บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

3.1 การรับแรงดัดของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก

สมมุติฐานในทฤษฎีสำหรับการหากำลังรับแรงดัดของชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กคือ

1. การกระจายความเครียดตลอดความลึกของชิ้นส่วนเนื่องจากแรงดัดจะยังคงเป็นเส้นตรงจนกระทั่งวิบัติ

2. คานจะวิบัติเมื่อความเครียดอัดสูงสุดที่ผิวรับแรงอัดของคอนกรีตถึงค่าเฉพาะค่าหนึ่งซึ่งขึ้นกับคุณภาพของคอนกรีต

3. รูปร่างของแผนภาพแสดงหน่วยแรงสำหรับคอนกรีตเมื่อวิบัติ สามารถที่จะระบุขนาดและการกระจายหน่วยแรง

4. คอนกรีตไม่สามารถรับแรงดึงได้

5. ความเครียดของเหล็กจะเป็นสัดส่วนกับค่าความเครียดในคอนกรีตที่ระดับเดียวกัน

3.1.1 โมเมนต์ดัดแตกร้าว

ถ้าค่าโมเมนต์สูงสุดในชิ้นส่วนรับแรงดัดยังมีขนาดเล็กทำให้หน่วยแรงดึงในคอนกรีตยังไม่เกินค่าโมดูลัสแตกร้าว(Modulus of Rupture) รอยแตกร้าวดึงเนื่องจากแรงดัดจะยังไม่เกิดขึ้น หน้าตัดที่ยังไม่แตกร้าวจะสามารถต้านทานหน่วยแรงดึงและให้ค่าความแกร่ง (Rigidity) เต็มที่ ในช่วงนี้หน้าตัดสามารถวิเคราะห์ได้โดยทฤษฎียืดหยุ่นและหน้าตัดแปลงโดยค่าโมเมนต์แตกร้าวจะมีค่าเท่ากับ

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{X_t} \qquad (3-1)$$

โดย M_{cr} = โมเมนต์ขณะเกิดรอยแตกร้าวจากหน่วยแรงดัดเริ่มแรก

f_r = ค่าโมดูลัสแตกร้าวของคอนกรีต

I_g = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดแปลงยังไม่แตกร้าว

X_t = ระยะทางจากแกนสะเทินมายังผิวนอกรับแรงดึง

สำหรับค่าโมดูลัสแตกร้าวของคอนกรีตกำลังสูงมาก โดย Carrasquillo, Nilson และ Slate[29] ซึ่งเป็นสมการที่ ACI (363R-84)[1] แนะนำ

$$f_r = 3.1\sqrt{f'_c} \qquad (210<f'_c<845 \text{ กก./ซม}^2.) \qquad (3\text{-}2)$$

f_r = โมดูลัสแตกร้าวของคอนกรีตกำลังสูงมาก, กก./ซม^2.

f'_c = กำลังอัดประลัยของคอนกรีตกำลังสูงมาก, กก./ซม^2.

3.1.2 <u>โมเมนต์ดัด ณ จุดที่เหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงถึงจุดคลาก</u>

ภายหลังจากที่หน้าตัดของคานคอนกรีตเสริมเหล็กแตกร้าวแล้ว ความแกร่ง (Rigidity) ของคานจะลดลงทฤษฎียืดหยุ่นไม่อาจนำมาพิจารณาได้อย่างถูกต้อง จำเป็นต้องทำการวิเคราะห์หน้าตัดแตกร้าวด้วยคุณสมบัติจริงของวัสดุ โดยสมมุติให้คอนกรีตใต้แกนสะเทินไม่สามารถรับแรงดึงได้และคอนกรีตเหนือแกนสะเทินรับแรงอัดโดยมีการกระจายหน่วยแรงเป็นรูปพาราโบลา ดังรูปที่ 3.1 สมการแสดงความสัมพันธ์ของหน่วยแรงอัดกับความเครียดของคอนกรีตคือ[52]

$$f_c = f'_c\left|\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_o} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}\right)^2\right|$$

โดย f_c = หน่วยแรงอัดของคอนกรีต

f'_c = กำลังอัดประลัยของคอนกรีต

ε = ความเครียดของคอนกรีต

ε_o = ความเครียดที่ตำแหน่งกำลังอัดประลัยของคอนกรีต = 0.002

เมื่อ $\phi x = \varepsilon$ แรงอัดในคอนกรีตเหนือแกนสะเทินมีค่าเท่ากับ

$$C_c = \int_o^c f_c \, bdx$$

$$= bf'_c \int_o^c \left(\frac{2\phi x}{\varepsilon_o} - \frac{\phi^2 x^2}{\varepsilon_o^2}\right) dx$$

สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$C_c = bf'_c \frac{\phi}{\varepsilon_o} - c^2 \left|1 - \frac{\phi c}{3\varepsilon_o}\right| \tag{3-3}$$

โดยที่แนวแรงอัดลัพธ์ของคอนกรีตจะกระทำที่ระยะ $\bar{X}$ จากแกนสะเทิน

$$\bar{X}\, C_c = \int_o^c (f_c b dx) x$$

$$\bar{X} = c\left|\frac{8\varepsilon_o - 3\phi c}{12\varepsilon_o - 4\phi c}\right| \tag{3-4}$$

โดย C_c = แรงอัดลัพธ์ของบริเวณรับแรงอัดเหนือแกนสะเทิน

b = ความกว้างของหน้าตัดคาน

ϕ = มุมเบี่ยงเบน (Curvature)

c = ความลึกจากผิวบนรับแรงอัดถึงแกนสะเทินในคานคอนกรีต

$\bar{X}$ = ระยะจากแนวแรงอัดลัพธ์ถึงแกนสะเทิน

ในการวิเคราะห์ต้องทำการสมมุติระยะจากผิวบนรับแรงอัดถึงแกนสะเทินที่สอดคล้องกับความเครียดของเหล็กเสริมรับแรงดึง ณ จุดคลาก โดยในรูปที่ 3.2 และ 3.3 ให้ค่า $f_s = f_y$ หาขนาดของแรงอัดลัพธ์ว่าสมดุลย์กับแรงดึงในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงหรือไม่ ทำการลองผิดลองถูก (Trial and Error) จนกระทั่งได้สภาวะสมดุลย์ค่าโมเมนต์ดัด ณ จุดที่เหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงถึงจุดคลากจะสามารถหาได้โดย

เมื่อไม่มีเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

$$M_y = C_c(d - c + \bar{X}) \tag{3.5.1}$$

และเมื่อมีเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัดและ $\varepsilon'_s < \varepsilon'_y$

$$M_y = C_c(d - c + \bar{X}) + A'_s f'_s (d - d') \tag{3.5.2}$$

โดย M_y = โมเมนต์ดัด ณ จุดที่เหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงถึงจุดคลาก

d = ความลึกประสิทธิผลของคาน

f_s = หน่วยแรงดึงในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

f_y = หน่วยแรงดึงคลากในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

A'_s = พื้นที่ของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

f'_s, ε'_s = หน่วยแรงอัดและความเครียดของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

d' = ระยะจากผิวบนรับแรงอัดของคานถึงจุดศูนย์ถ่วงของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

f'_y, ε'_y = หน่วยแรงอัดคลากและความเครียดคลากของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

3.1.3 <u>โมเมนต์ดัดประลัย</u>

หลังจากเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงถึงจุดคลากแล้วแรงดึงในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงจะคงที่ ขณะที่โมเมนต์เพิ่มขึ้นแกนสะเทินจะยกตัวสูงขึ้นเพื่อเพิ่มระยะตั้งฉากระหว่างแรงดึงและแรงอัด การกระจายหน่วยแรงอัดจริงยังเป็นรูปพาราโบลา การวิเคราะห์จะใช้สมการที่ (3-3) และ (3-4) โดยให้ความเครียดที่ผิวบนรับแรงอัดของคานมีค่าประมาณ 0.003 ทำการสมมุติระยะจากผิวบนรับแรงอัดถึงแกนสะเทิน ตรวจสอบสภาวะสมดุลย์ของแรงจนได้สภาวะสมดุลย์ ค่าโมเมนต์ดัด ณ จุดประลัยจะหาได้โดย

