

## บทที่ 2

### แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

จากที่กล่าวไว้แล้ว แบบจำลองเชิงเส้นสามารถแทนระบบไม่เชิงเส้นได้ โดยมีตัวแปรชุดหนึ่งเป็นตัวกำหนดจุดทำงาน เมื่อแบ่งตามที่มา ตัวแปรนี้สามารถแบ่งได้ 2 กลุ่ม คือเกิดจากความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ (parametric uncertainty) และเกิดจากการละเลยพลวัตในช่วงความถี่สูง (unmodelled dynamic uncertainty) โดยทั่วไปพิจารณาตัวแปรชุดนี้เป็นความไม่แน่นอนที่ไม่สามารถวัดค่าได้ แต่ตัวแปรทั้งสองกลุ่มนี้บางส่วนสามารถวัดค่าได้ในขณะปฏิบัติงานจริง จึงเกิดแนวความคิดของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

ในบทนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ โดยจำกัดฟังก์ชันของตัวแปรกำหนดให้อยู่ในรูปของการแปลงเศษส่วนย่อยเชิงเส้น และเปรียบเทียบแบบจำลองนี้กับแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองไม่เชิงเส้น

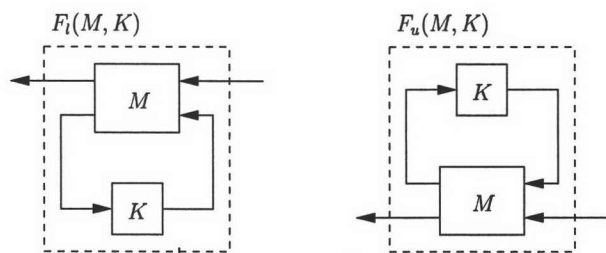
#### 2.1 รูปแบบของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

โดยทั่วไประบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ หมายถึงระบบเชิงเส้นที่พารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงตามตัวแปรชุดหนึ่ง เรียกตัวแปรที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ของระบบนี้ว่าตัวแปรกำหนด หรือกล่าวว่าพารามิเตอร์ของระบบเป็นฟังก์ชันของตัวแปรกำหนด สมการสถานะของระบบเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}(\theta(t))x(t) + \bar{B}_1(\theta(t))w(t) + \bar{B}_2(\theta(t))u(t) \\ z(t) &= \bar{C}_1(\theta(t))x(t) + \bar{D}_{11}(\theta(t))w(t) + \bar{D}_{12}(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= \bar{C}_2(\theta(t))x(t) + \bar{D}_{21}(\theta(t))w(t) + \bar{D}_{22}(\theta(t))u(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

โดยที่  $x \in \mathbb{R}^n$  คือ ตัวแปรสถานะของพลาเน็ต  
 $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  คือ สัญญาณเข้าภายนอก  
 $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  คือ สัญญาณควบคุม  
 $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  คือ สัญญาณที่ต้องการควบคุม  
 $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  คือ สัญญาณออกที่วัดได้  
 $\theta(t)$  คือ ตัวแปรกำหนด

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบดังกล่าว ขึ้นอยู่กับตัวแปรกำหนดและรูปแบบฟังก์ชันของพารามิเตอร์ของแบบจำลอง หากไม่มีข้อจำกัดใดๆ การออกแบบตัวควบคุมสำหรับแบบจำลองลักษณะนี้เป็นไปได้ยาก ในวิทยานิพนธ์นี้จึงจำกัดรูปแบบของฟังก์ชันให้อยู่ในรูปแบบของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น (linear fractional transformation, LFT) ซึ่งการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นมีนิยามดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.1: การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น

**นิยาม 2.1** สำหรับเมทริกซ์  $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$  กำหนดให้การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นล่าง (lower LFT),  $F_l(M, K)$  เป็นดังนี้

$$F_l(M, K) = M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}$$

และการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน (upper LFT),  $F_u(M, K)$  เป็นดังนี้

$$F_u(M, K) = M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12}$$

เมื่อ  $K$  และ  $M$  เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มีขนาดเหมาะสม,  $(I - M_{11}K)^{-1}$  และ  $(I - M_{22}K)^{-1}$  หาค่าได้

