

บทที่ 2

ทฤษฎีเบื้องต้น

2.1 แบบจำลองสัญญาณที่ใช้ในการพิจารณา

ก่อนการพิจารณาในหัวข้อวิจัยนี้จะกล่าวถึงข้อกำหนดเริ่มต้นที่จะใช้ประกอบการวิเคราะห์ กล่าวคือ

1.แบบจำลองสัญญาณ (Signal Model) ที่ใช้จะเป็นระบบการสุ่มเชิงปริภูมิ (Spatial process) โดยสัญญาณแต่ละเส้นทางจะมีความเป็นอิสระเชิงสถิติจากกัน (Statistically independent each other) และอยู่ในรูปของ

$$Y(t, \phi) = [y_1(t, \phi_1), y_2(t, \phi_2), \dots, y_D(t, \phi_D)]^T \quad (2.1)$$

โดยที่

$$y_k(t, \phi_k) = a_S(\phi_k)x_k(t) + n_m(t) \quad ; \quad k=1, 2, \dots, D \quad (2.2)$$

เมื่อ

$$x_k(t) = (\sqrt{p_k})\alpha_k(t)e^{j\psi_k(t)}m_k(t)e^{j\omega_c t} \quad (2.3)$$

D คือจำนวนสัญญาณตกกระทบ

$Y(t)$ คือสัญญาณที่รับได้ที่ภาครับทั้งหมด D เส้นทาง

$a_S(\phi_k)$ คือเวกเตอร์หมุนวน ณ มุมตกกระทบของสัญญาณเส้นทางที่ k ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ (2.19) กับ (2.20)

$x_k(t)$ คือสัญญาณข้อมูลในเส้นทางที่ i เมื่อผ่านช่องสัญญาณมาแล้ว

p_k คือระดับกำลัง (Power) ของสัญญาณ (วัตต์) ในเส้นทางที่ k

$\alpha_k(t)$ คือผลตอบสนองทางขนาดของช่องสัญญาณในเส้นทางที่ k โดยจะมีคุณลักษณะการกระจายแบบเกาส์

- $\psi_k(t)$ คือผลตอบสนองทางเฟสของช่องสัญญาณในเส้นทางที่ k
โดยมี คุณลักษณะการกระจายแบบสม่ำเสมอ
- $m_k(t)$ คือข้อมูลแถบฐานที่ส่งมาในเส้นทางที่ k
- ω_c คือความถี่พาหะ
- $\mathbf{n}_m(t)$ คือ สัญญาณรบกวนที่มีคุณลักษณะการกระจายแบบเกาส์ขาว
ของสายอากาศต้นที่ m ณ เวลา t ซึ่งเป็นสัญญาณรบกวนพื้นหลัง

กำหนดให้เมตริกซ์อัตราสหสัมพันธ์ของสัญญาณที่รับได้ มีสัญญาณรบกวนพื้นหลังที่มีคุณสมบัติเกาส์ขาวแบบบวก(Additive White Gaussian Noise) มีระดับกำลังเป็น σ_N^2 วัตต์ ได้ดังนี้

$$\mathbf{R}_{YY} = \mathbf{E}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H) = \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)\mathbf{A}^H + \sigma_N^2\mathbf{I} \quad (2.4)$$

ซึ่งในที่นี้ $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_s(\phi_1), \mathbf{a}_s(\phi_2), \dots, \mathbf{a}_s(\phi_D)]$ (2.5)

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_D(t)] \quad (2.6)$$

\mathbf{I} คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

และเมื่อให้ $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)$ (2.7)

จะได้ว่า

$$\mathbf{R}_{YY} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{A}^H + \sigma_N^2\mathbf{I} \quad (2.8)$$

2. ไม่คิดผลของค่าความเหนี่ยวนำร่วม (Mutual Coupling) ของสายอากาศแต่ละต้น กล่าวคือพิจารณาบทบาทของสายอากาศให้เป็นตัวตรวजू

3. ระยะห่างจากภาคส่งและภาครับอยู่ห่างกันมากจนสามารถพิจารณาสนามดังกล่าวเป็น สนามแม่เหล็กไฟฟ้าระยะไกลได้

4. ผลของการประวิงเวลาของช่องสัญญาณมีค่าน้อยมากจนสามารถละทิ้งได้ (สัญญาณมาถึงพร้อมกัน)

2.2 อัลกอริทึมแบบมิวสิก

มิวสิก (MUSIC=MULTiple Signal Classification) [1],[2],[4] จะมีข้อกำหนด เริ่มต้นว่า สัญญาณที่พิจารณาจะอยู่ภายใต้ระบบการสุ่มแบบคงที่ (Stationary Process) อีกทั้งแต่ละเส้นทางจะมีความเป็นอิสระเชิงสถิติจากกัน โดยสัญญาณดังกล่าวสามารถแบ่งได้เป็น 2 ปริภูมิย่อย (Subspace) คือ ปริภูมิย่อยของสัญญาณที่ต้องการ (Desired Signal Subspace) และปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวน (Noise Subspace หรือบางครั้งจะเรียกว่า Signal Plus Noise Subspace) โดยที่ ปริภูมิย่อยทั้ง 2 ปริภูมิ ตั้งฉากกัน

อาศัยข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ที่ว่า ถ้าสัญญาณที่พิจารณาเป็นอิสระต่อกันหมด จะมีปริภูมิย่อย 2 ปริภูมิที่ตั้งฉากกัน เราจะสามารถเขียนเมตริกซ์อัตโนมัติสหสัมพันธ์ของสัญญาณที่พิจารณา (R_{YY}) ตามหลักการของการแยกย่อยแบบเจาะจง (Eigen decomposition) ได้ว่า

$$R_{YY} = V\Lambda V^H \quad (2.9)$$

เมื่อ

$$V = [V_S \quad V_N] \quad (2.10)$$

$$V_S = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_D] \quad (2.11)$$

$$V_N = [q_{D+1} \quad q_{D+2} \quad \dots \quad q_M] \quad (2.12)$$

โดยที่ V คือเมตริกซ์เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector Matrix) โดยจะประกอบไปด้วย เมตริกซ์ย่อย 2 ชุดคือ V_S และ V_N ซึ่งจะแทนความหมายของเมตริกซ์เวกเตอร์เจาะจง ในปริภูมิย่อยของสัญญาณที่ต้องการ และ เมตริกซ์เวกเตอร์เจาะจง ในปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวน ตามลำดับ M คือจำนวนต้นของสายอากาศแถวลำดับ และ q_m คือ เวกเตอร์เจาะจงหลักที่ m ของเมตริกซ์เวกเตอร์เจาะจง เมื่อ $m = 1, 2, \dots, M$

เมื่อ

$$\Lambda = \text{diag}[\Lambda_S \ \Lambda_N] \quad (2.13)$$

$$\Lambda_S = \text{diag}[v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots v_D] \quad (2.14)$$

$$\Lambda_N = \text{diag}[v_{D+1} \ v_{D+2} \ v_{D+3} \ \dots v_M] \quad (2.15)$$

โดยที่ Λ คือเมตริกซ์ค่าเจาะจง (Eigenvalue Matrix) จะประกอบไปด้วยเมตริกซ์ย่อยอีก 2 ชุดคือ Λ_S และ Λ_N ซึ่งจะมีสมาชิก D ค่าในปริภูมิย่อยของสัญญาณที่ต้องการ และ $(M-D)$ ค่าในปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวน ตามลำดับ อีกทั้งค่าเจาะจงยังมีลักษณะเรียงกันแบบไม่ลดระดับขึ้น (non decreasing degree) กล่าวคือ

$$v_1 > v_2 > \dots v_D > v_{D+1} = v_{D+2} = \dots = v_M = \sigma_N^2 \quad (2.16)$$

หลักการของอัลกอริทึมแบบมิวสิกคือ

$$\hat{\phi} = \min_{\phi} \{g(\phi)\} \quad (2.17)$$

โดยที่ $g(\phi) = \mathbf{a}^H(\phi) \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H \mathbf{a}(\phi) = \|\mathbf{a}^H(\phi) \mathbf{V}_N\|^2 \quad (2.18)$

$\hat{\phi}$ คือค่ามุมหรือทิศทางที่ได้จากการประมาณ (Estimated Direction Of Arrival)

$\mathbf{a}(\phi)$ คือเวกเตอร์หมุนวนเมื่อพิจารณาให้สายอากาศแถวลำดับวางตามแกน X และระนาบของสัญญาณ คือระนาบกวาด (Azimuth plane) เท่านั้น

$$\mathbf{a}(\phi) = [e^{-j\xi_1 \cos(\phi)} \ e^{-j\xi_2 \cos(\phi)} \ \dots \ e^{-j\xi_M \cos(\phi)}]^T \quad (2.19)$$

$$\xi_m = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) d(m-1) ; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.20)$$

เมื่อ

λ คือค่าความยาวคลื่น(เมตร), $\lambda = \frac{3 \times 10^8}{f(\text{Hz})}$, d คือระยะห่างในแต่ละต้นของสายอากาศ

โดยสมการที่ (2.18) จะมีลักษณะเป็นสเปกตรัมแบบศูนย์ และอัลกอริทึมแบบมิวสิกได้นำเอาคุณสมบัติดังกล่าวมาใช้ ดังนี้

$$P_{MUSIC}(\phi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\phi) \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H \mathbf{a}(\phi)} \quad (2.21)$$

จากข้อกำหนดเริ่มต้นเกี่ยวกับการตั้งฉากระหว่างปริภูมิย่อยของสัญญาณที่ต้องการและปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวน จะพบว่าสัญญาณที่อยู่ในปริภูมิย่อยของสัญญาณที่ต้องการจะอยู่ในแนว $\mathbf{a}_s(\phi)$ ดังนั้น $\mathbf{a}_s(\phi)$ จะสอดคล้อง (Corresponds) กับปริภูมิย่อยของสัญญาณที่ต้องการ หรือจะกล่าวได้ว่า $\mathbf{a}_s(\phi)$ ไม่สอดคล้องกับปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวน เมื่อนำมาประกอบกับข้อกำหนดเริ่มต้นที่กล่าวไปแล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{a}_s(\phi) \perp \mathbf{q}_m; \quad \mathbf{q}_m \in \mathbf{V}_N; \quad \mathbf{a}_s^H(\phi) \mathbf{q}_m = 0 \quad ; m = D+1, D+2, \dots, M \quad (2.22)$$

พิจารณาสมการที่ (2.21) ร่วมกับสมการที่ (2.22) พบว่า

$$P_{MUSIC}(\phi) \rightarrow \infty \quad \text{เมื่อ} \quad \phi = \phi_s \quad (2.23)$$

แต่ประเด็นที่ตามมา ในทางปฏิบัติคือ วิธีที่จะหาจำนวนของสัญญาณที่ตกกระทบที่ สายอากาศ แถวลำดับ (D) เพื่อที่จะได้เลือกเอาช่วงของ $\mathbf{V}_N = [\mathbf{q}_{D+1} \quad \mathbf{q}_{D+2} \quad \dots \quad \mathbf{q}_M]$ ใน \mathbf{V} โดยวิธีที่จะประมาณค่า D ได้นั้น จะอาศัยสมการที่ (2.16) เพราะจะทำให้ทราบได้ว่ามีจำนวนค่าเจาะจง ซ้ำกันอยู่กี่ตัว ซึ่งค่าดังกล่าวสอดคล้องกับจำนวนหลัก (Column) ของ \mathbf{V}_N หากว่าสมมติให้มีค่าเจาะจง ซ้ำกันอยู่ K ตัวจากจำนวนค่าเจาะจงทั้งหมด M ตัว (ค่าเจาะจง M ตัวจะได้มาจากเมตริกซ์ \mathbf{R}_{YY} ขนาด $M \times M$) จะทำให้เราประมาณได้ว่าจะมีค่าเจาะจงที่ไม่ซ้ำกันเหลืออยู่ $M-K$ ตัว ซึ่งจะกลายเป็นจำนวนหลักของเวกเตอร์เจาะจง ใน \mathbf{V}_s และ หมายถึงจำนวนของสัญญาณที่ตกกระทบ D โดยปริยาย

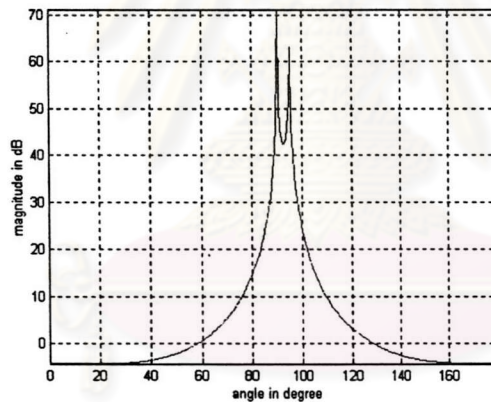
แนวคิดดังกล่าวในรูปของสมการคณิตศาสตร์อย่างง่ายจะเป็น

$$\hat{D} \equiv M - K \quad (2.24)$$

เมื่อ M = จำนวนต้นสายอากาศ

K = จำนวนค่าเจาะจงที่ซ้ำกันอยู่ (อยู่ในปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวน)

