บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล ได้แก่ วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียว วิธีการทำให้เรียบเอกซโพเนนเชียลแบบปรับอัตราส่วน วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลสองพารามิเตอร์ของ Holt และวิธีการหาค่าพยากรณ์ร่วมโดยการให้น้ำหนักแก่วิธีการพยากรณ์ดังกล่าว ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาวิธีการหาค่าพยากรณ์ร่วมด้วยวิธีการให้เฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีการของ Bates,Granger และ Newbold(BGN 's Method) และวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด (Least Absolute Value Method) เปรียบเทียบกับวิธีการให้น้ำหนักที่เท่ากัน(Simple Average Method)

1. วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล (Exponential Smoothing Method)

วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูล (Average) และวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average) เป็นวิธีการให้น้ำหนักแก่ข้อมูลในอดีตเท่ากันหมดทุกตัว แต่ว่าข้อมูลอนุกรมเวลาส่วนใหญ่ข้อมูลใกล้เวลาปัจจุบันมีอิทธิพลหรือมีความสำคัญมากกว่าข้อมูลที่ห่างไกลจากปัจจุบัน ดังนั้นการเฉลี่ยข้อมูลโดยกำหนดน้ำหนักหรือให้ความสำคัญกับข้อมูลที่อยู่ปัจจุบันมากที่สุด และลดลงเรื่อยๆแบบเรขาคณิตสำหรับข้อมูลที่อยู่ห่างไกลออกไปน่าจะเหมาะสมมากกว่า วิธีดังกล่าวนี้มีชื่อเรียกทั่วไปว่า วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล

1.1 วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียว (Single Exponential Smoothing Method)

วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีลักษณะการเคลื่อนไหวในระดับค่าเฉลี่ย โดยมีตัวแบบคือ

$$Y_t = a + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots,n$$

โดยที่ a คือ ระดับหรือค่าเฉลี่ยของข้อมูล

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

และค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียวคือ

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

เมื่อ

S_t คือ ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลครั้งเดียวที่เวลา t

α คือ ค่าคงที่ปรับให้เรียบ

ประมาณค่า a ที่เวลา t (ใช้สัญลักษณ์ $\hat{a}_t$) คือ

$$\hat{a}_t = S_t$$

ค่าพยากรณ์ที่เวลา t+1 คือ

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{a}_t = S_t \qquad , t = 1, 2, \ldots, n$$

ค่าพยากรณ์ล่วงหน้า k คาบเวลา คือ

$$\hat{Y}_{n+k} = S_n \qquad , k = 1, 2, \ldots$$

การเลือกใช้วิธีการพยากรณ์นี้ จะต้องทราบค่าเริ่มต้นการทำให้เรียบ S_0 และค่าคงที่ปรับให้เรียบ α การกำหนดค่า S_0 ว่าควรมีค่าเป็นเท่าไรสามารถทำได้หลายวิธี เช่น ใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่มีอยู่(Brown,1963, and Montogomery and Johnson,1976, Quoted in Abarham and Ledolter,1983) หรือใช้ข้อมูลตัวแรกเป็นค่าเริ่มต้น (Makridakis and Whellwright,1978) และในทางปฏิบัติทั่วไปการกำหนดค่า α จะเลือกค่า α ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0.01 และ 0.3(Bowerman and O'Connell,1993) หรือเลือกใช้ค่า α ที่ให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลาต่ำสุด สำหรับในการวิจัยครั้งนี้กำหนดค่า S_0 เท่ากับค่าเฉลี่ยของข้อมูล และค่า α เลือกใช้ค่าที่อยู่ในช่วง 0 ถึง 0.99 เพิ่มค่าทีละ 0.01 ที่ให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ต่ำสุด

1.2 วิธีการทำให้เรียบเอกซโพเนนเชียลแบบปรับอัตราส่วน (Adaptive Response Rate Exponential Smoothing Method)

หรือมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลของ Trigg และ Leach (Trigg and Leach's Exponentail Smoothing Method) เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวอยู่ในระดับค่าเฉลี่ย วิธีนี้แตกต่างจากวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียว ตรงที่ค่าปรับให้เรียบจะเปลี่ยนไปตามคาบเวลา t เมื่อข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลง โดยที่ค่าปรับ

ให้เรียบเวลา t (α_t) จะขึ้นอยู่กับความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ ณ เวลา t-1 โดยมีตัวแบบคือ

$$Y_t = a + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots,n$$

โดยที่ a คือ ระดับหรือค่าเฉลี่ยของข้อมูล

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียวแบบปรับอัตราส่วนคือ

$$S_t = \alpha_t Y_t + (1-\alpha_t)S_{t-1}$$

$$\hat{Y}_{t+1} = S_t \quad , t = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ

S_t คือ ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียว ที่เวลา t

α_t คือ ค่าปรับให้เรียบ ที่เวลา t

โดยที่ค่า α_t หาได้จาก

$$\alpha_t = |E_t / M_t|$$

$$E_t = \beta e_t + (1-\beta)E_{t-1}$$

$$M_t = \beta|e_t| + (1-\beta)M_{t-1}$$

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

เมื่อ

e_t คือ ค่าความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ ที่เวลา t

β คือ ค่าคงที่ที่กำหนดน้ำหนักของความคลาดเคลื่อน

E_t คือ ค่าการทำให้เรียบของค่าความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ ที่เวลา t

M_t คือ ค่าการทำให้เรียบของค่าสัมบูรณ์ของค่าความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ที่เวลา t

ประมาณค่า a ที่เวลา t (ใช้สัญลักษณ์ $\hat{a}_t$) คือ

$$\hat{a}_t = S_t$$

ค่าพยากรณ์ที่เวลา t+1 คือ

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{a}_t = S_t \quad , t = 1, 2, \ldots, n$$

ค่าพยากรณ์ล่วงหน้า k คาบเวลา คือ

$$\hat{Y}_{n+k} = S_{n+k-1}$$

$$S_{n+k} = \alpha_n Y_n + (1-\alpha_n)S_{n+k-1} \quad , k = 1, 2, \ldots$$

กำหนดค่าปรับให้เรียบของความคลาดเคลื่อน β เท่ากับ 0.2 กำหนดค่าปรับให้เรียบเริ่มต้น α_2 เท่ากับ 0.1 และกำหนดค่าเริ่มต้น S_1 เท่ากับข้อมูลตัวแรก (Bowerman and O'Connell,1993)

1.3 วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง (Double Exponential Smoothing Method)

มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลเชิงเส้นหนึ่งพารามิเตอร์ของบราวน์ (Brown's One-Parameter Linear Exponential Smoothing Method) วิธีการนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวในลักษณะแนวโน้มเชิงเส้นตรง โดยมีตัวแบบคือ

$$Y_t = a + bt + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots,n$$

โดยที่ a คือ ระดับหรือค่าเฉลี่ยของข้อมูล

b คือ ความชันหรือองค์ประกอบเชิงเส้น

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งคือ

$$S_t'' = \alpha S_t + (1-\alpha)S_{t-1}''$$

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

เมื่อ

S_t'' คือ ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งที่เวลา t

S_t คือ ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียวที่เวลา t

α คือ ค่าคงที่ที่กำหนดน้ำหนักของการเฉลี่ย

ประมาณค่า a และ b ที่เวลา t ด้วย $\hat{a}_t$ และ $\hat{b}_t$ ตามลำดับ สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชั่นของค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งดังนี้

$$\hat{a}_t = 2S_t - S_t''$$

$$\hat{b}_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t - S_t'')$$

ค่าพยากรณ์ที่เวลา t+1 คือ

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \quad , t = 1, 2, \ldots, n$$

ค่าพยากรณ์ล่วงหน้า k คาบเวลา คือ

$$\hat{Y}_{n+k} = \hat{a}_n + \hat{b}_n k \quad , k = 1, 2, \ldots$$

การกำหนดค่าเริ่มต้นของ S_0 และ S_0'' ทำได้หลายวิธี วิธีที่ง่ายที่สุดคือใช้ข้อมูลตัวแรกประมาณค่า S_0 และ S_0'' หรืออาจจะพิจารณาจากตัวแบบของการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งซึ่งประกอบด้วยสองสมการดังต่อไปนี้

$$S_0 = a_0 - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} b_0 \qquad (1)$$

$$S_0'' = a_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_0 \qquad (2)$$

การจะประมาณค่าเริ่มต้น S_0 และ S_0'' จากสมการ (1) และ (2) ได้จะต้องทราบค่า a_0 และ b_0 เนื่องจากตัวแบบการพยากรณ์โดยใช้การใช้ทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งเป็นตัวแบบเชิงเส้นในลักษณะปรับรูปตามคาบเวลา ดังนั้นอาจจะกำหนดค่า a_0 และ b_0 ได้โดยนำข้อมูลทั้งหมดมาหาค่ากำลังสองน้อยที่สุด เมื่อเทียบกับตัวแบบเชิงเส้นจะได้ว่า

$$b_0 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} tY_t - \sum_{t=1}^{n} Y_t \sum_{t=1}^{n} t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n} - b_0 \frac{\sum_{t=1}^{n} t}{n}$$

เมื่อ t คือ คาบเวลา

Y_t คือ ข้อมูล หรือค่าสังเกตที่เวลา t

สำหรับการวิจัยครั้งนี้กำหนดค่าเริ่มต้นของ S_0 และ S_0'' จะคำนวณจากสมการ (1) และ (2) ตามลำดับ และหาค่าเริ่มต้น a_0 และ b_0 จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด และเลือกใช้ค่า α ที่อยู่ในช่วง [0.01, 0.99] ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด

1.4 วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลสองพารามิเตอร์ของ Holt (Holt's Exponential Smoothing Method)

วิธีนี้ดัดแปลงมาจากวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวแบบแนวโน้มเชิงเส้นตรง โดยมีตัวแบบคือ

$$Y_t = a + bt + \varepsilon_t \qquad , \quad t = 1,2,\ldots,n$$

โดยที่ a คือ ระดับหรือค่าเฉลี่ยของข้อมูล

b คือ ความชันหรือองค์ประกอบเชิงเส้น

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลสองพารามิเตอร์ของ Holt คือ

$$\hat{a}_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1})$$

$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}$$

เมื่อ

$\hat{a}_t$ คือ ค่าการทำให้เรียบของค่าคงที่ ที่เวลา t

$\hat{b}_t$ คือ ค่าการทำให้เรียบของความชัน ที่เวลา t

α คือ ค่าคงที่ที่กำหนดน้ำหนักของค่าคงที่

β คือ ค่าคงที่ที่กำหนดน้ำหนักของความชัน

ประมาณค่า a และ b ที่เวลา t ด้วย $\hat{a}_t$ และ $\hat{b}_t$ ตามลำดับ

ค่าพยากรณ์ที่เวลา t+1 คือ

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \qquad , t = 1, 2, \ldots, n$$

ค่าพยากรณ์ล่วงหน้า k คาบเวลา คือ

$$\hat{Y}_{n+k} = \hat{a}_n + \hat{b}_n k \qquad , k = 1, 2, \ldots$$

การเลือกใช้วิธีการพยากรณ์นี้ ต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของค่าการทำให้เรียบของค่าคงที่ $\hat{a}_1$ และค่าการทำให้เรียบของความชัน $\hat{b}_1$ และค่าคงที่ปรับให้เรียบของค่าคงที่และความชัน (α,β) ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้กำหนดค่า $\hat{a}_1$ เท่ากับข้อมูลตัวแรก และค่า $\hat{b}_1$ เท่ากับผลต่างของข้อมูลตัวที่สองกับข้อมูลตัวแรก (Makridakis and Whellwright,1989) และเลือกใช้ค่า α และ β ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0.01 ถึง 0.99 เพิ่มค่าทีละ 0.01 ที่ให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ต่ำสุด

2. การหาค่าพยากรณ์ร่วม(Combined Forecasts)

$$CF_t = \sum_{j=1}^{m} W_j \hat{Y}_{jt}$$

โดยที่ W_j คือ ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของวิธีการพยากรณ์ที่ j

$\hat{Y}_{jt}$ คือ ค่าพยากรณ์ของวิธีพยากรณ์ที่ j ที่คาบเวลาที่ t

j คือ วิธีพยากรณ์ที่ j ; j = 1, 2, ..., m

t คือ คาบเวลา ; t = 1, 2, ..., n

2.1 วิธีการให้น้ำหนักที่เท่ากัน (Simple Average Method)

วิธีนี้ให้ความสำคัญแก่วิธีการพยากรณ์ที่นำมารวมกัน ด้วยน้ำหนักเท่ากัน มีสูตรในการคำนวณดังนี้

$$W_j = \frac{1}{m}$$

โดยที่ W_j คือ ค่าเฉลี่ยน้ำหนักของวิธีการพยากรณ์ที่ j

m คือ จำนวนวิธีการพยากรณ์ที่นำมารวมกัน

2.2 วิธีการของ Bates, Granger และ Newbold (BGN's Method)

หลักการของวิธีนี้ คือให้น้ำหนักแก่วิธีการพยากรณ์ที่นำมารวมกัน ขึ้นกับสัดส่วนของส่วนกลับของผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์

$$W_j = \frac{\left(\sum_{t=2}^{n} e_{jt}^2\right)^{-1}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=2}^{n} e_{jt}^2\right)^{-1}}$$

$$e_{jt} = \frac{Y_t - \hat{Y}_{jt}}{Y_t}$$

โดยที่ W_j คือ ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของวิธีการพยากรณ์ที่ j

e_{jt} คือ ความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ของวิธีการพยากรณ์ที่ j ที่คาบเวลา t

$\hat{Y}_{jt}$ คือ ค่าพยากรณ์ของวิธีพยากรณ์ที่ j ที่คาบเวลาที่ t

Y_t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา ที่คาบเวลา t

j คือ วิธีพยากรณ์ที่ j ; $j = 1, 2, ..., m$

t คือ คาบเวลา ; $t = 1, 2, ..., n$

2.3 วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด (Least Absolute Value Method)

เป็นวิธีการที่คำนวณหาค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก ซึ่งอาศัยเทคนิคสมการเชิงเส้นตรง (Linear Programming Technique) โดยมีหลักการทำให้ผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด

$$\text{หาค่าต่ำสุด} \quad \sum |\varepsilon_t| \qquad (1)$$

โดยที่

$$\varepsilon_t = \frac{Y_t - CF_t}{Y_t} \qquad ,t = 1, 2, ..., n$$

จากสมการที่ (1) แปลงให้เป็นรูปโปรแกรมเชิงเส้นดังนี้

กำหนดให้ $$Z = \sum |\varepsilon_t|$$

เนื่องจาก ε_t ไม่มีข้อจำกัดด้านเครื่องหมาย จะได้ว่า

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t^+ - \varepsilon_t^- \quad ; \varepsilon_t^+, \varepsilon_t^- \geq 0 \qquad (2)$$

โดยนิยาม

$$\varepsilon_t^+ = \begin{cases} \varepsilon_t & ; \varepsilon_t \geq 0 \\ 0 & ; \varepsilon_t < 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_t^- = \begin{cases} 0 & ; \varepsilon_t \geq 0 \\ -\varepsilon_t & ; \varepsilon_t < 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น ได้ว่า $\varepsilon_t^+ \times \varepsilon_t^- = 0$

นั้นคืออย่างน้อย 1 ตัวแปรใน ε_t^+ และ ε_t^- เท่ากับ 0 เสมอ ดังนั้น

$$|\varepsilon_t| = \varepsilon_t^+ + \varepsilon_t^-$$

และให้ $U_{t-1} = \varepsilon_t^+$ และ $V_{t-1} = \varepsilon_t^-$

ดังนั้นแปลงปัญหา (1) ได้เป็น

หาค่าต่ำสุด $\sum (U_{t-1} + V_{t-1})$

โดยมีเงื่อนไขคือ

$$\frac{Y_t - \sum_{j=1}^{m} W_j \hat{Y}_{jt}}{Y_t} = U_{t-1} - V_{t-1} \qquad , t = 2, 3, \ldots, n$$

และ

$$W_j , U_{t-1}, V_{t-1} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} W_j = 1$$

ตัวอย่างปัญหาข้างต้น เมื่อ $m = 4$ และ $n = 5$ เขียนแสดงรูปแบบเต็มได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุด $Z = OW_1 + OW_2 + OW_3 + OW_4 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

เงื่อนไข :

$$\frac{W_1 \hat{Y}_{12}}{Y_2} + \frac{W_2 \hat{Y}_{22}}{Y_2} + \frac{W_3 \hat{Y}_{32}}{Y_2} + \frac{W_4 \hat{Y}_{42}}{Y_2} + U_1 - V_1 = 1$$

$$\frac{W_1 \hat{Y}_{13}}{Y_3} + \frac{W_2 \hat{Y}_{23}}{Y_3} + \frac{W_3 \hat{Y}_{33}}{Y_3} + \frac{W_4 \hat{Y}_{43}}{Y_3} + U_2 - V_2 = 1$$

$$\frac{W_1 \hat{Y}_{14}}{Y_4} + \frac{W_2 \hat{Y}_{24}}{Y_4} + \frac{W_3 \hat{Y}_{34}}{Y_4} + \frac{W_4 \hat{Y}_{44}}{Y_4} + U_3 - V_3 = 1$$

$$\frac{W_1 \hat{Y}_{15}}{Y_5} + \frac{W_2 \hat{Y}_{25}}{Y_5} + \frac{W_3 \hat{Y}_{35}}{Y_5} + \frac{W_4 \hat{Y}_{45}}{Y_5} + U_4 - V_4 = 1$$

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 1$$

$$W_j, U_{t-1}, V_{t-1} \geq 0$$