ระบบที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นระบบที่อยู่ในรูปแบบการเปลี่ยนแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นที่มีข้อจำกัดดังนี้

1. ระบบสามารถทำเสถียรได้ (stabilizable) และสามารถตรวจจับได้ (detectable)
2. ระบบไม่มีการส่งผ่านสัญญาณควบคุมไปยังสัญญาณที่วัดได้โดยตรง ( $D_{22} = 0$ )
3. จำนวนสัญญาณเข้าภายนอกเท่ากับจำนวนสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม ( $n_z = n_w$ )

เงื่อนไขในข้อแรกเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ เพื่อที่จะสามารถออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณออกที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพได้ ส่วนเงื่อนไขที่สองนั้นเป็นเงื่อนไขที่กำหนดเพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น และในเงื่อนไขสุดท้าย ในกรณีที่จำนวนสัญญาณเข้าภายนอกมีค่าไม่เท่ากับจำนวนสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม สามารถทำให้ทั้งสองจำนวนนี้มีค่าเท่ากันได้ โดยการเพิ่มจำนวนของแถวหรือหลักด้วยเมทริกซ์ศูนย์

ระบบดังสมการที่ (2.1) แทนด้วยพลาเน็ตที่มีสมการสถานะดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_\theta w_\theta(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_\theta(t) &= C_\theta x(t) + D_{\theta\theta} w_\theta(t) + D_{\theta 1} w(t) + D_{\theta 2} u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{1\theta} w_\theta(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{2\theta} w_\theta(t) + D_{21} w(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ตัวแปรกำหนดเป็นดังสมการ (2.3)

$$w_\theta(t) = \Theta(t) z_\theta(t) \quad (2.3)$$

โดยที่  $\Theta(t) \in \bar{\Theta}$  เป็นตัวแปรกำหนดของพลาเน็ต และ  $\bar{\Theta}$  มีโครงสร้างดังนี้

$$\bar{\Theta} \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \theta_1(t)I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2(t)I_{m_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta_r(t)I_{m_r} \end{bmatrix} : \theta_i(t) \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.4)$$

## 2.2 แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์และแบบจำลองอื่นๆ

ในหัวข้อนี้จะเปรียบเทียบแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ กับแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองไม่เชิงเส้น ระบบที่ใช้ใน

- แบบจำลองไม่เชิงเส้น จากสมการ (ก.1) และ (ก.2) ได้แบบจำลองไม่เชิงเส้นเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{K_m}{R} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} P_{11} &= J_0 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta_1 + m_1 L^2 + m_2 l_2^2 \sin^2 \beta_2 + m_2 L^2 \\ P_{12} &= -m_1 l_1 L \cos \beta_1 \\ P_{13} &= -m_2 l_2 L \cos \beta_2 \\ p_1 &= m_1 l_1^2 \dot{\beta}_1 \dot{\alpha} \sin(2\beta_1) + m_1 l_1 L \dot{\beta}_1^2 \sin(\beta_1) + m_2 l_2^2 \dot{\beta}_2 \dot{\alpha} \sin(2\beta_2) \\ &\quad + m_2 l_2 L \dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_2) + (c_0 + \frac{K_m K_b}{R}) \dot{\alpha} \\ P_{21} &= -m_1 l_1 L \cos \beta_1 \\ P_{22} &= J_1 + m_1 l_1^2 \\ P_{23} &= 0 \\ p_2 &= -m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 - m_1 g l_1 \sin \beta_1 + c_1 \dot{\beta}_1 \\ P_{31} &= -m_2 l_2 L \cos \beta_2 \\ P_{32} &= 0 \\ P_{33} &= J_2 + m_2 l_2^2 \\ p_3 &= -m_2 l_2^2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - m_2 g l_2 \sin \beta_2 + c_2 \dot{\beta}_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