เมื่อไม่มีเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

$$M_{uf} = C_c(d-c+\bar{x}) \qquad (3\text{-}6.1)$$

และเมื่อมีเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

$$\varepsilon'_s<\varepsilon'_y : M_{uf} = C_c(d-c+\bar{x}) + A'_s f'_s(d-d') \qquad (3\text{-}6.2)$$

$$\varepsilon'_s>\varepsilon'_y : M_{uf} = C_c(d-c+\bar{x}) + A'_s f'_y(d-d') \qquad (3\text{-}6.3)$$

โดย M_{uf} = โมเมนต์ดัดประลัย

ตามมาตรฐานของ ACI (318-83)[53] ได้กำหนดวิธีการหาค่ากำลังดัดประลัยของคานคอนกรีตเสริมเหล็กโดยการสมมุติการกระจายหน่วยแรงอัดในส่วนเหนือแกนสะเทินของคานคอนกรีตเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีความกว้างเท่ากับความกว้างของปีกคาน มีความลึก a และมีหน่วยแรงเฉลี่ยเท่ากับ 0.85 f'_c ดังรูปที่ 3.4 และกำหนดให้ความลึก a มีความสัมพันธ์ขึ้นอยู่กับกำลังอัดของคอนกรีต โดยกำหนดเอาไว้ว่า $a = \beta_1 c$ โดยที่ β_1 จะมีค่าเท่ากับ 0.85 เมื่อคอนกรีตมีค่ากำลังอัดน้อยกว่าหรือเท่ากับ 280 กก/ซม^2 และค่า β_1 จะถูกลดลงในอัตรา 0.05 ต่อ 70 กก/ซม^2 ที่เพิ่มขึ้นของกำลังอัด แต่จะไม่ลดลงอีกเมื่อ β_1 มีค่าเท่ากับ 0.65 คือเมื่อกำลังอัดมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 560 กก/ซม^2

สำหรับการกระจายหน่วยแรง ณ จุดประลัยของคานคอนกรีตเสริมเหล็กทำด้วยคอนกรีตกำลังสูงมาก Nedderman[36] ได้ทำการทดลองหาการกระจายหน่วยแรงโดยวิธีของ PCA (Portland Cement Association) และได้สรุปว่า ค่าอัตราส่วนระหว่างระยะจากผิวบนรับแรงอัดของคานถึงจุดที่แรงอัดลัพธ์กระทำต่อระยะจากผิวบนรับแรงอัดของคานถึงแกนสะเทิน (k_2) ควรมีค่าเท่ากับ 0.37 ซึ่งเท่ากับในคอนกรีตที่มีกำลังอัดต่ำ และจะไม่เปลี่ยนแปลงตามกำลังอัดของคอนกรีตที่เพิ่มขึ้น และค่าอัตราส่วนระหว่างหน่วยแรงอัดเฉลี่ยต่อหน่วยแรงอัดสูงสุดของแท่งคอนกรีตทรงกระบอกทดสอบ (k_1k_3) มีค่าเท่ากับ 0.58 สำหรับการสมมุติการกระจายหน่วยแรงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากรูปที่ 3.4 สมควรใช้ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงอัดเท่ากับ 0.77 f'_c แทน 0.85 f'_c $\beta_1 = 2k_2$ ดังนั้น $\beta_1 = 0.74$ และความเครียดสูงสุดที่ผิวรับแรงอัดของคานคอนกรีตเสริมเหล็กทำด้วยคอนกรีตกำลังสูงมากมีค่าเท่ากับ 0.003 ในงานวิจัยนี้การคำนวณโมเมนต์ดัดประลัยด้วยวิธีการกระจายหน่วยแรงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้จะใช้ตัวเลขของ Nedderman ซึ่งใช้ได้กับคานคอนกรีตเสริมเหล็กทำด้วยคอนกรีตกำลังสูงมาก

ก. <u>การวิเคราะห์หน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าเสริมเหล็กตามยาวรับแรงดึงสำหรับการวิบัติแบบแรงดึงเป็นหลัก</u> จากรูปที่ 3.5 เมื่อ $f_s = f_y$ และ $C = T$

$$0.77 f'_c ab = A_s f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.77 f'_c b}$$

$$M_{uf} = A_s f_y (d-0.5\ a)$$

$$M_{uf} = A_s f_y \left(d - \frac{0.65\ A_s f_y}{f'_c b}\right) \qquad (3\text{-}7)$$

โดย M_{uf} = โมเมนต์ดัดประลัย

A_s = พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

f_s = หน่วยแรงดึงของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

f_y = หน่วยแรงดึงคลากของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

d = ความลึกประสิทธิผลของคาน

f'_c = กำลังอัดประลัยของคอนกรีต

b = ความกว้างของคาน

a = ความลึกของการกระจายหน่วยแรงอัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

สำหรับการวิบัติแบบแรงอัดเป็นหลัก จากรูปที่ 3.5 เมื่อ $f_s < f_y$ และจากความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมคล้าย

$$\varepsilon_s = 0.003 \frac{(d-c)}{c}$$

$$f_s = 0.003 \frac{(d-c)}{c} E_s$$

จาก $a = \beta_1 c$

$$f_s = 0.003 \frac{(\beta_1 d-a)}{a} E_s$$

จาก $C = T$

$$0.77\ f'_c\ ba = 0.003 \frac{(\beta_1 d-a)}{a} E_s A_s$$

$$\left(\frac{0.77\, f'_c}{0.003\, E_s \rho}\right) a^2 + ad - \beta_1 d^2 = 0$$

$$M_{uf} = 0.77\, f'_c ba(d - 0.5a) \qquad (3\text{-}8)$$

โดย ε_s = ความเครียดในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

c = ความลึกจากผิวบนรับแรงอัดถึงแนวแกนสะเทิน

f_s = หน่วยแรงดึงในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

β_1 = a/c

E_s = โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

ρ = A_s/bd

สำหรับการวิบัติแบบสมดุลย์เมื่อ $\varepsilon_s E_s = f_y$ จากรูปที่ 3.5 เมื่อ $\varepsilon_s E_s = f_y$ และจากความสัมพันธ์สามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{f_y}{0.003\, E_s} = \frac{d - c_b}{c_b}$$

$$a_b = \frac{0.003\, E_s}{0.003 E_s + f_y} \beta_1 d$$

$$C = T$$

$$0.77\, f'_c a_b b = \rho_b b d f_y$$

$$\rho_b = \frac{0.77\, f'_c \beta_1}{f_y} \cdot \frac{0.003\, E_s}{0.003 E_s + f_y} \qquad (3\text{-}9)$$

โดย c_b = ระยะจากผิวบนรับแรงอัดถึงแกนสะเทินที่สภาวะวิบัติแบบสมดุลย์

a_b = ความลึกของการกระจายหน่วยแรงอัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สภาวะวิบัติแบบสมดุลย์

ρ_b = ปริมาณเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงที่สภาวะวิบัติแบบสมดุลย์

ข. <u>การวิเคราะห์หน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าเสริมเหล็กตามยาวรับแรงดึง</u>
<u>และแรงอัด</u>

ถ้าเหล็กเสริมตามยาวคลากหมด จากรูปที่ 3.6 เมื่อ $f_s = f_y$ และ $f'_s = f'_y$

จาก $$C_c + C_s = T$$

$$0.77\, f'_c ba + A'_s f'_y = A_s f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y - A'_s f'_y}{0.77 f'_c b}$$

จากสามเหลี่ยมคล้าย

$$\varepsilon'_s = 0.003\,\frac{a-\beta_1 d'}{a}$$

$$\varepsilon_s = 0.003\,\frac{\beta_1 d-a}{a}$$

ถ้า $0.003\,\frac{a-\beta_1 d'}{a} \geqslant \frac{f'_y}{E'_s}$ แล้ว $f'_s = f'_y$

