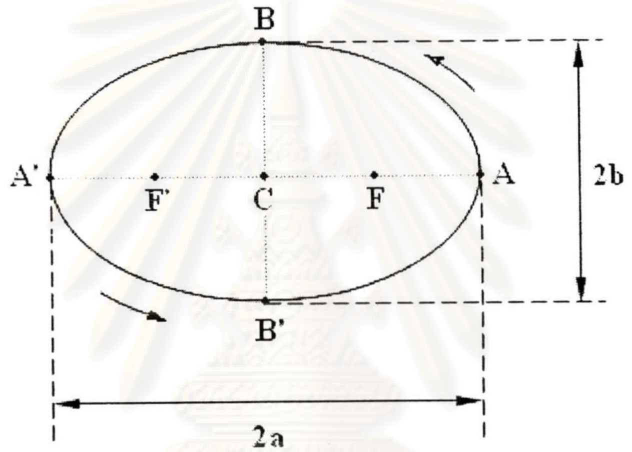
บทที่ 2

ธรรมชาติของดาวเคราะห์และดาวฤกษ์

2.1 กฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ของเคปเลอร์

1. กฎของวงรี (Law of ellipse)

ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรีโดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่งของวงรีนั้น



รูปที่ 2.1 ภาพวงรีซึ่งมีแกนเอก และแกนโทยาว 2a และ 2b ตามลำดับ

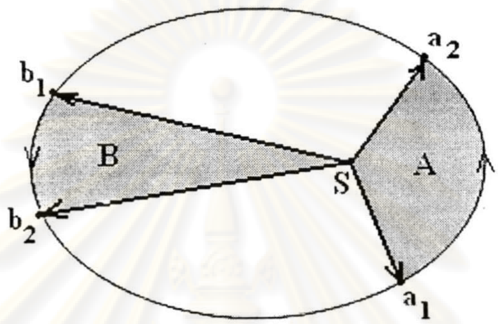
รูปที่ 2.1 แสดงวงรีที่มีจุดโฟกัส ณ ตำแหน่ง F และ F' โดยที่ C คือ จุดศูนย์กลางของวงรี อยู่กึ่งกลางระหว่าง F กับ F' มี AA' เป็นแกนเอก (major axis) และ BB' เป็นแกนโท (minor axis) เรียกระยะ CA ว่า ครึ่งแกนเอก (semi-major axis "a") และเรียกระยะ CB ว่า ครึ่งแกนโท (semi-minor axis "b") โดยมีความรี หรือภาวะเยื้องศูนย์ (eccentricity "e") เป็นอัตราส่วนระหว่างความยาว CF ต่อความยาว CA

สมมติดวงอาทิตย์อยู่ที่จุด F และดาวเคราะห์โคจรไปบนวงรีในทิศทางเดียวกันกับลูกศรที่แสดงไว้คือทิศทวนเข็มนาฬิกา ณ จุด A ดาวเคราะห์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์ที่สุดเรียกว่า จุดใกล้ดวงอาทิตย์ หรือเพอริฮีเลียน (perihelion) และที่ A' ดาวเคราะห์อยู่ไกลดวงอาทิตย์ที่สุดเรียกว่า จุดไกลดวงอาทิตย์ หรือแอฟีเลียน (aphelion)

กรณีดาวคู่ (Binary star) คือดาวฤกษ์ 2 ดวงโคจรรอบกัน หรือกรณีดาวเคราะห์โคจรรอบดาวฤกษ์ดวงอื่นจะมีจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่สุด และจุดไกลดาวฤกษ์ที่สุดเรียกว่า เพอริแอสตรอน (periastron) และ แอพแอสตรอน (apastron) ตามลำดับ

2 กฎของพื้นที่ (Law of areas)

เวกเตอร์รัศมีซึ่งลากจากดวงอาทิตย์ไปยังดาวเคราะห์ จะกวาดพื้นที่ไปเท่ากันในช่วงเวลาที่เท่ากัน



รูปที่ 2.2 ภาพเวกเตอร์รัศมีตามกฎข้อที่สองของเคปเลอร์

จากรูปที่ 2.2 สมมติ S แทนตำแหน่งของดวงอาทิตย์ a_1, a_2, b_1 และ b_2 แทนตำแหน่งของดาวเคราะห์ดวงหนึ่งในวงโคจร ณ เวลาต่าง ๆ กัน ถ้าดาวเคราะห์โคจรจาก a_1 ไปยัง a_2 ในช่วงเวลาที่เท่ากันกับ โคจรจาก b_1 ไปยัง b_2 จะได้ว่า พื้นที่ A เท่ากับพื้นที่ B ผลที่ตามมาคือ อัตราเร็วของดาวเคราะห์ตามวงโคจรรอบดวงอาทิตย์ไม่คงที่ กล่าวคือ ดาวเคราะห์จะเคลื่อนที่เร็วขึ้นขณะที่ดาวเคราะห์อยู่ใกล้ดาวอาทิตย์มากขึ้น และเคลื่อนที่ช้าเมื่ออยู่ไกลจากดวงอาทิตย์ เช่น ในช่วง a_1a_2 ดาวเคราะห์จะเคลื่อนที่เร็วกว่าในช่วง b_1b_2

3. กฎฮาร์มอนิก (Harmonic law)

คาบทางโคจรของดาวเคราะห์ยกกำลังสอง เป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าครึ่งแกนเอกของทางโคจรยกกำลังสาม

เวลาที่ดาวเคราะห์ใช้ในการโคจรรอบดวงอาทิตย์ครบหนึ่งรอบเรียกว่า คาบ (period “T”)

$$T^2 \propto a^3$$

ให้ a, a_1 เป็นครึ่งแกนเอกของทางโคจรของดาวเคราะห์สองดวง และ T, T_1 แทนคาบทางโคจรของดาวเคราะห์ทั้งคู่ จะได้ว่า

