ แรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน x

f_y คือ แรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน y

u คือ ความเร็วในแนวแกน x

v คือ ความเร็วในแนวแกน y

σ_x คือ ความเค้นฉากในแนวแกน x

σ_y คือ ความเค้นฉากในแนวแกน y

τ_{xy} คือ ความเค้นเฉือนในแนวแกน y บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x

τ_{yx} คือ ความเค้นเฉือนในแนวแกน x บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y

ในวิทยานิพนธ์นี้ ของไหลเป็นแบบไม่อัดตัว (incompressible fluid) และความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงตัวทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่าง ๆ อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0 \tag{2.7}$$

เรียกสมการ (2.7) ว่าสมการความต่อเนื่อง

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{2.8}$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}) = \rho f_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \tag{2.9}$$

และ

$$\tilde{\sigma} = \tilde{T} - P\tilde{I} \tag{2.10}$$

โดยที่

$\tilde{\sigma}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นของโคชี

$\tilde{T}$ คือ เทนเซอร์ความเค้น

P คือ ความดัน

$\tilde{I}$ คือ เทนเซอร์เอกลักษณ์

ใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม สำหรับกรณีของไหลนิวโตเนียนที่มีความหนืด และความหนาแน่นคงตัว

$$\rho\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \mu\nabla^2\bar{U} - \rho\bar{U}\cdot\nabla\bar{U} - \nabla P \tag{2.11}$$

เรียกสมการที่ (2.11) ว่า สมการเนเวียร์สโตกส์ ซึ่งสามารถเขียนในรูปเทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตร้าได้ดังนี้

$$\rho\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \nabla\cdot\tilde{T} - \rho\bar{U}\cdot\nabla\bar{U} - \nabla P \tag{2.12}$$

เมื่อ

$$\tilde{T} = 2\mu\tilde{D} \tag{2.13}$$

และ

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\nabla\bar{U} + \nabla\bar{U}^t) \tag{2.14}$$

โดยที่

$\tilde{T}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตร้า

μ คือ ความหนืด

$\tilde{D}$ คือ เทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป

$(\ )^t$ คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

แปลงสมการ (2.7) และ (2.12) ให้อยู่ในระบบสมการไร้หน่วย (dimensionless) โดยมีรูปแบบดังนี้

ความยาวแกน x	$x^* = \frac{1}{L}x$
ความยาวแกน y	$y^* = \frac{1}{L}y$
ความเร็ว	$u^* = \frac{1}{V}u$
ความดัน	$P^* = \frac{1}{\mu_0 V}P$
ความเค้น	$T^* = \frac{L}{\mu_0 V}T$
เวลา	$t^* = \frac{V}{L}t$
ตัวดำเนินการเกรเดียนต์	$\nabla^* = L\nabla$
อนุพันธ์เมื่อเทียบกับเวลา	$\frac{D}{Dt^*} = \frac{L}{V}\frac{D}{Dt}$
เวลาผ่อนคลาย (relaxation time)	$\lambda_i^* = \frac{V}{L}\lambda_i$
ความหนืด	$\mu_i^* = \frac{1}{\mu_0}\mu_i$

โดยที่

$x^*, y^*, u^*, P^*, T^*, t^*, \nabla^*, \frac{D}{Dt^*}, \lambda_i^*, \mu_i^*$ เป็นค่าตัวแปรในระบบไร้หน่วยและมี

L คือ ความยาวอ้างอิง

μ_0 คือ ความหนืดอ้างอิง

V คือ ความเร็วอ้างอิง

เมื่อแปลงสมการ (2.7) และ (2.12) ให้อยู่ในระบบไร้หน่วย แล้วเราจะละเครื่องหมาย * ไว้ ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้คือ

$$\mathrm{Re}\,\bar{U}_t = \nabla\cdot\tilde{T} - \mathrm{Re}\,\bar{U}\cdot\nabla\bar{U} - \nabla P \qquad (2.15)$$