และ $0.003\,\frac{\beta_1 d-a}{a} \geqslant \frac{f_y}{E_s}$ แล้ว $f_s = f_y$

ดังนั้นเมื่อเหล็กเสริมตามยาวทั้งหมดคลากคือ $f_s = f_y$ และ $f'_s = f'_y$

แล้ว $$M_{uf} = 0.77\, f'_c ba\left(d-\frac{a}{2}\right) + A'_s f'_y (d-d') \qquad (3\text{-}10)$$

และหากเสริมเหล็กตามยาวรับแรงอัดไม่คลากคือ $f_s = f_y$ และ $f'_s < f'_y$

แล้ว $$M_{uf} = 0.77\, f'_c ba\left(d-\frac{a}{2}\right) + A'_s f'_s (d-d') \qquad (3\text{-}11)$$

โดย f'_s = หน่วยแรงอัดในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

A'_s = พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

ε'_s = ความเครียดในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

f'_y = หน่วยแรงอัดคลากในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

d' = ระยะจากผิวบนรับแรงอัดถึงจุดศูนย์ถ่วงของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

3.1.4 ระยะการโก่งตัว

ระยะการโก่งตัวทันทีของคาน เมื่อได้รับน้ำหนักกระทำก่อนที่คานจะเกิดรอยแตกร้าวสามารถจะคำนวณได้จากเส้นโค้งยืดหยุ่นโดยสามารถแสดงความสัมพันธ์กับมุมเบี่ยงเบนได้โดยสมการดิฟเฟอเรนเชียลคือ

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \phi(x) \qquad (3\text{-}12.1)$$

โดย y = ระยะการโก่งตัวในแนวดิ่ง

x = ระยะทางตามความยาวของคาน

$\phi(x)$ = มุมเบี่ยงเบนที่ระยะ x

จากความสัมพันธ์ในทฤษฎียืดหยุ่น

$$\phi(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

ดังนั้น $$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{M(x)}{EI} \qquad (3\text{-}12.2)$$

โดย $M(x)$ = โมเมนต์ดัดที่ระยะ x

EI = ความแกร่งต่อแรงดัด (Flexural Rigidity)

จากความสัมพันธ์ในสมการ (3-12.2) โดยวิธี Conjugate Beam หรือวิธีอื่น ๆ สามารถจะคำนวณระยะการโก่งตัวที่กึ่งกลางคานภายใต้น้ำหนักกระทำแบบ Third Point Loading ดังรูปที่ 2.8 ได้สมการ

$$Y = \frac{Pa(3L^2-4a^2)}{48EI}$$

$$= \frac{111}{5488}\frac{PL^3}{EI} \qquad (3\text{-}13)$$

โดย P = น้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนคานเหล็ก

a = ช่วงแรงเฉือน

L = ความยาวช่วงคานระหว่างจุดรองรับ

E = โมดูลัสยืดหยุ่นของคาน

I = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจะขึ้นกับปริมาณการเสริมเหล็กในคาน ถ้าหน่วยแรงดึงในคานยังไม่เกินค่าโมดูลัสแตกร้าว ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจะใช้ค่า I_g โดย I_g คือค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดยังไม่แตกร้าวรอบแกนสะเทินไม่คิดพื้นที่แปลงจากเหล็กเสริมภายหลังที่คานเกิดรอยแตกร้าว ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจะลดลงตามหน้าตัดแตกร้าว โดยจะใช้ค่า I_{cr} ในขณะที่บางส่วนของคานที่โมเมนต์ดัดมีค่าต่ำยังไม่เกินรอยแตกร้าว ดังนั้น ACI (318-83)[53] ได้แนะนำให้ใช้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยประสิทธิผล, I_e ซึ่งมีค่าระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดแตกร้าวและยังไม่แตกร้าวซึ่งเสนอโดย Branson[34]

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left|1-\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right| I_{cr} \qquad (3\text{-}14)$$

โดย I_g = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดยังไม่แตกร้าวไม่คิดผลจากพื้นที่แปลงจากเหล็กเสริม

I_{cr} = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดแตกร้าวแปลง

M_a = โมเมนต์ดัดสูงสุดขณะที่คำนวณระยะการโก่งตัว

M_{cr} = โมเมนต์ดัดแตกร้าวในสมการ (3-1)

สำหรับคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในงานวิจัยนั้นค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดแตกร้าวแปลงจะสามารถหาได้เมื่อรู้ตำแหน่งของแกนสะเทินดังสมการ

สำหรับคานที่ไม่มีเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

$$k = \left|2n\rho+(n\rho)^2\right|^{\frac{1}{2}}-n\rho \qquad (3.15.1)$$

สำหรับคานที่มีเหล็กเสริมตามยาวรับแรงอัด

$$k = \left|(n\rho+n'\rho')^2+2(n\rho+n'\rho'\,\frac{d'}{d})\right|^{\frac{1}{2}}-n\rho-n'\rho' \qquad (3\text{-}15.2)$$

โดย k = ตัวคูณประกอบค่าความลึกประสิทธิผลเพื่อหาความลึกของแกนสะเทินจากผิวบนรับแรงอัด

n, n' = อัตราส่วน $\frac{E_s}{E_c}$ และ $\frac{E'_s}{E_c}$

E_s, E'_s = โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงและแรงอัดตามลำดับ

E_c = โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต

ρ, ρ' = ปริมาณการเสริมเหล็กตามยาวรับแรงดึงและแรงอัด

d, d' = ระยะของจุดศูนย์ถ่วงเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงและแรงอัดจากผิวบนรับแรงอัด

เมื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยประสิทธิผลจากมาตรฐานของ ACI (318-83) แล้วแทนค่าลงไปในสมการ (3-13) เพื่อหาค่าระยะการโก่งตัว เช่นเดียวกับในช่วงพฤติกรรมยืดหยุ่น

ในการคำนวณระยะการโก่งตัวของคานสามารถจะหาได้จากพฤติกรรมจริงของคานจากการกระจายหน่วยแรงอัดเหนือแกนสะเทินเป็นรูปพาราโบลาในหัวข้อ 3.1.2 และ 3.1.3 โดยการอินทิเกรตมุมเบี่ยงเบนตลอดความยาวจากจุดรองรับถึงจุดที่ต้องการคำนวณระยะการโก่งจากสมการ (3-12.1) จะสามารถหาระยะการโก่งตัวที่จุดใด ๆ ตลอดความยาวคานได้โดยในช่วงยืดหยุ่นจะให้การกระจายค่ามุมเบี่ยงเบนในช่วงแรงเฉือนเป็นแบบเส้นตรง โดยมีค่ามุมเบี่ยงเบนสูงสุดที่จุดที่น้ำหนักกระทำ และมุมเบี่ยงเบนในช่วงแรงคัดคงที่ตลอด ดังสมการ

$$\phi(x) = \frac{7\phi_{CL}\, x}{3L} \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3L}{7} \qquad (3\text{-}16.1)$$

$$= \phi_{CL} \qquad \text{เมื่อ} \quad \frac{3L}{7} \leqslant x \leqslant \frac{4L}{7} \qquad (3\text{-}16.2)$$

โดย ϕ_{CL} = มุมเบี่ยงเบนที่จุดกึ่งกลางคาน ณ น้ำหนักบรรทุกใด ๆ

$\phi(x)$ = มุมเบี่ยงเบนตามระยะจากจุดรองรับ

L = ความยาวช่วงคานระหว่างจุดรองรับ

x = ระยะตามความยาวคานจากจุดรองรับ

ส่วนการกระจายค่ามุมเบี่ยงเบนในช่วงแรงเฉือนสำหรับช่วงที่ไม่ยืดหยุ่นจะสมมุติให้เป็นแบบพาราโบลาหงาย โดยมีค่ามุมเบี่ยงเบนสูงสุดที่จุดที่น้ำหนักกระทำ และมุมเบี่ยงเบนในช่วงแรงดัดคงที่ตลอด ดังสมการ

$$\phi(x) = \frac{49\,\phi_{CL}\, x^2}{9L^2} \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3L}{7} \qquad (3\text{-}17.1)$$

$$= \phi_{CL} \qquad \text{เมื่อ} \quad \frac{3L}{7} \leqslant x \leqslant \frac{4L}{7} \qquad (3\text{-}17.2)$$

จากผลการอินทิเกรตสมการ (3-12.1) จะได้ค่าระยะการโก่งตัวที่กึ่งกลางคาน

$$Y_{CL} = \frac{37}{392}\,\phi_{CL} L^2 \qquad \text{ในช่วงยืดหยุ่น} \qquad (3\text{-}18.1)$$

$$= \frac{31}{392}\,\phi_{CL} L^2 \qquad \text{ในช่วงที่ไม่ยืดหยุ่น} \qquad (3\text{-}18.2)$$

3.2 การรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก

3.2.1 พฤติกรรมของแรงเฉือนในคาน

ก. หน่วยแรงเฉือนของคอนกรีต

คอนกรีตในโครงสร้างจะถูกกระทำโดยหน่วยแรงตั้งฉากและเฉือนในทิศทางต่าง ๆ ดังนั้นเมื่อพิจารณาสภาวะสมดุลย์ของแรงที่กระทำกับชิ้นส่วนของคอนกรีตสามารถที่จะแสดงให้เห็นได้ว่า หน่วยแรงร่วมสามารถที่จะลดลงมาอยู่ในรูปของสภาพหน่วยแรงตั้งฉาก (Principal Normal Stress) บนระนาบ 3 ระนาบที่ตั้งฉากกันโดยปราศจากหน่วยแรงเฉือนบนระนาบนั้น ถึงแม้จะมีการวิจัยอย่างกว้างขวางก็ยังคงไม่มีทฤษฎีที่น่าเชื่อถือสำหรับกำลังวิบัติของคอนกรีตในสภาวะหน่วยแรงทั้ง 3 ทิศทาง เพื่อความสะดวกจึงมีทฤษฎีทางกำลังวัสดุถูกดัดแปลงให้ได้ความแม่นยำที่น่าพอใจ

เมื่อให้หน่วยแรงกระทำบนระนาบเดียว หน่วยแรงตั้งฉากก็จะกระทำเพียง 2 ทิศทาง หน่วยแรงตั้งฉากหลักตัวที่สามมีค่าเท่ากับศูนย์ สภาวะดังกล่าวคือสภาวะหน่วยแรง 2 แกน Kupfer, Hilsdorf และ Rüsch[54] ได้เสนอความสัมพันธ์ของหน่วยแรงตั้งฉาก 2 แกน ดังรูปที่ 3.7 และสรุปว่า กำลังของคอนกรีตเมื่อถูกกระทำโดยหน่วยแรงอัด 2 แกนจะสูงกว่ากำลังเมื่อถูกกระทำโดยหน่วยแรงอัดแกนเดียวถึง 27 % และจะสูงกว่าเพียง 16 % เมื่อค่าหน่วยแรงอัดทั้ง 2 แกนมีค่าเท่ากัน แต่กำลังภายใต้หน่วยแรงดึง 2 แกนจะมีค่าประมาณเท่ากับกำลังรับแรงดึงเมื่อหน่วยแรงดึงแกนเดียวกระทำ อย่างไรก็ตามเมื่อคอนกรีตถูกหน่วยแรงกระทำทั้งดึงและอัดพร้อมกันหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัดที่สภาวะวิบัติจะลดลง บนระนาบที่ไม่ใช่ระนาบหน่วยแรงตั้งฉากหลักจะมีทั้งหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนกระทำ กำลังของคอนกรีตในสภาวะเช่นนี้สามารถใช้ทฤษฎีของ Mohr ในการทำนายกำลังเมื่อวิบัติได้[55] รูปที่ 3.8 จะแสดงกลุ่มของวงกลม Mohr ที่เป็นตัวแทนการวิบัติในสภาวะแรงดึงล้วน แรงอัดล้วนและแบบผสมโดยกลุ่มวงกลมดังกล่าวจะถูกสัมผัสด้วย Envelope Curve หน่วยแรงร่วมใด ๆ เมื่อวิบัติจะมีวงกลม Mohr มาสัมผัส Envelope Curve ดังกล่าว

โดยทั่วไปกำลังรับแรงอัดและกำลังรับแรงดึงของคอนกรีตมักจะทราบค่าจากการทดสอบแท่งคอนกรีตควบคุมชิ้นส่วนโครงสร้างอยู่แล้วจากค่ากำลังรับแรงอัดและกำลังรับแรง

ดึงสามารถที่จะหาค่ากำลังรับแรงเฉือนล้วนของคอนกรีตได้จากวงกลม Mohr โดยสมมุติให้ Envelope Curve แทนด้วยเส้นตรงดังรูปที่ 3.9 โดยวงกลม oA แทนสภาวะแรงดึงล้วน วงกลม oC แทนสภาวะแรงอัดล้วนและวงกลม oF แทนสภาวะแรงเฉือนล้วน หน่วยแรงเฉือนล้วนสามารถหาได้โดยทฤษฎีตรีโกณมิติคือ

จากวงกลม Mohr

$$oK = oF - KF$$

$$= \nu_{PS} - \frac{f_t}{2}$$

$$HL = HP - LP$$

$$= \frac{f'_c}{2} - \frac{f_t}{2}$$

$$\Delta GoK = \Delta GHL$$

$$\frac{oK}{HL} = \frac{Go}{GH}$$

$$\frac{(\nu_{PS} - \frac{f_t}{2})}{(\frac{f'_c}{2} - \frac{f_t}{2})} = \frac{\frac{f_t}{2}}{(\frac{f'_c + f_t}{2})}$$

$$\frac{2\nu_{PS} - f_t}{(f'_c - f_t)} = \frac{f_t}{(f'_c + f_t)}$$

$$2\nu_{PS} = \frac{f_t(f'_c - f_t)}{(f'_c + f_t)} + f_t$$

$$2\nu_{PS} = \frac{(f_t f'_c - f_t^2 + f_t f'_c + f_t^2)}{(f'_c + f_t)}$$

$$\nu_{PS} = \frac{f_t f'_c}{(f'_c + f_t)} \qquad (3-19)$$

เมื่อ ν_{PS} = กำลังรับแรงเฉือนล้วนของคอนกรีต

f_t = กำลังรับแรงดึงของคอนกรีต

f'_c = กำลังอัดประลัยของคอนกรีต

ในการวิเคราะห์ค่ากำลังรับแรงดึงในสภาวะแรงดึงล้วนของคอนกรีต ควรใช้ค่าของกำลังดึงแยกตัวของคอนกรีต ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับกำลังรับแรงดึงล้วนของคอนกรีตมากกว่าค่าโมดูลัสแตกร้าวของคอนกรีตซึ่งมีค่าสูงกว่ากำลังรับแรงดึงล้วน 4/3 เท่า[56]

และจากผลการทดสอบหาค่ากำลังรับแรงเฉือนล้วนของคอนกรีตกำลังสูงมาก สุพรรณ[30] พบว่า กำลังรับแรงเฉือนล้วนของคอนกรีตกำลังสูงมากมีค่าประมาณ 13 % ของกำลังอัดของคอนกรีตกำลังสูงมากและสมการแสดงความสัมพันธ์กำลังรับแรงเฉือนล้วนกับกำลังอัดของคอนกรีตกำลังสูงมากคือ

$$\nu_{PS} = 7.75\sqrt{f'_c} - 116 \qquad (3\text{-}20)$$

เมื่อ ν_{PS} = กำลังรับแรงเฉือนล้วนของคอนกรีตกำลังสูงมาก, กก/ซม^2

f'_c = กำลังอัดประลัยของคอนกรีตกำลังสูงมาก, กก/ซม^2

ข. <u>หน่วยแรงเฉือนและพฤติกรรมของคานคอนกรีต</u>

แรงเฉือนที่กระทำบนหน้าตัดหนึ่ง ๆ ของชิ้นส่วนโครงสร้างสามารถหาได้จากการพิจารณาหลักการสมดุลย์ (Equilibrium) และจากหลักการสมดุลย์ของชิ้นส่วนเล็ก ๆ จะเห็นได้ชัดว่า หน่วยแรงเฉือนในแนวราบและแนวดิ่งของชิ้นส่วนจะมีขนาดเท่ากับหน่วยแรงเฉือนในแนวราบของคานมีคุณสมบัติสม่ำเสมอทุกทิศทาง (Homogeneous and Isotropic) ที่ยังไม่แตกร้าว จากการสมดุลย์ของหน่วยแรงตัดภายในคานจะได้

ค่าหน่วยแรงเฉือนในแนวราบ

$$\nu = \frac{V A_i \bar{y}}{bI} \qquad (3\text{-}21)$$

$$q = \nu . b \qquad (3\text{-}22)$$

โดย ν = หน่วยแรงเฉือน

V = แรงเฉือนที่กระทำกับชิ้นส่วนโครงสร้างที่จุดนั้น

A_i = พื้นที่หน้าตัดจากผิวนอกคานถึงแนวที่พิจารณาหน่วยแรงเฉือน

$\bar{y}$ = ระยะจากแกนสะเทินถึงจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ A_i

b = ความกว้างของหน้าตัดคาน

I = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน

q = การไหลของแรงเฉือน

ค่าหน่วยแรงเฉือนในแนวราบจะมีค่าสูงสุดที่แกนสะเทินรวมทั้งจะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ผิวนอกรับแรงอัดและแรงดึง ดังรูปที่ 3.10

ณ จุดใดจุดหนึ่งใต้แกนสะเทินของคานคุณสมบัติสม่ำเสมอทุกทิศทางจะมีหน่วยแรงดึง, f_t และหน่วยแรงเฉือน, ν กระทำ จากชิ้นส่วนเล็ก ๆ โดยอาศัยหลักการสมดุลย์ของแรงที่กระทำ ดูรูปที่ 3.11 จะได้

$$f'_t\left(\frac{bdx}{\sin\alpha}\right) = f_t\left(\frac{bdx}{\tan\alpha}\right)\cos\alpha + \nu(bdx)\cos\alpha + \nu\left(\frac{bdx}{\tan\alpha}\right)\sin\alpha$$

$$\nu'\left(\frac{bdx}{\sin\alpha}\right) = f_t\left(\frac{bdx}{\tan\alpha}\right)\sin\alpha + \nu(bdx)\sin\alpha - \nu\left(\frac{bdx}{\tan\alpha}\right)\cos\alpha$$

แก้สมการข้างต้นจะได้

$$f'_t = \frac{1}{2} f_t(1+\cos 2\alpha) + \nu\sin 2\alpha$$

$$\nu' = \frac{1}{2} f_t\sin 2\alpha - \nu\cos 2\alpha$$

ค่าหน่วยแรงดึงหลัก (Principal Tensile Stress) $f_t(\max)$ สามารถหาได้จาก

$$f_t(\max) = \frac{1}{2} f_t + \sqrt{\left(\frac{1}{2} f_t\right)^2 + \nu^2} \qquad (3\text{-}23)$$

ค่าของมุมที่หน่วยแรงดึงหลักกระทำกับแนวราบ, α_{max} จะหาได้จากสมการ

$$\text{Tan } 2\alpha_{max} = \frac{2\nu}{f_t} \qquad (3\text{-}24)$$

จากสมการที่ (3-23) จะสังเกตได้ว่า ค่า f_t(max) จะมีค่าใกล้เคียงกับหน่วยแรงดึงในแนวราบเมื่อหน่วยแรงเฉือนมีค่าต่ำและจะมีทิศทางเกือบราบ ในทางกลับกันจะมีค่าใกล้เคียงกับหน่วยแรงเฉือนเมื่อค่าหน่วยแรงดึงในแนวราบมีค่าต่ำและจะมีทิศทางทำมุม 45^{0} กับแนวแกนคาน ดังรูปที่ 3.12(ข)

จากรูปที่ 3.13 แสดงให้เห็นว่าแรงในแนวราบจะส่งผ่านบริเวณแตกร้าวของหน้าตัดในอุดมคติ (Idealized) จะมีค่าคงที่ ดังนั้นค่าการไหลของแรงเฉือนในบริเวณรับแรงดึงจะมีค่าคงที่[40] โดยจากรูปที่ 3.10 ค่าแรงดึงที่เพิ่มขึ้นระหว่างหน้าตัดคือ

$$dT = \nu\ b\ dx$$

ดังนั้น $$\nu = \frac{1}{b} \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$dT = \frac{dM}{jd}$$

$$\nu = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{bjd}$$

$$= \frac{V}{bjd}$$

โดย
- dx = ระยะระหว่างหน้าตัดที่พิจารณา
- dT = ผลต่างของแรงดึงในเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงระหว่างหน้าตัด
- dM = ผลต่างของโมเมนต์ระหว่างหน้าตัด
- jd = แขนของแรงคู่ควบระหว่างแรงดึงและแรงอัดในหน้าตัดคาน
- d = ความลึกประสิทธิผลของหน้าตัดคาน

จากสมการข้างต้นเห็นได้ชัดว่า ค่าหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าขึ้นอยู่กับความกว้างของแผ่นตั้ง (Web) ด้วยเหตุที่ว่าคอนกรีตใต้แกนสะเทินสมมุติให้อยู่ในสภาวะแรงเฉือนล้วน (Pure Shear) สมการนี้ใช้เป็นเครื่องบอกขนาดของแรงดึงในแนวทะแยง (Diagonal Tension) ในบริเวณรับแรงดึงแตกร้าวของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก โดยค่าหน่วยแรงดึงหลักจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าหน่วยแรงเฉือนและมีทิศทางทำมุม 45^{0} กับแนวแกนคาน เพื่อความสะดวก ACI-ASCE Committee 326[57] จึงใช้สมการที่ง่ายเพื่อเป็นดรรชนี (Index) ในการบ่งถึงความเข้มของแรงเฉือนคือ

$$\nu = \frac{V}{bd} \qquad (3\text{-}25)$$

เมื่อค่าหน่วยแรงดึงหลักในรูปที่ 3.12(ก) มีค่าเกินกำลังรับแรงดึงของคอนกรีตจะเกิดการแตกร้าว โดยในบริเวณที่ค่าหน่วยแรงเฉือนสูงรอยแตกร้าวเฉียง (Inclined Crack) จะเกิดขึ้น โดยมากแล้วจะเกิดต่อจากรอยแตกร้าวดัด (Flexural Crack) การส่งผ่านแรงเฉือนในชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กจะเกิดขึ้นโดยกลไกต่าง ๆ ร่วมกันดังนี้[58] ดังรูปที่ 3.14

1. การต้านทานแรงเฉือนโดยคอนกรีตส่วนที่ยังไม่แตกร้าว V_{cz}
2. แรงขัดประสาน (Interlock Force) ของวัสดุมวลรวม V_a ซึ่งทำมุมสัมผัสกับรอยแตก ณ จุดใด ๆ
3. ปฏิกริยาเดือย (Dowel Action) เกิดจากความต้านทานแรงเฉือนโดยเหล็กเสริมตามยาว, V_d
4. ปฏิกริยา Arch (Arch Action) ในกรณีคานลึก (Deep Beams)

การเกิดรอยแตกร้าวเฉียงขึ้นอยู่กับขนาดของหน่วยแรงเฉือนและหน่วยแรงดึงดังที่กล่าวมาแล้ว โดยอาจแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\nu = c_1 \cdot \frac{V}{bd}$$

$$f_t = c_2 \cdot \frac{M}{bd^2}$$

$$\frac{f_t}{\nu} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{M}{Vd}$$

$$= c_3 \cdot \frac{M}{Vd}$$

โดย c_1, c_2, c_3 = ค่าคงที่

สำหรับคานช่วงเดียว (Simple Beam) รับน้ำหนักบรรทุกสมมาตร 2 จุด อัตราส่วน $\frac{M}{V}$ จะมีค่าคงที่เท่ากับช่วงแรงเฉือน (Shear Span) หรือสำหรับกรณีทั่วไป

$$a = \frac{M}{V}$$

$$\frac{f_t}{\nu} = c_3 . (\frac{a}{d}) \qquad (3\text{-}26)$$

จากงานวิจัยที่ผ่านมา (41,44,45,49,57,58) แสดงให้เห็นว่า ค่า a/d มีอิทธิพลต่อกำลังรับแรงเฉือนอย่างมาก ดังรูปที่ 3.15 (59)

คานที่มีค่า $a/d \leqslant 1.0$ เรียกว่า คานลึก ภายหลังที่เกิดรอยแตกร้าวแนวทแยงแล้วคานจะมีพฤติกรรมเหมือน Tied-Arch ซึ่งน้ำหนักจะถูกรับไปโดยแรงอัดโดยตรงสู่บริเวณที่แรเงาในรูปที่ 3.16(ก) และโดยแรงดึงในเหล็กเสริมตามยาว ภายหลังที่เกิดรอยร้าวแนวทแยงนั้นจะมีกำลังบางส่วนที่ยังคงเหลืออยู่ (Reserve) โดยชนิดของการวิบัติจะเป็นไปได้ดังรูปที่ 3.16(ข)

คานที่มีค่า $1.0 < a/d \leqslant 2.5$ เรียกว่าคานสั้น กำลังรับแรงเฉือน ณ จุดประลัยจะสูงกว่ากำลังเมื่อเกิดรอยแตกร้าวแนวทแยงเช่นเดียวกัน เมื่อน้ำหนักเพิ่มขึ้น โดยอาจจะมีรอยแตกร้าวขยายไปตามแนวเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึงในแนวราบ ชนิดของการวิบัติอาจเกิดขึ้นได้ดังรูปที่ 3.17(ก) หรือ 3.17(ข)

สำหรับความยาวปานกลางที่มีขนาด $2.5 < a/d \leqslant 6.0$ รอยแตกร้าวที่เกิดจะเริ่มต้นจากรอยแตกร้าวในแนวดิ่งเนื่องจากแรงดัดก่อน (Initiating Crack) แล้วจึงติดตามด้วยรอยแตกร้าวเฉือน-ดัดแนวทแยง (Inclined Flexural-Shear Crack) ดังรูปที่ 3.18 ทันทีที่เกิดรอยแตกร้าวแนวทแยงคานจะไม่สามารถกระจายน้ำหนักได้ใหม่ คือกล่าวได้ว่า การเกิดรอยแตกร้าวแนวแทยงแสดงถึงขีดความสามารถรับแรงเฉือนประลัยของคานความยาวปานกลาง เรียกว่าการวิบัติจากแรงดึงแนวทะแยง (Diagonal Tension Failure) ซึ่งเป็นคานที่ใช้ออกแบบโดยทั่วไป

คานที่มีค่า $a/d > 6.0$ เรียกว่าคานยาว การวิบัติจะเริ่มจากการคลากของเหล็กเสริมตามยาวและจบลงด้วยการแตกของคอนกรีตที่หน้าตัดที่มีค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด เป็นการวิบัติชนิดที่ขึ้นกับขนาดของโมเมนต์ดัดสูงสุดโดยที่ไม่มีผลกระทบจากขนาดของแรงเฉือนโดยตรง

3.2.2 กำลังรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กไม่เสริมเหล็กปลอก

ข้อบัญญัติในการออกแบบของ ACI จะพิจารณากำลัง ณ จุดที่เกิดรอยแตกร้าวแนวทแยงที่เกิดจากรอยแตกร้าวเฉือนดัด เป็นกำลังรับแรงเฉือนของคานที่ไม่มีเหล็กเสริมรับแรงเฉือน บนพื้นฐานทางเหตุผลเกี่ยวกับตัวแปรที่เกี่ยวข้องและจากผลการทดลองความสัมพันธ์ของตัวแปรสามารถหาได้โดยทางสถิติ [57]

สมมุติให้ความสามารถรับน้ำหนักได้จะสูงสุดเมื่อหน่วยแรงดึงหลักจากสมการ (3-23) มีค่าเท่ากับกำลังรับแรงดึงของคอนกรีต ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\sqrt{f'_c}$ แม้ว่าการกระจายหน่วยแรงอัดและหน่วยแรงดึงในหน้าตัดจะไม่สามารถระบุได้แน่นอนก็สามารถสมมุติให้หน่วยแรงดึงดัดแปรผันตามค่า E_c/E_s คูณกับหน่วยแรงดึงในเหล็กเสริมและค่า ν แปรผันตามค่าหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย สมมุติให้ค่า E_c แปรตามค่า $\sqrt{f'_c}$ และให้ V_n และ M_n คือค่าแรงเฉือนประลัยระบุและโมเมนต์ดัดประลัยระบุ ณ หน้าตัดใด ๆ

จากสมการ $\nu = c_1 \cdot \dfrac{V}{bd}$

$$\nu = c_1 \cdot \frac{V_n}{bd} \qquad (3\text{-}27)$$

หน่วยแรงดึงในเหล็กเสริมเป็นสัดส่วนกับค่า $M_n/A_s d$ ดังนั้นค่าหน่วยแรงดึงในคอนกรีตมีค่าเท่ากับ

$$f_t \alpha \frac{E_c f_s}{E_s} \alpha \frac{E_c M_n}{E_s A_s d} \alpha \frac{M_n \sqrt{f'_c}}{E_s A_s d} \alpha \frac{M_n}{bd^2}\left(\frac{\sqrt{f'_c}}{\rho E_s}\right)$$

จะได้ $$f_t = \frac{c_4}{E_s}\left(\frac{\sqrt{f'_c}}{\rho}\right)\frac{M_n}{bd^2} \qquad (c_4 = \text{ค่าคงที่}) \qquad (3\text{-}28)$$

กำลังรับแรงดึงของคอนกรีตสามารถแสดงในรูป

$$f_t(\max) = c_5 \sqrt{f'_c} \qquad (3\text{-}29)$$

แทนค่า (3-27), (3-28), (3-29) ลงในสมการ (3-23)

$$c_5\sqrt{f'_c} = \frac{V_n}{bd}\left|\frac{1}{2}\frac{c_4}{E_s}\frac{M_n}{V_n d}\frac{\sqrt{f'_c}}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{c_4}{E_s}\frac{M_n}{V_n d}\frac{\sqrt{f'_c}}{\rho}\right)^2 + c_1^2}\right|$$

$$\frac{V_n}{bd\sqrt{f'_c}} = c_5 \Bigg/ \left|\frac{1}{2}\frac{c_4}{E_s}\frac{M_n}{V_n d}\frac{\sqrt{f'_c}}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{c_4}{E_s}\frac{M_n}{V_n d}\frac{\sqrt{f'_c}}{\rho}\right)^2 + c_1^2}\right| \qquad (3\text{-}30)$$

โดย f'_c = กำลังอัดประลัยของคอนกรีต

E_c = ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต

E_s = ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

b = ความกว้างของหน้าตัดคาน

d = ความลึกประสิทธิผล

ρ = ปริมาณเหล็กเสริมตามยาว , $\frac{A_s}{bd}$

A_s = พื้นที่หน้าตัดเหล็กเสริมตามยาวรับแรงดึง

c_1, c_4, c_5 = ค่าคงที่

จากสมการ (3-30) ตัวแปรที่เกี่ยวข้องคือ $V_n/(bd\sqrt{f'_c})$ และ $M_n\sqrt{f'_c}/(E_s\rho V_n d)$ โดยทั้ง 2 ตัวแปรเป็นจำนวนที่ไร้มิติ เพราะค่า $\sqrt{f'_c}$ พิจารณาให้เป็นค่าแรงต่อพื้นที่ จากการศึกษาโดยทางสถิติ แรงเฉือนประลัยระบุ นิยามให้เป็นแรงที่ทำให้เกิดรอยแตกร้าวแนวทแยงวิกฤติ และ M_n คือโมเมนต์ที่ยอดของรอยแตกร้าวเริ่มแรก (Initiating Crack) จากผลการทดลอง 440 ครั้ง[57] ความสัมพันธ์ข้างต้นสามารถแสดงโดย

$$\frac{V_n}{bd\sqrt{f'_c}} = 0.5 + 176\,\frac{\rho V_n d}{M_n\sqrt{f'_c}} \leq 0.93 \qquad (3\text{-}31)$$