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2} \tag{2.1}$$

ให้ n แทนอัตราการกวาดเฉลี่ยของเวกเตอร์รัศมีเรียกว่า การเคลื่อนที่เชิงมุมเฉลี่ย (mean angular motion) ในเวลา T เวกเตอร์รัศมีจะกวาดมุมไปได้ 360 องศา หรือ 2π เรเดียน

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{2.2}$$

สามารถเขียนสมการที่ (2.1) ได้เป็น

$$n^2 a^3 = n_1^2 a_1^3 \tag{2.3}$$

จากสมการที่ (2.1)

$$\frac{a}{a_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{2/3} \tag{2.4}$$

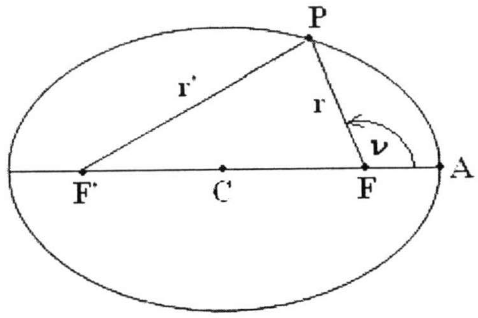
ถ้า a_1 และ T_1 แทนทางโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ อัตราส่วนของครึ่งแกนเอกของดาวเคราะห์ใดๆ a ต่อครึ่งแกนเอกของโลก a_1 จะเป็นไปตามสมการที่ (2.4) โดยคาบทางโคจรของดาวเคราะห์ และโลกเป็น T และT_1 ตามลำดับ คาบทางโคจรของดาวเคราะห์ทราบได้จากการสังเกต ดังนั้นสามารถหาค่าครึ่งแกนเอกของดาวเคราะห์ได้ โดยใช้หน่วยของครึ่งแกนเอกเป็นหน่วยดาราศาสตร์ (Astronomical Unit “A.U.”) และคาบเวลาเป็นปี ดังนั้น a_1 = 1 A.U. (ระยะทางเฉลี่ยจากดวงอาทิตย์ถึงโลก) และ T_1 = 1 ปี (เวลาที่โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ครบหนึ่งรอบ) แทนค่าลงไปในสมการที่ (2.4) จะได้

$$a = T^{2/3} \tag{2.5}$$

สมการที่ (2.5) นี้ใช้หาค่าครึ่งแกนเอกของดาวเคราะห์ใด ๆ ที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ ซึ่งค่า a ในสมการมีหน่วยเป็น หน่วยดาราศาสตร์ และ T มีหน่วยเป็น ปี [1]

2.2 ทางโคจรรูปวงรี

นิยามของวงรี คือ “ทางเดินของจุดซึ่งเคลื่อนที่ไป โดยผลบวกของระยะทางจากจุดนั้นถึงจุดตรึงสองจุด (จุดโฟกัส) มีค่าคงที่”



รูปที่ 2.3 แสดงนิยามของวงรีสำหรับจุด P ใด ๆ บนวงรี r + r' = ค่าคงที่

รูปที่ 2.3 แสดงวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ C มีจุดโฟกัสที่ F กับ F' ครึ่งแกนเอก CA แทนด้วย a ให้ P เป็นจุดใดๆ บนวงรี โดยระยะ FP = r และ F'P = r' จากนิยามของวงรี FP + F'P = r + r' = ค่าคงที่ ถ้าพิจารณาที่จุด A จะได้ว่า r + r' = FA + F'A = 2(CA) ดังนั้น

$$r + r' = 2a \tag{2.6}$$

รูปทรงของวงรีกำหนดได้ด้วยตัวแปร 3 ตัว ครึ่งแกนเอก a, ครึ่งแกนโท b และความรี e โดยเราทราบแล้วว่า

$$e = \frac{CF}{CA} = \frac{CF}{a}$$

ดังนั้น $CF = F'C = ae$

ในระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate system) ให้จุดกำเนิดอยู่ที่ C โดยจุด P มีพิกัดเป็น (x, y)

$$r'^2 = (x + ae)^2 + y^2 \tag{2.7}$$

$$r^2 = (x - ae)^2 + y^2 \tag{2.8}$$

นำสมการที่ (2.7) ลบกับสมการที่ (2.8)

$$r'^2 - r^2 = 4aex$$

จากสมการที่ (2.6) แทนค่า $r = 2a - r'$ ลงไปจะได้

$$r' = a + ex$$

แทนกลับไปในสมการที่ (2.7) แล้วจัดรูปจะได้สมการวงรีในระบบพิกัดฉาก

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

หรือ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.9}$$

เมื่อ $b=a\sqrt{1-e^2}$ คือความยาวของครึ่งแกนโท

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate system) ให้จุดกำเนิดอยู่ที่ F โดยจุด P มีพิกัดเป็น (r,ν) เมื่อ ν เรียกว่ามุมกวาดจริง (True anomaly) วัดจากจุดใกล้ (ในรูปที่ 2.3 คือจุด A) ไปตามทิศทางการเคลื่อนที่

จากกฎของโคไซน์

$$(F'P)^2=(FP)^2+(F'F)^2+2(FP)(F'F)\cos\nu \tag{2.10}$$

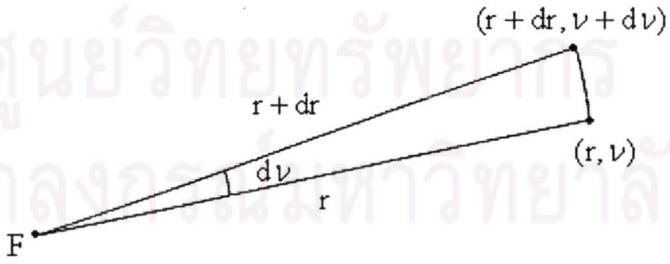
แทนค่า $F'F=2ae$ ลงในสมการที่ (2.10) จะได้

$$r'^2=r^2+4a^2e^2+4rae\cos\nu \tag{2.11}$$

จากสมการที่ (2.6) เราแทน $r'=2a-r$ ลงในสมการที่ (2.11) จัดรูปจะได้สมการวงรีในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็น

$$\boxed{r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu}} \tag{2.12}$$

เมื่อ $0<e<1$



รูปที่ 2.4 ภาพแสดงความยาวของเวกเตอร์รัศมี และมุมกวาดจริงในช่วงเวลา dt น้อย ๆ

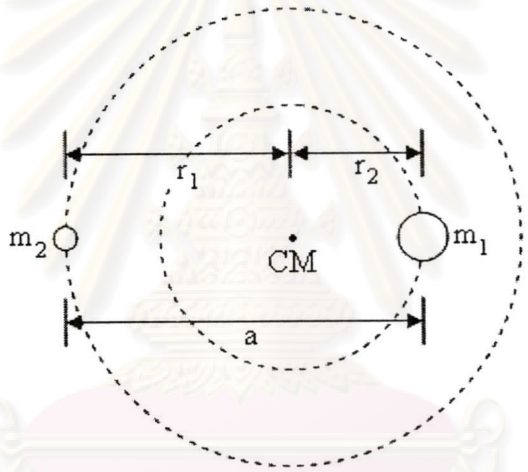
(r,ν) และ $(r+dr,\nu+d\nu)$ เป็นพิกัดของวัตถุหนึ่ง ณ เวลา t และ t + dt ตามลำดับ ดังนั้น $rd\nu$ เป็นชิ้นประกอบของส่วนโค้งที่ผ่านจุด (r,ν) พื้นที่ของสามเหลี่ยมนี้มีค่าเป็น $\frac{1}{2}r^2d\nu$ จากกฎข้อที่สองของเคปเลอร์ อัตราการกวาดพื้นที่ของเวกเตอร์รัศมีมีค่าคงที่ หรือ

$\frac{1}{2}r^2\frac{d\nu}{dt} =$ ค่าคงที่ แต่พื้นที่ทั้งหมดของวงรีคือ $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$ เกิดจากเวกเตอร์รัศมีกวาดโดยใช้เวลาหนึ่งคาบ (T) ดังนั้น

$$\boxed{\frac{1}{2}r^2\frac{d\nu}{dt} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}} \tag{2.13}$$

พิจารณาดาว 2 ดวงมวล m_1 และ m_2 ที่มีทางโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล (center of mass) เป็นวงกลม ถ้า m_1 อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล r_1 ส่วน m_2 อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล r_2 และดาวทั้งคู่อยู่ห่างกันเป็นระยะ a ดังนั้น

$$a = r_1 + r_2 \tag{2.14}$$



รูปที่ 2.5 ภาพทางโคจรวงกลมของระบบรอบจุดศูนย์กลางมวล

ดาวทั้งสองจะดึงดูดกันด้วยแรงโน้มถ่วงมีค่าเป็น

$$F = F_1 = F_2 = \frac{Gm_1m_2}{a^2} \tag{2.15}$$

เมื่อ G คือค่าคงที่โน้มถ่วงสากล

ให้ระบบโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลครบหนึ่งรอบใช้เวลา T อัตราเร็วในวงโคจรของ m_1 และm_2 เขียนได้เป็น

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} \tag{2.16}$$

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T}$$

F_1 และ F_2 เป็นขนาดของแรงสู่ศูนย์กลางที่กระทำต่อ m_1 และ m_2 ตามลำดับ

$$F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T^2} \tag{2.17}$$

$$F_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T^2}$$

จาก $F_1 = F_2$ ได้

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \tag{2.18}$$

พิจารณาสมการที่ (2.16) และสมการที่ (2.18) จะได้

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{2.19}$$

แทน $r_2 = r_1 \dfrac{m_1}{m_2}$ จากสมการที่ (2.18) ลงไปในสมการที่ (2.14) จะได้ว่าระยะห่างระหว่างดาวเป็น

$$a = r_1 + r_1 \frac{m_1}{m_2}$$

$$a = \frac{r_1(m_1 + m_2)}{m_2}$$

หรือ

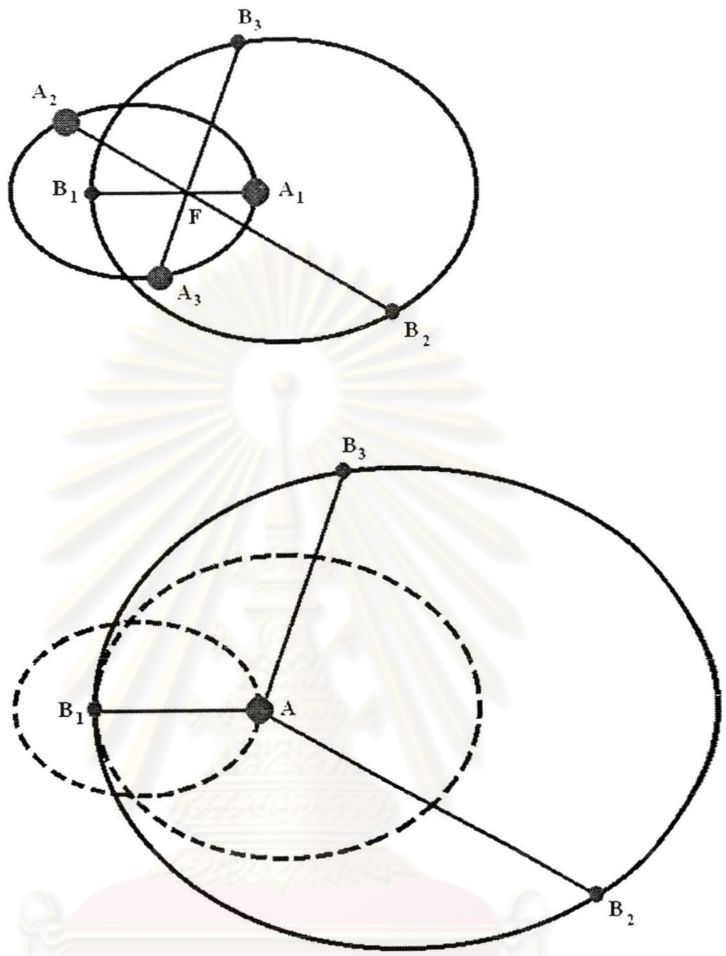
$$r_1 = \frac{m_2 a}{(m_1 + m_2)} \tag{2.20}$$

สมการที่ (2.15) เท่ากับสมการที่ (2.17) และแทนค่า r_1 จากสมการที่ (2.20) ลงไปจะได้

$$\boxed{a^3 = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} T^2} \tag{2.21}$$

พจน์ $\dfrac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$ มีค่าคงที่ สมการที่ (2.21) จึงสอดคล้องกับกฎข้อที่สามของเคปเลอร์ คือ กำลังสามของระยะห่างเฉลี่ยระหว่างดาวเป็นปฏิภาคโดยตรงกับคาบการโคจรยกกำลังสอง $(a^3 \propto T^2)$

ในกรณีที่ทั้ง m_1 และ m_2 โคจรเป็นวงรีภายใต้แรงโน้มถ่วงรอบจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งอยู่ที่จุดโฟกัสร่วมของวงรีทั้งสอง



รูปที่ 2.6 ภาพทางโคจรวงรีของระบบรอบจุดศูนย์กลางมวล F และของดาว B รอบดาว A

ค่า r_1 กับ r_2 จะเปลี่ยนไปตามเวลา โดยทั้ง r_1 และ r_2 จะมีค่าน้อยสุดพร้อมกัน หรือมากสุดพร้อมกัน ส่งผลให้ค่า $r_1 + r_2$ เปลี่ยนไปตามเวลาด้วย ดังนั้น a ในสมการที่ (2.21) คือระยะห่างเฉลี่ยมีค่าเท่ากับผลบวกครึ่งแกนเอกของวงรีทั้งสอง $a = a_1 + a_2$

และดาวทั้งสองดวงนั้นจะอยู่บนเส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางมวลซึ่งอยู่คงที่เมื่อเทียบกับดาวทั้งสองในทุก ๆ ขณะ ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (2.18) ยังคงเป็นจริง $a_1 = a_2 \dfrac{m_2}{m_1}$

$$a = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) a_2$$

$$= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) a_2$$

พิจารณากรณีที่ $m_2 << m_1$ จะได้ $a \approx a_2$

นั่นคือถ้าดาวเคราะห์ m_2 โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลกับดาวฤกษ์ m_1 ดาวฤกษ์จะอยู่ใกล้กับจุดศูนย์กลางมวลของระบบ (ดาวเคราะห์มีมวลน้อยกว่าดาวฤกษ์มาก) ครึ่งแกนเอกของดาวเคราะห์รอบจุดศูนย์กลางมวลมีค่าใกล้เคียงกับครึ่งแกนเอกของดาวเคราะห์รอบดาวฤกษ์

กรณีที่โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ a = 1 A.U., T = 1 ปี, $m_1 = M_S$ แทนมวลดวงอาทิตย์ และ $m_2 = m_E$ แทนมวลของโลก

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_S + m_E)$$
$$= \frac{GM_S}{4\pi^2}(1 + \frac{m_E}{M_S})$$

m_E มีค่าน้อยกว่า M_S มาก ดังนั้นจึงเขียนได้ว่า

$$\frac{a^3}{T^2} \approx \frac{GM_S}{4\pi^2}$$

ในสมการข้างบนถ้าแทน a = 1 A.U. และ T = 1 ปี จะได้

$$\frac{GM_S}{4\pi^2} = 1 \tag{2.22}$$

เพราะฉะนั้นกฎข้อที่สามของเคปเลอร์สำหรับดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์ เขียนได้เป็น

$$a^3 = T^2 \tag{2.23}$$

เมื่อ a มีหน่วยเป็น A.U. และ T มีหน่วยเป็น ปี จะเห็นว่าสมการ(2.23) สอดคล้องกับสมการที่ (2.5) และจากสมการที่ (2.22) สามารถเขียนสมการที่ (2.21) ได้เป็น

$$\boxed{a^3 = (M_1 + M_2)T^2} \tag{2.24}$$

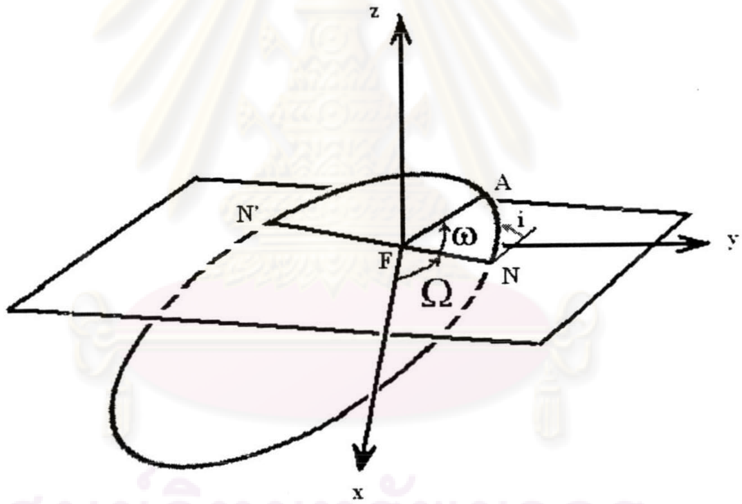
เมื่อ T คือคาบทางโคจรมีหน่วยเป็นปี
a เป็นครึ่งแกนเอกในหน่วย A.U.
M_1 และ M_2 เป็นมวลของดาวสองดวง บอกเป็นจำนวนเท่าของมวลดวงอาทิตย์