- แบบจำลองเชิงเส้น จากสมการ (ก.1) และ (ก.2) ทำให้เป็นเชิงเส้นรอบจุด  $\beta_1^* = 0$  และ  $\beta_2^* = 0$  เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{K_m}{R} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

โดยที่

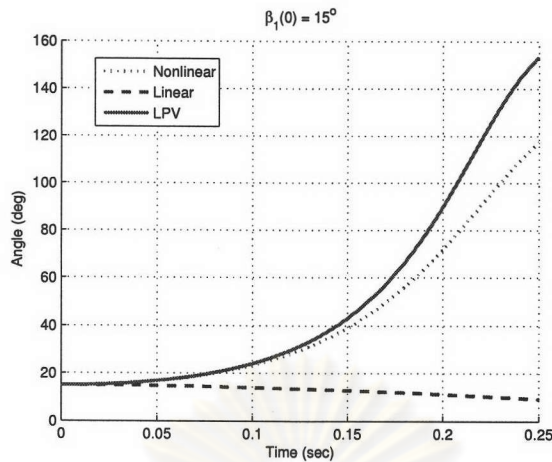
$$\begin{aligned}
 P_{11} &= J_0 + m_1 L^2 + m_2 L^2 \\
 P_{12} &= -m_1 l_1 L \\
 P_{13} &= -m_2 l_2 L \\
 p_1 &= (c_0 + \frac{K_m K_b}{R}) \dot{\alpha} \\
 P_{21} &= -m_1 l_1 L \\
 P_{22} &= J_1 + m_1 l_1^2 \\
 P_{23} &= 0 \\
 p_2 &= -m_1 g l_1 \beta_1 + c_1 \dot{\beta}_1 \\
 P_{31} &= -m_2 l_2 L \\
 P_{32} &= 0 \\
 P_{33} &= J_2 + m_2 l_2^2 \\
 p_3 &= -m_2 g l_2 \beta_2 + c_2 \dot{\beta}_2
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

- แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ จากสมการ (ข.1) ได้แบบจำลองไม่เชิงเส้นเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{K_m}{R} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= J_0 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta_1 + m_1 L^2 + m_2 l_2^2 \sin^2 \beta_2 + m_2 L^2 \\
 P_{12} &= -m_1 l_1 L \cos \beta_1 \\
 P_{13} &= -m_2 l_2 L \cos \beta_2 \\
 p_1 &= 2m_1 l_1^2 r_1 \dot{\alpha} \cos(\beta_1) + m_1 l_1 L r_1 \dot{\beta}_1 + 2m_2 l_2^2 r_2 \dot{\alpha} \cos(\beta_2) \\
 &\quad + m_2 l_2 L r_2 \dot{\beta}_2 + c_0 \dot{\alpha} + \frac{K_m K_b \dot{\alpha}}{R} \\
 P_{21} &= -m_1 l_1 L \cos \beta_1 \\
 P_{22} &= J_1 + m_1 l_1^2 \\
 P_{23} &= 0 \\
 p_3 &= -m_2 l_2^2 r_4 \dot{\alpha} \cos \beta_2 - m_2 g l_2 \sin \beta_2 + c_2 \dot{\beta}_2
 \end{aligned} \tag{2.10}$$



รูปที่ 2.2: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่หนึ่ง เมื่อ  $\beta_1(0) = 15^\circ$

$$p_2 = -m_1 l_1^2 r_3 \dot{\alpha} \cos \beta_1 - m_1 g l_1 \sin \beta_1 + c_1 \beta_1$$

$$P_{31} = -m_2 l_2 L \cos \beta_2$$

$$P_{32} = 0$$

$$P_{33} = J_2 + m_2 l_2^2$$

$$p_3 = -m_2 l_2^2 r_4 \dot{\alpha} \cos \beta_2 - m_2 g l_2 \sin \beta_2 + c_2 \beta_2$$