พิจารณารูปแบบสัญญาณที่ได้จากการประมาณทิศทางของอัลกอริทึมมิวสิกจากรูปที่ 2.1 โดยที่มีสัญญาณ 2 ตัวที่มีระดับ SNR เท่ากันคือ 20 dB เข้ามาที่มุม 90 และ 95 องศา ในระนาบกวาดสายอากาศแถวลำดับเป็นแบบเชิงเส้น (Linear Array) 3 ต้น ระยะห่างระหว่างต้นเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น สัญญาณรบกวนเป็นเกาส์ขาวแบบบวก จำนวนการสุ่ม (Sample number) เป็น 1000 แซมเปิล และกำหนดให้เวกเตอร์หมุนวนสอดคล้องกับสมการที่ (2.19) และ (2.20)



รูปที่ 2.1 แสดงรูปแบบสัญญาณที่ได้จากการประมาณทิศทางของอัลกอริทึมแบบมิวสิก (MUSIC Spectral)

2.3 อัลกอริทึมมิวสิกแบ่งลำคลื่น

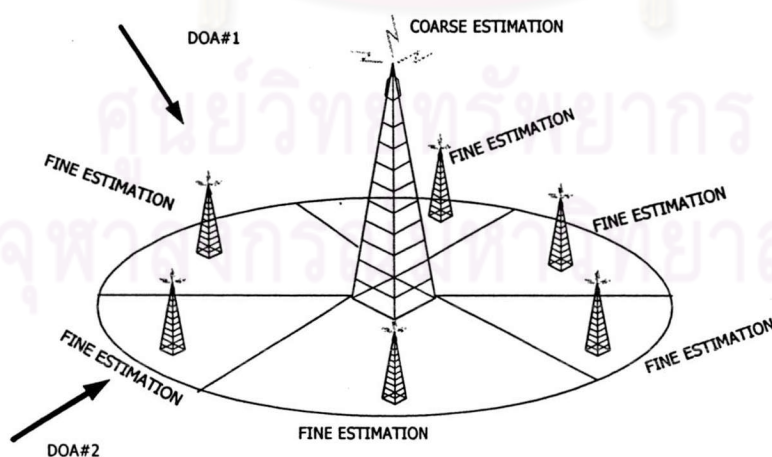
วัตถุประสงค์ของการพัฒนาอัลกอริทึมมิวสิกดั้งเดิมมาเป็นมิวสิกแบ่งลำคลื่น คือ

1. ต้องการลดเวลาประมวลผล (Fast Algorithm) และลดความซับซ้อนในการประมวลผล (Computation Complexity) ด้วยการลดขนาดข้อมูลด้านอินพุตลง

2. เพื่อสามารถนำไปใช้ได้กับกระบวนการจัดการทางเซลล์ (Cell) หรือ เซกเตอร์ (Sector) ได้

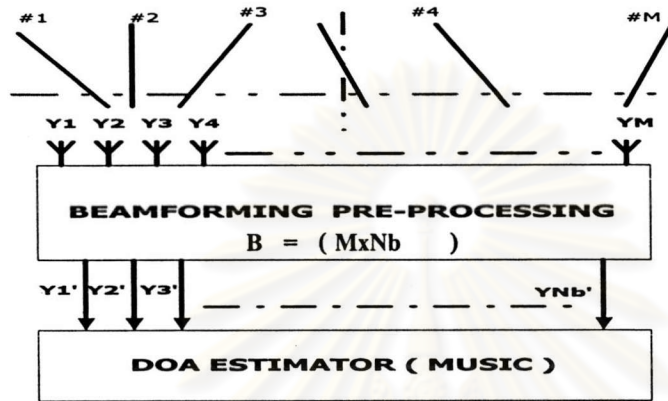
กระบวนการการแบ่งคลื่นจะทำที่ภาคการประมวลผลล่วงหน้า (Pre-processing) สมมติให้จำนวนอินพุตที่เข้ามามี M เส้นทาง อินพุตดังกล่าวจะถูกภาคการประมวลผลล่วงหน้าลดเหลือ N_b เส้นทาง ($N_b < M$) จากนั้นข้อมูลทั้ง N_b เส้นทาง แล้วจึงค่อยถูกส่งเข้าสู่กระบวนการประมาณทิศทางต่อไป

การทำงานของมอดิวลัสแบบแบ่งลำคลื่นนี้จะมี 2 ขั้นตอนหลัก ๆ คือ การทำการประมาณอย่างหยาบ (Coarse estimation) และการทำการประมาณอย่างละเอียด (Fine estimation) โดยที่การทำการประมาณอย่างหยาบจะทำก่อนเพื่อดูภาพคร่าว ๆ ถึงการมาของสัญญาณ จากนั้นจะใช้การประมาณอย่างละเอียดเพื่อดูทิศทางที่แน่นอนอีกที ดังนั้นกล่าวได้ว่าการทำงานในส่วนของการประมาณอย่างละเอียดจะเป็นผลมาจากการประมาณอย่างหยาบ ข้อพิจารณาของการทำการประมาณอย่างหยาบ คือพยายามให้ความกว้างของลำคลื่นค่อนข้างกว้างพอสมควร เพื่อจะได้เห็นภาพการมาของสัญญาณในมุมกว้าง แต่ข้อควรระวังคือถ้าจัดให้ลำคลื่นมีความกว้างมากเกินไป จะทำให้รัศมีของพื้นที่ครอบคลุมสัญญาณลดลง (เมื่อพิจารณาให้ขนาดของสนามกระตุ้นที่จ่ายให้สายอากาศคงที่) ในขณะที่ถ้าให้ความกว้างของลำคลื่นแคบเกินไป อาจจะทำให้ไม่สามารถเก็บรายละเอียดในการมาของสัญญาณได้เนื่องจากปัญหาจุดบอดของลำคลื่น อีกทั้งเมื่อลำคลื่นแคบลงจะทำให้กำลังของลำคลื่นสูงขึ้นด้วย ซึ่งจะไปรบกวนเซลล์ข้างเคียง ดังนั้นประเด็นเหล่านี้เป็นปัญหาที่ต้องคำนึงถึงเวลานำไปใช้ในทางปฏิบัติ



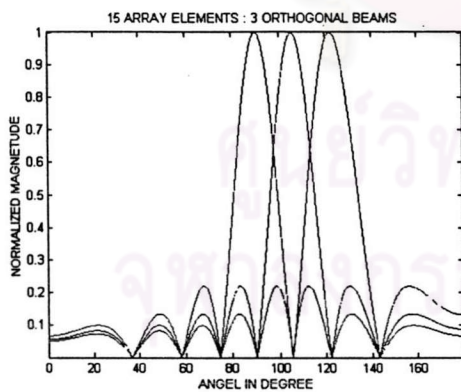
รูปที่ 2.2 แสดงลักษณะการทำงานของอัลกอริทึมในการประมาณทิศทางแบบแบ่งคลื่น

ในการแบ่งลำคลื่นจะอาศัยการทำงานของภาคการประมวลผลล่วงหน้าซึ่งมีลักษณะเป็นส่วนสร้างลำคลื่น (Beam former) โดยมีเมตริกซ์คุณลักษณะเป็น B ซึ่งมีหน้าที่สร้างลำคลื่นที่ตั้งฉากเพื่อใช้ในการกำหนดกรอบการทำงานของอัลกอริทึมและลดขนาดของอินพุตที่จะถูกส่งเข้าสู่ภาคการประมวลผลทางต่อไป ดังรูปที่ 2.3

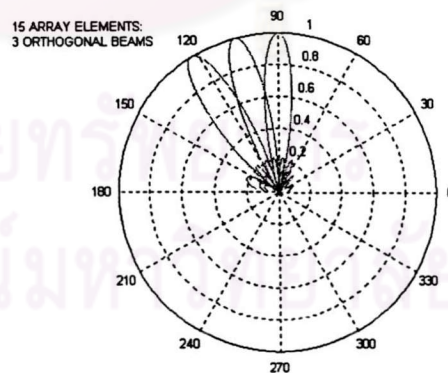


รูปที่ 2.3 แสดงแนวคิดของเทคนิคแบ่งคลื่น (Beam Space technique [6])

การที่ให้ลำคลื่นออกมาแบบตั้งฉาก (Orthogonal Beam) กันนั้น เพื่อต้องการให้การทำงานของภาคการประมวลผลล่วงหน้าไม่ส่งผลกระทบต่อคุณสมบัติเชิงสถิติของสัญญาณตกกระทบ ดังแสดงในรูปที่ 2.4



ก) กราฟของลำคลื่นตั้งฉากในพิกัดฉาก



ข) กราฟของลำคลื่นตั้งฉากในพิกัดเชิงขั้ว

รูปที่ 2.4 แสดงลักษณะของลำคลื่นตั้งฉาก (Orthogonal Beam)

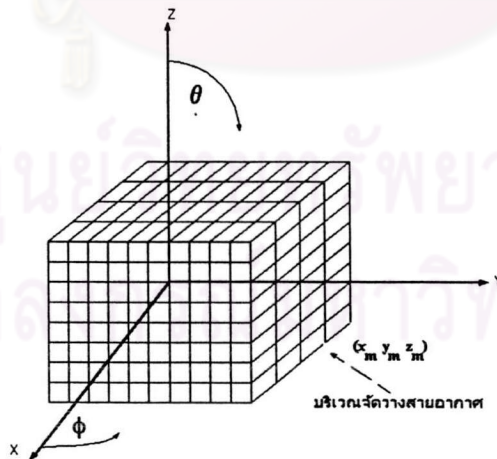
และเมื่อพิจารณาเมตริกซ์คุณลักษณะของภาคการประมวลผลล่วงหน้า พบว่าไม่เป็นเมตริกซ์จัตุรัส นั้น ทำให้เราทราบต่อมาว่ากระบวนการสร้างลำดับสั้นทั้ง Nb ลำดับสั้น ไม่ได้ใช้เมตริกซ์ของบัตเลอร์ (Butler) แต่ใช้วิธีของ [5] ซึ่งจะพิจารณาได้จากการแปลงฟูริเยร์ (Fourier Transform) ของสนาม กระตุ้นแบบอิมพัลส์ (Impulse Excitation Weight: $w(t)$)

$$w(t) = \sum_{m=1}^M w_m \delta(t - \tau_m) \quad (2.25)$$

โดยที่ τ_m คือระยะเวลาสัมพัทธ์ที่สนามกระตุ้นไปถึงสายอากาศคนที่ m เทียบกับเวลา ณ ตำแหน่งสายอากาศอ้างอิง
 w_m คือค่าสนามกระตุ้นของสายอากาศคนที่ m

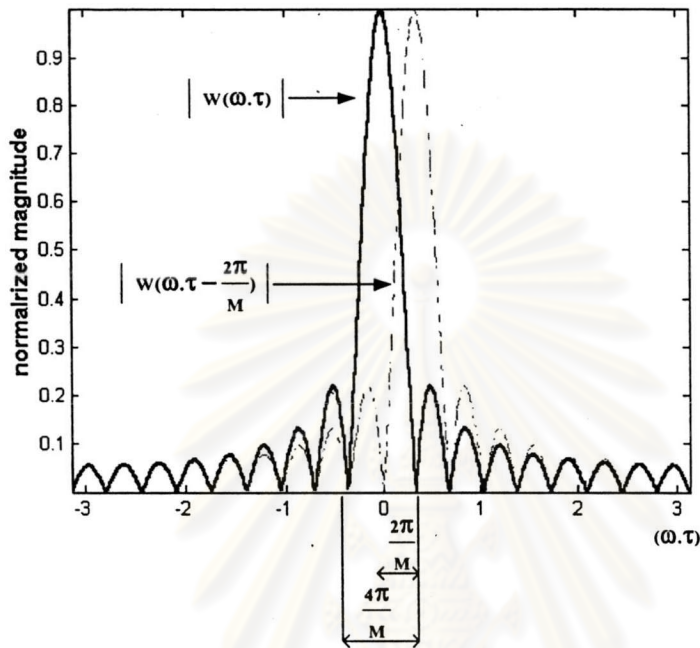
ในกรณีสายอากาศแถวลำดับแบบสม่ำเสมอ ให้ $w_m = 1; \forall m \in [1, 2, \dots, M]$ และ $\tau_m = \tau(m-1)$ โดยที่ τ เป็นค่าคงตัว แล้วการแปลงฟูริเยร์ของสมการที่ (2.25) จะได้

$$\begin{aligned} W(\omega\tau) &= \mathcal{F}\{w(t)\} = \sum_{m=1}^M \exp(-j\omega\tau(m-1)) \\ &= \exp\left(j \frac{\omega\tau(M-1)}{2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$



รูปที่ 2.5 แสดงการจัดเรียงสายอากาศในกรณีทั่วไป

การแปลงฟูรีเยอร์ดังกล่าวมีลักษณะคล้ายกับการแปลงฟูรีเยอร์แบบเต็มหน่วย (Discrete Fourier Transform) ของฟังก์ชันหน้าต่างแบบสี่เหลี่ยม (Rectangular Window) เมื่อพิจารณาให้ $M = 7$ และ $f = 1, \tau = 1$ จะได้ $\|w(\omega\tau)\|$ ดังรูปที่ 2.6 คือ



รูปที่ 2.6 แสดงขนาดจากผลการแปลงฟูรีเยอร์ของฟังก์ชันสนามกระตุ้น

จากรูปที่ 2.6 เราสังเกตเห็นว่าบริเวณพหุหลักจะมีความกว้างคงตัวเป็น $\frac{4\pi}{M}$ หากทำการขยายกราฟดังกล่าวไปเป็นระยะครึ่งหนึ่งของความกว้างพหุหลัก $\left(\frac{2\pi}{M}\right)$ เราก็จะได้กราฟอีกรูปหนึ่งที่มีรูปร่างเหมือนกันแต่ตั้งฉากกับกราฟรูปเดิม ซึ่งเราจะสรุปแนวคิดของ [5] ได้ว่าการทำงานที่ภาคการประมวลผลล่วงหน้าดังกล่าวก็คือการสร้างฟังก์ชันหน้าต่างแบบสี่เหลี่ยม Nb ชุด โดยความกว้างของแต่ละชุด (Window Length) เป็น M แล้วนำมาต่อให้เหลื่อมกัน (Lag Window) ด้วยระยะ $\frac{2\pi}{M}$ แต่จาก [5] ได้กำหนดเพิ่มเติมให้ค่าฟูรีเยอร์ของฟังก์ชันหน้าต่างแบบสี่เหลี่ยมเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ดังนั้นสมการที่ (2.26) จึงถูกปรับเป็น

$$W(\omega\tau) = \exp\left(j\frac{\omega\tau(M-1)}{2}\right) w(\omega\tau) = \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \quad (2.27)$$

โดยทั่วไป τ_m หมายถึงระยะเวลาที่สนามกระตุ่นไปถึงสายอากาศต้นที่ m ซึ่งจะเป็นไปตามกฎฟิสิกส์พื้นฐานคือ $\tau_m = \frac{S_m}{V} = \frac{S_m}{C}$ เมื่อ $C = 3 \times 10^8$ m/s, S_m คือระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด (Origin) ไปยังจุด (x_m, y_m, z_m) ซึ่งวัดตามแนวรัศมี โดยสามารถพิจารณารูปที่ 2.5 ประกอบ จะได้ว่า

$$S_m = [x_m \vec{a}_x + y_m \vec{a}_y + z_m \vec{a}_z] \cdot \vec{a}_r = x_m \sin(\theta) \cos(\phi) + y_m \sin(\theta) \sin(\phi) + z_m \cos(\theta)$$

จากที่เราทราบว่า $\omega = 2\pi f$ จะทำให้

$$\omega \tau_m = \frac{2\pi}{\lambda} (x_m \sin(\theta) \cos(\phi) + y_m \sin(\theta) \sin(\phi) + z_m \cos(\theta))$$

ในกรณีของวิทยานิพนธ์นี้ได้สมมุติให้สายอากาศมีระยะห่างระหว่างต้นคกที่เป็น d และจัดเรียงตัวเฉพาะแนวแกน X เท่านั้นทำให้ $\omega \tau_m = \frac{2\pi}{\lambda} d(m-1) \sin(\theta) \cos(\phi)$ จากหลักการที่กล่าวไป สามารถสรุปขั้นตอนในการสร้างลำดับคลื่นตั้งฉากของภาคการประมวลผลล่วงหน้า ดังนี้

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{M}} [\mathbf{S}(\beta_1) \mathbf{S}(\beta_2) \dots \mathbf{S}(\beta_{Nb})] \quad (2.28)$$

$$\beta_i = \left[\frac{2\pi}{\lambda} d \cos(\phi_0) + (i-1) \frac{2\pi}{M} ; i=1, 2, \dots, Nb \right]^T \quad (2.29)$$

$$\mathbf{S}(\beta_i) = \left[\exp \left(j(m-1 + \frac{M-1}{2}) \beta_i \right) ; m=1, 2, \dots, M \right]^T \quad (2.30)$$

$$\mathbf{a}(\phi) = \left[\exp \left(-j(m-1 + \frac{M-1}{2}) \frac{2\pi}{\lambda} d \cos(\phi) \right) ; m=1, 2, \dots, M \right]^T \quad (2.31)$$

โดยที่

ϕ_0 คือ ตำแหน่งทิศทางแรกของลำดับคลื่นตั้งฉาก

\mathbf{B} คือชุดสนามกระตุ่นขนาด $M \times Nb$ สำหรับให้สายอากาศแถวลำดับ M ต้นสร้างลำดับคลื่นตั้งฉาก Nb ลำคลื่น (Pre-processing)

ขอบเขตพิสัยการทำงานของระบบ (Array manifold) ก็จะถูกกำหนดใหม่โดยภาคการประมวลผลล่วงหน้า กล่าวคือ ($\mathbf{a}(\phi)$ ในที่นี้หมายถึงสมการที่ (2.31))

$$\mathbf{a}_B(\phi) = \mathbf{B}^H \mathbf{a}(\phi) \quad (2.32)$$

ขอบเขตพิสัยของสายอากาศแถวลำดับถูกกำหนดใหม่ดังนี้ [5]

$$\frac{\lambda}{2\pi d} \left(\beta_1 - \frac{\pi}{M} \right) \leq \cos(\phi) \leq \frac{\lambda}{2\pi d} \left(\beta_{Nb} - \frac{\pi}{M} \right)$$

ในรูปที่ 2.3 เราจะได้ว่า ถ้า $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2 \ \mathbf{Y}_3 \ \dots \ \mathbf{Y}_M]^T$ และ $\mathbf{Y}' = [\mathbf{Y}'_1 \ \mathbf{Y}'_2 \ \mathbf{Y}'_3 \ \dots \ \mathbf{Y}'_{Nb}]^T$ จะได้ว่า

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{B}^H \mathbf{Y} \quad (2.33)$$

ข้อที่พึงระลึกคือสมาชิกของ \mathbf{B} ในแต่ละหลักจะตั้งฉากกันและกัน (Mutually Orthogonal) เสมอ ทำให้

$$\mathbf{B}^H \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (2.34)$$

เราจะหาเมตริกซ์อัตโนมัติที่บ่งชี้ว่าจะบ่อนสู่กระบวนการประมาณทิศทางได้จาก

$$\mathbf{R}'_{YY} = \mathbf{E}(\mathbf{Y}' \mathbf{Y}'^H) = \mathbf{B}^H \mathbf{E}(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^H) \mathbf{B} = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{YY} \mathbf{B} \quad (2.35)$$

เมื่อ \mathbf{R}_{YY} : เมตริกซ์อัตโนมัติของ \mathbf{Y} (อินพุทของภาคการประมวลผลล่วงหน้า)

\mathbf{R}'_{YY} : เมตริกซ์อัตโนมัติของ \mathbf{Y}' (เอาต์พุทของภาคการประมวลผลล่วงหน้า)

สังเกตสมการที่ (2.35) พบว่าคุณสมบัติของข้อมูลด้านอินพุทถูกเลือกโดยเมตริกซ์ \mathbf{B} และจะทำให้ข้อมูลอินพุทที่บ่อนสู่กระบวนการประมาณทิศทางเปลี่ยนไปอยู่ในรูปของ

$$\mathbf{R}'_{YY} = \mathbf{B}^H (\mathbf{A} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{A}^H + \sigma_N^2 \mathbf{I}) \mathbf{B} = (\mathbf{B}^H \mathbf{A}) \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{B}^H \mathbf{A})^H + \sigma_N^2 \mathbf{B}^H \mathbf{B} \quad (2.36)$$

ถ้าให้ $\mathbf{A}_B = \mathbf{B}^H \mathbf{A}$ จะทำให้สมการที่ (2.36) เปลี่ยนเป็น

$$\mathbf{R}'_{YY} = \mathbf{A}_B \mathbf{R}_{XX} \mathbf{A}_B^H + \sigma_N^2 \mathbf{I} \quad (2.37)$$

ซึ่งหมายถึงตัวข้อมูลของสัญญาณตกกระทบยังคงอยู่ เพียงแต่ขอบเขตการหมุนของเวกเตอร์หมุนวนถูกตีกรอบให้เล็กลงด้วยเมตริกซ์ \mathbf{B} หากเปรียบเทียบกับสมการเดิมของอัลกอริทึมมิมิวสิก จะเห็นว่าขอบของการหมุนของเวกเตอร์หมุนวนในกรณีนี้จะลดลง โดยเขียนสมการ $P_{MUSIC}(\phi)$ ได้เป็น

$$P_{MUSIC}(\phi) = \frac{1}{\mathbf{a}_B^H(\phi) \mathbf{V}'_N \mathbf{V}'_N{}^H \mathbf{a}_B(\phi)} \quad (2.38)$$

โดยที่ \mathbf{V}'_N คือปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวนที่ได้จากเมตริกซ์ \mathbf{R}'_{YY}

จากที่เราเห็นว่า ปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวนจะตั้งฉากกับเวกเตอร์หมุนวนในทิศทางที่สัญญาณตกกระทบ ตามสมการที่ (2.22) เช่นเดียวกันกับกรณีนี้เมื่อเพิ่มเมตริกซ์ \mathbf{B} แล้วคุณสมบัติที่ตั้งฉากดังกล่าวจะต้องยังคงอยู่เหมือนเดิม นั้นจะหมายความว่า

$$\mathbf{a}_B(\phi) \perp \mathbf{q}_{n_b}; \quad \mathbf{q}_{n_b} \in \mathbf{V}'_N; \quad \mathbf{a}_B^H(\phi) \mathbf{q}_{n_b} = 0; \quad n_b = D+1, D+2, \dots, Nb$$

$$\text{หรือ} \quad (\mathbf{B}^H \mathbf{a}_s(\phi))^H (\mathbf{B}^H \mathbf{q}_m) = \mathbf{a}_s^H(\phi) (\mathbf{B} \mathbf{B}^H) \mathbf{q}_m = 0; \quad m = D+1, D+2, \dots, M \quad (2.39)$$

พิจารณารูปแบบสัญญาณที่ได้จากการประมาณทิศทางของอัลกอริทึมแบบมิมิวสิกแบบแบ่งลำคลื่นจากรูปที่ 2.7- 2.10 โดยที่สัญญาณตกกระทบทุกเส้นทางมีระดับ SNR เป็น 20 dB เท่ากัน เข้ามาที่มุม 20, 19, 88, 40 และ 41 องศาในระนาบกวาด สายอากาศที่ใช้เป็นแถวลำดับแบบเชิงเส้น ที่ระยะห่างระหว่างต้นเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น สัญญาณรบกวนเป็นเกาส์ขาวแบบบวกลำจำนวนการสุ่มเป็น 1000 แซมเปิล

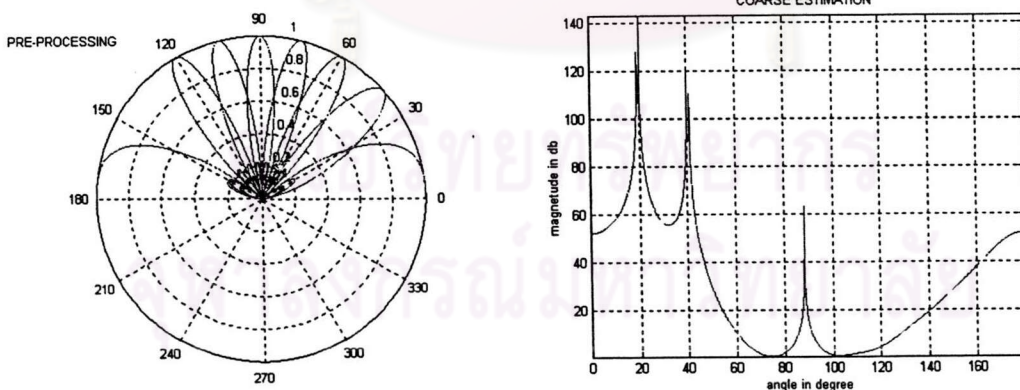
สำหรับการประมาณอย่างหยาบ (Coarse estimation) เพื่อหามุมตกกระทบในมุมกว้างของสัญญาณภายในช่วง 0-180 องศา ในรูปที่ 2.7 กระบวนการของภาคการประมวลผลล่วงหน้าจะมีอาณาบริเวณในความรับผิดชอบของเซลล์เป็น 180 องศา ใช้จำนวนสายอากาศ 8 ต้น ในการสร้างลำคลื่นตั้งฉาก 7 ลำคลื่น

สำหรับการประมาณอย่างละเอียด (Fine estimation) เพื่อหามุมตกกระทบของสัญญาณภายในช่วง 0-30 องศา ในรูปที่ 2.8 กระบวนการของภาคการประมวลผลล่วงหน้า จะมีอาณาบริเวณในความรับผิดชอบของเซลล์เป็น 30 องศา ใช้จำนวนสายอากาศ 32 ต้น ในการสร้าง ลำคลื่นตั้งฉาก 3 ลำคลื่น

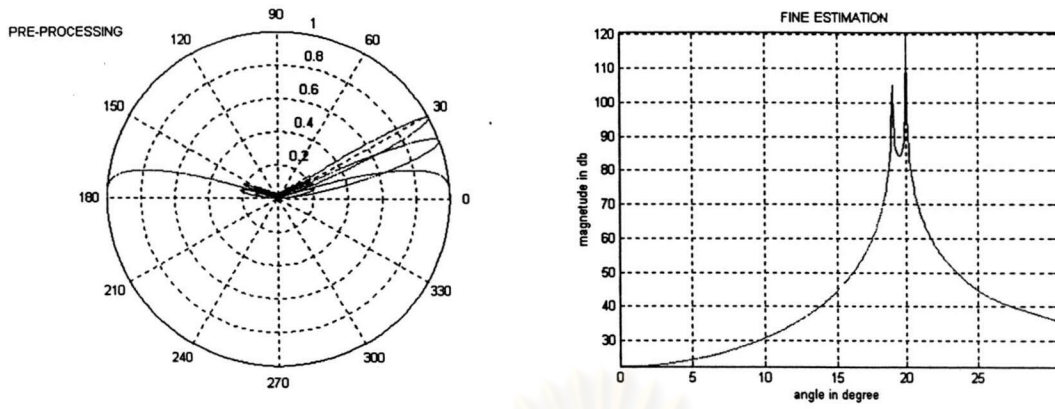
สำหรับการประมาณอย่างละเอียด (Fine estimation) เพื่อหามุมตกกระทบของสัญญาณภายในช่วง 31-50 องศา ในรูปที่ 2.9 กระบวนการของภาคการประมวลผลล่วงหน้า จะมีอาณาบริเวณในความรับผิดชอบของเซลล์เป็น 30 องศา ใช้จำนวนสายอากาศ 32 ต้น ในการสร้าง ลำคลื่นตั้งฉาก 3 ลำคลื่น

สำหรับการประมาณอย่างละเอียด (Fine estimation) เพื่อหามุมตกกระทบของสัญญาณภายในช่วง 70-90 องศา ในรูปที่ 2.10 กระบวนการของภาคการประมวลผลล่วงหน้า จะมีอาณาบริเวณในความรับผิดชอบของเซลล์เป็น 30 องศา ใช้จำนวนสายอากาศ 32 ต้น ในการสร้าง ลำคลื่นตั้งฉาก 5 ลำคลื่น

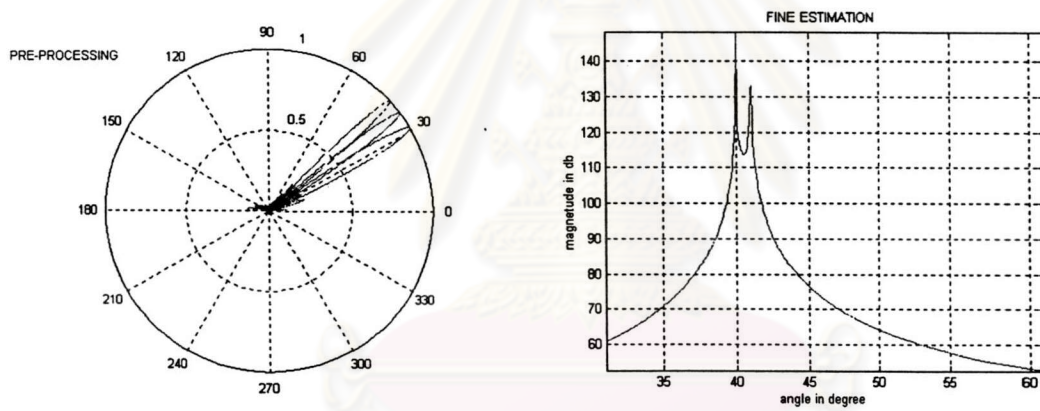
ในการแสดงผลการประมาณในรูปที่ 2.7-2.10 ทุกรูปจะให้เห็นทั้งกระบวนการของภาคการประมวลผลล่วงหน้า ซึ่งแสดงไว้ทางด้านซ้ายมือในรูปเชิงขั้ว และด้านขวามือจะเป็นส่วนของการประมาณทิศทาง



รูปที่ 2.7 ผลจากการประมาณอย่างหยาบเพื่อหามุมตกกระทบของสัญญาณแบบมุมกว้าง ภายในช่วง 0-180 องศา ($\phi_0 = 0$ องศา)

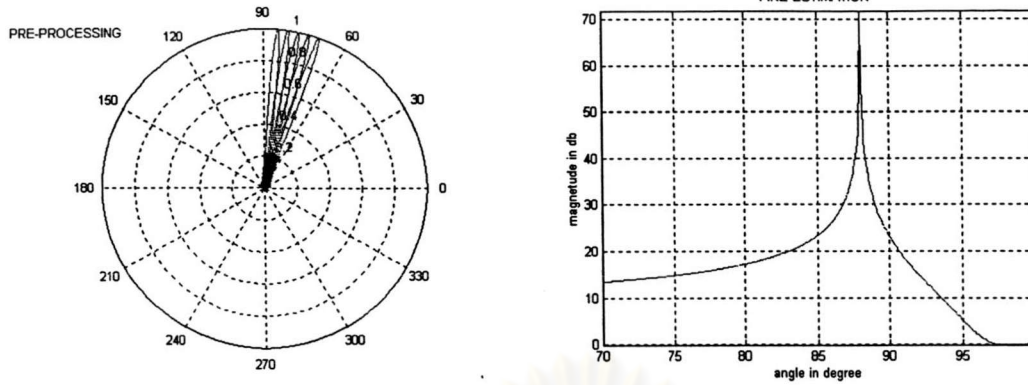


รูปที่ 2.8 ผลจากประมาณอย่างละเอียดเพื่อหามุมตกกระทบของสัญญาณ
ภายในช่วง 0-30 องศา ($\phi_0 = 0$ องศา)



รูปที่ 2.9 ผลจากการประมาณอย่างละเอียดเพื่อหามุมตกกระทบของสัญญาณ
ภายในช่วง 31-50 องศา ($\phi_0 = 31$ องศา)

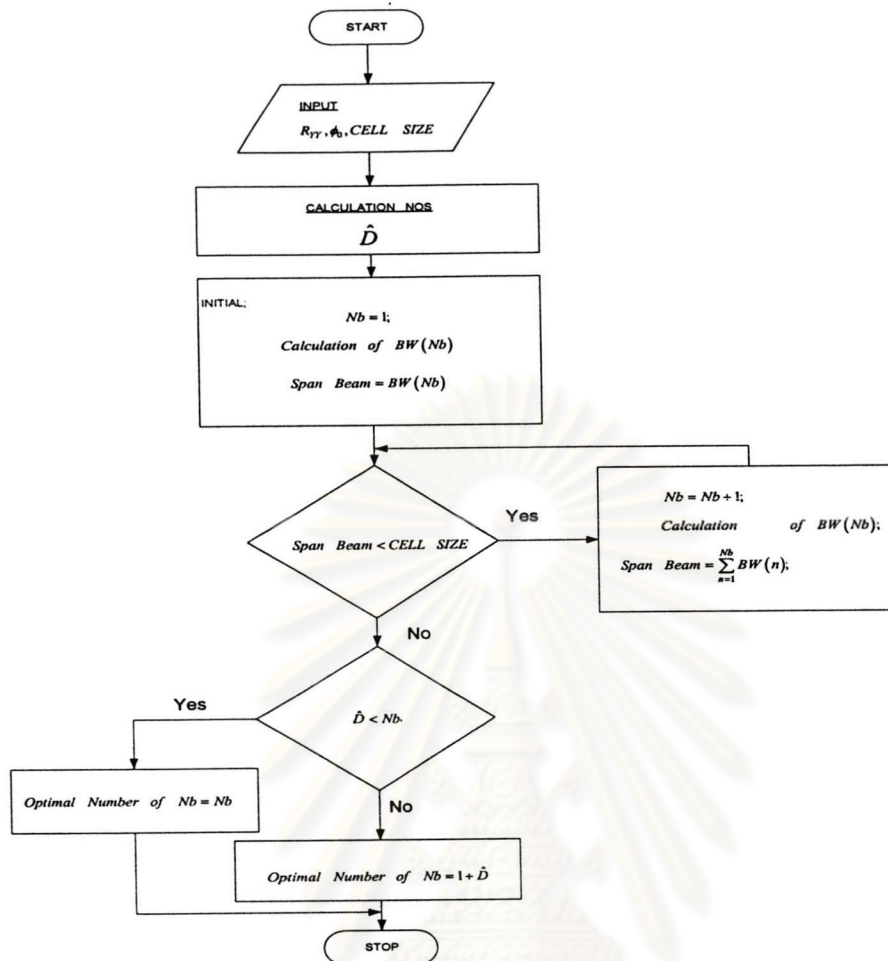
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.10 ผลจากการประมาณอย่างละเอียดเพื่อหามุมตกกระทบของสัญญาณ
ภายในช่วง 70-90 องศา ($\phi_0 = 70$ องศา)

สำหรับการกำหนดจำนวนลำคลื่นตั้งฉากกับการกำหนดมุม ϕ_0 ของภาคการประมวลผลล่วงหน้า จะส่งผลโดยตรงต่อจุดเริ่มอาณาบริเวณในความรับผิดชอบของแต่ละเซลล์ (ϕ') พิจารณาได้จากสมการที่ (2.29) จากที่เราทราบว่าค่าของ β_1 จะเกิดจากตำแหน่งเริ่มต้นของลำคลื่นตั้งฉากที่กำหนดมาจากมุม ϕ_0 ส่วน ค่า β_{Nb} จะมาจากลำคลื่นตั้งฉากตำแหน่งสุดท้ายที่ขึ้นอยู่กับมุม ϕ_0 และจำนวนลำคลื่นตั้งฉาก เพราะจากสมการดังกล่าวพบว่าถ้าให้จำนวนการตั้งฉากมีค่าเพิ่มขึ้น เราก็จะได้อาณาบริเวณในความรับผิดชอบของแต่ละเซลล์มากขึ้นด้วย นอกจากนี้มุม ϕ_0 ยังเป็นตัวกำหนดรูปร่างของลำคลื่นตั้งฉากอันได้แก่ ความกว้างของลำคลื่น (Beam width) เป็นสำคัญ เพราะจาก [11] จะพบว่ากระบวนการสร้างลำคลื่นตั้งฉากนี้ คือลักษณะของสายอากาศแถวลำดับแบบเฟส (Phased or Scanning Array) ซึ่งความกว้างของลำคลื่นจะแปรตามเฟสของสนามกระตุ้น $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{Nb}]$ ในลักษณะไม่เป็นเชิงเส้น ประเด็นที่เราสนใจในกรณีอัลกอริทึมมิวสิกแบบแบ่งคลื่นคือการหาจำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมที่สุด (Optimum Number Of Orthogonal Beam)

ในที่นี้คำว่า จำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมที่สุด จะหมายถึงจำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่น้อยที่สุดซึ่งเพียงพอสำหรับการหาสัญญาณภายใต้อาณาบริเวณในความรับผิดชอบของแต่ละเซลล์ โดยจากผลการการประมาณตามรูปที่ 2.7-2.10 เราสามารถสรุปกระบวนการที่ใช้หาจำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมที่สุดได้ ดังแผนภูมิที่แสดงในรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 แสดงแผนภูมิสายงานของกระบวนการที่ใช้หาจำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมที่สุด

จากรูปที่ 2.11 กระบวนการที่ใช้หาจำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมที่สุดนี้จะมีประเด็นพิจารณาอยู่ 2 ประการ คือประเด็นระดับขั้นความเสรี (Degree Of Freedom) และ ประเด็นความครอบคลุมสัญญาณในแต่ละเซลล์ย่อย (Coverage Area in each Sector) จากรูปจะเห็นว่ามีการใช้อัลกอริทึมในการประมาณจำนวนสัญญาณตกกระทบ (Number Of Source Estimation: NOS [4]) มาร่วมในกระบวนการ โดยวัตถุประสงค์หลักของการนำอัลกอริทึมดังกล่าวมาใช้คือ ต้องการจัดการประเด็นระดับขั้นความเสรีอย่างพลวัต และเมื่อพิจารณากระบวนการตัดสินใจ (Decision) ชั้นแรกของกระบวนการในรูปที่ 2.11 จะเห็นว่ามีการคำนวณหาความกว้างของแต่ละลำคลื่นที่สามารถใส่ได้ในแต่ละเซลล์ย่อย

โดยที่

$N_b =$ จำนวนลำคลื่นที่สามารถใส่ได้ในแต่ละเซลล์ย่อย

$$BW(Nb) = \text{ความกว้างของลำคลื่น (Beam width) ลำที่ } Nb \text{ ซึ่งหาในลักษณะ}$$

$$\text{ความกว้างครึ่งลำคลื่น (Half Power Beam width [11])}$$

$$= \left\| \cos^{-1} \left(\cos(\beta_{Nb}) - \frac{2.782\lambda}{2\pi Md} \right) - \cos^{-1} \left(\cos(\beta_{Nb}) + \frac{2.782\lambda}{2\pi Md} \right) \right\|$$

$$\text{Span Beam} = \sum_{n=1}^{Nb} BW(n)$$

Cell Size = อาณาบริเวณในความรับผิดชอบของแต่ละเซลล์ (องศา, เรเดียน)

จากนั้นเมื่อเข้าสู่กระบวนการตัดสินใจขั้นที่สอง กระบวนการที่ใช้หาจำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมที่สุด จะทำการพิจารณาเปรียบเทียบระหว่างประเด็นระดับชั้นความเร็ว และ ประเด็นความครอบคลุมสัญญาณในแต่ละเซลล์ย่อยซึ่งจะมี 2 เงื่อนไขคือ

- ถ้าจำนวนลำคลื่นในเซลล์ย่อย มากกว่า จำนวนของสัญญาณตกกระทบ ($Nb > \hat{D}$) เราจะให้จำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมมีค่าเท่ากับจำนวนลำคลื่นในเซลล์ย่อย เนื่องจากกรณีนี้จะให้ความสำคัญกับประเด็นความครอบคลุมสัญญาณในแต่ละเซลล์ย่อย

- ถ้าจำนวนลำคลื่นในเซลล์ย่อย น้อยกว่าหรือเท่ากับ จำนวนของสัญญาณตกกระทบ ($Nb \leq \hat{D}$) เราจะให้จำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมมีค่าเท่ากับจำนวนสัญญาณตกกระทบบวกรวมหนึ่ง ทั้งนี้เพราะเราต้องการเนื่องจากกรณีนี้จะให้ความสำคัญกับประเด็นระดับชั้นความเร็ว [1]

ข้อดีของกระบวนการนี้คือเราจะได้จำนวนลำคลื่นตั้งฉากที่เหมาะสมที่สุดซึ่งมีลักษณะดังที่ได้กล่าวมาแล้วอย่างพลวัต แต่ข้อเสียคือจะทำให้อัลกอริทึมมีความซับซ้อนเพิ่มขึ้น

จากผลการประมาณในรูปที่ 2.7-2.10 จะกล่าวได้ว่านี่คือข้อพิจารณาที่ใช้ในการ กำหนดจำนวนลำคลื่นตั้งฉากสำหรับในแต่ละกรณี

2.4 ผลกระทบจากค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่มีต่อการทำงานของระบบสายอากาศ

ค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มดังกล่าวจะสามารถเกิดขึ้นได้ 3 แบบดังนี้ [8]

1. ค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดจากการจัดวางตำแหน่งของสายอากาศ (Array Element Placement Error)

2. ค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดจากการหมุนวน (Steering Error)

3. ค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดจากสภาพแวดล้อมของระบบ (Phase Perturbed environment Error)

ลักษณะของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มทั้ง 3 แบบจะอธิบายโดยสังเขปดังนี้

2.4.1 สำหรับค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดขึ้นจากการจัดวางตำแหน่งของสายอากาศจะมีสาเหตุมาจากกระบวนการสร้างระบบสายอากาศแถวลำดับที่ผิดพลาด กล่าวคือ d_m กลายเป็น $d_m + \Delta d_m$ เมื่อ $m = 1, 2, \dots, M$

เมื่อ d_m คือระยะห่างในการจัดเรียงสายอากาศต้นที่ m ที่เหมาะสม

Δd_m คือระยะห่างของสายอากาศต้นที่ m ที่เบี่ยงเบนไป

2.4.2 สำหรับค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดขึ้นจากการหมุนวนจะมีสาเหตุมาจากการหมุนวนของเวกเตอร์หมุนวนที่ผิดพลาดไปจากตำแหน่งที่ควรจะเป็น (Look Direction) กล่าวคือ ϕ กลายเป็น $\phi + \Delta\phi$

เมื่อ ϕ คือตำแหน่งการหมุนวนที่ควรจะเป็น

$\Delta\phi$ คือตำแหน่งการหมุนวนที่เบี่ยงเบนไป

โดยค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มรูปแบบนี้ จะเป็นผลมาจากการจัดโพลาไรเซชันที่ผิดพลาด (Polarization) การจัดวางตำแหน่งของสายอากาศที่ผิดพลาด รวมถึงการที่ไม่ได้มีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) ให้กับระบบสายอากาศแถวลำดับก่อนที่จะใช้งาน ซึ่งจะส่งผลโดยตรงต่อการตอบสนองด้านทิศทางของระบบ

2.4.3 สำหรับค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม ที่เกิดขึ้นจากสภาพแวดล้อมของระบบ มีสาเหตุมาจาก การที่ไม่ได้มีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับระบบสายอากาศแถวลำดับก่อนที่จะใช้งาน โดยค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดขึ้นจากสภาพแวดล้อมของระบบ คือ ประเด็นที่จะนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ เพราะถือเป็นปฐมเหตุของความผิดพลาดสำหรับการประมวลผลสายอากาศแถวลำดับ ซึ่งจะกล่าวถึงโดยละเอียดต่อไป และเพื่อความสะดวกในการอ้างถึง เราจะเรียกค่าความผิดพลาดทางเฟสที่จะพิจารณานี้ว่า "ค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม"

ค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม จะเป็นตัวลดสมรรถนะความถูกต้องของค่าที่ได้จากการประมาณของอัลกอริทึม ทั้งนี้เป็นเพราะค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มดังกล่าวจะเข้าไปรวมกับสัญญาณที่รับมาได้ ซึ่งการรวมดังกล่าวจะทำให้ค่าเฟสของสัญญาณเปลี่ยนไป ก่อให้เกิดความผิดพลาดในการประมาณทิศทางของสัญญาณ อีกทั้งค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดขึ้นในแต่ละต้นของสายอากาศนี้ ยังจะทำให้กระบวนการตรวจสอบความตั้งฉากกันระหว่างปริภูมิของสัญญาณที่ต้องการซึ่งถูกกำหนดโดยพิสัยของสายอากาศแถวลำดับ กับ ปริภูมิย่อยของสัญญาณรบกวน (V_N) ผิดพลาดด้วย ดังนั้นเพื่อให้กระบวนการประมาณทิศทาง (Direction Of Arrival Estimation) มีความเชื่อถือได้มากขึ้นก็ควรลดผลกระทบค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มนี้ออกไป ในที่นี้เราจะจำลองแบบของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่เกิดขึ้นในแต่ละต้น ดังนี้ [8]

$$\tilde{a}_m(\phi) = a_m(\phi) \exp(j\gamma_m) \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.40)$$

การกำหนดค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มนี้จะกำหนดให้เกิดขึ้นโดยอิสระจากกันในแต่ละต้นของสายอากาศ ซึ่งมีสาเหตุมาจากการที่ไม่ได้กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นทางเฟส

ลักษณะของความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่ใช้ในการพิจารณา จะอยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m(\phi) &= \exp(-j\xi_m(\cos(\phi) - \chi)) = \left(\exp(-j\xi_m \cos(\phi)) \right) \left(\exp(j\xi_m \chi_m) \right) \\ &= a_m(\phi) \exp\left(j \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) d(m-1)\chi_m \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

หากเทียบสมการที่ (2.41) กับสมการที่ (2.40) จะได้ว่า $\gamma_m = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) d(m-1)\chi_m$ โดยที่ γ_m คือค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มของสายอากาศต้นที่ m ซึ่งขอบเขตการแกว่งสูงสุดกระจายอยู่ในช่วง $[0, 2\pi]$ และการกระจายตัวของแต่ละ γ_m มีคุณลักษณะการกระจายแบบสม่ำเสมอ นั้นหมายถึงการเกิดค่าเฟสผิดพลาดแบบสุ่มแต่ละค่ามีโอกาสเท่า ๆ กัน ไม่ได้หนาแน่นอยู่ที่ค่าใดค่าหนึ่ง ในที่นี้เรามองพจน์ $d(m-1)$ เป็นตำแหน่งสายอากาศต้นที่ m

กระบวนการจำลองค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม ก่อนอื่นจะกำหนดให้

$$\chi_m \in \mathcal{X} \quad \forall m \in [1, 2, \dots, M]$$

โดยที่

```

for m = 1:M
     $\chi_m = \mu\lambda \text{rand}(1,1);$ 
end

```

ทั้งนี้เพราะ

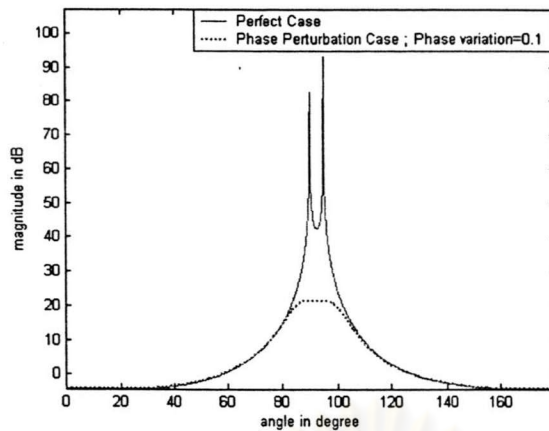
$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\chi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\mu\lambda \text{rand}(1,M) = 2\pi\mu \text{rand}(1,M)$$

ซึ่ง $0 \leq 2\pi\mu \text{rand}(1,M) \leq 2\pi\mu$ เมื่อ μ คือตัวประกอบที่ใช้กำหนดค่าการแกว่งสูงสุดของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม และ $0 \leq \mu \leq 1$ ดังนั้นค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มของสายอากาศทั้ง M ต้นสามารถกำหนดในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\gamma = \left[\gamma_m \mid \gamma_m = \frac{2\pi}{\lambda} d(m-1)\chi_m \right]^T \quad (2.42)$$

พิจารณาผลการเปรียบเทียบสมรรถนะด้านการตีความทิศทางของอัลกอริทึมมีวสิก ระหว่างสภาวะที่สายอากาศเป็นอุดมคติ กับ สภาวะที่เกิดค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่ $\mu = 0.1$ ได้จากรูปที่ 2.12 โดยมีสัญญาณ 2 ตัวที่มีระดับ SNR เท่ากันคือ 20 dB เข้ามาที่มุม 90 และ 95 องศา ในระนาบกวาด สายอากาศแถวลำดับเป็นแบบเชิงเส้น 3 ต้น ระยะห่างระหว่างต้นเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น สัญญาณรบกวนเป็นเกาส์ขาวแบบบวก จำนวนการสุ่ม(Sample number) เป็น 1000 แซมเปิล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.12 แสดงผลการเปรียบเทียบสมรรถนะด้านการตีความทิศทางของอัลกอริทึมมิวสิก ระหว่างสถานะที่สายอากาศเป็นอุดมคติ กับ สถานะที่เกิดค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม ที่ $\mu = 0.1$

จะเห็นว่า ระดับการแกว่งของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม และ จำนวนสายอากาศที่ใช้มีผล ทำให้สมรรถนะของอัลกอริทึมเลวลง นั้นเป็นเพราะอัลกอริทึมจะเกิดความผิดพลาดเกี่ยวกับการตีความทิศทางของสัญญาณ เนื่องด้วยผลจากความผิดพลาดทางเฟสดังกล่าวจะเข้าไปรบกวนให้ทิศทางในการตรวจจับสัญญาณซึ่งกำหนดโดยพิสัยของสายอากาศแถวลำดับมีค่าเปลี่ยนไป

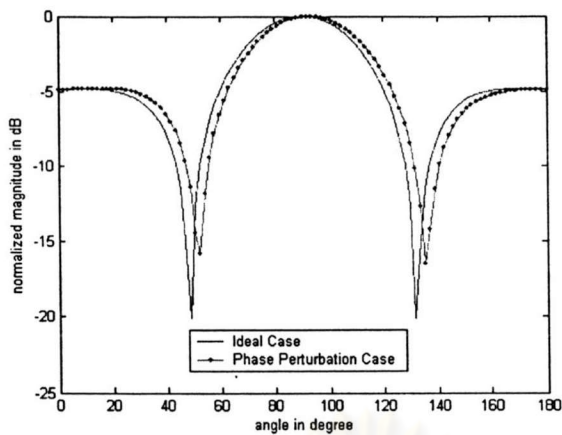
จากที่เราเห็นว่า

$$\mathbf{a}_S(\phi) \perp \mathbf{q}_m; \quad \mathbf{q}_m \in \mathbf{V}_N; \quad \mathbf{a}_S^H(\phi) \mathbf{q}_m = 0 \quad ; m = D+1, D+2, \dots, M$$

แต่เมื่อมีผลจากค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มส่งผลให้

$$\tilde{\mathbf{a}}_S \neq \mathbf{a}_S \quad \text{และ} \quad \tilde{\mathbf{a}}_S^H(\phi) \mathbf{q}_m \neq 0 \quad ; m = D+1, D+2, \dots, M$$

พิจารณามลกระทบของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มได้อย่างง่ายขึ้นด้วยการเปรียบเทียบผลจากรูปแบบการแผ่รังสีของสายอากาศ ระหว่างกรณีที่สายอากาศเป็นอุดมคติ กับ กรณีที่เกิดค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มที่ $\mu = 0.1$ ได้ดังรูปที่ 2.13 เมื่อให้สายอากาศแถวลำดับแบบเชิงเส้น 3 ต้น ที่ระยะห่างระหว่างต้นเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น



รูปที่ 2.13 แสดงผลการเปรียบเทียบรูปแบบการแผ่รังสี

ระหว่าง สภาวะที่สายอากาศเป็นอุดมคติ กับ สภาวะที่เกิดค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม
ที่ $\mu = 0.1$

จากเดิมสำหรับงานประมวลผลสัญญาณแนวลำดับ (Array Signal Processing) วิธีที่สามารถปรับปรุงสมรรถนะการทำงานของอัลกอริทึมได้อย่างง่ายคือการเพิ่มจำนวนสายอากาศ แต่จากรูปที่ 2.12 และ 2.13 ที่ผ่านมามีพบว่าวิธีการปรับปรุงสมรรถนะดังกล่าวจะไม่ใช่วิธีที่ดีอีกต่อไปเพราะทราบว่าปัญหาค่าความผิดพลาดทางเฟสยังไม่ได้รับการแก้ไข ไม่ว่าจะเพิ่มจำนวนสายอากาศไปมากขึ้นเท่าใดก็ตาม จะไม่สามารถทำให้สมรรถนะของระบบดีขึ้นได้เลย นั่นเป็นเพราะค่าความผิดพลาดทางเฟสนี้เกิดมาจากสายอากาศแต่ละต้น ดังนั้นหากเพิ่มจำนวนสายอากาศเข้าไปย่อมเท่ากับว่าเป็นการเพิ่มปัจจัยที่ลดสมรรถนะของระบบด้วย หากพิจารณาในมุมมองของ SNR ของระบบ จะได้ว่าในขณะที่กำลังของสัญญาณที่ต้องการ (Desired signal) มีค่าคงที่ แต่ระดับกำลังของสัญญาณรบกวนกลับสูงขึ้นอันเป็นผลมาจากค่าความผิดพลาดทางเฟส ส่งผลให้ SNR และความไวของระบบลดลงด้วย ดังนั้นจึงควรลดผลของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มลงเพื่อช่วยเพิ่มสมรรถนะของระบบ

สำหรับการพิจารณาต่อไปนี้ สมมติให้สัญญาณส่งเป็นสัญญาณอ้างอิงที่เราทราบคุณลักษณะอยู่ก่อนแล้ว 1 เส้นทาง แต่สิ่งที่เราสนใจคือสัญญาณที่รับได้และกำหนดให้มีภาครับ 2 ชุด โดยที่ภาครับชุดแรกใช้สายอากาศแนวลำดับที่มีผลของค่าความผิดพลาดทางเฟส ส่วนภาครับอีกชุดหนึ่งสมมติให้ใช้สายอากาศแนวลำดับแบบอุดมคติ จากนั้นทำการเปรียบเทียบ SNR ของระบบทั้ง 2 กรณี

กรณีสายอากาศแถวลำดับมีผลของค่าความผิดพลาดทางเฟสเกิดขึ้นจะมีสัญญาณที่รับได้อยู่ในรูปของ

$$Y(t) = \tilde{\mathbf{a}}(\phi) \mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (2.43)$$

ให้สัญญาณที่ต้องการมาจากสายอากาศแถวลำดับที่ไม่มีผลจากค่าความผิดพลาดทางเฟสและมีจำนวนต้น (M) เท่ากับทางด้านรับ

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{a}(\phi) \mathbf{X}(t) \quad (2.44)$$

จะได้กำลังของสัญญาณที่ต้องการและสัญญาณที่รับได้เมื่อให้สัญญาณรบกวนมีคุณสมบัติเป็นเกาส์ขาวแบบบวก ดังนี้

$$\mathbf{R}_{SS} = E(\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)) = \mathbf{a}(\phi)\mathbf{R}_{xx}\mathbf{a}^H(\phi) \quad ; \text{ กำลังของสัญญาณที่ต้องการ}$$

$$\mathbf{R}_{YY} = E(\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^H(t)) = \tilde{\mathbf{a}}(\phi)\mathbf{R}_{xx}\tilde{\mathbf{a}}^H(\phi) + \sigma_N^2\mathbf{I} \quad ; \text{ กำลังของสัญญาณที่รับได้}$$

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์กำหนดให้ระดับกำลังของสัญญาณส่ง = 1 วัตต์ ($\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{I}$) จะได้

$$\mathbf{R}_{SS} = \mathbf{a}(\phi)\mathbf{a}^H(\phi) \quad (2.45)$$

$$\mathbf{R}_{YY} = \tilde{\mathbf{a}}(\phi)\tilde{\mathbf{a}}^H(\phi) + \sigma_N^2\mathbf{I} \quad (2.46)$$

โดยกำลังของสัญญาณรบกวนในกรณีมีผลของค่าความผิดพลาดทางเฟส (\mathbf{R}_{NP}) เป็น

$$\mathbf{R}_{NP} = \mathbf{R}_{YY} - \mathbf{R}_{SS} \quad (2.47)$$

ดังนั้น SNR ในกรณีมีผลของค่าความผิดพลาดทางเฟส (SNR_p) จะได้

$$SNR_p = \frac{\|\mathbf{R}_{SS}\|}{\|\mathbf{R}_{NP}\|} \quad (2.48)$$

กรณีสายอากาศแถวลำดับแบบอุดมคติ จะอาศัยการพิจารณาเช่นเดียวกับกระบวนการขึ้นต้นทำ
ให้ได้ สมการกำลังของสัญญาณที่รับได้ในกรณีนี้คือ

$$\mathbf{R}_{ZZ} = \mathbf{a}(\phi)\mathbf{a}^H(\phi) + \sigma_N^2\mathbf{I} \quad (2.49)$$

และสมการกำลังของสัญญาณรบกวนในกรณีอุดมคติ (\mathbf{R}_{N0}) เป็น

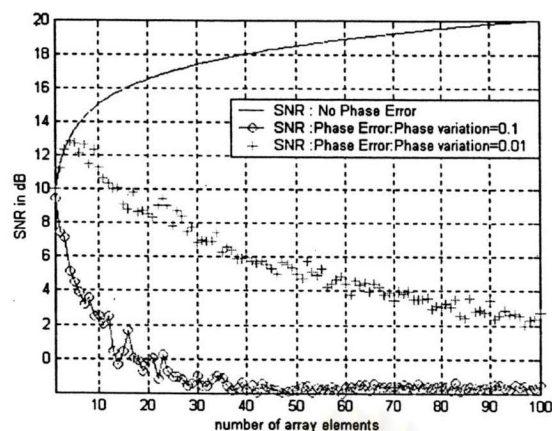
$$\mathbf{R}_{N0} = \mathbf{R}_{ZZ} - \mathbf{R}_{SS} \quad (2.50)$$

ดังนั้น SNR ในกรณีอุดมคติ (SNR_0) จะได้

$$SNR_0 = \frac{\|\mathbf{R}_{SS}\|}{\|\mathbf{R}_{N0}\|} \quad (2.51)$$

พิจารณาความสัมพันธ์ของระดับ SNR ที่ได้จากระบบต่อจำนวนสายอากาศที่เพิ่มเข้าไป ทั้งแบบมี
ผลของค่าความผิดพลาดทางเฟส (SNR_p) และแบบไม่มีผลของค่าความผิดพลาดทางเฟส (SNR_0)
ได้จากรูปที่ 2.14 ซึ่งได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสายอากาศต่อระดับ SNR ของระบบที่
ค่าการแกว่งของเฟสเป็น $\mu = 0.1\lambda$ และ 0.01λ โดยกำหนดให้สัญญาณที่ต้องการตกกระทบบที่มุม
90 องศา ในระนาบกวาดและมีระดับกำลัง 1 วัตต์ สัญญาณรบกวนเป็นเกาส์ขาวแบบบวมมีระดับ
กำลัง 0.1 วัตต์ สายอากาศแถวลำดับเป็นแบบเชิงเส้นมีระยะห่างระหว่างต้นเป็นครึ่งหนึ่งของ
ความยาวคลื่น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.14 แสดงความสัมพันธ์ของระดับ SNR ของระบบเทียบกับจำนวนสายอากาศที่เพิ่มเข้าไป เมื่อพิจารณาในกรณีไม่มีผลของค่าความผิดพลาดทางเฟส และกรณีมีผลของค่าความผิดพลาดทางเฟส ที่ $\mu = 0.1\lambda$ และ 0.01λ

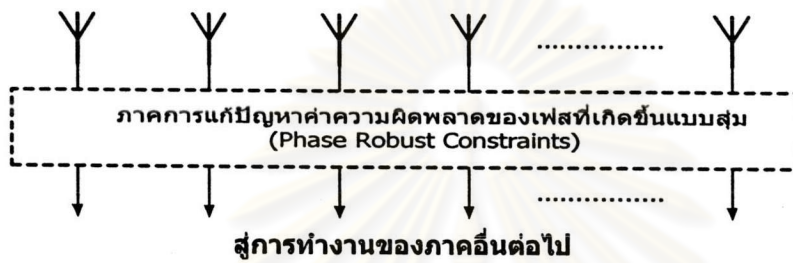
จากรูปที่ 2.14 จะเห็นว่าระบบต้องสูญเสียระดับ SNR ไปโดยไม่จำเป็น (พิจารณาผลต่างของกราฟ SNR) ทั้งนี้การสูญเสียดังกล่าวเป็นผลมาจากความผิดพลาดทางเฟสที่เกิดขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งการสูญเสียระดับ SNR ในกรณีที่มีผลจากค่าความผิดพลาดทางเฟสเกิดขึ้นที่ระบบ ซึ่งมีแนวโน้มสูงขึ้นจากตัวแปรอันได้แก่ ค่าการแกว่งของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม, จำนวนของสายอากาศแถวลำดับที่ใช้ และระดับของสัญญาณรบกวน

การเพิ่มขึ้นของตัวแปรเหล่านี้จะยิ่งทำให้แนวโน้มการลดระดับ SNR ของเกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว ซึ่งเรารู้ว่าในทางปฏิบัติสัญญาณรบกวนเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ หากต้องการที่จะลดการสูญเสียดังกล่าวจำเป็นต้องพิจารณาที่ปัญหาความผิดพลาดทางเฟส ดังนั้นผลการพิจารณาในรูปที่ 2.12, 2.13 และ 2.14 พบว่าผลกระทบจากค่าความผิดพลาดทางเฟส นอกจากจะทำให้อัลกอริทึมทำงานผิดพลาดแล้วยังจะทำให้ระบบสูญเสียระดับ SNR และค่าความไวในมุมมองของกำลังลงด้วย

2.5 การเพิ่มความทนทานต่อค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มด้วยหลักการของอนุพันธ์ เจียนไซบ์กับแบบไม่ขึ้นกับค่าเฟส

การเพิ่มความทนทานต่อค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มให้แก่ระบบ จะอาศัยชุดสนามกระตุ้น (w) ซึ่งเท่ากับว่ามีการเพิ่มส่วนของภาคการประมวลผลล่วงหน้าเข้าไป โดยค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มนี้จะเกิดขึ้นอย่างอิสระในแต่ละต้นของสายอากาศ ดังนั้นชุดของสนามกระตุ้นที่จัดให้สายอากาศ ต้องสามารถจัดการค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มใน

สายอากาศแต่ละต้นได้ ทั้งนี้จะอาศัยหลักการของเงื่อนไขบังคับความคงทนทางเฟส (Phase Robust Constraints) [8],[10] แนวคิดของเงื่อนไขบังคับความคงทนทางเฟส จะได้มาจากการทำอนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบไม่ขึ้นกับค่าเฟส (Phase-Independent Derivative Constraint) [10] ที่มีจุดมุ่งหมายในการรักษาผลการตอบสนอง ณ ตำแหน่งทิศทางหลักที่สนใจของลำคลื่น จากการลดผลของตัวแปรตัวอื่นที่ไม่ต้องการลงไป เช่น ค่าความผิดพลาดทางเฟสที่เกิดขึ้นแบบสุ่ม เป็นต้น ซึ่งจะทำให้ผลการตอบสนองในทิศทางหลักของลำคลื่นไม่แปรค่าไปตามตัวแปรดังกล่าว (Flat Main Beam Responses: slope=0)



รูปที่ 2.15 แสดงการเพิ่มความทนทานต่อค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มโดยอาศัยเงื่อนไขบังคับความคงทนทางเฟส

ข้อแตกต่างระหว่างอนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบเก่า (Conventional Derivative Constraint) กับอนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบไม่ขึ้นกับค่าเฟส (Phase-Independent Derivative Constraint) คืออนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบเก่าจะมีการสร้างเงื่อนไขบังคับทั้งขนาด (Power Response) และเฟส (Phase = Particular Spatial Reference Point used to define the array elements position [10]) ของลำคลื่น โดยใช้เงื่อนไขบังคับทางขนาดควบคุมรูปร่างของลำคลื่น และเงื่อนไขบังคับทางเฟสควบคุมทิศทางของลำคลื่น หากแต่ข้อเสียของอนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบเก่าคือจะเกิดพู่ข้างสูงมาก (High Side lobes) หากเลือกเฟสที่จะใช้ในเงื่อนไขบังคับไม่เหมาะสม ตัวอย่างของอัลกอริทึมที่จัดอยู่ในกรณีนี้เช่น Constrained Hung-Turner Beamforming [12] ในขณะที่อนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบไม่ขึ้นกับค่าเฟสนี้ จะอาศัยเพียงเงื่อนไขบังคับทางขนาดอย่างเดียวในการควบคุมรูปร่างและทิศทางของลำคลื่นส่วนเฟสจะถูกพิจารณาเป็นค่าคงตัวทั่วไปแทน (general) จึงทำให้ไม่มีปัญหาพู่ข้างจากเฟสเหมือนแบบแรก หากแต่อาจจะส่งผลให้ต้นทุนในการสร้างระบบสูงขึ้น ดังเช่นกรณีตัวอย่างในภาคผนวก ก ที่แสดงการพิจารณาความแตกต่างทางสมรรถนะของอัลกอริทึมจากการทำอนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบเก่ากับแบบใหม่ โดยเป็นบทความที่ผู้วิจัย ร่วมกับ

รศ.ดร.สมชาย จิตะพันธ์กุล พัฒนาต่อจาก [12] และได้รับการตีพิมพ์ในงานประชุมวิชาการ World Wireless Congress (WWC 2003) ปี พ.ศ. 2547 ณ เมืองซานฟรานซิสโก ประเทศสหรัฐอเมริกา

หลักการของอนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบไม่ขึ้นกับค่าเฟสที่นำมาสร้างเป็นเงื่อนไขบังคับความคงทนทางเฟสในที่นี่จะอาศัยแค่การทำอนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบไม่ขึ้นกับค่าเฟสในอันดับที่หนึ่งเท่านั้น ซึ่งเพียงพอสำหรับค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม [10]

พิจารณาค่าเวกเตอร์หมุนวนมีผลจากความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม เมื่อผ่านชุดสนามกระตุ้นแล้วจะทำให้ได้สมการเอาท์พุทจากสายอากาศ เป็น

$$\mathbf{Y}(\phi) = \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi) \quad (2.52)$$

กำหนดให้ เงื่อนไขบังคับทางอัตราขยาย (Gain Constraint) คือ

$$\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi) = \varepsilon \quad ; \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.53)$$

ความหมายของสมการที่ (2.53) คือ \mathbf{W} ที่หาได้จะต้องสามารถทำให้อิทธิพลของค่าความผิดพลาดทางเฟสที่เกิดขึ้นที่ตัวสายอากาศมีค่าเล็ก ๆ ในที่นี้กำหนดให้ค่าเล็ก ๆ ดังกล่าวคือ ε โดยที่ ε คือค่าคงตัวจำนวนจริง และ $\varepsilon \rightarrow 0$

จากที่กล่าวมาในตอนต้น อนุพันธ์เงื่อนไขบังคับแบบไม่ขึ้นกับค่าเฟส จะใช้การควบคุมรูปร่าง และทิศทางของลำคลื่น ด้วยการสร้างเงื่อนไขบังคับทางขนาดอย่างเดียว และนั่นหมายความว่าต้องอาศัยสมการกำลังทางเอาท์พุท เนื่องจากกำลังของสัญญาณดังกล่าวจะไม่มีผลจากเฟส โดยกำลังทางเอาท์พุทจากสายอากาศคือ

$$\begin{aligned} P(\phi) &= \mathbf{Y}(\phi) \mathbf{Y}^H(\phi) \\ &= \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi) \tilde{\mathbf{a}}^H(\phi) \mathbf{W} \end{aligned} \quad (2.54)$$

ประเด็นของเงื่อนไขบังคับในกรณีนี้คือ กำหนดให้การเปลี่ยนแปลงค่าความผิดพลาดทางเฟสที่เกิดขึ้นแบบสุ่ม มีอิทธิพลน้อยมาก ๆ ต่อระดับกำลังทางเอาท์พุท นั่นก็คือความชันระหว่าง $P(\phi)$ กับแต่ละ γ_m จะเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\frac{\Delta P(\phi)}{\Delta(\gamma_m)} = 0 \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.55)$$

พิจารณาที่ค่า γ_m ใด ๆ จะได้ว่า $\Delta(\gamma_m) \rightarrow 0$ ซึ่งทำให้สามารถปรับสมการที่ (2.55) ให้อยู่ในรูปของนิยามของการทำอนุพันธ์ได้ว่า

$$\lim_{\Delta(\gamma_m) \rightarrow 0} \frac{\Delta P(\phi)}{\Delta(\gamma_m)} = \frac{d(P(\phi))}{d(\gamma_m)} = 0 \quad (2.56)$$

แต่เนื่องจากการพิจารณาจะทำแยกกันในแต่ละต้นและสนใจเฉพาะผลของค่าความผิดพลาดทางเฟสที่เกิดขึ้นแบบสุ่มจึงต้องเปลี่ยน $\frac{d}{d(\gamma_m)} \rightarrow \frac{\partial}{\partial(\gamma_m)}$ ทำให้เราปรับสมการที่ (2.56) ได้เป็น

$$\frac{\partial(P(\phi))}{\partial(\gamma_m)} = 0 \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.57)$$

พิจารณา

$$\frac{\partial(P(\phi))}{\partial(\gamma_m)} = \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi) \tilde{\mathbf{a}}^H(\phi) \mathbf{W} + \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi) \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}^H(\phi) \mathbf{W} = 0 \quad (2.58)$$

เมื่อ

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi) = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{a}}(\phi))}{\partial(\gamma_m)} = j \tilde{\mathbf{a}}_m(\phi) \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.59)$$

พิจารณา

$$\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi) \tilde{\mathbf{a}}^H(\phi) \mathbf{W} + \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi) \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}^H(\phi) \mathbf{W} = 2\Re\{\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi) \tilde{\mathbf{a}}^H(\phi) \mathbf{W}\}$$

จะได้ว่า

$$2\Re\{\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi) \tilde{\mathbf{a}}^H(\phi) \mathbf{W}\} = 2\Re\{\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi) \varepsilon\} = 2\varepsilon\Re\{\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi)\}$$

$$\therefore \frac{\partial(P(\phi))}{\partial(\gamma_m)} = \Re\{\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi)\} = 0 \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.60)$$

จากสมการที่ (2.60) ถ้าเรารวมเอาค่าความผิดพลาดทางเฟสในทุกต้นของสายอากาศ จะได้ว่า

$$\frac{\partial(P(\phi))}{\partial(\gamma)} = \Re\{\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma}(\phi)\} = 0 \quad (2.61)$$

สำหรับการวิเคราะห์ต่อไปนี ขอละตัวแปร ϕ ไว้ในฐานที่เข้าใจ

จากสมการที่ (2.61) พบว่า รูปแบบของเงื่อนไขบังคับอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งเราสามารถปรับให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Re\{\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma}\} &= \Re\left\{\sum_{m=1}^M (w_{r,m} - jw_{i,m})(\tilde{a}_{\gamma_m,r} + j\tilde{a}_{\gamma_m,i})\right\} \\ &= \Re\left\{\sum_{m=1}^M (w_{r,m}\tilde{a}_{\gamma_m,r} + w_{i,m}\tilde{a}_{\gamma_m,i}) + j(w_{r,m}\tilde{a}_{\gamma_m,i} - w_{i,m}\tilde{a}_{\gamma_m,r})\right\} \\ &= \sum_{m=1}^M (w_{r,m}\tilde{a}_{\gamma_m,r} + w_{i,m}\tilde{a}_{\gamma_m,i}) \end{aligned}$$

โดยที่ ตัวห้อย r, m และ i, m แสดงถึง ค่าส่วนที่เป็นจำนวนจริง (real value) ตำแหน่งที่ m และ จำนวนจินตภาพ (imaginary value) ตำแหน่งที่ m ตามลำดับ

$$\text{ถ้าให้} \quad \mathbf{W}_R = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{W}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{W}\} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\text{และ} \quad \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_R}(\phi) = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\Re\{\tilde{\mathbf{a}}_{\gamma}(\phi)\}\} \\ \dots \\ \text{diag}\{\text{Im}\{\tilde{\mathbf{a}}_{\gamma}(\phi)\}\} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

ดังนั้น รูปแบบเงื่อนไขบังคับของสมการที่ (2.61) ในรูปแบบเชิงเส้น คือ

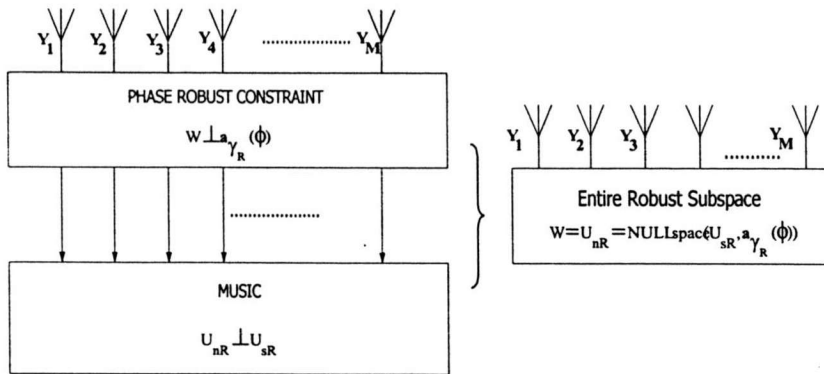
$$\frac{\partial(P(\phi))}{\partial(\gamma_m)} = \mathbf{W}_R^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_R}(\phi) = 0 \quad (2.64)$$