โดยที่ $\frac{M_n}{V_n} = \left(\frac{M_{max}}{V} - d\right)$ แต่ต้องไม่น้อยกว่า $\left(\frac{M_{max}}{V} - \frac{a}{2}\right)$

ผู้วิจัยหลายท่าน[42,45,47,58] ยอมรับสมการ (3-31) ว่าสามารถคำนวณน้ำหนัก ณ จุดที่เกิดรอยแตกร้าวเฉือน-ตัด โดยเฉพาะค่า $M_n/V_n d$ หรือ a/d มีค่า

ระหว่าง 2.5 ถึง 6.0 และจะให้ค่าที่อนุรักษ์เมื่อ $M_n/V_n d$ มีค่าต่ำ

ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1963 ข้อบัญญัติของ ACI ก็ได้ใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ (3-31) โดย ACI-ASCE Committee 326[57] เป็นกำลังรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่ไม่เสริมเหล็กปลอก, V_c จนกระทั่งปัจจุบัน

สมการ (11-6) ของ ACI (318-83)[53]

$$V_c = (0.5\sqrt{f'_c} + 176\,\rho\,\frac{Vd}{M})\,bd \leq 0.93\,b\,d\,\sqrt{f'_c} \qquad (3\text{-}32)$$

และ $\frac{Vd}{M} \leq 1.0$

หรือสมการ (11-3) ของ ACI (318-83)[53] ซึ่งเป็นสมการที่ง่ายและมีค่าที่อนุรักษ์ (Conservative) กว่า

$$V_c = (0.53\sqrt{f'_c})bd \qquad (3\text{-}33)$$

Rajagapolan และ Ferguson[42] ได้ทดสอบคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 10 ตัว ไม่เสริมเหล็กปลอก โดยมี ρ ระหว่าง 0.0173 และ 0.0025 และนำผลการทดลองคานอีก 27 ตัว ที่มี ρ น้อยกว่า 0.012 จากแหล่งอื่นมาวิเคราะห์ โดยคานทั้งหมดมีค่า a/d มากกว่า 2.75 สรุปได้ว่า สมการ (3-31) ไม่ให้ค่าที่อนุรักษ์ (Unconservative) เมื่อปริมาณเหล็กเสริมตามยาวมีค่าน้อยกว่า 1.0 %

Zsutty[45] กล่าวว่า สมการ (3-31) ที่ใช้ทั่วไปในการทำนายกำลังรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กเป็นตัวทำนายที่ไม่สมบูรณ์ต่อพฤติกรรมจริง ๆ ของผลการทดลองคาน ซึ่งเนื่องมาจากหนึ่ง การประเมินค่าคงที่ A = 0.5 และ B = 176 โดยการใช้ข้อมูลจากการทดลองเป็นตัวแทนพฤติกรรมของคาน 2 แบบคือ Arch Action และ Beam Action สอง สูตรหน่วยแรงหลักตามทฤษฎีของพฤติกรรมการแตกร้าวจากแรงเฉือนไม่ได้เป็นตัวแทนเฉพาะของคุณสมบัติของคาน (f'_c , ρ) ซึ่งครอบคลุมกำลังรับแรงเฉือน

Zsutty จึงได้ใช้วิธีการวิเคราะห์การถดถอยทางสถิติ (Statistical Regression Analysis) ไปใช้กับข้อมูลการทดลองการเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่มีอยู่แล้วในการหาสูตรจากการทดลอง (Empirical Formula) สำหรับคานที่มีค่า a/d มากกว่า 2.5 วิธีการดังกล่าวทำให้ได้สมการทำนายค่าหน่วยแรงเมื่อวิบัติในรูปของ $\nu = k(f'_c \rho d/a)^{1/3}$ สำหรับการเฉือนแตกร้าวและการเฉือนจากแรงดึงทะแยงในทันทีทันใด ซึ่งสมการนี้ทำให้ได้ค่าความผิดพลาดในการทำนายมีค่าน้อยสำหรับช่วงกว้างของคุณสมบัติต่าง ๆ ของคานและแหล่งทดลอง แต่สำหรับหน่วยแรงของการวิบัติจากแรงเฉือนที่สูงกว่าของคานที่มีค่า a/d < 2.5 จะได้ค่าขีดจำกัดต่ำสุดเมื่อใช้สมการการทำนายของคานชลูด (Slender Beam) โดยสมการที่ได้คือ

กำลังรับแรงเฉือน ณ จุดที่เกิดรอยแตกร้าวทะแยงเริ่มต้น

$$V_c = 10.05 \left(\frac{f'_c \rho d}{a}\right)^{1/3} bd \qquad (3\text{-}34)$$

กำลังรับแรงเฉือนเมื่อเกิดการวิบัติในทันทีทันใดโดยแรงดึงในแนวทะแยง

$$V_{DT} = 10.41 \left(\frac{f'_c \rho d}{a}\right)^{1/3} bd \qquad (3\text{-}35)$$

กำลังรับแรงเฉือนประลัย

$$V_{uo} = 10.80 \left(\frac{f'_c \rho d}{a}\right)^{1/3} bd \qquad (3\text{-}36)$$

สำหรับคานที่ a/d < 2.5 และน้ำหนักกระทำโดยตรง Zsutty[60]

เสนอสมการ $$V_{uo} = 10.22\left(\frac{f'_c \rho d}{a}\right)^{1/3} bd\left(\frac{2.5}{a/d}\right) \qquad (3\text{-}37)$$

เมื่อมีการนำคอนกรีตกำลังสูงมาใช้ในงานก่อสร้างมากขึ้น ความจำเป็นในการตรวจสอบวิธีการออกแบบเกี่ยวกับแรงเฉือนก็เกิดขึ้น Hiranmas[48] ได้ทำการทดสอบคาน 12 ตัว และสรุปว่า สมการที่ (11-4) ของ ACI (318-71) ให้ค่าหน่วยแรงเฉือนระบุที่อนุรักษ์เกินไป ค่าคงที่ 176 ในสมการ (11-4) ควรแทนด้วยค่าในช่วง 896-1318 สำหรับ ρ = 2 % และ 799-1741 สำหรับ ρ = 1 % แต่ก็ยังกล่าวว่าข้อมูลที่ได้จากการทดลองยังน้อยเกินไปสำหรับการหาค่าที่จะมาแทนค่าคงที่ 176 ในสมการที่ (11-4) ของ ACI (318-71), Frantz กับ

Mphonde[49] ก็ได้ทดสอบความเป็นไปได้ดังกล่าว และได้สมการถดถอยจากการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อใช้ในการทำนายค่ากำลังรับแรงเฉือนประลัย เมื่อ $a/d = 3.6$

$$V_{uo} = (0.40\sqrt{f'_c} + 9.49)\,bd \qquad (3\text{-}38)$$

หรือ

$$V_{uo} = (1.72\sqrt[3]{f'_c} + 4.99)\,bd \qquad (3\text{-}39)$$

Elzanaty, Nilson และ Slate[61] ทำการทดสอบคานคอนกรีตเสริมเหล็ก 18 คาน โดยใช้คอนกรีตที่มีกำลังอัดประลัยประมาณ 211-844 กก/ซม^2 รวมทั้งมีปริมาณเหล็กเสริมตามยาวและอัตราส่วนช่วงแรงเฉือนต่อความลึกประสิทธิผลเป็นตัวแปร สรุปว่า สำหรับคานที่ไม่เสริมเหล็กปลอก สมการที่ (11-6) ของ ACI (318-83)[53] จะให้ค่ากำลังรับแรงเฉือนมากเกินไปประมาณ 10-30 % โดยเฉพาะเมื่อกำลังของคอนกรีตสูงมากในช่วงอัตราส่วนช่วงแรงเฉือนปกติถึงสูง เมื่อปริมาณเหล็กเสริมตามยาวมีค่าน้อยมาก Ahmad, Khaloo และ Poveda[62] ทดสอบคาน 36 ตัว โดยมีตัวแปรเช่นเดียวกับของ Elzanaty[61] แต่กำลังอัดประลัยมิใช่ตัวแปรหลักโดยอยู่ในช่วง 633-703 กก/ซม^2 จากผลการทดสอบระบุว่า สำหรับคานชลูดที่ทำจากคอนกรีตกำลังสูงและมีปริมาณการเสริมเหล็กตามยาวต่ำจะให้ค่าอัตราส่วนกำลังรับแรงเฉือนจากการทดลองต่อกำลังรับแรงเฉือนโดยสมการที่ (11-6) ของ ACI (318-83) ลดลงเหลือประมาณ 1.0 และสมการดังกล่าวยังให้ค่าที่คิดถึงผลกระทบจากปริมาณการเสริมเหล็กตามยาวต่ำเกินไป ส่วนคานสั้น ($1< a/d<2.5$) ข้อบัญญัติของ ACI (318-83) จะให้ค่าที่อนุรักษ์เกินไป และจากผลการทดสอบ เขาได้เสนอสมการในการคำนวณกำลังรับแรงเฉือนประลัยโดยคำนึงถึงผลกระทบจากความลึกที่ต่างกัน เมื่อมีอัตราส่วน a/d เท่ากัน ได้สมการ

$$V_{uo} = \eta\left|8.52\left(\frac{f'_c\,\rho d}{a}\right)^{1/3}\right|bd \qquad (3\text{-}40)$$

โดย $\eta = 1-0.0187\left|(d-13.59)^{0.85}/(a/d)^{0.63}\right|$

สำหรับ $3 \leqslant a/d \leqslant 6$

3.2.3 กำลังรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่เสริมเหล็กปลอก

การเสริมเหล็กในแกนตั้งเพื่อรับแรงเฉือนไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนพื้นฐานกลไกของความต้านทานแรงเฉือน จากชิ้นส่วนคอนกรีตยื่นแรงยึดเหนี่ยว ΔT ซึ่งต้านทานโดยการรวมกันของปฏิกริยาขัดกันของมวลรวม (Aggregate Interlock) ปฏิกริยาเดือย (Dowel Action) และโมเมนต์ดัดที่ฐานคอนกรีตมีแรงยึดเหนี่ยว ΔT สามารถต้านทานได้โดยปฏิกริยาโครงข้อหมุน (Truss Action) โดยคอนกรีตยื่นทำหน้าที่เป็นชิ้นส่วนรับแรงอัดในแนวทะแยง

เหล็กปลอกช่วยในกลไกการรับแรงเฉือนโดย

1. ช่วยเพิ่มแรงเฉือนที่ปฏิกริยาเดือยจะรับได้ โดยรองรับเหล็กเสริมตามยาว ที่ถูกรอยแตกร้าวตัดผ่าน(58)
2. ลดค่าหน่วยแรงดึงดัดภายใน ส่วนคอนกรีตยื่น โดยแรงอัดแนวทะแยง C_d
3. จำกัดความกว้างของรอยแตกร้าวในแนวทะแยงโดยการโอบ (Enhancing) และรักษาแรงเฉือนที่รับโดยการขัดกันของมวลรวม รวมทั้งลดปริมาณการแทงลึกเข้าไปในบริเวณรับแรงอัด ดังนั้นพื้นที่ที่ยังไม่แตกร้าวก็จะมีมากขึ้น(58)
4. ป้องกันการวิบัติจากแรงยึดเหนี่ยว เมื่อเกิดรอยแตกร้าวแยกที่เกิดขึ้นในบริเวณยึดรั้ง (Anchorage Zone) เนื่องจากปฏิกริยาเดือยและแรงยึดรั้ง
5. รับแรงเฉือนส่วนที่เกินจากกำลังรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่ไม่เสริมเหล็กปลอกโดยตรง(58)

กลไกของโครงข้อหมุนอุปมัยจะเริ่มขึ้นภายหลังการเกิดรอยแตกร้าวในแนวทะแยงเท่านั้น การอุปมาให้การรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่เสริมเหล็กปลอกเป็นแบบโครงข้อหมุน ได้ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Mörsch(40) ซึ่งสมมุติให้มุมที่รอยแตกร้าวแนวทแยงทำมุมกับแกนคานมีค่า 45^{0}

โครงข้อหมุนอุปมัย (Analogous Truss) จะเห็นได้ดังรูปที่ 3.20

จากสมดุลย์ ณ จุด x จะได้

$$V_s = C_d \sin \gamma$$

$$= T_s \sin \beta$$

ระยะเรียงของเหล็กปลอกจากเรขาคณิต

$$S = jd(\cot \gamma + \cot \beta)$$

ดังนั้นแรงในเหล็กปลอกต่อความยาวคือ

$$\frac{T_s}{S} = \frac{V_s}{jd \sin \beta(\cot \gamma + \cot \beta)}$$

$$= \frac{A_\nu f_s}{S}$$

เพื่อให้ได้กำลังในอุดมคติ เหล็กเสริมปลอกจะยืดจนถึงจุดคลาก $f_s = f_{yw}$ และ $jd \simeq d$

$$V_s = \frac{A_\nu f_{yw} d}{S} \sin \beta \ (\cot \gamma + \cot \beta) \qquad (3\text{-}41)$$

สมมุติให้แรงอัดในแนวทะแยง C_d มีค่าหน่วยแรงสม่ำเสมอจะได้

$$f_{cd} = \frac{C_d}{b\ S'}$$

$$S' = S \sin \gamma$$

$$= jd \sin \gamma \ (\cot \gamma + \cot \beta)$$

ดังนั้น

$$f_{cd} = \frac{V_s}{b\ d \sin^2 \gamma(\cot \gamma + \cot \beta)} \qquad (3\text{-}42)$$

โดย V_s = แรงเฉือนที่เหล็กปลอกรับได้

C_d = แรงภายในตัวค้ำยันรับแรงอัดในแนวทะแยง

γ = มุมที่รอยแตกร้าวทำกับแนวราบ

β = มุมที่เหล็กปลอกทำกับแนวราบ

T_s = แรงลัพธ์ของเหล็กปลอกทั้งหมด

S = ระยะเรียงของเหล็กปลอกตามแนวราบ

A_ν = พื้นที่เหล็กปลอกเรียงในระยะ S

f_s = หน่วยแรงดึงในเหล็กปลอก

f_{yw} = กำลังคลากของเหล็กปลอก

S' = ความลึกประสิทธิผลของตัวค้ำยันในโครงข้อหมุนอุปมัย

จากกลไกการรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กไม่เสริมเหล็กปลอกและกลไกของโครงข้อหมุนในการรับแรงเฉือนของเหล็กปลอก สามารถทำการรวมกัน (Superimposed) ระหว่างปฏิกิริยาทั้ง 2 แบบ ได้กำลังรับแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่เสริมเหล็กปลอก โดยเมื่อคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่เสริมเหล็กปลอกถึงจุดวิบัติ ความเครียดของเหล็กปลอกจะถึงจุดคลาก จากสมการ (3-41) เมื่อเหล็กปลอกตั้งฉากกับความยาวคานและสมมุติให้รอยแตกร้าวแนวทแยงทำมุม 45^0 กับความยาวคาน

$$V_u = V_c + V_s$$

$$= V_c + \frac{A_\nu f_{yw} d}{S} \qquad (3\text{-}43.1)$$

หรืออยู่ในรูป $\nu_u = \nu_c + r\, f_{yw}$ (3-43.2)