# บทที่ 2

# ความรู้พื้นฐาน

บทนี้จะกล่าวถึงวิธีควบคุมการตอบรับการเรียกในระบบสื่อสารเคลื่อนที่ไร้สายแบบมัลติมีเดียที่พิจารณาทราฟฟิกในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น ซึ่งมีด้วยกัน 2 ประเภท คือ ประเภทที่ 1 แบบแผนที่ตั้งบนพื้นฐานของความจุแบบตายตัว ประเภทที่ 2 แบบแผนที่ตั้งบนพื้นฐานของความจุแบบไม่ตายตัว และกล่าวถึงเรื่องทฤษฎีเกมซึ่งใช้ในการกำหนดแนวทางการตัดสินใจในการควบคุมการตอบรับการเรียกเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในเรื่องของความเท่าเทียม ของระดับของบริการต่าง ๆ

## 2.1 การควบคุมการตอบรับการเรียก

วิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกในระบบสื่อสารเคลื่อนที่ไร้สายแบบมัลติมีเดียสามารถแบ่งตามชนิดของความจุของระบบที่พิจารณา โดยความจุของระบบสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ ประเภทที่ 1 แบบแผนที่ตั้งบนพื้นฐานของความจุแบบตายตัว ประเภทที่ 2 แบบแผนที่ตั้งบนพื้นฐานของความจุแบบไม่ตายตัว วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะอ้างอิงวิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 1 จาก [9] เนื่องจากเป็นวิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 1 ที่มีการพิจารณากรณีทราฟฟิกอสมมาตรระหว่างข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลง และมีการใช้ช่องสัญญาณกันแบบปรับตัวได้ในการกำหนดลำดับความสำคัญซึ่งมีความซับซ้อนในการคำนวณไม่มาก สำหรับวิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 2 จะอ้างอิงจาก [11] เนื่องจากเป็นวิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 2 ที่มีการพิจารณากรณีทราฟฟิกอสมมาตรระหว่างข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลง และมีการใช้ค่าจุดเริ่มเปลี่ยนในการกำหนดลำดับความสำคัญ รวมทั้งมีความซับซ้อนในการคำนวณไม่มาก

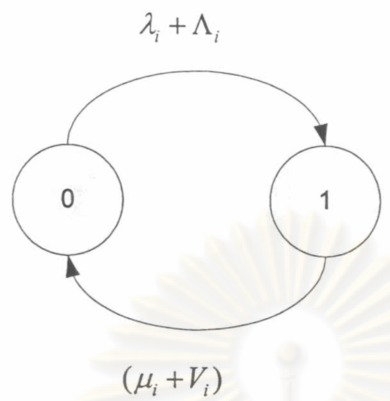
กำหนดให้ ความจุของเซลล์คือปริมาณของแบนด์วิดท์ (bps) ทั้งหมดภายในเซลล์ซึ่งเป็นค่าคงที่ กำหนดให้จำนวนระดับของบริการ (service level) ทั้งหมดมี $L$ ระดับ ในระหว่างที่มีการต่อของการเรียก การเรียกจะมีการเปลี่ยนแปลงไปมาระหว่างสถานะ active และ dormant ตาม activity factor ทั้งในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลง activity factor คืออัตราส่วนของเวลาเฉลี่ยที่การเรียกอยู่ในสถานะ active ต่อเวลาเฉลี่ยที่การเรียกดำเนินอยู่ในระบบ โดยกำหนดให้ $\alpha_i^{up}$ และ $\alpha_i^{dw}$ แทน activity factor ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลงของการเรียกในระดับที่ $i$ ตามลำดับ ดังนั้นอัตราบิตข้อมูลของการเรียกจึงมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามสถานะของการเรียก กำหนดให้ $R_i^{up}$ กับ $R_i^{dw}$ แทนอัตราบิตข้อมูล

แทนอัตราบิตข้อมูลในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลงของการเรียกในระดับที่ $i$ เมื่ออยู่ในสถานะ active ตามลำดับ $B_i^{up}$ และ $B_i^{dw}$ แทนค่าแบนด์วิดท์ประสิทธิผล (effective bandwidth) ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลงของการเรียกในระดับที่ $i$ ตามลำดับ ซึ่งเป็นปริมาณแบนด์วิดท์โดยเฉลี่ยตลอดระยะเวลาที่การเรียกดำเนินอยู่ ดังนั้น $B_i^{up} = \alpha_i^{up} R_i^{up}$ และ $B_i^{dw} = \alpha_i^{dw} R_i^{dw}$ เมื่อการร้องขอการเรียกในระดับที่ $i$ ได้รับการตอบรับ ก็จะได้รับการจัดสรรแบนด์วิดท์ประสิทธิผล $B_i^{up}$ และ $B_i^{dw}$ สำหรับข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลง กำหนดให้การเรียกในระดับที่ $i$ มีลำดับความสำคัญสูงกว่าการเรียกในระดับที่ $j$ ถ้า $i < j$ และการร้องขอการเรียกในระดับใดๆ จะถูกแบ่งออกเป็นการร้องขอการเรียกใหม่และการร้องขอการเรียกจากการแฮนด์ออฟ โดยกำหนดให้การร้องขอการเรียกจากการแฮนด์ออฟของระดับใดๆ มีลำดับความสำคัญสูงกว่าการร้องขอการเรียกใหม่ของทุกระดับ

ระบบเซลลูลาร์ประกอบด้วยเซลล์หลายเซลล์ แต่ในที่นี้จะพิจารณาเมื่อระบบรวมทั้งหมดอยู่ในสภาวะ homogeneous in statistical equilibrium ซึ่งเซลล์แต่ละเซลล์จะอยู่ในสภาวะเดียวกัน ดังนั้นค่าเฉลี่ยของอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟจะเท่ากับอัตราการแฮนด์ออฟออกไปยังเซลล์ข้างเคียงสำหรับการเรียกจากการแฮนด์ออฟทุกระดับ ด้วยสมมติฐานนี้ทำให้สามารถวิเคราะห์การทำงานของทั้งระบบได้โดยพิจารณาการทำงานจากเซลล์เพียงเซลล์เดียว

กำหนดสมมติฐานดังนี้ พิจารณาการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$, $0 \le i \le L-1$ กำหนดให้การเข้ามาของการเรียกใหม่เป็นไปตามกระบวนการปัวส์ซง (Poisson process) ด้วยอัตรา $\Lambda_i$, เวลาในการใช้บริการ (service time) มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential distribution) ด้วยค่าเฉลี่ย $1/\mu_i$, เวลาดเวลล์ (dwell time) ภายในเซลล์มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย $1/\nu_i$ ซึ่งจะได้ว่าการเข้ามาของการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ เป็นไปตามกระบวนการปัวส์ซงด้วยอัตรา $\lambda_i$ และเนื่องจากเวลาในการยึดการต่อ (connection holding time) คือค่าต่ำสุดระหว่างเวลาในการใช้บริการและเวลาดเวลล์ ดังนั้นเวลาในการยึดการต่อจึงมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลเช่นเดียวกันด้วยค่าเฉลี่ย $T_i = 1/(\nu_i + \mu_i)$

พิจารณาการเปลี่ยนสถานะ (state transition) ของการบริการแต่ละระดับ




**รูปที่** 2.1 การเปลี่ยนสถานะของการบริการของแต่ละระดับ

จากรูปที่ 2.1 จะเห็นได้ว่าพิจารณาค่าอัตราการเข้ามาของการเรียก (arrival rate) เป็นผลรวมของอัตราการเข้ามาของการเรียกใหม่กับอัตราการเข้ามาของการเรียกจากการแฮนด์ออฟ และค่าอัตราการสิ้นสุดของการเรียก (departure rate) เป็นผลรวมของอัตราการสิ้นสุดของการใช้บริการและอัตราการแฮนด์ออฟออกจากเซลล์ของการเรียกที่ดำเนินอยู่ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้พิจารณาระบบที่มีการให้บริการ 3 ระดับ ดังนั้นแผนภาพการเปลี่ยนสถานะที่พิจารณาจึงเป็นแบบ 3 มิติ

### 2.1.1 **วิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 1**

วิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทนี้จะใช้แนวคิดของการกันแบนด์วิดท์ (guard bandwidth) เพื่อให้ลำดับความสำคัญกับการเรียกในระดับต่าง ๆ โดยเมื่อมีการร้องขอการเรียกเกิดขึ้นสถานีฐานจะตอบรับการร้องขอการเรียกเมื่อแบนด์วิทด์ที่เหลืออยู่ในระบบมีค่าไม่ต่ำกว่าผลรวมของแบนด์วิดท์ที่ถูกกันและแบนด์วิดท์ที่การเรียกนั้นต้องการ

กำหนดให้ $W_{up}$ และ $W_{dw}$ คือแบนด์วิดท์ทั้งหมดของข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลงภายในเซลล์ตามลำดับ และสถานะของระบบแทนด้วย $s$

$$s = (n_0, n_1, \ldots, n_{L-1}) \tag{2.1}$$

โดยที่ $n_i(0 \le i \le L-1)$ แทนจำนวนการเรียกในระดับที่ $i$

กำหนดให้ $A$ คือสถานะของระบบทั้งหมดที่เป็นไปได้

$$A = \left\{ s : \left( \sum_{k=0}^{L-1} n_k B_k^u \le W_{up} \right) and \left( \sum_{k=0}^{L-1} n_k B_k^d \le W_{dw} \right) \right\} \tag{2.2}$$

เนื่องจากในวิทยานิพนธ์นี้พิจารณาทราฟฟิกในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นเท่านั้น ดังนั้นในส่วนของข่ายเชื่อมโยงขาลงจะไม่กล่าวถึง โดยค่าสถานะของระบบทั้งหมดจึงเป็น

$$A = \left\{ s : \left( \sum_{k=0}^{L-1} n_k B_k^u \le W_{up} \right) \right\} \tag{2.3}$$

กำหนดให้ $G_{h,i}^{up}$ คือแบนด์วิดท์ที่ถูกกันไว้ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นเมื่อมีการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ เข้ามาในระบบ ดังนั้น

$$G_{h,i}^{up} = \left( \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k T_k B_k^{up} \right) \Delta_i \tag{2.4}$$

โดยที่ $\lambda_k T_k B_k^{up}$ คือปริมาณแบนด์วิดท์ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นโดยเฉลี่ยที่การเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $k$ ต้องการ ดังนั้น $\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k T_k B_k^{up}$ คือปริมาณแบนด์วิดท์ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นทั้งหมดที่การเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่มีความสำคัญสูงกว่าระดับที่ $i$ ต้องการ และกำหนดให้ $G_{h,i}^{up}$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณแบนด์วิดท์ที่ถูกกันด้วยค่าสัมประสิทธิ์ $\Delta_i \ (0 \le \Delta_i \le 1)$ ดังนั้นเมื่อค่า $\Delta_i$ มีค่ามากจะทำให้ความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาดมีค่าลดลง แต่ก็ทำให้ประสิทธิภาพการใช้แบนด์วิดท์มีค่าลดลงด้วย

กำหนดให้ $G_{n,i}^{up}$ คือแบนด์วิดท์ที่ถูกกันไว้ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นเมื่อมีการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ เข้ามาในระบบ ดังนั้น

$$G_{n,i}^{up} = \left( \sum_{k=0}^{L-1} \lambda_k T_k B_k^{up} + \sum_{j=0}^{i-1} \Lambda_j T_j B_j^{up} \right) \Delta_i \tag{2.5}$$

โดยที่ $\left(\sum_{k=0}^{L-1}\lambda_k T_k B_k^{up}+\sum_{j=0}^{i-1}\Lambda_j T_j B_j^{up}\right)$ คือปริมาณแบนด์วิดท์ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นทั้งหมดที่การเรียกจากการแฮนด์ออฟทุกระดับและการเรียกใหม่ในระดับที่มีความสำคัญสูงกว่าระดับที่ $i$ ต้องการ

เมื่อระบบอยู่ในสถานะ $s$ และกำหนดให้แบนด์วิดท์ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นที่เหลืออยู่แทนด้วย $Q_{up}(s)$ ดังนั้น

$$Q_{up}(s)=W_{up}-\sum_{k=0}^{L-1}n_k B_k^{up} \tag{2.6}$$

สถานีฐานจะตอบรับการร้องขอการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ ก็ต่อเมื่อ $Q_{up}(s)-G_{n,i}^{up}\geq B_i^{up}$ ในทำนองเดียวกัน สถานีฐานจะตอบรับการร้องขอการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ ก็ต่อเมื่อ $Q_{up}(s)-G_{h,i}^{up}\geq B_i^{up}$

### 2.1.1.1 Flow Balance Equations

เมื่อสถานะของระบบแทนด้วย $s$ โดยที่ $s=(n_0,n_1,\ldots,n_{L-1})$ การเปลี่ยนสถานะจะเกิดขึ้นเมื่อเกิดเหตุการณ์ต่างๆ ดังนี้ การมาถึงของการเรียกใหม่, การมาถึงของการแฮนด์ออฟ, การสิ้นสุดของการเรียกที่ดำเนินอยู่ และการแฮนด์ออฟของการเรียกที่ดำเนินอยู่ไปยังเซลล์ข้างเคียง

กำหนดให้สถานะที่เกิดจากการเปลี่ยนจากสถานะ $s$ แทนด้วย

$$s_{i+}=(n_0,n_1,\ldots,n_{i-1},n_i+1,n_{i+1},\ldots,n_{L-1})$$
$$s_{i-}=(n_0,n_1,\ldots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\ldots,n_{L-1})$$

โดย $0\leq i\leq L-1$

พิจารณาการเปลี่ยนสถานะจาก $s$ ไปเป็น $s_{i+}$ เนื่องจากการเข้ามาของการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ กำหนดให้อัตราการเปลี่ยนสถานะแทนด้วย $q^n(s,i)$ ดังนั้น

$$q^n(s,i)=I_{Q_{up(s)}-G_{n,i}^{up}\geq B_i^{up}}\cdot\Lambda_i \tag{2.9}$$

โดย $I_c$ คือฟังก์ชัน Indication ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อเงื่อนไข $c$ เป็นจริง มิฉะนั้นจะมีค่าเท่ากับ 0

พิจารณาการเปลี่ยนสถานะจาก $s$ ไปเป็น $s_{i+}$ เนื่องจากการเข้ามาของการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ กำหนดให้อัตราการเปลี่ยนสถานะแทนด้วย $q^h(s,i)$ ดังนั้น

$$q^{h}(s,i) = I_{Q_{up(s)} - G_{h,i}^{up} \geq B_{i}^{up}} \cdot \lambda_{i} \tag{2.10}$$

พิจารณาการเปลี่ยนสถานะจาก $s$ ไปเป็น $s_{i-}$ เนื่องจากการสิ้นสุดของการเรียกในระดับที่ $i$ ที่ดำเนินอยู่ กำหนดให้อัตราการเปลี่ยนสถานะแทนด้วย $q^{c}(s,i)$ ดังนั้น

$$q^{c}(s,i) = n_{i}\mu_{i} \tag{2.11}$$

พิจารณาการเปลี่ยนสถานะจาก $s$ ไปเป็น $s_{i-}$ เนื่องจากการแฮนด์ออฟของการเรียกในระดับที่ $i$ ที่ดำเนินอยู่ไปยังเซลล์ข้างเคียง กำหนดให้อัตราการเปลี่ยนสถานะแทนด้วย $q^{d}(s,i)$ ดังนั้น

$$q^{d}(s,i) = n_{i}v_{i} \tag{2.12}$$

กำหนดให้ $\pi(s)$ แทนความน่าจะเป็นไม่แปรตามเวลา (stationary probability) ของสถานะ $s$ ความน่าจะเป็นไม่แปรตามเวลาจะสอดคล้องกับ flow balance equations ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\pi(s)\sum_{i=0}^{L-1}\left\{q^{n}(s,i)+q^{h}(s,i)+q^{c}(s,i)+q^{d}(s,i)\right\} \\ &=\sum_{i=0}^{L-1} I_{n_i \geq 1}\cdot\pi(s_{i-})\left\{q^{n}(s_{i-},i)+q^{h}(s_{i-},i)\right\} \qquad \text{สำหรับทุก } s \in A \\ &+\sum_{i=0}^{L-1} I_{s_{i+}\in A}\cdot\pi(s_{i+})\left\{q^{c}(s_{i+},i)+q^{d}(s_{i+},i)\right\} \end{aligned} \tag{2.13}$$



และสมการ normalization ดังนี้

$$\sum_{s\in A}\pi(s) = 1 \tag{2.14}$$

### 2.1.1.2 **ค่าที่ใช้ในการวัดสมรรถนะ** (Performance measures)

ค่าที่ใช้ในการวัดสมรรถนะขั้นพื้นฐานคือ ความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาดและความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ กำหนดให้ $\psi_i$ แทนความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ โดยการร้องขอการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ จะถูกปฏิเสธถ้าระบบอยู่ในสถานะต่อไปนี้

$$\xi_i = \left\{ s : (Q_{up}(s) - G_{n,i}^{up} < B_i^{up}) \right\} \quad \text{สำหรับ} \; 0 \le i \le L-1 \qquad (2.15)$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ คือ

$$\psi_i = \sum_{s \in \varepsilon_i} \pi(s) \qquad \text{สำหรับ} \; 0 \le i \le L-1 \qquad (2.16)$$

กำหนดให้ $\chi_i$ แทนความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาดในระดับที่ $i$ การเรียกจากแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ ที่มาจากเซลล์ข้างเคียงจะถูกปฏิเสธถ้าระบบอยู่ในสถานะต่อไปนี้

$$\phi_i = \left\{ s : (R_{up}(s) - G_{h,i}^{up} < B_i^{up}) \right\} \quad \text{สำหรับ} \; 0 \le i \le L-1 \qquad (2.17)$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาดในระดับที่ $i$ คือ

$$\chi_i = \sum_{s \in \phi_i} \pi(s) \qquad \text{สำหรับ} \; 0 \le i \le L-1 \qquad (2.18)$$

ค่าที่ใช้ในการวัดสมรรถนะอีกค่าหนึ่งคือ ค่าการใช้ประโยชน์แบนด์วิดท์ซึ่งก็คืออัตราส่วนของวิสัยสามารถต่อปริมาณแบนด์วิดท์ทั้งหมดในระบบ กำหนดให้ $\Gamma_i$ แทนค่าวิสัยสามารถสำหรับการเรียกระดับที่ 1

$$\Gamma_i = \sum_{s \in A} \pi(s)(n_i B_i^{up}) \qquad (2.19)$$

ดังนั้นจะได้ค่าการใช้ประโยชน์แบนด์วิดท์สำหรับการเรียกในระดับที่ $i$ คือ $U_i = \Gamma_i / W_{up}$ ดังนั้นค่าการใช้ประโยชน์แบนด์วิดท์รวม คือ

$$U_T = \sum_{i=0}^{L-1} \Gamma_i / W_{up} \tag{2.20}$$

ความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ (blocking probability of new call arrival, $\psi$) และความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาด (handoff failure probability, $\chi$) สามารถพิจารณาในรูปแบบของคุณภาพของบริการ (Quality of Service; QoS) ได้ โดยคุณภาพของบริการสำหรับการเรียกในระดับที่ $i$ คือค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่และความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาดสำหรับการเรียกในระดับที่ $i$ ซึ่งแทนด้วย $P_{b,i}$ ดังนี้

$$P_{b,i} = \alpha\psi_i + \varepsilon\chi_i \tag{2.21}$$

โดย $\alpha$ และ $\varepsilon$ คือค่าคงที่ซึ่งแทนผลของการบล็อกการเรียกใหม่และการแฮนด์ออฟผิดพลาดตามลำดับ $(\alpha + \varepsilon = 1)$ และ $\varepsilon > \alpha$ ในที่นี้กำหนดให้ $\alpha = 1/3$ และ $\varepsilon = 2/3$ [12] เนื่องจากการแฮนด์ออฟผิดพลาดมีผลต่อระบบมากกว่าการบล็อกการเรียกใหม่ดังนั้น โดยค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha$ และ $\varepsilon$ ที่กำหนดสามารถเปลี่ยนเป็นค่าอื่นได้ ขึ้นกับว่าต้องการให้มีค่าคงที่ที่ใช้ถ่วงน้ำหนักมีค่าอย่างไร

### 2.1.1.3 **การหาอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟ**

พิจารณาระบบเมื่อเข้าสู่สภาวะ homogeneous in statistical equilibrium ซึ่งค่าเฉลี่ยของอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ เท่ากับอัตราการแฮนด์ออฟของการเรียกในระดับที่ $i$ ไปยังเซลล์ข้างเคียง แสดงได้ดังนี้

$$\lambda_i = \sum_{s \in A} \pi(s) n_i v_i \qquad \text{สำหรับ } 0 \le i \le L-1 \tag{2.22}$$

ซึ่งพบว่าอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟจะสามารถคำนวณได้จากความน่าจะเป็นของแต่ละสถานะ ในขณะที่ความน่าจะเป็นของแต่ละสถานะก็จะต้องคำนวณจากอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟ ดังนั้นในการแก้ปัญหาจึงต้องใช้วิธี iterative ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้นของอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ เป็น $\lambda_i$ โดยกำหนดให้ $P_{h,i}$ คือความน่าจะเป็นที่การเรียกที่ดำเนินอยู่จะถูกแฮนด์ออฟไปยังเซลล์ข้างเคียง

$$P_{h,i} = \frac{v_i}{\mu_i + v_i} \tag{2.23}$$

ดังนั้น จะได้

$$\lambda_i = P_{h,i}\{\Lambda_i(1-\psi_i) + \lambda_i(1-\chi_i)\} \tag{2.24}$$

ถ้ากำหนดให้ $\psi_i$ <<1 และ $\chi_i$ << 1 จะได้

$$\lambda_i \approx \frac{P_{h,i}}{1-P_{h,i}}\Lambda_i = \frac{v_i}{\mu_i}\Lambda_i \tag{2.25}$$

2. คำนวณความน่าจะเป็นไม่แปรตามเวลา $\pi(s)$ จาก flow balance equations

3. คำนวณอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟค่าใหม่ $\lambda_{i,new}$

$$\lambda_{i,new} = \sum_{s\in A} \pi(s) n_i v_i \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \le i \le L-1 \tag{2.26}$$

4. กำหนดให้ $\varepsilon$ (>0) แทนค่าน้อยๆ และกำหนดให้ $\delta_i$ แทนฟังก์ชันแสดงความแตกต่างระหว่างอัตราการมาถึงของการเรียกจากการแฮนด์ออฟค่าเดิมและค่าใหม่ว่าน้อยกว่า $\varepsilon$ หรือไม่ ซึ่งแสดงดังนี้

$$\delta_i = \begin{cases} 1, if \left|1 - \dfrac{\lambda_{i,new}}{\lambda_i}\right| < \varepsilon \\ 0, otherwise. \end{cases} \tag{2.27}$$

5. แทนค่า $\lambda_i \leftarrow \lambda_{i,new}$ สำหรับ $0 \le i \le L-1$ ถ้า $\prod_{i=0}^{L-1} \delta_i = 0$ ให้กลับไปที่ขั้นตอนที่ 2

6. คำนวณความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ $\psi_i$, ความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาด $\chi_i$ และค่าการใช้ประโยชน์แบนด์วิดท์ $U_i$ สำหรับการเรียกทุกระดับ

### 2.1.2 วิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 2

วิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทนี้ถูกใช้ในระบบ CDMA ซึ่งความจุของเซลล์มีค่าแปรผันตามจำนวนการเรียกที่ดำเนินอยู่ภายในเซลล์และภายในเซลล์ข้างเคียงเนื่องจากสัญญาณแทรกสอดภายในช่องสัญญาณเดียวกัน โดยจะต้องควบคุมคุณภาพของสัญญาณหรือค่า SIR ของการเรียกที่ดำเนินอยู่ให้มีค่าไม่ต่ำกว่าค่าจุดเริ่มเปลี่ยนที่กำหนดไว้ วิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทนี้จะตอบรับการร้องขอการเรียกก็ต่อเมื่ออัตราส่วนของพลังงาน 1 บิตต่อความหนาแน่นกำลังของสัญญาณรบกวน $(E_b / N_0)$ ของการเรียกนั้นและของการเรียกที่กำลังดำเนินอยู่มีค่าไม่ต่ำกว่าค่าจุดเริ่มเปลี่ยนที่กำหนดไว้

เมื่อมีการร้องขอการเรียกเกิดขึ้น สถานีฐานจะตรวจสอบ 2 ขั้นตอน คือ ขั้นตอนแรก สถานีฐานจะตรวจสอบว่ามีอุปกรณ์รับสัญญาณและ spreading code เหลือเพียงพอสำหรับรองรับการเรียกที่เข้ามาใหม่หรือไม่ กำหนดให้ $A$ แทนสถานะทั้งหมดของระบบที่เป็นไปได้ซึ่งมีอุปกรณ์รับสัญญาณและ spreading code เพียงพอที่จะรองรับการเรียกที่ดำเนินอยู่ ดังนั้นในขั้นตอนแรก สถานีฐานจะตรวจสอบว่าเมื่อตอบรับการเรียกที่เข้ามา สถานะของระบบจะยังคงอยู่ในสถานะ $A$ หรือไม่ หลังจากนั้นสถานีฐานจะตัดสินใจตอบรับหรือปฏิเสธการเรียกที่เข้ามาโดยใช้วิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกต่อไป

การตอบรับการเรียกประเภทที่ 2 เป็นเช่นเดียวกันกับวิธีการควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 1 โดยจะพิจารณาเมื่อระบบรวมทั้งหมดอยู่ในสภาวะ homogeneous in statistical equilibrium ซึ่งทำให้สามารถวิเคราะห์การทำงานของทั้งระบบได้โดยพิจารณาการทำงานจากเซลล์เพียงเซลล์เดียว โดยกำหนดให้ $W_{up}$ และ $W_{dw}$ คือแบนด์วิดท์ทั้งหมดของข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและขาลงภายในเซลล์ตามลำดับ และสถานะของระบบแทนด้วย $s$ โดยที่ $s = (n_0, n_1, \ldots, n_{L-1})$ และ $n_i$ แทนจำนวนการเรียกในระดับที่ $i$ ที่ต่ออยู่ในระบบ

กำหนดให้ $A$ คือสถานะของระบบทั้งหมดที่เป็นไปได้

$$A = \left\{ s : \left( \sum_{k=0}^{L-1} n_k B_k^{up} \le W_{up} \right) and \left( \sum_{k=0}^{L-1} n_k B_k^{dw} \le W_{dw} \right) \right\} \tag{2.28}$$

เนื่องจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้พิจารณาเฉพาะทราฟฟิกในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นเท่านั้น ดังนั้นสถานะของระบบจึงเป็นดังนี้

$$A = \left\{ s : \left( \sum_{k=0}^{L-1} n_k R_k^{up} \le W_{up} \right) \right\} \tag{2.29}$$

**2.1.2.1 การคำนวณค่า $E_b / N_0$ โดยเฉลี่ยในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น**

กำหนดให้ $C_j$ แทนกำลังเฉลี่ยของสัญญาณที่สถานีฐานได้รับจากสถานีเคลื่อนที่ของการเรียกในระดับที่ $j$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของสัญญาณแทรกสอดภายในเซลล์สำหรับการเรียกในระดับที่ $k$ ที่สถานะของระบบ $s$ ซึ่งแทนด้วย $H_k^{up}(s)$ จะมีค่าดังนี้

$$H_k^{up}(s) = \sum_{j=0}^{L-1} n_j C_j - C_k \tag{2.30}$$

กำหนดให้ $\varsigma^{up}$ แทนอัตราส่วนของสัญญาณแทรกสอดจากเซลล์ข้างเคียงต่อสัญญาณแทรกสอดภายในเซลล์ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของสัญญาณแทรกสอดจากเซลล์ข้างเคียงสำหรับการเรียกในระดับที่ $k$ ที่สถานะของระบบ $s$ ซึ่งแทนด้วย $O_k^{up}(s)$ จะมีค่าดังนี้

$$O_k^{up}(s) = \varsigma^{up} \sum_{j=0}^{L-1} n_j C_j \tag{2.31}$$

ถ้าไม่พิจารณาสัญญาณรบกวนพื้นหลัง (background noise) จะได้ค่าเฉลี่ยของ $E_b / N_0$ ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นสำหรับการเรียกในระดับที่ $k$ ที่สถานะของระบบ $s$ ซึ่งแทนด้วย $M_k^{up}(s)$ ดังนี้

$$M_k^{up}(s) = \frac{C_k}{H_k^{up} + O_k^{up}} \cdot \frac{W_{up}}{R_k^{up}} \tag{2.32}$$

เนื่องจากกำลังเฉลี่ยของสัญญาณที่สถานีฐานสำหรับการเรียกในระดับที่ $k$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราบิตประสิทธิผลสำหรับข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นและค่า $E_b / N_0$ ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นที่

ต้องการสำหรับการเรียกในระดับที่ $k$ ซึ่งแทนด้วย $\gamma_k^{up}$ ดังนั้น $C_j / C_k = (R_j^{up}\gamma_j^{up})/(R_k^{up}\gamma_k^{up})$ และจะได้

$$M_k^{up}(s) = \frac{W_{up}\gamma_k^{up}}{(1+\varsigma^{up})\sum_{j=0}^{L-1} n_j R_j^{up}\gamma_j^{up} - R_k^{up}\gamma_k^{up}} \qquad (2.33)$$

### 2.1.2.2 การควบคุมการตอบรับการเรียก

เมื่อมีการร้องขอการเรียกในระดับที่ $i$ ที่สถานะของระบบ $s$ การควบคุมการตอบรับการเรียกจะประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังนี้

1. พิจารณาข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น สถานีฐานวัดและคำนวณหาค่าเฉลี่ย $E_b / N_0$ สำหรับการเรียกในระดับที่ $k$ ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นซึ่งแทนด้วย $M_k^{up}(s)$ และคำนวณค่า $E_b / N_0$ โดยเฉลี่ยสำหรับการเรียกในระดับที่ $k$ ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นเมื่อการเรียกในระดับที่ $i$ ได้รับการตอบรับ ซึ่งแทนด้วย $E_{k,i}^{up}(s)$ ดังนี้

$$E_{k,i}^{up}(s) = \left\{ \frac{1}{M_k^{up}} + \frac{R_i^{up}}{W_{up}} \cdot \frac{\gamma_i^{up}}{\gamma_k^{up}} \right\}^{-1} \qquad (2.34)$$

2. การตัดสินใจ กำหนดให้ $\Phi_{k,i}^{up}$ แทนค่าจุดเริ่มเปลี่ยนของ $E_b / N_0$ ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นของการเรียกในระดับที่ $k$ ที่ใช้ในการควบคุมการตอบรับการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ และ $\mathrm{K}_{k,i}^{up}$ แทนค่าจุดเริ่มเปลี่ยนของ $E_b / N_0$ ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นของการเรียกในระดับที่ $k$ ที่ใช้ในการควบคุมการตอบรับการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ โดยการร้องขอการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ จะได้รับการตอบรับเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$E_{k,i}^{up}(s) \geq \Phi_{k,i}^{up} \qquad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq L-1 \qquad (2.35)$$

ในทำนองเดียวกัน การร้องขอการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ จะได้รับการตอบรับเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$E_{k,i}^{up}(s) \geq \kappa_{k,i}^{up} \qquad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq L-1 \qquad (2.36)$$

### 2.1.2.3 การกำหนดค่าจุดเริ่มเปลี่ยนสำหรับการควบคุมการตอบรับการเรียก

ในกำหนดค่าจุดเริ่มเปลี่ยนเพื่อให้ลำดับความสำคัญในการควบคุมการตอบรับการเรียก จะต้องพิจารณากรณีต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. กำหนดลำดับความสำคัญระหว่างการเรียกจากการแฮนด์ออฟและการเรียกใหม่ในระดับเดียวกัน โดยที่การเรียกจากการแฮนด์ออฟมีลำดับความสำคัญสูงกว่าการเรียกใหม่ในระดับเดียวกัน ดังนั้น

$$\kappa_{k,i}^{up} \le \Phi_{k,i}^{up} \qquad \text{สำหรับ } 0 \le k \le L-1 \qquad (2.37)$$

2. กำหนดลำดับความสำคัญระหว่างการเรียกในระดับที่แตกต่างกัน เนื่องจากลำดับความสำคัญของการเรียกในระดับที่ $i$ สูงกว่าการเรียกในระดับที่ $j$ เมื่อ $i < j$ ในกรณีนี้เนื่องจาก $E_{k,i}^{up} \ne E_{k,j}^{up}$ ดังนั้นจึงต้องพิจารณาทั้งค่าจุดเริ่มเปลี่ยน, อัตราบิตประสิทธิผลและค่า $E_b / N_0$ ที่ต้องการของการเรียกในระดับที่ $i$ และระดับที่ $j$ เพื่อรับรองลำดับความสำคัญของการเรียกในระดับที่แตกต่างกัน

3. เพื่อลดความซับซ้อนในการกำหนดค่าจุดเริ่มเปลี่ยนจึงกำหนดค่าจุดเริ่มเปลี่ยนจากค่า $E_b / N_0$ ที่ต้องการดังนี้

$$\kappa_{k,i}^{up} = \gamma_k^{up} \beta_i^h , \Phi_{k,i}^{up} = \gamma_k^{up} \beta_i^n \qquad \text{สำหรับ } 0 \le k \le L-1,\ 0 \le i \le L-1 \qquad (2.38)$$

โดยที่ $\beta_i^n$ และ $\beta_i^h$ คือค่าพารามิเตอร์สำหรับควบคุมการตอบรับการร้องขอการเรียกใหม่และการร้องขอการเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ โดยกำหนดให้มีค่ามากกว่า 1 โดยที่ให้ค่า $\beta_i^h < \beta_i^n$ เพื่อให้รับรองลำดับความสำคัญของการเรียกจากการแฮนด์ออฟเมื่อเทียบกับการเรียกใหม่

### 2.1.2.4 ค่าที่ใช้ในการวัดสมรรถนะ (Performance measures)

ค่าที่ใช้ในการวัดสมรรถนะ คือ ความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาด ความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ ค่าการใช้ประโยชน์แบนด์วิดท์ และค่าคุณภาพของการให้บริการเช่นเดียวกับวิธีควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 1

กำหนดให้ $\pi(s)$ แทนความน่าจะเป็นไม่แปรตามเวลา (stationary probability) ของสถานะของระบบ $s$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก flow balance equation โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข (numerical method)

กำหนดให้ $\psi_i$ แทนความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ การร้องขอการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ จะถูกปฏิเสธถ้าระบบอยู่ในสถานะต่อไปนี้

$$\xi_i = \left\{ s : E_{k,i}^{up}(s) < \Phi_{k,i}^{up} ; \exists (0 \le k \le L-1) \right\} \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \le i \le L-1 \qquad (2.39)$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการบล็อกการเรียกใหม่ในระดับที่ $i$ คือ

$$\psi_i = \sum_{s \in S_i} \pi(s) \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \le i \le L-1 \qquad (2.40)$$

กำหนดให้ $\chi_i$ แทนความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาดในระดับที่ $i$ การเรียกจากการแฮนด์ออฟในระดับที่ $i$ ที่มาจากเซลล์ข้างเคียงจะถูกปฏิเสธถ้าระบบอยู่ในสถานะต่อไปนี้

$$\phi_i = \left\{ s : E_{k,i}^{up}(s) < \Delta_{k,i}^{up} ; \exists (0 \le k \le L-1) \right\} \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \le i \le L-1 \qquad (2.41)$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการแฮนด์ออฟผิดพลาดในระดับที่ $i$ คือ

$$\chi_i = \sum_{s \in S_i} \pi(s) \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \le i \le L-1 \qquad (2.42)$$

ค่าการใช้ประโยชน์แบนด์วิดท์ และค่าคุณภาพของการให้บริการ สามารถหาได้ทำนองเดียวกับกรณีของวิธีควบคุมการตอบรับการเรียกประเภทที่ 1

## 2.2 **ทฤษฎีเกม** [14-18]

ทฤษฎีเกม เป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งที่ใช้อธิบายและกล่าวถึงปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้นในการดำเนินชีวิตของมนุษย์ โดยเกมทั่วๆไปมักจะสะท้อนหรือบอกให้ทราบถึงลักษณะที่เกิดขึ้นของสถานการณ์ต่างๆ โดยสถานการณ์นั้น มีลักษณะของการแข่งขันกันหรือการร่วมมือกัน ซึ่งสถานการณ์ที่เกิดขึ้นอาจเกิดอย่างตั้งใจหรือไม่ตั้งใจก็ดี ผู้คนต่างแสวงหาผลประโยชน์โดยให้คนอื่นออกค่าใช้จ่ายให้ ซึ่งเป็นการกระทำที่จะนำไปสู่ความขัดแย้งหรือการแข่งขันกัน มีการนำเกมไปใช้อธิบายความสัมพันธ์เหล่านี้ โดยการกำหนดผลประโยชน์ของทั้งสองฝ่ายมีความขัดแย้งกัน เมื่อผู้เล่นคนหนึ่งเสียผลประโยชน์มาก ผู้เล่นอีกคนก็เสียผลประโยชน์น้อย เพื่อจะบรรลุผลประโยชน์ร่วมกัน ผู้เล่นหลายคนจำเป็นต้องใช้กลยุทธ์ (strategy) ที่ร่วมมือกันเพราะว่าถ้าผู้เล่นแต่ละคนต่างเสี่ยงทุ่มเทให้กับการได้ผลประโยชน์ของตนมากไป ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะส่งผลเสียต่อตนเองได้ โดยเห็นได้ว่ากลยุทธ์ของผู้เล่นคนหนึ่งอาจก่อให้เกิดขึ้นผลดีหรือผลเสียต่อผู้เล่นคนอื่นๆ จึงได้มีการคิดค้นทฤษฎีที่สามารถวางหลักการในการตัดสินใจอย่างเหมาะสมแก่ผู้เล่นแต่ละคนเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ผู้เล่นทุกคนพึงพอใจ อันเป็นที่มาของทฤษฎีเกม โดยมีการกำหนดสมมติฐานว่าผู้เล่นเกมเป็นผู้เล่นที่ฉลาดและมีเหตุผล (intelligent rational player) นั่นคือ ผู้เล่นสามารถรู้ได้ว่าการเปลี่ยนแปลงกลยุทธ์มีผลต่อผลลัพธ์ที่ได้อย่างไรและเลือกกลยุทธ์ที่ให้ผลลัพธ์ดีที่สุดแก่ตนเอง

ในการจำลองสถานการณ์ความเป็นจริงในโลกที่มีการแข่งขัน สามารถพิจารณาเป็นเกมที่มีลักษณะแตกต่างกันออกไป 2 แบบ คือ เกมที่ไม่มีความร่วมมือ (noncooperative game) และ เกมที่มีความร่วมมือ (cooperative game)

### 2.2.1 **ฟังก์ชันอรรถประโยชน์** (Utility Function)

อรรถประโยชน์ (utility) คือ ค่าความพึงพอใจ ซึ่งใช้ประเมินคุณค่าผลลัพธ์ที่ได้จากเกมการแข่งขัน โดยนิยามฟังก์ชันอรรถประโยชน์เพื่อแทนปริมาณความพึงพอใจของผู้เล่นแต่ละคนในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ซึ่งฟังก์ชันอรรถประโยชน์จะโยงปริภูมิของกลยุทธ์ (strategy space) ไปยังเซตของจำนวนจริง ค่าของฟังก์ชันอรรถประโยชน์จะถูกเรียกว่าค่าอรรถประโยชน์ซึ่งเป็นปริมาณที่แสดงความพึงพอใจของผู้เล่นที่มีต่อผลลัพธ์ของเกม

กำหนดให้ $u(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันอรรถประโยชน์ และสมมติให้ $A$ และ $B$ เป็นผลลัพธ์ที่ได้รับจากเกม ถ้าค่าอรรถประโยชน์ของผลลัพธ์ $A$ มีค่าน้อยกว่าค่าอรรถประโยชน์ของผลลัพธ์ $B$ หมายความว่า ความพึงใจที่มีต่อผลลัพธ์ $a$ จะมีค่าน้อยกว่า $b$ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$u(A) < u(B) \Leftrightarrow A \prec B \tag{2.43}$$

โดยเครื่องหมาย $\prec$ คือการเปรียบเทียบค่าความพึงพอใจ ความต้องการ ความจำเป็น หรือความสนใจของบุคคลที่มีต่อผลลัพธ์ที่ได้จากเกม

## 2.3 **เกมไม่ร่วมมือ** (Non-Cooperative Games)

ทฤษฎีเกมไม่ร่วมมือ เป็นการวิเคราะห์สถานการณ์ที่ผู้เล่นแต่ละคนไม่สามารถร่วมมือ หรือสื่อสารตกลงผลประโยชน์ร่วมกันได้ (non-binding agreement) การวิเคราะห์สถานการณ์ดังกล่าวจึงเป็นไปในรูปแบบเกมไม่ร่วมมือ วิธีการตัดสินใจจะเป็นไปตามเหตุผลส่วนตัวของแต่ละคน โดยไม่คำนึงผลประโยชน์ของส่วนรวม ซึ่งเป็นผลให้ผลลัพธ์ได้มาจากการวิเคราะห์หาวิธีการตัดสินใจที่ทำประโยชน์ของตนเองให้มีค่าสูงสุด การวิเคราะห์หาวิธีการตัดสินใจที่ดีที่สุดมาตอบโต้กันจะอาศัยสมดุลของแนช (Nash equilibrium) เพื่อให้เข้าใจลักษณะทั่วไปของเกม จะยกตัวอย่างสถานการณ์การตัดสินใจมาประกอบการอธิบาย ซึ่งในสถานการณ์ของการแข่งขันทั่วไปนั้น มีผลแพ้ชนะ และไม่มีผลแพ้ชนะ ซึ่งตัวอย่างสถานการณ์ที่ยกมานี้ เป็นเกมที่ไม่มีผลแพ้ชนะ และอธิบายแบบเกมไม่ร่วมมือ

นายอัล และนายบ็อบถูกจับได้และถูกควบคุมตัวเพื่อสอบสวน โดยสอบสวนแยกกัน ทั้งสองมีทางเลือก 2 ทาง คือ ยอมรับสารภาพและซัดทอดอีกฝ่ายหนึ่ง หรือไม่ยอมรับสารภาพ โดยเงื่อนไขว่าถ้าไม่ยอมรับสารภาพทั้งคู่ ทั้งสองจะถูกจำคุกคนละ 1 ปี โทษฐานพกพาอาวุธปืน ถ้าทั้งสองรับสารภาพทั้งคู่ ทั้งสองคนจะถูกจำคุกคนละ 10 ปี ถ้าฝ่ายหนึ่งรับสารภาพและซัดทอดอีกฝ่ายหนึ่ง และฝ่ายนั้นปฏิเสธ ผู้ให้ความร่วมมือกับตำรวจจะได้รับรางวัลในฐานะที่ร่วมมือกับตำรวจ โดยจะได้รับการปล่อยตัวในขณะที่ฝ่ายที่ไม่ยอมรับสารภาพจะได้รับโทษสูงสุด คือ จำคุก 20 ปี ซึ่งสามารถแสดงได้ดังตารางนี้

**ตารางที่** 2.1 สถานการณ์วิกฤตของนักโทษ

| นายอัล / นายบ็อบ | รับสารภาพ | ไม่รับสารภาพ |
|---|---|---|
| รับสารภาพ | อัลและบ็อบจำคุกคนละ 10 ปี | อัลจำคุก 20 ปีและบ็อบจำคุก 0 ปี |
| ไม่รับสารภาพ | อัลจำคุก 0 ปีและบ็อบจำคุก 20 ปี | อัลและบ็อบจำคุกคนละ 1 ปี |

จากสถานการณ์วิกฤตนักโทษ จะเห็นได้ว่าถ้ามองในฝ่ายของของอัลจะมี 2 ทางเลือก คือ *ยอมรับสารภาพ หรือไม่ยอมรับสารภาพ* โดยสถานการณ์นี้จะต้องขึ้นกับการตัดสินใจของอีกฝ่ายหนึ่ง คือ บ็อบด้วย อัลจะต้องคิดว่า *ในกรณีที่บ็อบรับสารภาพ* ถ้าอัลไม่รับสารภาพ อัลจะต้องถูกจำคุก 20 ปี แต่ถ้ารับสารภาพ อัลจะถูกจำคุก 10 ปีเท่านั้น แสดงว่าในกรณีที่บ็อบรับสารภาพนั้น ทางเลือกที่ดีที่สุดของอัลคือการรับสารภาพ แต่*กรณีที่บ็อบไม่รับสารภาพ* ถ้าอัลไม่รับสารภาพด้วย อัลจะถูกจำคุก 1 ปี แต่ถ้าอัลรับสารภาพ อัลจะได้รับการปล่อยตัวเป็นอิสระ จะเห็นได้ว่าในกรณีนี้ ถ้าอัลรับสารภาพ อัลก็จะได้รับผลประโยชน์สูงสุด ดังนั้นอัลจึงควรเลือกการรับสารภาพ โดยทางฝ่ายบ็อบก็เช่นเดียวกัน เมื่อคิดเป็นเหตุเป็นผลในแบบเดียวกับอัลนี้ ทั้งคู่จะรับสารภาพด้วยกัน นั่นคือ ทั้งคู่จะติดคุกคนละ 10 ปี

ซึ่งจากตัวอย่างเห็นได้ว่าการเลือกรับสารภาพหรือไม่ยอมรับสารภาพนั้น เป็นการเลือกกลยุทธ์ของตนเอง ซึ่งแต่ละคนมีอิสระในการเลือกกลยุทธ์เนื่องจากถูกแยกกันสอบสวน โดยผลลัพธ์ที่ทั้งสองได้ คือ ทั้งสองติดคุกคนละ 10 ปีเมื่อใช้กลยุทธ์ยอมรับสารภาพทั้งคู่ ซึ่งไม่ได้เป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุด คือ ชายทั้งสองจำคุกคนละ 1 ปีเมื่อไม่รับสารภาพทั้งคู่

เมื่อนำทฤษฎีมาใช้ในเรื่องการให้บริการเครือข่ายในกรณีของเกมไม่ร่วมมือ ผู้เล่นแต่ละฝ่ายจะเลือกกลยุทธ์ของตนเองอย่างเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งหมายความว่าผู้ใช้บริการแต่ละระดับจะเลือกค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการควบคุมอย่างอิสระโดยไม่ถูกกำหนดจากผู้ให้บริการเครือข่าย

พิจารณาเกมในรูปแบบ strategic form ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}) \qquad (2.44)$$

โดยที่ $N$ คือเซตของผู้เล่นทั้งหมด, $C_i$ คือเซตของกลยุทธ์ทั้งหมดของผู้เล่นคนที่ $i$, $u_i$ คือฟังก์ชันอรรถประโยชน์ของผู้เล่นคนที่ $i$

กำหนดให้ $C$ คือเซตของกลุ่มของกลยุทธ์ (strategy profile) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ดังนั้น

$$C = \times_{j \in N} C_j \tag{2.45}$$

โดยที่ $\times$ แทน Cross product

สำหรับกลุ่มของกลยุทธ์ $c = (c_j)_{j \in N}$ ใดๆ ใน $C$ จะได้ว่า $u_i(c)$ แทนค่าอรรถประโยชน์ของผู้เล่นคนที่ $i$ เมื่อกลุ่มของกลยุทธ์คือ $c$

เกมในรูปแบบ strategic form ตั้งอยู่บนสมมติฐานว่าผู้เล่นทุกคนเลือกกลยุทธ์พร้อมกัน และเกมในรูปแบบ strategic form จะเป็นแบบจำกัดถ้าเซตของผู้เล่นทั้งหมดและเซตของกลยุทธ์ของผู้เล่นแต่ละคนเป็นเซตจำกัด

### 2.3.1 สมดุลของแนช

การวิเคราะห์หาวิธีตัดสินสินใจตามเหตุผลส่วนตัวของแต่ละคนที่ทำให้เกิดผลประโยชน์ของตนเองให้มีค่าสูงสุด โดยไม่คำนึงผลประโยชน์ของส่วนรวม เรียกว่า สมดุลของแนช (Nash equilibrium) จากตัวอย่างนักโทษข้างบน เป็นการวิเคราะห์ที่อาศัยสมดุลของแนชมาใช้

พิจารณาเกมในรูปแบบ strategic form $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ กลุ่มของกลยุทธ์จะเป็นสมดุลของ Nash ก็ต่อเมื่อไม่มีผู้เล่นคนใดสามารถเพิ่มค่าอรรถประโยชน์ของตนได้โดยการเปลี่ยนกลยุทธ์ของตนเพียงคนเดียว นั่นคือ กลยุทธ์ $c$ ใน $C$ จะเป็นสมดุลของ Nash สำหรับเกม $\Gamma$ ก็ต่อเมื่อ

$$u_i(c) \geq u_i(c_{-i}, d_i), \qquad \forall i \in N, \forall d_i \in C_i \tag{2.46}$$

โดยที่ $(c_{-i}, d_i)$ แทนกลุ่มของกลยุทธ์ที่องค์ประกอบที่ $i$ คือ $d_i$ และองค์ประกอบอื่นๆ เป็นเช่นเดียวกันกับใน $c$

นิยามของจุดสมดุล (equilibrium point) คือค่าอรรถประโยชน์ของผู้เล่นเมื่อใช้กลยุทธ์ที่เป็นสมดุลของ Nash, $(u_i(a))_{i \in N}$ เมื่อ $a$ คือสมดุลของ Nash

## 2.4 เกมร่วมมือ (Cooperative Games)

ทฤษฎีเกมร่วมมือ เป็นการวิเคราะห์สถานการณ์การตัดสินใจ ซึ่งผู้เล่นแต่ละคนมองเห็นผลประโยชน์ที่จะได้รับเมื่อร่วมมือกันสูงกว่าการไม่ร่วมมือกัน โดยผู้เล่นมีอิสระอย่างเต็มที่ในการสื่อสารกันก่อนการเล่นเกม การร่วมมือกันจะเกิดขึ้นได้นั้นต้องขึ้นอยู่กับสถานการณ์ที่สามารถตกลงกันได้ เกมร่วมมือเป็นการตัดสินใจร่วมกันตามเหตุผลของกลุ่ม โดยผู้เล่นสามารถต่อรองเงื่อนไขระหว่างกันได้ เรียกว่า ปัญหาการต่อรองของแนช (Nash bargaining problem) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่ให้ความยุติธรรมแก่ทุกคนในกลุ่ม

จากตัวอย่างข้างบน ถ้าพิจารณาในรูปแบบของเกมร่วมมือ จะเห็นว่ามีทางเลือกที่มีผลลัพธ์ที่ดีกว่า คือติดคุกน้อยกว่าแบบเกมไม่ร่วมมือ ถ้านักโทษทั้งคู่มีโอกาสร่วมมือกัน โดยมีการเลือกกลยุทธ์ล่วงหน้าว่าให้ปฏิเสธทั้งคู่ และจะไม่มีการหักหลังกัน จะทำให้นักโทษทั้งคู่ติดคุกน้อยลง คือติดคุกกันคนละ 1 ปี ดังนั้นเกมร่วมมือผลลัพธ์ของเกมจึงขึ้นกับวิธีการต่อรองว่าจะต้องต่อรองอย่างไรจึงทำให้ทุก ๆ ฝ่ายยอมรับโดยแต่ละฝ่ายได้ผลประโยชน์ตามต้องการ

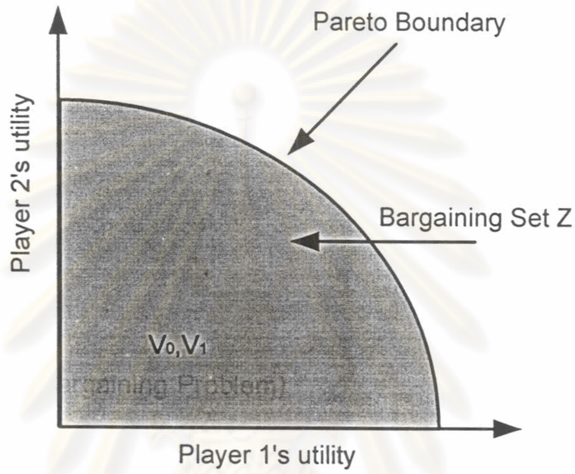
ในการหาผลลัพธ์หรือผลเฉลยของเกมร่วมมือจะใช้วิธีการตัดสินอย่างยุติธรรมโดยผู้ตัดสิน (arbitration scheme) โดยใช้หลักการของสัจพจน์ของความเท่าเทียมกันในรูปแบบของวิธีปัญหาการต่อรองและเปรียบเทียบค่าอรรถประโยชน์ระหว่างผู้เล่น สามารถแบ่งเป็น 2 ประเภทคือ เกมร่วมมือระหว่างผู้เล่น 2 คน และ เกมร่วมมือระหว่างผู้เล่น $n>2$ คน ซึ่งทั้งสองประเภทใช้วิธีหาผลเฉลยของเกมที่แตกต่างกัน

### 2.4.1 เกมร่วมมือระหว่างผู้เล่น 2 คน (2-person Cooperative Games)

ปัญหาการต่อรองระหว่างบุคคล 2 คน เพื่อใช้ในการวิเคราะห์เกมที่มีความร่วมมือ ซึ่งเป็นเกมที่ไม่จำเป็นว่าผู้เล่นจะต้องตัดสินใจเองทั้งหมด ในบางกรณีมีคนกลางทำหน้าที่กำหนดวิธีการตัดสินใจหรือกำหนดผลลัพธ์ให้ วิธีการที่ผู้เล่นแต่ละคนเห็นชอบ และยินยอมที่จะดำเนินตามมติของกลุ่ม หรือวิธีที่คนกลางเลือกให้แต่ละคนแล้วทำให้ผู้เล่นแต่ละคนยอมรับ เป็นสิ่งที่ต้องนำมาวิเคราะห์ ดังนั้นถ้าหากไม่สามารถตกลงเงื่อนไขกันได้ หรือมีคนใดคนหนึ่งไม่ยินยอมในคำตัดสินนั้น จะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้กลับไปสู่จุดเริ่มต้นในกรณีที่ยังไม่มีการต่อรองเกิดขึ้น

### 2.4.1.1 **วิธีปัญหาการต่อรอง** (Bargaining Problem)

กำหนดให้บริเวณผลลัพธ์ความร่วมมือ (cooperative payoff region :Z) คือเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดในกรณีที่ผู้เล่นสามารถร่วมมือกันสุ่มเลือกกลุ่มของกลยุทธ์ตามการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ โดยที่ Z จะมีคุณสมบัติเป็นเซตคอนเวกซ์ปิด (Closed convex set) และเซตจำกัด (bounded)




**รูปที่** 2.2 เซตการต่อรอง

กำหนดให้ผลเฉลยปัญหาการต่อรอง $F(R,v) = (F_1(R,v), F_2(R,v))$ คุณสมบัติของผลเฉลยของปัญหาการต่อรอง ต้องมีคุณสมบัติเป็นไปตามสัจพจน์ (axiom) ดังนี้

- การไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการแปลงค่าอรรถประโยชน์ (Invariance with respect to utility transformation) ผลลัพธ์นั้นต้องไม่เปลี่ยนแปลงต่อการถ่ายโอนอย่างเชิงเส้น คือ

  ถ้า $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1$ และ $b_2$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

  ถ้า $G = \{(a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2) \mid (x_1, x_2) \in R\}$ และ $w = (a_1v_1 + b_1, a_2v_2 + b_2)$

  แล้ว $F(G,w) = (a_1F_1(R,v) + b_1, a_2F_2(R,v) + b_2)$

- ความเหมาะสมของพาเรโต (Pareto Optimality) ผลเฉลยจะต้องอยู่ภายในบริเวณผลลัพธ์ความร่วมมือและอยู่บนขอบเขตพาเรโต (Pareto boundary) เพราะคุณสมบัติความเหมาะสมของพาเรโต คือ ทุก ๆ จุดบนขอบของพาเรโตเป็นผลลัพธ์ดีที่สุดที่ผู้เล่นทุกคนได้รับ และไม่มีจุดอื่นที่ผลลัพธ์ของผู้เล่นทุกคนมีค่ามากกว่าผลลัพธ์ ณ จุดนี้

- อิสระจากการเลือกอื่นที่ไม่เกี่ยวข้อง (Independence of irrelevant alternatives) การเลือกผลลัพธ์ต้องไม่ได้รับอิทธิพลจากผลลัพธ์อื่นที่ไม่เกี่ยวข้อง คือ ถ้าปัญหาการต่อรอง 2 ปัญหามีลักษณะเดียวกัน แต่ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มีจำนวนไม่เท่ากัน โดยที่ปัญหาการต่อรองแรกมีจำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มากกว่าปัญหาการต่อรองที่ 2 แต่ผลลัพธ์ที่เหมาะสมของปัญหาการต่อรองแรก เป็นผลลัพธ์หนึ่งในเซตของผลลัพธ์ของปัญหาการต่อรองที่ 2 ดังนั้นผลลัพธ์นี้ต้องเป็นผลลัพธ์ที่เหมาะสมของปัญหาการต่อรองที่ 2

  สำหรับเซต $G$ ที่เป็นเซตคอนเวกซ์ปิดและเป็นเซตจำกัด ถ้า $G \subseteq R$ และ $F(R,v) \in G$ แล้ว $F(G,v) = F(R,v)$

- ความสมมาตร (Symmetry) ผลลัพธ์ที่เหมาะสมเป็นผลเฉลยจะต้องเป็นผลลัพธ์ของผู้เล่นที่มีค่าอรรถประโยชน์เท่ากันทุกคน กล่าวคือ ถ้าปัญหาการต่อรองที่พิจารณามีเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เป็นเซตสมมาตร และค่าเริ่มต้นการต่อรองของผู้เล่นทุกคนมีค่าเท่ากันแล้ว ผลลัพธ์ที่เหมาะสมเป็นผลเฉลยของปัญหานี้ต้องมีค่าอรรถประโยชน์ของผู้เล่นเท่ากันทุกคน

  ถ้า $v_1 = v_2$ และ $\{(x_1, x_2) \in F | (x_2, x_1) \in F\}$ แล้ว $F_1(R,v) = F_2(R,v)$

ผลเฉลยของ Nash เป็นผลเฉลยเดียวที่สอดคล้องกับสัจพจน์ทั้ง 4 ข้างต้น โดยมีฟังก์ชันผลเฉลยดังต่อไปนี้

$$F(R,v) \in \arg\max_{x \in R, x \geq v} (x_1 - v_1)(x_2 - v_2) \tag{2.47}$$

### 2.4.1.2 ผลเฉลยปัญหาการต่อรอง

ผลลัพธ์ที่เหมาะสมเป็นผลเฉลยของปัญหาการต่อรอง นอกจากต้องมีคุณสมบัติสอดคล้องกับสัจพจน์ที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้ว ยังขึ้นอยู่กับวิธีการตัดสินใจเลือกผลลัพธ์ที่เหมาะสม ซึ่งแตกต่างกันออกไปตาม แต่พื้นฐานแนวความคิดที่ใช้ในการวิเคราะห์ ซึ่งมีมากมายหลายวิธีและแต่ละวิธีก็มีแนวคิดแตกต่างกัน เช่น วิธีการตัดสินใจของ Nash มีพื้นฐานมาจากแนวความคิดแบบปัจเจกนิยม (individualism) วิธีการตัดสินใจของ Raiffa มีพื้นฐานมาจากแนวความคิดแบบสมภาคนิยม (egalitarianism) และวิธีการตัดสินใจของ Thomson มีพื้นฐานจากแนวความคิดประโยชน์นิยม

(utilitarianism) เป็นต้น แต่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะพิจารณาผลลัพธ์ปัญหาการต่อรองจากวิธีการตัดสินใจของ Nash (ภาคผนวก ข.)

### 2.4.2 **เกมร่วมมือของผู้เล่น $n$ คนเมื่อ $n$** > 2 (n-person Cooperative Games)

ในการวิเคราะห์เกมร่วมมือของผู้เล่น $n$ คน เมื่อ $n > 2$ จะต้องวิเคราะห์ทั้งผลจากการร่วมมือกันของผู้เล่นทั้ง $n$ คนและผลจากการร่วมมือกันของผู้เล่นภายในกลุ่มย่อยของผู้เล่นทั้งหมด (coalition analysis) ดังนั้นผลเฉลยปัญหาการต่อรองของ Nash ($n$-person bargaining problem) ในกรณีผู้เล่น $n$ คน จึงไม่เหมาะที่จะใช้เป็นผลเฉลยของเกมร่วมมือของผู้เล่น $n$ คน เมื่อ $n > 2$ เนื่องจากปัญหาการต่อรองของ Nash เป็นการวิเคราะห์เฉพาะผลจากการร่วมมือกันของผู้เล่นทั้ง $n$ คน ที่ไม่มีการพิจารณาผลจากการร่วมมือกันของผู้เล่นภายในกลุ่มย่อย วิธีการวิเคราะห์ผลการร่วมมือของผู้เล่นภายในกลุ่มย่อย จำเป็นต้องหาค่าฟังก์ชันคุณลักษณะ $v$ ซึ่งเป็นค่าอรรถประโยชน์ของผู้เล่นภายในกลุ่มย่อยก่อน โดยค่าอรรถประโยชน์ที่ได้จะมีค่าที่แตกต่างกันตามจำนวนความเป็นไปได้ของกลุ่มร่วมมือย่อยซึ่งมีทั้งหมด $2^n - 1$ กลุ่ม เช่น เมื่อมีผู้เล่น 3 คน กลุ่มร่วมมือย่อยที่แตกต่างกันมีทั้งหมด 7 กลุ่ม คือ $v_1$, $v_2, v_3, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,3}$ และ $v_{1,2,3}$ หลังจากนั้นจึงนำค่าฟังก์ชันคุณลักษณะไปหาผลเฉลย

#### 2.4.2.1 **ฟังก์ชันคุณลักษณะ** (Characteristic Function)

กำหนดให้ $N = \{1,2,\ldots,n\}$ แทนเซตของผู้เล่นทั้งหมด ฟังก์ชันคุณลักษณะ $v$ จะโยงกลุ่มร่วมมือ (coalition, $S \subseteq N$) ไปยังเซตของจำนวนจริง ค่าของฟังก์ชันคุณลักษณะ $v(S)$ ถูกเรียกว่าคุณค่าของกลุ่มร่วมมือ $S$ (worth of coalition $S$) ซึ่งแสดงค่าอรรถประโยชน์ทั้งหมดที่สมาชิกภายใน $S$ จะได้รับโดยไม่มีการช่วยเหลือจากผู้เล่นที่อยู่นอกกลุ่ม $S$ รวมทั้งกำหนดให้ $v(\phi) = 0$

เมื่อพิจารณาเกมในรูปแบบ strategic form $\Gamma = (N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$ สามารถหาค่าฟังก์ชันคุณลักษณะได้ 3 รูปแบบด้วยกัน โดยแต่ละรูปแบบจะพิจารณาจากทางเลือกของสมมุติฐานที่เกี่ยวข้องกับการกระทำของกลุ่มร่วมมือย่อยที่จะบุกรุก (offensive)หรือป้องกัน (defensive) กลุ่มของตัวเองจากการคุกคามจากกลุ่มอื่น ซึ่งมีด้วยกัน ดังนี้ คือ

1. ฟังก์ชันคุณลักษณะในรูปแบบ minimax representation เป็นรูปแบบที่สมาชิกในกลุ่มร่วมมือ $S$ เตรียมรับการบุกรุกจากกลุ่ม $N \setminus S$ ซึ่งกลุ่มร่วมมือ $S$ สามารถรับประกันในกลุ่มของตนเอง

ได้ว่าจะได้ค่าอรรถประโยชน์ที่ได้มีค่ามากที่สุดทีเป็นไปได้ ในกรณีที่สมาชิกในกลุ่มร่วมมือ $N \setminus S$ จะโจมตีด้วยกลยุทธ์ที่ทำให้กลุ่มร่วมมือได้ค่าอรรถประโยชน์น้อยที่สุด

$$v(S) = \min_{c_{N\setminus S} \in C_{N\setminus S}} \max_{c_S \in C_S} \sum_{i \in S} u_i(c_S, c_{N\setminus S}) \tag{2.48}$$

$$v(S \setminus N) = \min_{c_S \in C_S} \max_{c_{S\setminus N} \in C_{S\setminus N}} \sum_{j \in N\setminus S} u_i(c_S, c_{N\setminus S}) \tag{2.49}$$

2. ฟังก์ชันคุณลักษณะในรูปแบบ defensive equilibrium representation เป็นรูปแบบที่สมาชิกในกลุ่ม $S$ และ $N \setminus S$ พึงพอใจด้วยกันทั้งคู่ โดยการหากลยุทธ์ที่จุดสมดุลซึ่งเป็นจุดที่ไม่มีกลุ่มผู้เล่นกลุ่มใดสามารถเพิ่มค่าอรรถประโยชน์ของกลุ่มตนได้โดยการเปลี่ยนกลยุทธ์ของกลุ่มตนเพียงกลุ่มเดียว เป็นลักษณะการป้องกันตนเองทั้งสองกลุ่ม

$$c_S \in \arg\max_{c_S \in C_S} \sum_{i \in S} u_i(c_S, c_{N\setminus S}),$$

$$c_{N\setminus S} \in \arg\max_{c_{N\setminus S} \in C_{N\setminus S}} \sum_{j \in N\setminus S} u_j(c_S, c_{N\setminus S}),$$

$$v(S) = \sum_{i \in S} u_i(c_S, c_{S\setminus N}), \text{ และ } v(N \setminus S) = \sum_{j \in N\setminus S} u_j(c_S, c_{N\setminus S}) \tag{2.50}$$

3. ฟังก์ชันคุณลักษณะที่เรียกว่า rational-threat representation เป็นการหาจุดสมดุลของเกมเมื่อพิจารณาค่าอรรถประโยชน์ของผู้เล่นแต่ละกลุ่ม จากค่าการได้ประโยชน์สัมพัทธ์ (relative advantage) ซึ่งทำให้เกมไม่ร่วมมือระหว่างกลุ่มเป็นเกมแบบ zero-sum

$$c_S \in \arg\max_{c_S \in C_S} \left(\sum_{i \in S} u_i(c_S, c_{N\setminus S}) - \sum_{j \in N\setminus S} u_j(c_S, c_{N\setminus S})\right),$$

$$c_{N\setminus S} \in \arg\max_{c_{N\setminus S} \in C_{N\setminus S}} \left(\sum_{j \in N\setminus S} u_j(c_S, c_{N\setminus S}) - \sum_{i \in S} u_i(c_S, c_{N\setminus S})\right),$$

$$v(S) = \sum_{i \in s} u_i(c_S, c_{N\setminus S}), \text{และ } v(N \setminus S) = \sum_{j \in N\setminus S} u_j(c_S, c_{N\setminus S}) \tag{2.51}$$

โดยที่ $N \setminus S$ แทนเซตของผู้เล่นทั้งหมดภายใน $N$ ที่ไม่ได้อยู่ในกลุ่มร่วมมือ $S$ สำหรับกลุ่มร่วมมือ $S$ ใดๆ $C_S$ คือเซตของกลุ่มของกลยุทธ์ (strategy profile) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดภายในกลุ่มร่วมมือ $S$ ดังนั้น $C_S = \times_{j \in S} C_j$ และ $u_i(c_s, c_{N\setminus S})$ แทนค่าอรรถประโยชน์ของผู้เล่นคนที่ $i$ เมื่อกลุ่มร่วมมือ $S$ และ $N \setminus S$ เลือกกลยุทธ์ของตนเองอย่างเป็นอิสระต่อกัน

กำหนดให้ คุณค่าของกลุ่มร่วมมือใหญ่ (grand coalition, $S = N$) คือ

$$v(N) = \max_{c_N \in C_N} \sum_{i \in N} u_i(c_N) \tag{2.52}$$

2.4.2.2 The Shapley Value [15]

Shapley ได้หาฟังก์ชันผลเฉลย $G : \Re^{L(N)} \to \Re^N$ โดย $L(N) = \{S | S \subseteq N \, and \, S \neq \phi\}$ เมื่อผู้เล่นใน $N$ เล่นเกมในรูปแบบกลุ่มร่วมมือ $v$ ผู้เล่นคนที่ $i$ จะได้รับการจัดสรรค่าอรรถประโยชน์ $G_i(v)$ ในที่นี้ $G(v) = (G_i(v))_{i \in N}$ ในการหาผลเฉลย Shapley ได้พิจารณาสัจพจน์ต่าง ๆ ที่เป็นคุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับผลเฉลย และหาฟังก์ชันผลเฉลยที่สอดคล้องกับสัจพจน์ต่าง ๆ เหล่านั้น

Shapley พบว่าสำหรับเกมในรูปแบบกลุ่มร่วมมือ $v$ ใด ๆ จะมีฟังก์ชันผลเฉลย $G : \Re^{L(N)} \to \Re^N$ เพียงหนึ่งเดียวที่สอดคล้องกับสัจพจน์ต่าง ๆ ที่จำเป็นสำหรับผลเฉลยโดยมีรูปแบบดังนี้

$$G_i(v) = \sum_{S \subseteq N-i} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \tag{2.53}$$

โดยสำหรับกลุ่มความร่วมมือ $S$ ใด ๆ $|S|$ แทนจำนวนผู้เล่นในกลุ่มร่วมมือ $S$ เนื่องจาก $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ คือ marginal contribution ของผู้เล่นคนที่ $i$ ที่มีต่อคุณค่าของกลุ่มร่วมมือ $S$ ดังนั้น Shapley value ของผู้เล่นใด ๆ คือค่า expected marginal contribution ของผู้เล่นคนนั้น และ Shapley value จะมีคุณสมบัติ $\sum_{i \in N} G_i(v) = v(N)$