ทั้งสมการที่ (2.21) และสมการที่ (2.24) นี้ยังคงใช้ได้กับคู่ของวัตถุท้องฟ้า (celestial object) ใดๆ ที่โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลซึ่งกันและกันภายใต้แรงโน้มถ่วง เช่น ดาวฤกษ์ 2 ดวงโคจรรอบกัน หรือ ดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์ดวงหนึ่ง แต่ปริมาณทุกตัวในสมการที่ (2.21) ใช้หน่วยเอสไอ

2.3 หลักมูลทางโคจร

ปริมาณพื้นฐานที่ใช้ในการชี้เฉพาะเพื่อกำหนดทางโคจร และตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้าคู่หนึ่งเรียกว่า หลักมูลทางโคจร (Orbital element) ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปจะพิจารณาด้วย 7 ส่วนประกอบต่อไปนี้

ครึ่งแกนเอก (Semi-major axis “a”)
ความรี หรือภาวะเยื้องศูนย์ (Eccentricity “e”)
มุมเอียงของระนาบทางโคจร (Inclination of orbital plane “i”)
มุมตำแหน่งของจุดไต่ขึ้น (Position angle of Ascending node “ Ω ”)
ระยะแวงของจุดใกล้ดาวฤกษ์ (Longitude of periastron “ ω ”)
เวลาเคลื่อนผ่านจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่สุด (Time of periastron passage “ τ ”)
คาบเวลาของทางโคจร (Orbital period “T”)



รูปที่ 2.7 หลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์รอบดาวฤกษ์

จากรูปที่ 2.7 ให้ระนาบ xy เป็นระนาบอ้างอิง ในกรณีของดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ ระนาบนี้คือระนาบของท้องฟ้าซึ่งตั้งฉากกับแนวสายตา แกน x เป็นทิศทางอ้างอิงชี้ไปขั้วท้องฟ้าเหนือ ส่วนแกน z เป็นแนวสายตาชี้จากผู้สังเกตพุ่งออกนอกทรงกลมฟ้า โดยจุดกำเนิดของระบบพิกัด xyz ตั้งอยู่ที่จุดโฟกัส F ของวงโคจร

จุด A เป็นจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่สุด ในรูปทางโคจรที่อยู่ใต้ระนาบ xy แทนด้วยเส้นประ NN’ คือ เส้นของจุดบัพ (line of node) เป็นรอยตัดกันของระนาบทางโคจร (รูปวงรี) กับระนาบท้องฟ้า (รูปสี่เหลี่ยม)

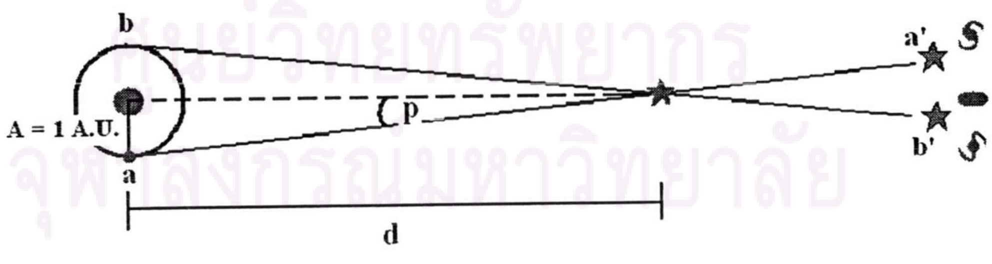
N เป็นจุดไต่ขึ้น หรือจุดที่ดาวเคราะห์ในทางโคจรเคลื่อนที่จากใต้ระนาบท้องฟ้ามาอยู่เหนือระนาบท้องฟ้าตัดกับระนาบ ส่วน N’ เป็นจุดไต่ลง ดังนั้น Ω วัดจากแกน x ไปยังจุดไต่ขึ้นบนระนาบ xy ดังนั้น $\Omega = x\hat{F}N$ ระยะแวงของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่สุด จะวัดในระนาบทางโคจรจากจุด N ไปยังจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่สุด A ตามทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ ω จึงขึ้นอยู่กับทิศทางของการเคลื่อนที่ มุมเอียง i เป็นมุมระหว่างระนาบทางโคจรกับระนาบท้องฟ้า

โดยสรุปปริมาณที่กำหนดขนาด และรูปร่างของวงโคจรคือ a และ e ตามลำดับ ส่วน i และ Ω บอกตำแหน่งของระนาบทางโคจร ในขณะที่ ω เป็นการกำหนดตำแหน่งของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่สุดในระนาบทางโคจร T เวลาที่ใช้เคลื่อนที่ครบรอบ และ τ คือเวลาที่ดาวเคราะห์เคลื่อนผ่านตำแหน่งของจุดใกล้ดาวฤกษ์ที่สุด [2]

ถ้าพิจารณาทางโคจรของดาวเคราะห์ และดาวฤกษ์รอบจุดศูนย์กลางมวล จะพบว่าค่าครึ่งแกนเอกของดาวเคราะห์รอบจุดศูนย์กลางมวลมีค่าใกล้เคียงกับครึ่งแกนเอกของดาวเคราะห์รอบดาวฤกษ์ (เนื่องจากครึ่งแกนเอกของดาวฤกษ์รอบจุดศูนย์กลางมวลมีค่าน้อยกว่ามาก) ส่วนหลักมูลทางโคจรตัวอื่น ๆ ของดาวเคราะห์รอบจุดศูนย์กลางมวลจะมีค่าเท่ากับหลักมูลทางโคจรของดาวฤกษ์รอบจุดศูนย์กลางมวล

2.4 แพรัลแลกซ์

การวัดระยะห่างของดาวสามารถวัดได้โดยวิธีที่เรียกว่า แพรัลแลกซ์ (Parallax) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเมื่อผู้สังเกตเปลี่ยนตำแหน่งการมอง ทำให้เห็นวัตถุที่อยู่ใกล้เลื่อนไปเทียบกับวัตถุที่อยู่ไกล



รูปที่ 2.8 ภาพการหาระยะทางของดาวด้วยวิธีแพรัลแลกซ์

เมื่อโลกโคจรไปในวงโคจรรอบดวงอาทิตย์จะพบว่าดาวที่สังเกตเปลี่ยนตำแหน่งไปเทียบกับดาวที่อยู่ไกลออกไป ระยะห่างของดาวจากโลกจะหาได้จาก มุมแพรัลแลกซ์ (Parallax angle “p”) ซึ่งเป็นมุมครึ่งหนึ่งของระยะที่ดาวดาวเปลี่ยนตำแหน่งไปในครึ่งปี (ระยะทางบนท้องฟ้าวัดออกมาเป็นมุม เช่น องศา อาร์คนาที และอาร์ควินาที) โดยดาวที่อยู่ใกล้จะมีมุมแพรัลแลกซ์มากกว่าดาวที่อยู่ไกลออกไป

พิจารณารูปที่ 2.8 เมื่อโลกอยู่ที่ a จะเห็นดาวปรากฏที่ a' อีก 6 เดือนต่อมา เมื่อโลกโคจรมาอยู่ที่ b จะเห็นดาวปรากฏที่ b' มุมแพรัลแลกซ์ p คือครึ่งหนึ่งของระยะ a'b' ที่วัดออกมาเป็นมุม

$$p = \frac{A}{d} \tag{2.25}$$

สมการที่ (2.25) ค่า A และ d ถ้าใช้หน่วยเดียวกัน จะได้ค่า p เป็นเรเดียน ซึ่งไม่เป็นที่นิยม เพราะว่าค่ามุมแพรัลแลกซ์มักจะวัดได้ออกมาเป็นอาร์ควินาที (1 ใน 3,600 องศา) ส่วนระยะทาง d มักจะเป็นหน่วย ปีแสง (ระยะทางที่แสงเดินทางได้ในเวลา 1 ปี) หรือใหญ่กว่านั้น

เพื่อความสะดวกจึงนิยามระยะทาง 1 พาร์เซก (Parsec "pc") เป็นระยะทางที่ความยาว 1 หน่วยดาราศาสตร์ จะรองรับมุม 1 อาร์ควินาที (d = 1 pc เมื่อ A = 1 A.U. และ p = 1") ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (2.25) ได้เป็น

$$d = \frac{1}{p} \tag{2.26}$$

สมการที่ (2.26) d เป็นระยะทางในหน่วยพาร์เซก และp เป็นมุมแพรัลแลกซ์ในหน่วยอาร์ควินาที ซึ่งดาวฤกษ์ที่อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์ที่สุด พรอกซิมา เซนทอรี (Proxima Centauri) มีมุมแพรัลแลกซ์เป็น 0.76 อาร์ควินาที อยู่ห่างออกไปที่ระยะ 1.3 พาร์เซก

สรุปค่าความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยของความยาวที่ใช้ในทางดาราศาสตร์

1 หน่วยดาราศาสตร์ $\approx$ 150 ล้านกิโลเมตร

1 ปีแสง $\approx$ 63,000 หน่วยดาราศาสตร์ หรือ 9.5 ล้านล้านกิโลเมตร

1 พาร์เซก $\approx$ 3.26 ปีแสง หรือ 206,265 หน่วยดาราศาสตร์

2.5 ความสว่างปรากฏ และสภาพส่องสว่าง

ความสว่างปรากฏ (Apparent brightness "b") เป็นความสว่างของดาวที่เห็นอยู่บนท้องฟ้า หรือค่าพลังงานที่ได้รับต่อพื้นที่หนึ่งหน่วยที่มาถึงโลกในหนึ่งวินาที ความสว่างปรากฏมีหน่วยเป็น วัตต์ต่อตารางเมตร ในบางครั้งจะบอกออกมาเป็นแมกนิจูด เรียกว่าแมกนิจูดปรากฏ (Apparent magnitude "m") โดยดาวที่มีแมกนิจูด 1 จะสว่างกว่าดาวที่มีแมกนิจูด 6 อยู่ 100 เท่า (ดาวที่มีแมกนิจูดน้อยจะสว่างกว่าดาวที่มีแมกนิจูดมาก)

$$m \propto -\log b$$

$$m_2 - m_1 = -k(\log b_2 - \log b_1)$$
$$= k\log\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$$

แทนค่า $m_1 = 1, m_2 = 6$ และ $\frac{b_1}{b_2} = 100$ จะได้ค่าคงที่ $k = 2.5$

จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างความสว่างปรากฏ และแมกนิจูดปรากฏเป็น

$$m_2 - m_1 = 2.5\log\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \tag{2.27}$$

ค่าความสว่างปรากฏนี้สามารถวัดได้ด้วยมาตรวัดแสง (Photometer) ซึ่งอาศัยหลักการโฟโตอิเล็กทริก โดยการให้แสงไปตกกระทบโลหะแล้วถ่ายพลังงานให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาเมื่อวัดกระแสทำให้ทราบถึงจำนวนโฟโตอิเล็กตรอนที่หลุดออกมา ซึ่งจะเป็นสัดส่วนกับความเข้มแสงที่ตกกระทบโลหะ หรืออาจวัดโดยเครื่องตรวจหาที่เรียกว่า CCDs (Charge Coupled Devices) ซึ่งจะทำการบันทึกพลังงานที่ตกลงบนพื้นที่ไวแสงในแต่ละวินาที แล้วจึงประมวลผลออกมาเป็นค่าความสว่างปรากฏ

นอกจากความสว่างปรากฏแล้วตัวแปรที่สำคัญอีกตัวคือ สภาพส่องสว่าง (Luminosity) ของดาว ซึ่งเป็นพลังงานทั้งหมดที่ดาวแผ่ออกมาในหนึ่งหน่วยเวลา สภาพส่องสว่างจึงมีหน่วยเป็น วัตต์ ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง ความสว่างปรากฏ กับสภาพส่องสว่างเป็น

$$b = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{2.28}$$

เมื่อ b เป็นความสว่างปรากฏของดาวในหน่วย วัตต์ต่อตารางเมตร
L สภาพส่องสว่างของดาวในหน่วย วัตต์
d ระยะทางจากดาวถึงโลกมีหน่วยเป็น เมตร