และ

$$\nabla\cdot\bar{U} = 0$$

จะพบว่าสมการ (2.15) ที่สร้างขึ้นใหม่นั้น มีตัวบ่งบอกคุณภาพ คือ ตัวเลขเรย์โนลด์ Re (Reynolds number) ซึ่งเป็นค่าอัตราของแรงเฉื่อย (inertia force) ต่อ แรงหนืด (viscous force) นั่นคือ

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho VL}{\mu_0} \qquad (2.16)$$

ตัวเลขเรย์โนลด์ที่มีค่าสูงบ่งบอกถึงแรงเฉื่อยสูง และตัวเลขเรย์โนลด์มีค่าน้อยแสดงถึงความหนืดที่มีค่ามาก ถ้าตัวเลขเรย์โนลด์มีค่าต่ำมาก การไหลนั้นจะเรียกว่าการไหลแบบช้าๆ (creeping flow)

สมการความเค้นของของไหลนิวโตเนียน คือ สมการ (2.13) แต่ในกรณีของไหลวิสโคอีลาสติก เทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตร้าจะถูกกำหนดโดย

$$\tilde{T} = 2\mu\tilde{D} + \tilde{\tau} \qquad (2.17)$$

โดยที่

$\tilde{\tau}$ คือ เทนเซอร์ความเค้น

2.3 สมการองค์ประกอบ (Constitutive equation)

2.3.1 ตัวแบบแมกซ์เวลล์ (The Maxwell model)

ในช่วงเริ่มแรกได้นำตัวแบบแมกซ์เวลล์ที่สร้างขึ้นโดย Maxwell [3,4] มาใช้ในการหาคุณลักษณะของไหลนอนนิวโตเนียน โดยรวมกฎของฮุกส์ (Hooke's law) ที่เขียนโดย Hooke [5] ซึ่งเกี่ยวกับความหนืดของนิวตัน ทำให้เทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตร้าเปลี่ยนเป็น

$$\tilde{T} + \frac{\mu_0}{G}\cdot\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t} = 2\mu_0\tilde{D} \qquad (2.18)$$

ต่อมาพบว่า ตัวแบบแมกซ์เวลล์ไม่สามารถอธิบายของไหลวิสโคอีลาสติกในวงกว้างได้ จึงพัฒนาตัวแบบแมกซ์เวลล์เป็นตัวแบบอ็อลดรอยด์

2.3.2 ตัวแบบอ็อลดรอยด์ (The Oldroyd model)

ตัวแบบอ็อลดรอยด์ที่สร้างขึ้นโดย Oldroyd [6] ได้พัฒนาจากตัวแบบแมกซ์เวลล์เป็นตัวแบบแมกซ์เวลล์แบบพาบนไม่เชิงเส้น (non-linear upper convected Maxwell model) ดังนี้

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\Delta}{\tilde{T}} = 2\mu_0 \tilde{D} \tag{2.19}$$

หรือตัวแบบแมกซ์เวลล์แบบพาล่างไม่เชิงเส้น (non-linear lower convected Maxwell model)

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\nabla}{\tilde{T}} = 2\mu_0 \tilde{D} \tag{2.20}$$

โดยที่

$$\overset{\Delta}{\tilde{T}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{U} \cdot \nabla \tilde{T} + \tilde{T} \cdot \nabla \tilde{U} + (\tilde{T} \cdot \nabla \tilde{U})^t \tag{2.21}$$

$$\overset{\nabla}{\tilde{T}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{U} \cdot \nabla \tilde{T} - \tilde{T} \cdot \nabla \tilde{U} - (\tilde{T} \cdot \nabla \tilde{U})^t \tag{2.22}$$

ในสมการอ็อลดรอยด์ทั่วไป (2.20) สามารถกระจายดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tilde{T}} + \frac{1}{2}\lambda_3 \left\{ \tilde{D} \cdot \tilde{T} + \tilde{T} \cdot \tilde{D} \right\} + \frac{1}{2}\lambda_5 \left(\tilde{T} \right)^t \tilde{D} + \frac{1}{2}\lambda_6 (\tilde{T} \cdot \tilde{D}) \tilde{I} \\ = 2\mu_0 \left(\tilde{D} + \lambda_2 \tilde{D} + \lambda_4 \left\{ \tilde{D} \cdot \tilde{D} \right\} + \frac{1}{2}\lambda_7 \left\{ \tilde{D} \cdot \tilde{D} \right\} \tilde{I} \right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

โดยที่

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots, \lambda_7$ คือ ค่าคงตัว

สมการ (2.23) เป็นสมการที่ซับซ้อน จึงลดรูปจากค่าคงตัว 8 ค่าเหลือเพียง 3 ค่า

$$\tilde{T} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tilde{T}} = 2\mu_0 (\tilde{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\tilde{D}}) \tag{2.24}$$

โดยที่

$\overset{\nabla}{\tilde{D}}$ คือ เทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปพาบน

และความหนืดอ้างอิงสามารถกระจายได้ดังนี้

$$\mu_0 = \mu_1 + \mu_2 \tag{2.25}$$

ทำการวิยุต (discretisation) สมการ (2.24) เป็นตัวแบบอ็อลดรอยด์บี (the Oldroyd-B model) ที่ได้นำไปใช้แล้วในงานของ Paddon และ Holstein [7] และงานของ Crochet และ Keunings [8]

โดยมี

$$\widetilde{T} = \widetilde{\tau} + 2\mu_2\widetilde{D} \tag{2.26}$$

และ

$$\widetilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\widetilde{\tau}} = 2\mu_1\widetilde{D} \tag{2.27}$$

โดยที่

$\overset{\nabla}{\widetilde{\tau}}$ คือ ความเค้นพาบน

λ_1 คือ เวลาที่ผ่อนคลาย

λ_2 คือ เวลาหน่วง (retardation time)

μ_1 คือ ความหนืดของตัวถูกละลายอีลาสติก (elastic solute viscosity)

μ_2 คือ ความหนืดของตัวทำละลายนิวโตเนียน (Newtonian solvent viscosity)

ในการเปลี่ยนระบบสมการมีหน่วย (2.24) ให้เป็นระบบสมการไร้หน่วยโดยใช้สมการการแปลงในหัวข้อ 2.2 จะได้ตัวบ่งบอกคุณภาพแสดงความยืดหยุ่นของของไหลที่เรียกว่าตัวเลขไวเซนเบอร์ก We (Weissenberg number) มีค่าดังนี้

$$We = \frac{\lambda_1 V}{L} \tag{2.28}$$

ในกรณีของของไหลนอนนิวโตเนียน ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราความหนืดต่ออัตราความเค้นเฉือน เป็นแบบไม่เชิงเส้น (non-linear) และไม่เป็นไปตามกฎเกี่ยวกับความหนืดของนิวตัน เพื่อที่จะสามารถศึกษาคุณสมบัติต่างๆ ของของไหลนอนนิวโตเนียนได้จึงต้องเปลี่ยนแปลงสมการที่เกี่ยวข้องกับส่วนประกอบของความเค้น (stress component) ที่เรียกว่า สมการองค์ประกอบ (constitutive equation) คือคุณลักษณะของไหลวิสโคอีลาสติก

2.4 การไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (Simple shear flow)

การไหลในรูปแบบที่เกิดจากแรงเฉือน เกิดจากการเคลื่อนที่ของของไหลที่ไหลผ่านท่อที่มีความแตกต่างของความดันศึกษาเพิ่มเติมได้ในงานของ Han [9] ส่วนประกอบของความเร็วในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system) คือ

$$V_x = \dot{\gamma} y \tag{2.29}$$

$$V_y = V_z = 0 \tag{2.30}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{dV_x}{dy} \tag{2.31}$$

โดยที่

$\dot{\gamma}$ คือ ความเครียดเฉือน

V_x คือ ความเร็วในแนวแกน x

V_y คือ ความเร็วในแนวแกน y

V_z คือ ความเร็วในแนวแกน z

และให้

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} \tag{2.32}$$

$$N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz} \tag{2.33}$$

โดยที่

N_1 คือ ความเค้นฉากอันดับหนึ่ง (first normal stress)

N_2 คือ ความเค้นฉากอันดับสอง (second normal stress)

และสามารถหาค่าความหนืดเฉือน μ_S (shear viscosity) ได้จาก

$$\mu_S = \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}} \tag{2.34}$$