ในการเปรียบเทียบนี้ ถือเอาผลของแบบจำลองไม่เชิงเส้นเป็นบรรทัดฐาน และเปรียบเทียบผลตอบที่ได้จากแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และต้องการเพียงทดสอบแบบจำลอง จึงไม่คำนึงถึงลักษณะของผลตอบ ดังนั้นจึงจำลองผลโดยเพียงเปลี่ยนสถานะเริ่มต้นของมุมที่เบี่ยงเบนของแขนเพนดูลัมเท่านั้น ส่วนค่าสถานะเริ่มต้นอื่นๆ ให้มีค่าเป็นศูนย์ การเปรียบเทียบคือ มุมเบี่ยงเบนของแขนเพนดูลัมเท่ากับ  $\beta_1(0) = 15^\circ$  และ  $\beta_2(0) = 20^\circ$  ส่วนสัญญาณควบคุม  $V$  ได้จากตัวควบคุมพีดี (PD controller) ที่ใช้มุมเบี่ยงเบนของลูกตุ้มของแบบจำลองนั้นๆ เป็นสัญญาณเข้า ดังนี้

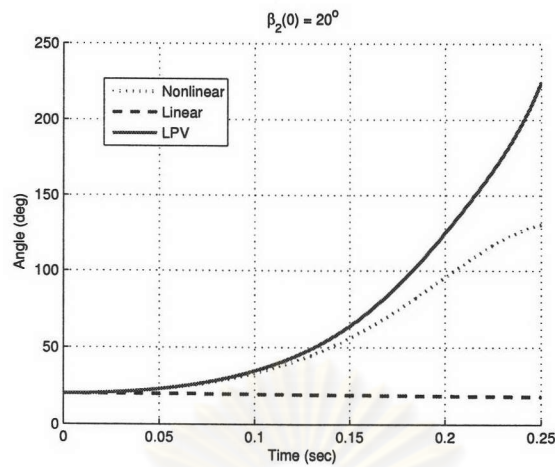
$$F(t) = K_P \beta_1(t) + K_D \frac{d}{dt} \beta_1(t) + K_P \beta_2(t) + K_D \frac{d}{dt} \beta_2(t) \quad (2.11)$$

โดยที่  $K_P = 70$  และ  $K_D = 10$

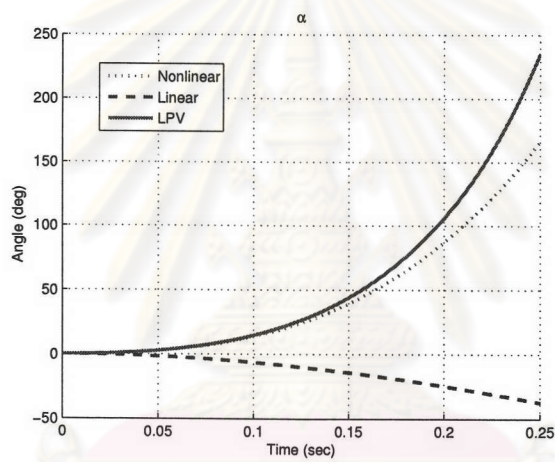
## 2.3 สรุป

ในบทนี้แสดงรูปแบบของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ และเปรียบเทียบผลตอบที่ได้จากแบบจำลองไม่เชิงเส้น แบบจำลองเชิงเส้น และแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ของระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

ในหัวข้อสุดท้ายแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ให้ผลตอบใกล้เคียงกับผลตอบจากพลาเน็ตไม่เชิงเส้นมากกว่าผลตอบของแบบจำลองเชิงเส้น ทั้งนี้แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ก็ยังมีข้อจำกัด ในกรณีที่มีการประมาณเชิงเส้นบางส่วน ผลตอบที่เกี่ยวข้อง



รูปที่ 2.3: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่สอง เมื่อ  $\beta_2(0) = 20^\circ$



รูปที่ 2.4: สัญญาณควบคุม เมื่อ  $\beta_1(0) = 15^\circ$  และ  $\beta_2(0) = 20^\circ$

กับส่วนที่มีการประมาณนั้นจะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น และแบบจำลองนี้ยังคงไม่สามารถครอบคลุมได้  
ทุกช่วงการทำงาน

ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย