ภาคผนวก A 1

การวิเคราะห์ผลของความต้านทานเนื่องจากสนามแม่เหล็ก (Magnetoresistance) ที่มีต่อการวัด R_H

ในการทดลองหา R_H แบบธรรมดาของผลึก A ซึ่งวางในสนามแม่เหล็ก แสดงในรูป (3.4) หน้า (44) ให้กระแสเข้า A ไป B และ B ไป A 1.000 mA ในการทดลองที่ทำใหม่นี้ได้ลองเปลี่ยนทิศทางของสนามแม่เหล็กด้วย ผลการทดลองแสดงในรูป (A_1) และ (A_2) พบว่าได้กราฟเป็นเส้นตรง แสดงว่าความต้านทานที่เกิดขึ้นเนื่องจากสนามแม่เหล็กมีผลต่อการวัด R_H แบบธรรมดาน้อยมากตามทฤษฎี

$$V_{25} = V_{25}(B = 0) + aB + bB^2 \qquad \text{(A 1)}$$

$$\frac{dV_{25}}{dB} = a + 2bB \qquad \text{(A 2)}$$

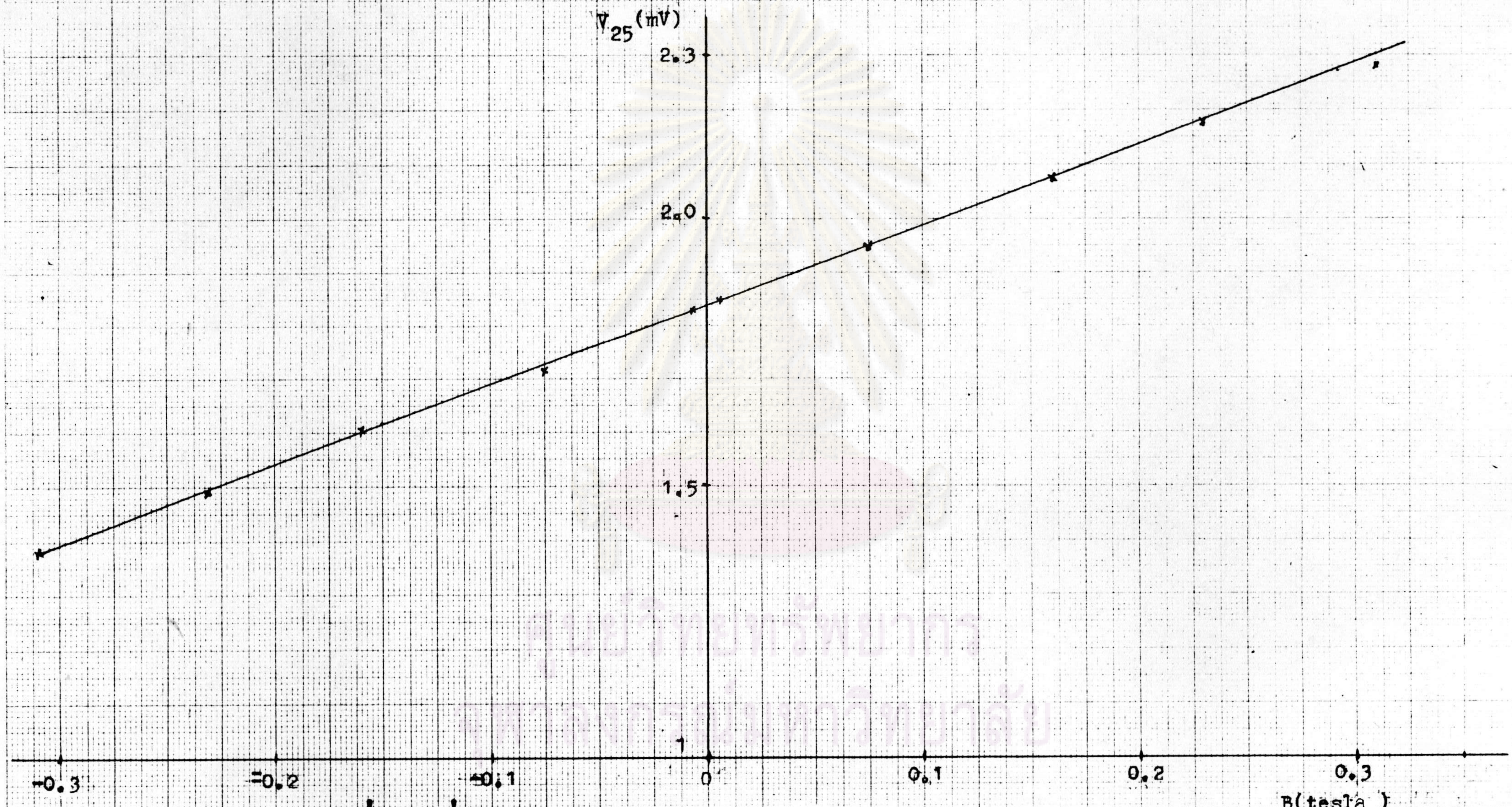
เทอม bB^2 ใน (A1) เป็นค่า V_{25} ที่เพิ่มขึ้นเนื่องจาก Magnetoresistance แต่จากการทดลองพบว่าได้กราฟเป็นเส้นตรง หรือ $\frac{dV_{25}}{dB}$ คงที่ แสดงว่าในขอบเขตของความคลาดเคลื่อนจากการทดลองความผิดพลาดเนื่องจาก Magnetoresistance มีน้อยมาก เนื่องจากในที่นี้ 2b มีค่าน้อยมากนั่นเอง

ส่วนการทดลองหา R_H แบบแวน เดอร์ เพาว์ โดยใช้ $R_{24,\ 35}$ ผลการทดลองแสดงในรูป (A 3) ในกรณีนี้เราได้

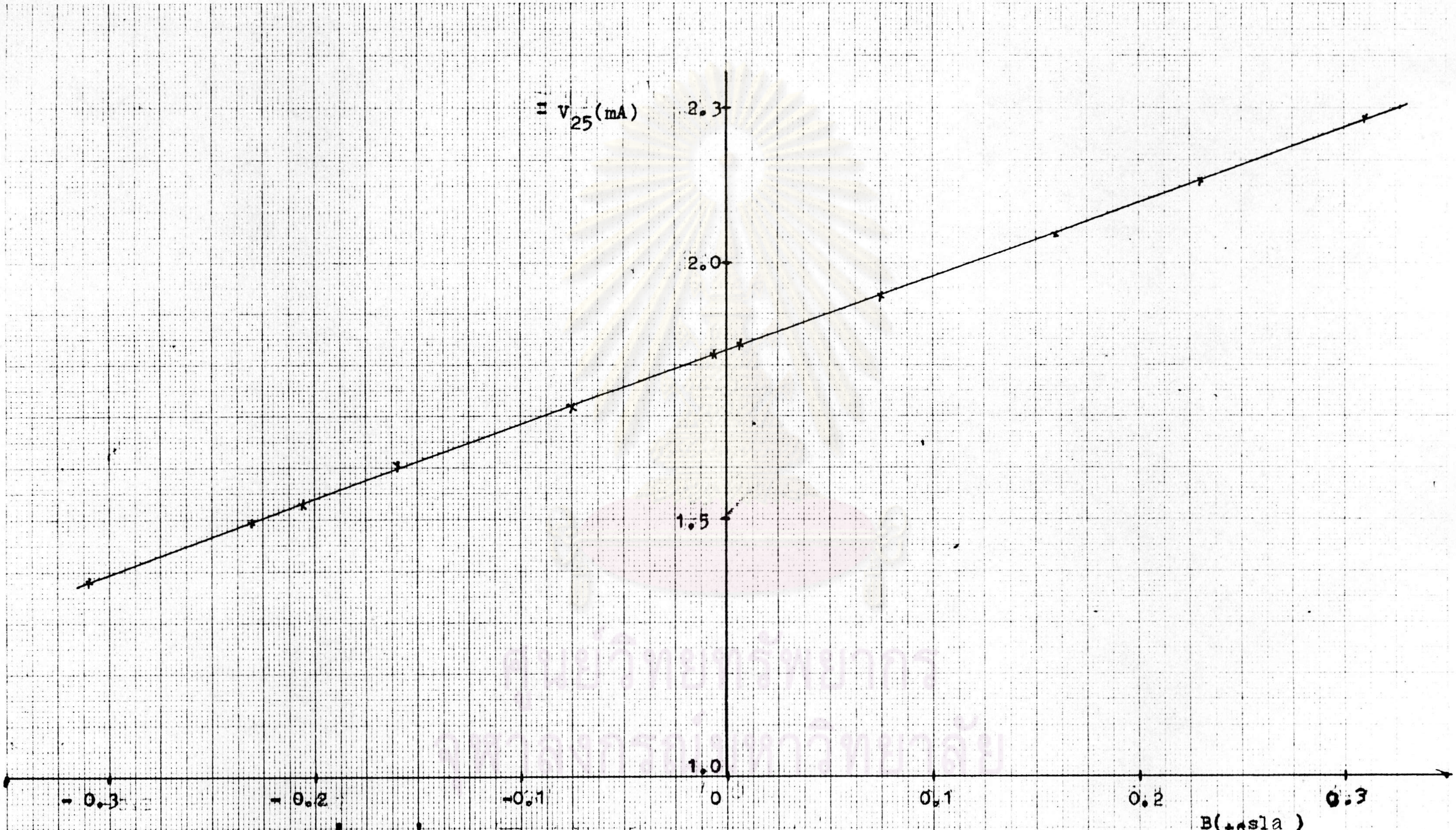
$$V_{35} = V_{35}(B = 0) + aB - bB^2 \qquad \text{(A 3)}$$

ซึ่งจะได้ว่า $$\frac{\Delta V_{35}}{\Delta B} = a - 2bB \qquad \text{(A 4)}$$

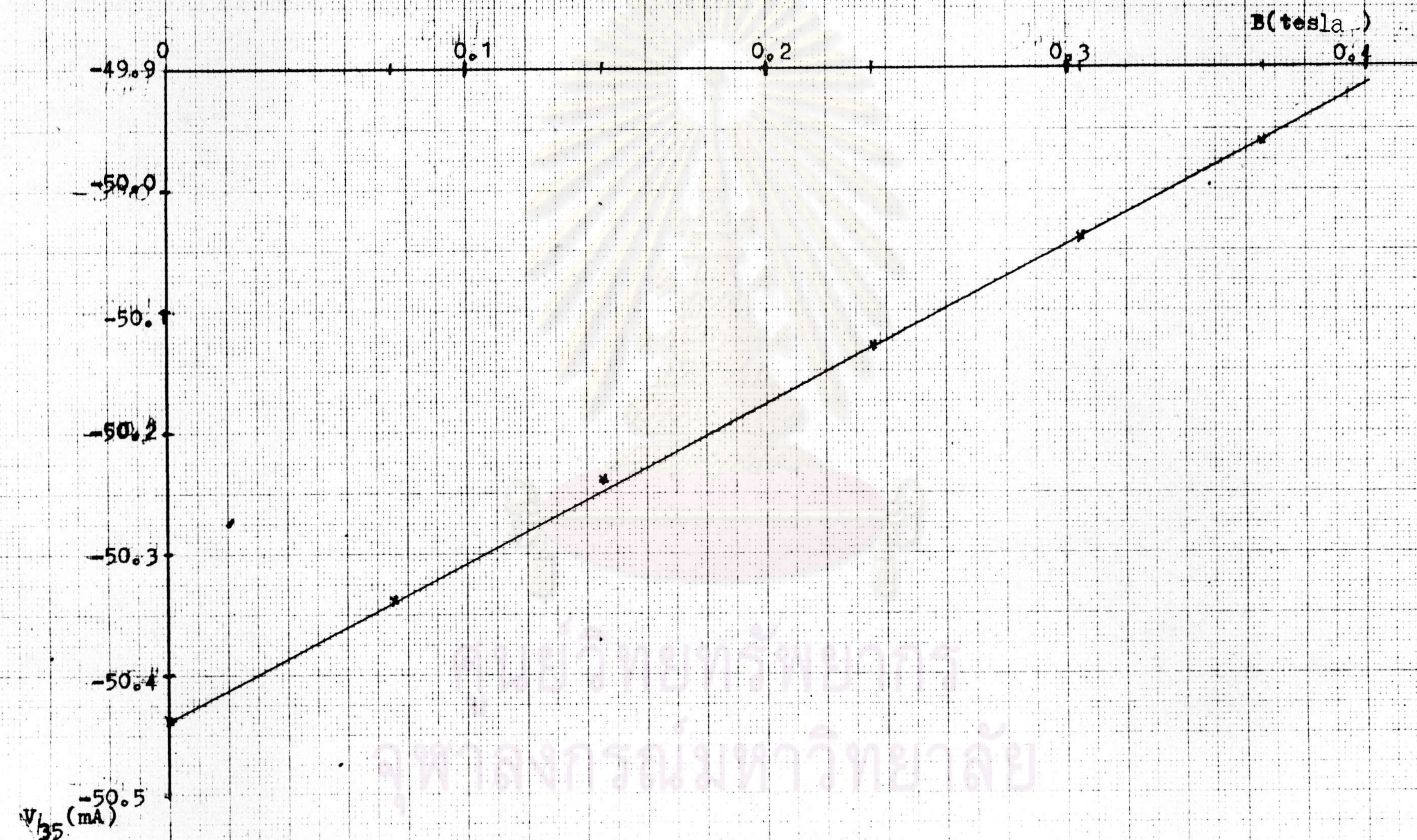
จะเห็นได้ว่าผลจาก magnetoresistance ทำให้ $\frac{\Delta V_{35}}{\Delta B}$ มีค่าน้อยลง ทั้งนี้เพราะค่า 2b สำหรับจุด 35 มีค่ามากพอประมาณ จะส่งผลทำให้การคำนวณหาค่า $R_H = \frac{b\Delta V_{35}}{BI_{24}\Delta B}$ มีค่าน้อยลง จากรูป A3 เส้นกราฟที่ได้โค้งเล็กน้อย แสดงว่า



รูปที่ A1 วัดค่า R_H โดยวิธีธรรมดา I_{AB} = 1.000 mA



รูปที่ A2 วัดค่า R_H โดยวิธีธรรมดา I_{BA} = 1.000 mA



รูปที่A3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง V_{35} กับ B เมื่อ I_{24}=1.000mA จากวัด R_H โดยใช้ $R_{24,35}$

ค่า 2b มีค่ามากพอสมควร จึงทำให้การวัด R_H แบบแวนเดอร์เพาว์ โดยใช้ $R_{24,35}$ มีค่าน้อยกว่าที่ควร ดังแสดงในตารางที่ (3.15) หน้า (56) จึงสรุปได้ว่าการใช้ $R_{24,35}$ วัด R_H นั้น ความคลาดเคลื่อนได้ค่า R_H น้อยกว่าที่ควร เนื่องมาจาก magnetoresistance ในเทอม B^2 ส่วนหนึ่ง

จากผลการทดลองข้างบนสรุปได้ว่า ในการวัดค่า R_H ควรเลือกจุด ij ซึ่ง V_{ij} ใกล้เคียง 0 เมื่อ B = 0 เพื่อหลีกเลี่ยงข้อผิดพลาดเนื่องจากเทอม B^2 นี้

ภาคผนวก A2

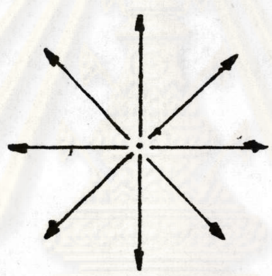
ข้อการวัด ρ โดยเทคนิคเวนเดอร์เพาว์

จากหัวข้อ (2. 2) เราสามารถหาค่า ρ โดยเทคนิคของแวนเดอร์เพาว์ ได้จากสมการ

$$\exp(-\left|R_{AB,CD}\right| b/\rho) + \exp(-\left|R_{BC,DA}\right| b/\rho) = 1 \qquad \text{(A5)}$$

ในภาคผนวกนี้เราจะพิสูจน์ให้เห็นว่าสมการ (A5) ถูกต้อง และสามารถใช้กับผลึกรูปร่างอย่างใดก็ได้

เราจะพิจารณาในกรณีผลึกเป็นแผ่นเรียบบาง ๆ ขนาดใหญ่ มีกระแสไฟฟ้าไหลออกมาจากจุดหนึ่ง (Source) บนระนาบ (plane) ของผลึกดังรูป (A4)



รูป (A4) แสดงทิศทางไหลของกระแสจาก Source

สมการแมกแวล (Maxwell's eq) จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \varepsilon\vec{E} = \rho = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

ได้ว่า $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ (3)

แทน (3) ใน (1) $\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = 0$ ได้ $\nabla^2 V = 0$ (4)

และ $\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\vec{\nabla}V$ (5)

จาก cylindical coordinate

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (6)$$

$$\vec{\nabla}V = \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\vec{J}}{\sigma} \qquad (7)$$

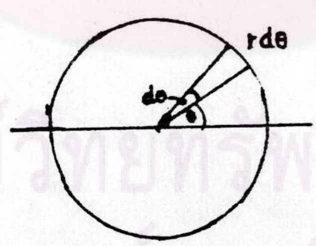
จาก (7) เราได้

$V \neq V(z)$ และ $V \neq V(\theta)$ จาก เพราะ $\vec{J}$ มีแต่ทิศของ r

จาก (7), $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$

ได้ $r\frac{\partial V}{\partial r} = C$, $V = C\ \ell n r$ (8)

พิจารณากระแสไฟฟ้าไหลจากจุดกำเนิด (Source) ของแผ่นผลึกหนา b และให้กระแสส่วนครึ่งบนเท่ากับ I



จาก (5),(8) $j = -\sigma\frac{c}{r}\hat{r}$

$$2I = \int_{0}^{2\pi} -\sigma\frac{c}{r} \cdot r d\theta . b$$

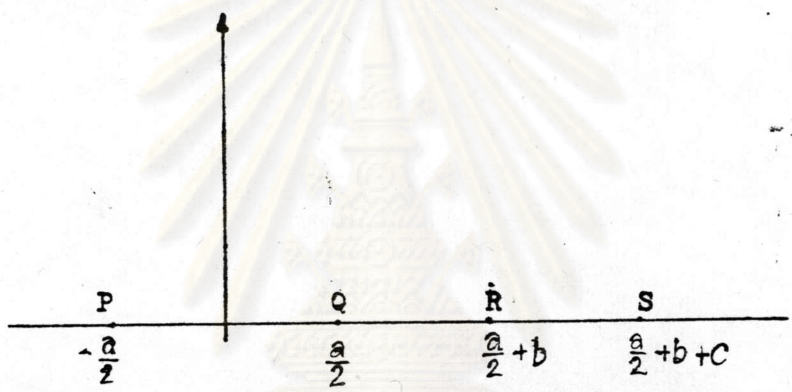
$$2I = -\sigma c b . 2\pi \qquad (9)$$

$$c = -\frac{I\rho}{\pi b} \tag{10}$$

แทน (10) ลงใน (8) ได้

$$V = -\frac{I\rho}{\pi b}\,\ell n r$$

ถ้ามีกระแสเข้าจุด P และออกที่จุด Q ของผลึกรูป half plane ซึ่งมีความหนา b ดังรูป A5



รูป A5 กระแสไหลเข้าจุด P และออกจุด Q เท่ากับ I

จะได้ $V = -\frac{I\rho}{\pi b}\,\ell n\left(r+\frac{a}{2}\right) + \frac{I\rho}{\pi b}\,\ell n\left(r-\frac{a}{2}\right)$

$$V = \frac{I\rho}{\pi b}\,\ell n\,\frac{r-\frac{a}{2}}{r+\frac{a}{2}} \tag{11}$$

ดังนั้น $V_R = \frac{I\rho}{\pi b}\,\ell n\,\frac{b}{a+b} \quad \left[r = \frac{a}{2}+b\right]$ (12)

$$V_S = \frac{I\rho}{\pi b}\,\ell n\,\frac{b+c}{a+b+c} \quad \left[r = \frac{a}{2}+b+c\right] \tag{13}$$

$$V_S - V_R = \frac{I\rho}{\pi b}\,\ell n\,\frac{(b+c)(a+b)}{b(a+b+c)} \tag{14}$$

จาก $$R_{PQ,RS} = \frac{V_S - V_R}{I_{PQ}} \tag{14)'$$

$$R_{PQ,RS} = \frac{\rho}{\pi b} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)} \tag{15}$$

ในทำนองเดียวกัน

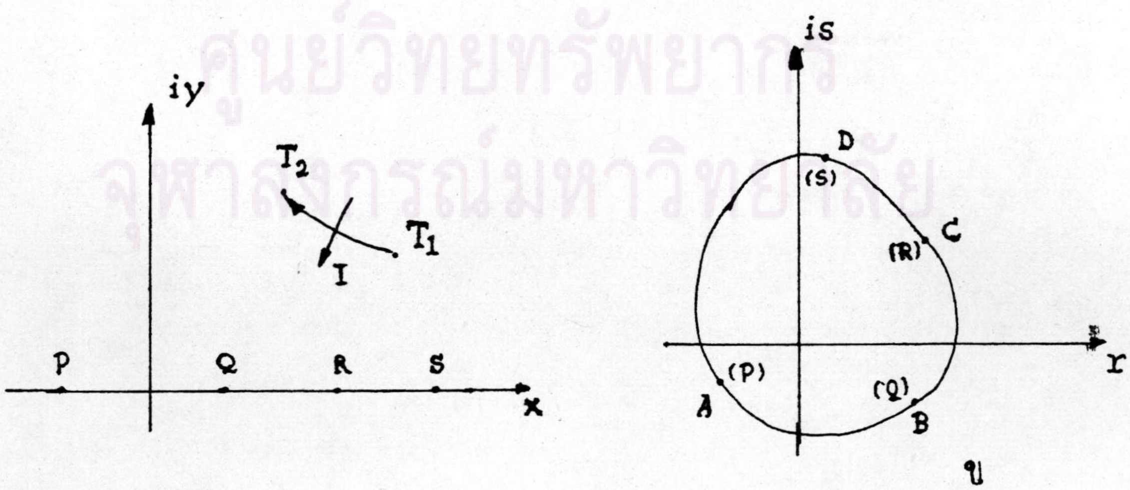
$$R_{QR,SP} = \frac{\rho}{\pi b} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{ca} \tag{16}$$

จาก (15) $$\exp(-\pi b R_{PQ,RS}/\rho) = \frac{b(a+b+c)}{(a+b)(b+c)} \tag{17}$$

จาก (16) $$\exp(-\pi b R_{QR,SP}/\rho) = \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \tag{18}$$

(17)+(18) $$\exp(-\pi b R_{PQ,RS}/\rho) + \exp(-\pi b R_{QR,SP}/\rho) = \frac{ca+b(a+b+c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$\exp(-\pi b R_{PQ,RS}/\rho) + \exp(-\pi b R_{QR,SP}/\rho) = 1 \tag{19}$$



รูป A5 แสดงการ transform จากรูป ก เป็นรูป ข

ในกรณีที่ผลึกไม่ใช่แผ่นแบนใหญ่ที่มีขอบตรงดังรูป (ก) แต่เป็นแผ่นลักษณะดังรูป (ข) ถ้าเราทราบ V(x, y) ของแผ่นในรูป (ก) เราอาจใช้เทคนิคของ conformal mapping เปลี่ยน V(x, y) ให้เป็น V'(r, S) ซึ่งเป็นศักย์ไฟฟ้าที่จุดต่าง ๆ ของผลึกในรูป (ข) ได้ตามต้องการ

ขอให้พิจารณาระนาบเชิงซ้อน (x, y) เราอาจเขียนศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อน

$$\phi(z) = V(x, y) + v(x, y)i \tag{20}$$

โดย $\phi(z)$ เป็น analytic function ซึ่งมี V(x, y) เป็นศักย์ไฟฟ้าที่จุดต่าง ๆ V และ v มีความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{21}$$

เราอาจพิสูจน์ได้ว่าแท้จริงเส้นโค้ง v(x, y) คงที่ ก็คือทางเดินของกระแสในแผ่นผลึกนั่นเอง

จากสมการข้างบนเราอาจหา v(x, y) ได้จาก V(x, y) ได้

พิจารณาจุด T_1 และ T_2 ในระนาบ x, y อาจพิสูจน์ได้ว่ากระแสที่ไหลผ่านแนว $T_1 T_2$ จากขวาไปซ้ายอาจเขียนได้เป็น

$$I_{T_1T_2} = \frac{d}{\rho}\int_{T_1}^{T_2}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}dx + \frac{\partial V}{\partial x}dy\right), \tag{22}$$

โดยอาศัยสมการ (21) เราได้ว่า

$$I_{T_1T_2} = \frac{d}{\rho}\int_{T_1}^{T_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \frac{d}{\rho}\int_{T_1}^{T_2} dv$$

$$= \frac{d}{\rho}\left[v(T_2) - v(T_1)\right]$$

หรือ $\rho I_{T_1T_2}/d \quad = \quad v(T_2) - v(T_1)$ (23)

จากรูป (ก) ถ้าเราพิจารณาค่า v ตามแนวแกน x จาก $-\alpha$ จนถึง $+\alpha$ ทางซ้ายของจุด P ค่า v จะคงที่ แต่เมื่อผ่านจุด P ค่า v จะเพิ่มขึ้น $I\rho/d$ และมีค่าคงที่ไปจนถึงจุด Q ซึ่งเมื่อผ่านจุดนี้ ค่า v จะลดลงเท่ากับ $I\rho/d$ ทั้งนี้เพราะมีกระแส I เข้าและออกจากผลึกที่จุด P และจุด Q นั่นเอง

ตามทฤษฎีโดยอาศัย analytic function

$$t(z) \quad = \quad r(x, y) + s(x, y)i$$

เราอาจ transform เส้น $y = 0$ ที่ขอบของผลึกในระนาบเชิงซ้อน x, y ให้กลายเป็นขอบของผลึกในระนาบ r, s (รูป ข) ในการนี้จุด P, Q, R,S จะกลายเป็น A, B, C, D และศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อน $\phi(z) = V(x, y) + iv(x, y)$ จะถูก transform กลายเป็น $\phi(z(t)) = V'(r, s) + iv'(r,s)$ ซึ่งเป็นศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อนของผลึกในรูป (ข) ตามต้องการ

ถ้าเราพิจารณา v' ตามขอบของผลึกในทิศทวนเข็มนาฬิกาค่าของ v' ตอนแรกจะคงที่ แต่เมื่อผ่านจุด A จะเพิ่มขึ้น $I\rho/d$ และเมื่อผ่านจุด B จะลดลง $I\rho/d$ เช่นในกรณีก่อน ในทำนองเดียวกันถ้ากระแส I' เข้าสู่ผลึกที่จุด A และออกจากผลึกที่จุด B เราอาจเลือกให้ $I'\rho'/d' = I\rho/d$ โดย ρ' และ d' เป็นสภาพต้านทานไฟฟ้าและความหนาของผลึกในระนาบ r, s ซึ่งจะได้ว่าความต่างศักย์ $V_D - V_C$ จะเท่ากับ $V_S - V_R$

เปรียบเทียบกับสมการข้างบน (14') จะเห็นได้ว่าปริมาณ $\frac{d}{\rho} R_{AB,CD}$ ไม่เปลี่ยนแปลงโดย transformation นี้ ซึ่งเช่นเดียวกับสมการ $d/\rho R_{BC,DA}$ ดังนั้นสมการ (A5) จะใช้ได้สำหรับผลึกที่มีรูปร่างดังในรูป (ข) หรือผลึกที่มีรูปร่างทุกชนิด

เอกสารอ้างอิง

1. Kittel, C., Introduction to Solid State Physics. 2nd., New York : Wiley, 1956.

2. Ziman, J.M., Principle of the Theory of Solid, 2nd ed., London : Cambridge University Press, 1972.

3. Putley, E.H. "The Hall Effect and its Application" Contemp. Phys. 16 (1975) : 101- 25.

4. Reif, F. Fundamental of statistical and Thermal Physics, New York : McGraw-Hill, 1965.

5. Morin, F.J. and J.P., "Electrical Properties of Silicon Containing Arsenic and Boron," Physical review, 96(1954) : 28-35.

6. Van der Pauw, L.J. "A Measuring Specific Resistivity and Hall Effect of Discs of Arbitrary shape.", Philips Res. Repts. 13 (1958) : 1-9.

ประวัติผู้เขียน

นายมนัส แซ่ด่าน เกิดเมื่อวันที่ 24 กันยายน พ.ศ. 2498 ที่จังหวัดตรัง สำเร็จการศึกษาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (ศึกษาศาสตร์) ที่มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ปีการศึกษา 2520 ปัจจุบันเป็นอาจารย์สอนที่โรงเรียนเทพลีลา บางกะปิ กรุงเทพมหานคร