ในวิชาฟิสิกส์ดารา (Astrophysics) พบว่าสภาพส่องสว่างจะขึ้นอยู่กับ พื้นที่ผิว และอุณหภูมิผิวดาว โดยเป็นไปตาม กฎซเตฟาน-โบลต์ซมันน์ (Stefan-Boltzmann law)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{2.29}$$

เมื่อ σ คือค่าคงที่ซเตฟาน-โบลต์ซมันน์ มีค่าเท่ากับ 5.67×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}

จากความสัมพันธ์ตามสมการที่ (2.29) แสดงว่าถ้ามีดาว 2 ดวงที่มีขนาดเท่ากัน (รัศมีเท่ากัน) ดวงที่มีอุณหภูมิผิวสูงกว่าจะมีอัตราการแผ่รังสีสูงกว่า หรือถ้าดาว 2 ดวงมีอุณหภูมิที่ผิวเท่ากันแล้ว ดาวดวงที่โตกว่าจะมีอัตราการแผ่รังสีสูงกว่าด้วย

เนื่องจากสภาพส่องสว่างมีค่าคงที่สำหรับดาวดวงหนึ่งที่มีรัศมี และอุณหภูมิผิวคงตัว เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.28) จะเห็นว่าความสว่างปรากฏเป็นปฏิภาคผกผันกับระยะห่างของดาวยกกำลังสอง

$$b \propto \frac{1}{d^2} \tag{2.30}$$

ความสว่างปรากฏไม่ได้บอกถึงความสว่างที่แท้จริงของดาว เพราะดาวแต่ละดวงอยู่ห่างจากโลกไม่เท่ากัน ดาวที่มีขนาดใหญ่ และอุณหภูมิผิวสูง ถ้าอยู่ไกลจากโลกมาก ๆ ก็อาจจะมีความสว่างปรากฏน้อยกว่าดาวที่มีขนาดเล็ก และอุณหภูมิต่ำด้วย ดังนั้นเพื่อเป็นการเปรียบเทียบความสว่างจากระยะทางเดียวกัน จึงได้มีการกำหนดให้แมกนิจูดสัมบูรณ์ (Absolute magnitude "M") คือค่าแมกนิจูดปรากฏเมื่อสังเกตดาวดวงนั้นจากระยะทาง 10 พาร์เซก

ถ้ามีดาวดวงหนึ่งอยู่ห่างจากโลก d_1 พาร์เซก มีความสว่างปรากฏ b_1 และแมกนิจูดปรากฏ m_1 เมื่อสังเกตดาวดวงนี้จากระยะทาง $d_2 = 10$ พาร์เซก มีความสว่างปรากฏ b_2 และแมกนิจูดปรากฏ $m_2 = M$ แทนค่าลงในสมการที่ (2.27)

$$\begin{aligned} M - m &= 2.5\log\left(\frac{10}{d}\right)^2 \\ &= 5[1 - \log d] \end{aligned}$$

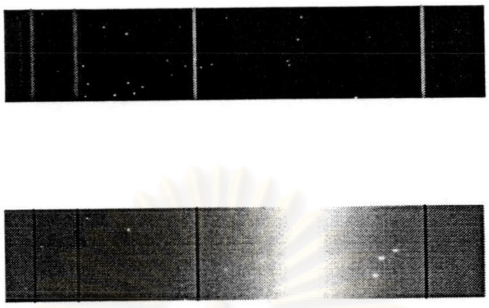
ดังนั้นแมกนิจูดสัมบูรณ์หาได้จาก

$$M = (m + 5) - 5\log d \tag{2.31}$$

2.6 สเปกตรัมของดาว

พบว่าของแข็ง ของเหลว หรือแก๊สความหนาแน่นสูง ซึ่งร้อนจัดสามารถแผ่รังสีที่มีความยาวคลื่นหลาย ๆ ค่าออกมาจึงเห็นเป็นสเปกตรัมต่อเนื่อง (Continuous spectrum) กรณีของแก๊สความดันต่ำในหลอดบรรจุเมื่อให้สนามไฟฟ้าจนแก๊สในหลอดลุกสว่าง พบว่าสเปกตรัมจะมีลักษณะเป็นเส้น ๆ หรือมีความยาวคลื่นเฉพาะบางค่าเรียกว่า เส้นสเปกตรัมเปล่งออก (Emission line spectrum) แต่สเปกตรัมของดาวจะมีลักษณะที่แตกต่างออกไปเนื่องจากแสง (สเปกตรัมต่อเนื่อง) ที่วิ่งผ่านชั้นบรรยากาศของดาวซึ่งประกอบด้วยแก๊สอุณหภูมิต่ำกว่าบริเวณใจกลาง อิเล็กตรอนของโมเลกุลแก๊สดูดกลืนพลังแสงบางความยาวคลื่นเพื่อเปลี่ยนระดับชั้นพลังงานไปยังสถานะกระตุ้น จึงทำให้สเปกตรัมของดาวที่เห็นหายไปในบางความยาวคลื่น

เรียกว่าเส้นสเปกตรัมดูดกลืน (Absorption line spectrum) ซึ่งการศึกษาสเปกตรัมของดาวทำให้เราทราบองค์ประกอบในชั้นบรรยากาศของดาวฤกษ์ด้วย



รูปที่ 2.9 เส้นสเปกตรัมเปล่งออก และเส้นสเปกตรัมดูดกลืน

พบว่าดาวที่มีอุณหภูมิสูงจะมีสีค่อนไปทางสีฟ้า ส่วนดาวที่มีอุณหภูมิต่ำจะมีสีค่อนไปทางสีแดง โดยสีของดาวจะมีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิผิวเป็นไปตามกฎการขจัดของวีน (Wien's displacement law) ค่าความยาวคลื่นที่ดาวแผ่ออกมามีความเข้มสูงสุด จะแปรผกผันกับอุณหภูมิเป็นเคลวิน

$$\lambda_{\max} \propto \frac{1}{T}$$

หรือ

$$\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3} \qquad (2.32)$$

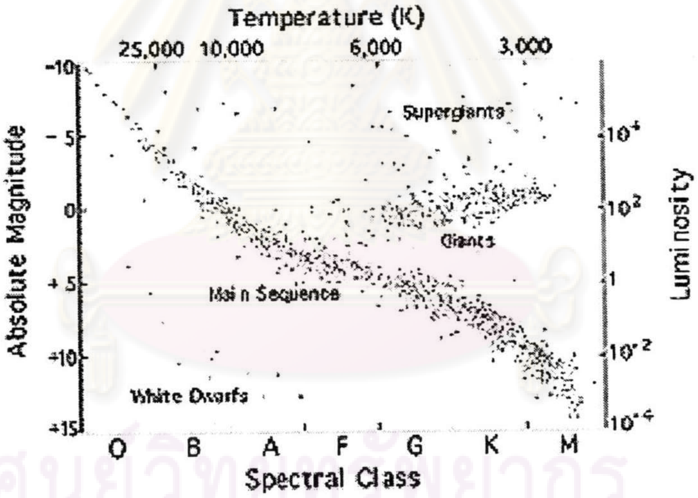
เมื่อ $\lambda_{\max}$ เป็นความยาวคลื่นที่มีความเข้มสูงสุดในหน่วย เมตร
T เป็นอุณหภูมิในหน่วย เคลวิน

ดังนั้นเมื่อเราวิเคราะห์สเปกตรัมของดาวจะทำให้ทราบ $\lambda_{\max}$ จึงสามารถหาอุณหภูมิผิวดาวได้จากสมการที่ (2.32)

นักดาราศาสตร์ได้มีการแบ่งแบบชนิดของสเปกตรัม (Spectral type) เป็น 7 แบบ โดยเรียงตามอุณหภูมิผิวดาวจากสูงไปต่ำดังนี้ O, B, A, F, G, K และM ซึ่งในแต่ละแบบยังแบ่งเป็นอีก 10 ชนิด เพื่อให้สามารถระบุประเภทของสเปกตรัมได้ละเอียดยิ่งขึ้น โดยใช้ตัวเลข 0 ถึง 9 ต่อท้ายตัวอักษร เช่นสเปกตรัมแบบ G สามารถกระจายได้เป็น G0, G1, G2, G3, G4, …G9 เรียงตามอุณหภูมิผิวดาวจากสูงไปต่ำเช่นเดิม ดังนั้นสเปกตรัมถัดไปที่มีอุณหภูมิสูงกว่า G0 ก็คือ F9 และสเปกตรัมถัดไปที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า G9 ก็คือ K0 นั่นเอง

ดาวที่มีสเปกตรัมแบบ O, B, A และF อุณหภูมิผิวดาวมีค่าสูง สีของดาวที่เห็นจึงออกไปทางสีฟ้า ส่วนดาวที่มีสเปกตรัมแบบ K และM อุณหภูมิผิวดาวมีค่าต่ำจึงเห็นออกไปทางสีแดง ซึ่งดวงอาทิตย์มีแบบชนิดของสเปกตรัมเป็น G2 มีอุณหภูมิผิวประมาณ 6,000 เคลวิน ความยาวคลื่นที่มีความเข้มสูงสุดเป็นสีเหลือง และมวล 2×10^{30} กิโลกรัม ดังนั้นถ้ามีดาวฤกษ์ดวงหนึ่งมีแบบชนิดของสเปกตรัมเป็น G2 เหมือนกับดวงอาทิตย์ ดาวฤกษ์ดวงนั้นจะมีลักษณะต่าง ๆ คล้ายกับดวงอาทิตย์ด้วย

เมื่อนำชนิดของสเปกตรัม และสภาพส่องสว่างของดาวมาเขียนเป็นแผนภาพ โดยให้แกนนอนเป็นชนิดของสเปกตรัมเรียงจากแบบ O ไปหาแบบ M (อุณหภูมิสูงไปอุณหภูมิต่ำ) ส่วนแกนตั้งเป็นสภาพส่องสว่าง ซึ่งมักเขียนให้อยู่ในหน่วยจำนวนเท่าของสภาพส่องสว่างของดวงอาทิตย์ ในบางครั้งอาจใช้แมกนิจูดสัมบูรณ์เป็นแกนตั้งก็ได้ จะเรียกแผนภาพที่ได้นี้ว่า แผนภาพแฮรท์สปรุง–รัสเซลล์ (Hertzsprung-Russell diagram) ซึ่งนิยมเรียกกันสั้น ๆ ในชื่อ แผนภาพ เอช-อาร์ (H-R diagram)



รูปที่ 2.10 แผนภาพแฮรท์สปรุง-รัสเซลล์ [3]

จากรูปที่ 2.10 จะพบว่าดาวส่วนใหญ่ (เกือบ 90 เปอร์เซ็นต์) จะอยู่ในบริเวณที่เรียกว่า ลำดับหลัก (main sequence) ในรูปที่ 2.1 เป็นบริเวณที่เรียงกันเป็นเส้นจากด้านบนซ้ายมายังบริเวณด้านล่างขวา โดยดาวในลำดับหลักดวงที่มีความสว่างมากจะมีขนาดใหญ่ (รัศมี กับมวลมีค่ามาก) และอุณหภูมิสูง ส่วนดาวในลำดับหลักที่มีความสว่างน้อยจะมีขนาดเล็ก (รัศมี กับมวลมีค่าน้อย) และอุณหภูมิต่ำ

ดาวอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่บนลำดับหลัก เช่น ดาวยักษ์แดง (red giant) ซึ่งมีขนาดใหญ่แต่อุณหภูมิผิวต่ำ เป็นดาวที่มีวิวัฒนาการไปสู่ช่วงบั้นปลายของชีวิตแล้ว