สมการที่ (2.61) คือ เงื่อนไขบังคับทางเฟส (Phase robust constraint) ที่ใช้ในภาคการเพิ่มความคงทนทางความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม สำหรับในส่วนของกระบวนการแปลงสมการ (2.60) ให้อยู่ในรูปสมการที่ (2.64) เรียกว่า การแปลงสู่จำนวนจริง (Real transform) มีวัตถุประสงค์เพื่อแปลงเงื่อนไขบังคับดังกล่าวให้อยู่ในรูปของเงื่อนไขบังคับแบบเชิงเส้น (Linear Constraint) โดยที่ [10] กล่าวว่าเซตของเงื่อนไขบังคับแบบเชิงเส้นนั้นสามารถที่จะทำให้ผลการรบกวนที่พหุคูณลดลงได้แน่ อีกทั้งยังจะทำให้สะดวกขึ้นเมื่อต้องการสร้างจริง จากสมการที่ (2.60) $\tilde{\mathbf{x}}_r(\phi)$ เป็นปริภูมิแบบหลักของค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มค่าเล็ก ๆ ที่เกิดขึ้นทีละมุม ϕ ของสายอากาศแต่ละต้น ซึ่งเมื่อรวมทุกต้นแล้วจะได้เป็นปริภูมิย่อยความทนทานทางเฟสแบบสุ่ม $\tilde{\mathbf{x}}_r(\phi)$ (Phase Robust Subspace)

จากสมการที่ (2.64) จะเห็นว่าผลเฉลย \mathbf{w} จะขึ้นอยู่กับปริมาณ 2 ตัวคือ ค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม γ และ ค่ามุม ϕ ซึ่งเท่ากับว่าหลักการของเงื่อนไขบังคับความคงทนทางเฟสจะทำการลดอิทธิพลทางเฟสแบบสุ่ม โดยทำการหาปริภูมิที่ตั้งฉากกับ $\tilde{\mathbf{x}}_r(\phi)$ ในแต่ละค่ามุม ϕ และแน่นอนว่าด้วยระดับค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม γ ที่ไม่เท่ากันย่อมส่งผลให้คุณภาพของการประมาณทิศทางสัญญาณไม่เท่ากัน ซึ่งรายละเอียดของการพิจารณาดังกล่าวได้นำเสนอต่อไปในบทที่ 4

2.6 เทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์

เทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์ (Entire Robust Subspace Technique) เป็นเทคนิคที่มีแนวคิดที่นำเอาปัญหาที่สนใจตั้งแต่สองปัญหาขึ้นไปมาพิจารณา ร่วมกันเพื่อจะหาผลเฉลยให้ได้ในครั้งเดียว ซึ่งจะได้ผลเฉลยที่ครอบคลุมประเด็นปัญหาที่สนใจทั้งหมด โดยแนวคิดดังกล่าวสามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 2.16 ซึ่งเป็นตัวอย่างการเพิ่มความทนทานต่อค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มเข้ากับหลักการของอัลกอริทึมมิวสิกดั้งเดิม



รูปที่ 2.16 แสดงแนวคิดของเทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์

การนำแต่ละภาคการทำงานมาต่อкасเคดกันดังรูปที่ 2.16 เท่ากับว่าประเด็นปัญหาและผลเฉลยในแต่ละส่วนจะสัมพันธ์กัน เพราะเอาท์พุทของภาคแรกจะกลายเป็นอินพุทของภาคถัดไป ในท้ายที่สุด ผลเฉลยของระบบก็จะเป็นผลเฉลยที่สอดคล้องกับทุกภาคการทำงาน ซึ่งด้วยแนวคิดดังกล่าวพบว่า หากเราวมการพิจารณาในแต่ละประเด็นปัญหาทั้งหมดเพื่อหาผลเฉลยพร้อมกันทีเดียว เราก็จะได้ผลเฉลยที่สอดคล้องกับทุกประเด็นปัญหาที่พิจารณาอีกทั้งยังสามารถกระชับขนาดของระบบได้ด้วย แนวคิดดังกล่าวก่อให้เกิดเทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์

พิจารณาจากรูปที่ 2.16 พบว่าภาคเงื่อนไขบังคับความคงทนทางเฟสจะทำการแก้ปัญหาค่าความผิดพลาดทางเฟสจากสายอากาศแถวลำดับ โดยทำการหาชุดสนามกระตุ้น (w) ที่ตั้งฉากกับปริภูมิย่อยความทนทานทางเฟสแบบสุ่ม ($\tilde{a}_{yR}(\phi)$) เพื่อให้สมการที่ (2.53) เป็นจริง ส่วนอัลกอริทึมมิวสิกจะทำการหาปริภูมิของสัญญาณรบกวน (U_{nR}) เพื่อใช้ในการหาทิศทางของสัญญาณ โดยที่เรารู้ว่าปริภูมิของสัญญาณรบกวนจะมีคุณสมบัติที่ตั้งฉากกับปริภูมิของสัญญาณที่ต้องการ (U_{sR}) ดังนั้นจะได้ว่าผลเฉลยของประเด็นปัญหาดังกล่าวที่ได้จากเทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์ คือ

$$W(\phi) = U_{nR}(\phi) = \text{Null space} \left(\begin{bmatrix} U_{sR} & \tilde{a}_{yR}(\phi) \end{bmatrix} \right) \quad (2.65)$$

โดยสมการที่ (2.54) จะมีความหมายว่า จากเดิมที่ทำการหาแต่ละส่วนแยกกัน ก็จะถูกเปลี่ยนให้หาครั้งเดียวพร้อมกัน และผลเฉลยที่ได้ในกรณีนี้ จะเป็นผลเฉลยทั้งในของส่วนเงื่อนไขบังคับความ

คงทนทางเฟสและส่วนของอัลกอริทึมมิวสิก เพราะเป็นผลมาจากการหาปริภูมิที่เพียงพอที่จะตั้งฉากกับทั้ง \mathbf{U}_{sR} และ $\tilde{\mathbf{a}}_{rR}(\phi)$ ซึ่งก็คือการหาปริภูมิสุญญัตินั่นเอง

นิยามของปริภูมิสุญญัตินั้น คือ ถ้าให้ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operator) โดยที่ $T: H \rightarrow Y$ แล้ว $Z(T) = \{h \in H : Th = 0\}$ เมื่อ $Z(T)$ คือปริภูมิสุญญัตินั้นของ T ซึ่งจะได้ว่า $Z(T)$ เป็นปริภูมิย่อยของ H ด้วย

พิจารณากการเปลี่ยนแปลงของความถูกต้องในการตีความทิศทางสัญญาณ จากรูปแบบสัญญาณที่ได้จากการประมาณทิศทางของอัลกอริทึมมิวสิก โดยเปรียบเทียบระหว่างอัลกอริทึมมิวสิกดั้งเดิม กับอัลกอริทึมมิวสิกแบบใหม่ ที่มีการประยุกต์เงื่อนไขบังคับความคงทนทางเฟสเข้ากับอัลกอริทึมมิวสิกดั้งเดิม และใช้เทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์ในการหาผลเฉลย ที่นำเสนอโดย [7] ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 2.17 -2.19

เมื่อกำหนดให้

สัญญาณเข้ามา 2 เส้นทางที่มุม 13 และ 16 องศาในระนาบกวาดด้วยระดับ SNR 20 และ 25 dB ตามลำดับ สัญญาณรบกวนเป็นเกาส์ขาวแบบบวก จำนวนสายอากาศแถวลำดับเป็น 10 ต้น ระยะห่างระหว่างต้นเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น จำนวนการสุ่มเป็น 1000 แซมเปิล และ $\mu = 0.01$

โดยที่

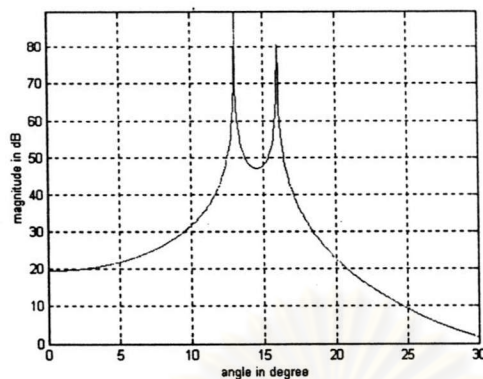
$$P_{MUSIC}(\phi) = \frac{1}{\|\mathbf{U}_{nr}^T(\phi) \tilde{\mathbf{A}}_R(\phi)\|_F^2} \quad (2.66)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_R(\phi) = \begin{bmatrix} \Re\{\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\} & \Re\{-j\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\} \\ \text{Im}\{\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\} & \text{Im}\{-j\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

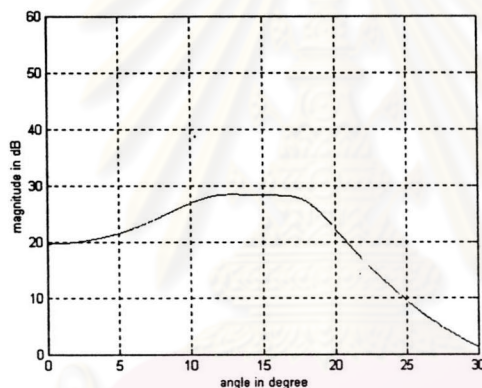
$$\mathbf{R}_{YYR} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{R}_{YY}\} & \Re\{-j\mathbf{R}_{YY}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{R}_{YY}\} & \text{Im}\{-j\mathbf{R}_{YY}\} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

\mathbf{U}_{sR} คือเวกเตอร์เจาะจงที่มีค่ามากที่สุด 2 D หลัก (desired signal subspace) ซึ่งหาได้จากการแยกย่อยเอกฐานเมตริกซ์ \mathbf{R}_{YYR}

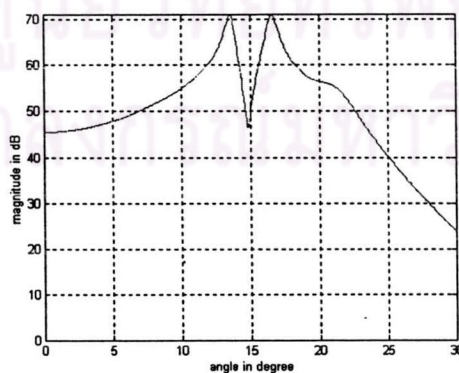
$\| \cdot \|_F$ คือไฟโบนีสนอร์ม (Frobenius Norm)



รูปที่ 2.17 รูปแบบสัญญาณที่ได้จากการประมาณทิศทางของอัลกอริทึมมิวสิกดั้งเดิม
เมื่อไม่มีผลจากค่าความผิดพลาดทางเฟส



รูปที่ 2.18 รูปแบบสัญญาณที่ได้จากการประมาณทิศทางของอัลกอริทึมมิวสิกดั้งเดิม
เมื่อมีผลจากค่าความผิดพลาดทางเฟส ที่ $\mu = 0.01$



รูปที่ 2.19 รูปแบบสัญญาณที่ได้จากการประมาณทิศทางของอัลกอริทึมมิวสิกที่ดีขึ้น
เมื่อมีการประยุกต์ใช้เทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์ ที่ $\mu = 0.01$

สำหรับเทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์นี้สามารถสร้างความทนทานทางเฟส ผิดพลาดแบบสุ่มให้สายอากาศแต่ละต้นได้ ทั้งนี้เป็นเพราะ $\tilde{a}_{y_r}(\phi)$ คือการรวมกันของ $\tilde{a}_{y_{mr}}(\phi)$ ดังนั้นปริภูมิคู่ศูนย์ที่หาได้จะตั้งฉากกับทุก $\tilde{a}_{y_{mr}}(\phi)$ การหาปริภูมิคู่ศูนย์ในกรณีนี้จะทำให้ได้ปริภูมิคู่ศูนย์ที่ตั้งฉากกันที่สุดในแต่ละค่ามุม ซึ่งค่อนข้างดีในแง่ของความถูกต้องในด้านความทนทานของอัลกอริทึมแต่เลวในแง่ของความไวในการประมวลผล

จากผลการจำลองที่แสดงไว้ในรูป ที่ 2.17-2.19 สาเหตุที่กำหนดให้ระดับ SNR ของ 2 สัญญาณไม่เท่ากัน เพื่อต้องการจะเน้นประเด็นว่าถึงแม้สัญญาณจะแรงเพียงใด หากเกิดปัญหาความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มขึ้นที่ตัวสายอากาศแล้วการประมาณทิศทางของสัญญาณยังคงผิดพลาดอยู่ดี

สำหรับข้อมูลการนำเสนอในบทที่ 2 นี้ ซึ่งให้เห็นถึงจุดเด่นของอัลกอริทึมมิวสิก เทคนิคการแบ่งคลื่น เทคนิคการแก้ปัญหาค่ารบกวนทางเฟสด้วยหลักการการทำอนุพันธ์แบบไม่ขึ้นกับเฟส และเทคนิคการหาผลเฉลยแบบปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์ ซึ่งจุดเด่นทั้งหลายเหล่านี้จะถูกนำไปประยุกต์ให้เป็นอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นที่ทนทานต่อค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม ดังจะได้กล่าวต่อไปในบทที่ 3

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย