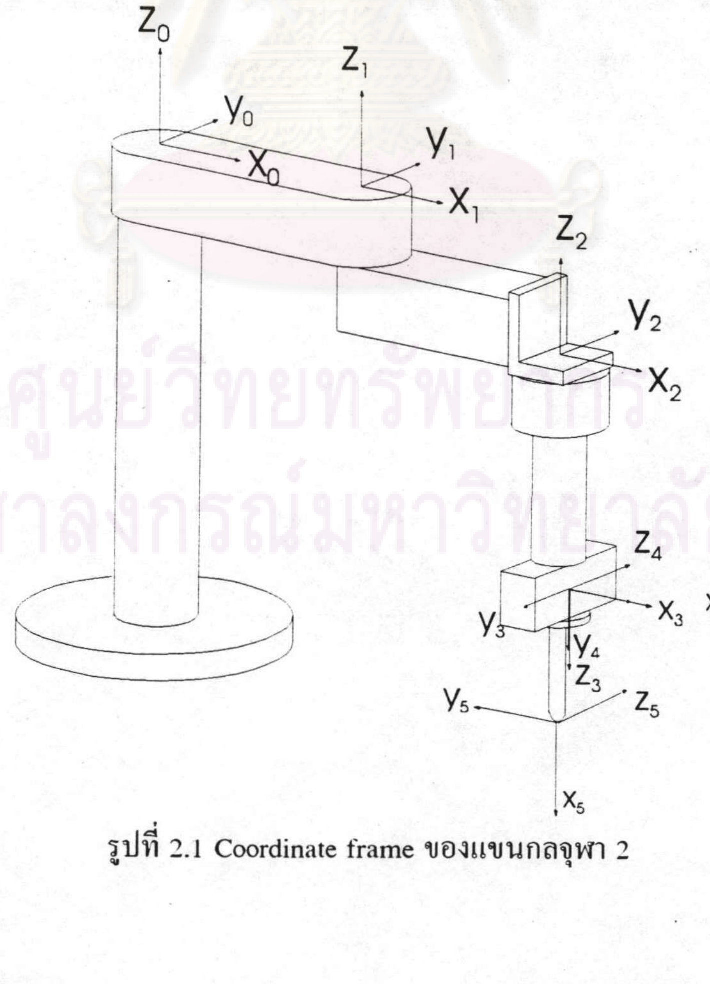
บทที่ 2

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกล

คิเนเมติกของแขนกล จุฬา 2

คิเนเมติกของแขนกลเป็นการวิเคราะห์ถึง การเคลื่อนที่ของ link ต่าง ๆ ของแขนกล และเนื่องจากประสิทธิภาพของงานนั้น ๆ จะขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของแขนกล ฉนั้นคิเนเมติกส์จึงเป็นเครื่องมือพื้นฐาน ในการออกแบบระบบควบคุมแขนกล

Denavit-Hartenberg notation ของแขนกลจุฬา 2



รูปที่ 2.1 Coordinate frame ของแขนกลจุฬา 2

จากรูป 2.1 เป็นการตั้งเฟรมบน link ต่าง ๆ ของแขนกลโดยใช้วิธีของ Denavit-Hartenberg และสามารถหา link parameters ดังตาราง

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า Link parameters ของแขนกลจุฬา 2

Link No	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	L_1	0	θ_1
2	0	L_2	0	θ_2
3	180	0	D_3	0
4	90	0	0	θ_4
5	0	L_5	0	θ_5

จากรูปที่ 2.1 และตารางที่ 2.1 สามารถหา homogeneous transformation matrix ของ link ที่ติดกันของแขนกลจุฬา 2 ได้ดังนี้

$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^3(q_4) = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & \sin(q_4) & 0 \\ \sin(q_2) & 0 & -\cos(q_4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^4(q_5) = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & -\sin(q_5) & 0 & l_5\cos(q_5) \\ \sin(q_5) & \cos(q_5) & 0 & l_5\sin(q_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ส่วน homogeneous transformation matrix จากเฟรมสุดท้ายไปยังเฟรมศูนย์ของแขนกลหาได้จาก

$$A_5^0 = A_1^0 \cdot A_{21}^1 \cdot A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_5^4$$

$$A_5^0 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & o_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & o_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & o_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = \cos(q_1 + q_2 - q_4) \cdot \cos(q_5)$$

$$p_{12} = -\cos(q_1 + q_2 - q_4) \cdot \sin(q_5)$$

$$p_{13} = -\sin(q_1 + q_2 - q_4)$$

$$o_1 = \cos(q_1 + q_2 - q_4) \cdot l_5 \cdot \cos(q_5) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cdot \cos(q_1)$$

$$p_{21} = \sin(q_1 + q_2 - q_4) \cdot \cos(q_5)$$

$$p_{22} = -\sin(q_1 + q_2 - q_4) \cdot \sin(q_5)$$

$$p_{23} = \cos(q_1 + q_2 - q_4)$$

$$o_2 = \sin(q_1 + q_2 - q_4) \cdot l_5 \cdot \cos(q_5) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) + l_1 \cdot \sin(q_1)$$

$$p_{31} = -\sin(q_5)$$

$$p_{32} = -\cos(q_5)$$

$$p_{33} = 0$$

$$o_3 = -l_5 \cdot \sin(q_5) + d_3 + d_1 + d_2$$

Jacobian ของแขนกลจุฬา 2

$$J_{A1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{A2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{A3} = 0$$

$$J_{A4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{A5} = \begin{bmatrix} -\sin(q_1+q_2-q_4) \\ \cos(q_1+q_2-q_4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{L1} = \begin{bmatrix} -(l_1\sin(q_1)+l_2\sin(q_1+q_2)+l_5\sin(q_1+q_2-q_4)\cos(q_5) \\ (l_1\cos(q_1)+l_2\cos(q_1+q_2)+l_5\cos(q_1+q_2-q_4)\cos(q_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{L2} = \begin{bmatrix} -(l_2\sin(q_1+q_2)+l_5\sin(q_1+q_2-q_4)\cos(q_5) \\ (l_2\cos(q_1+q_2)+l_5\cos(q_1+q_2-q_4)\cos(q_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{L3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{L4} = \begin{bmatrix} l_5\sin(q_1+q_2-q_4)\cos(q_5) \\ -(l_5\cos(q_1+q_2-q_4)\cos(q_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{L5} = \begin{bmatrix} -(l_5\cos(q_1+q_2-q_4)\sin(q_5) \\ -(l_5\sin(q_1+q_2-q_4)\sin(q_5) \\ -l_5\cos(q_5) \end{bmatrix}$$

Recursive computation

วิธีการ recursive computation นั้นจะแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกจะเป็นการคำนวณคิเนเมติกของแขนกลเพื่อ หาตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการ Newton-Euler ส่วนหลังจะเป็นการคำนวณหาค่าแรงบิดที่ใช้ขับข้อต่อขแนกลโดยใช้สมการ Newton-Euler

Kinematic of the link

angular velocity

$$R_0^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$R_0^3\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

$$R_0^4\omega_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_4 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_0^5\omega_5 = \begin{bmatrix} (\dot{q}_4 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2))\sin(q_5) \\ (\dot{q}_4 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2))\cos(q_5) \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix}$$

angular acceleration

$$R_0^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$R_0^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_{1+}\ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$R_0^3\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \end{bmatrix}$$

$$R_0^4\dot{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_4 - (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_0^5\dot{\omega}_5 = \begin{bmatrix} (\dot{q}_4 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_5 \cos(q_5) + (\ddot{q}_4 - (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)) \sin(q_5) \\ -(\dot{q}_4 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_5 \sin(q_5) + (\ddot{q}_4 - (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)) \cos(q_5) \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix}$$

Linear Velocity

$$R_0^1 v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1\dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$R_0^2 v_2 = \begin{bmatrix} l_1\dot{q}_1 \sin(q_2) \\ l_1\dot{q}_1 \cos(q_2) + l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_0^3 v_3 = \begin{bmatrix} l_1\dot{q}_1 \sin(q_2) \\ -(l_1\dot{q}_1 \cos(q_2) + l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) \\ -\dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$R_0^4 v_4 = \begin{bmatrix} l_1\dot{q}_1\sin(q_2-q_4)-l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_4) \\ -\dot{d}_3 \\ l_1\dot{q}_1\cos(q_2-q_4)+l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_4) \end{bmatrix}$$

$$R_0^5 v_5 = \begin{bmatrix} \{l_1\dot{q}_1\sin(q_2-q_4)-l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_4)\}\cos(q_5)-\dot{d}_3\sin(q_5) \\ \{l_1\dot{q}_1\sin(q_2-q_4)+l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_4)\}\sin(q_5)-\dot{d}_3\cos(q_5)+l_5\dot{q}_5 \\ l_1\dot{q}_1\cos(q_2-q_4)+l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_4)+l_5\cos(q_5)(q_1+q_2-q_4) \end{bmatrix}$$

Linear Acceleration

$$R_0^1 a_1 = \begin{bmatrix} -l_1\dot{q}_1^2 \\ l_1\ddot{q}_1 \\ g \end{bmatrix}$$

$$R_0^2 a_2 = \begin{bmatrix} -l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2-l_1(\dot{q}_1^2\cos(q_2)-\ddot{q}_1\sin(q_2)) \\ l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)+l_1(\dot{q}_1^2\sin(q_2)+\ddot{q}_1\cos(q_2)) \\ g \end{bmatrix}$$

$$R_0^3 a_3 = \begin{bmatrix} -l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2-l_1(\dot{q}_1^2\cos(q_2)-\ddot{q}_1\sin(q_2)) \\ -l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)-l_1(\dot{q}_1^2\sin(q_2)+\ddot{q}_1\cos(q_2)) \\ -(g+\ddot{d}_3) \end{bmatrix}$$

$$R_0^4 a_4 =$$

$$\begin{bmatrix} -l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\cos(q_4)-l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)\sin(q_4)+l_1(-\dot{q}_1^2\cos(q_2-q_4)+\ddot{q}_1\sin(q_2-q_4)) \\ -(g+\ddot{d}_3) \\ -l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\sin(q_4)+l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)\cos(q_4)+l_1(+\dot{q}_1^2\sin(q_2-q_4)+\ddot{q}_1\cos(q_2-q_4)) \end{bmatrix}$$

$$
R_0^5 a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \ddot{q}_5 \\ l_5\{\cos(q_5)\cdot(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2-\ddot{q}_4)-\dot{q}_5\cdot\sin(q_5)\cdot(\dot{q}_1+\dot{q}_2-\dot{q}_4)\} \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} l_5(\omega^2{}_{y5}+\omega^2{}_{z5}) \\ l_5\omega_{x5}\omega_{y5} \\ l_5\omega_{x5}\omega_{z5} \end{bmatrix} + R_0^4 a_4
$$

ในสมการ Newton-Euler ความเร็วและความเร่งจะเทียบกับ centroid แต่ตัวแปรในวิธี Recursive Computation จะเทียบกับเฟรมของตัวเอง ฉนั้นจึงต้องแปลงความเร็วและความเร่งให้เทียบกับ centriod ของ link นั้น ๆ ตามสมการต่อไปนี้

Centroidal Velocity

$$
{}^i v_{ci} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i r_{ci}
$$

Centriodal Acceleration

$$
{}^i A_{ci} = {}^i A_i + {}^i \omega_i \times {}^i r_{ci} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times r_{i,ci})
$$

เมื่อได้ค่าต่าง ๆ ของตัวแปรคิเนเมติกส์แล้ว ก็จะคำนวณหาแรงบิดที่ใช้ขับข้อต่อแขนกลโดยใช้สมการ Newton-Euler ดังนี้

กรณีเชิงเส้น

$$
R_i^{i+1}[f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + mg] = m_i \, {}^i A_{ci}
$$

กรณีเชิงมุม

$$R_i^0 N_{i-1,i} - N_{i,i+1} + r_{i,ci} \times f_{i,i+1} - r_{i-1,ci} \times f_{i-1,i} = I_i \omega_i + \omega_i \times (I\omega_i)$$

โดย $\mathbf{I}_i$ คือ Inertia รอบจุด centroid ของ link i เทียบกับโคออดิเนต ของ เฟรม i

เมื่อหาค่าแรง (force) และแรงบิด (torque) ที่กระทำต่อ link ต่าง ๆ ได้แล้ว จากนั้นเราก็จะหาแรงและแรงบิดที่เกิดจาก actuator ของแต่ละ joint กำหนดให้ τ_i เป็นแรงหรือแรงบิดของ actuator ที่ขับ joint i จะได้ว่า

กรณี prismatic joint τ_i จะเป็น แรงเชิงเส้นตามแนวแกน i-1

$$\tau_i = [R_0^i b_{i-1}]^T [R_o^i f_{i-1,i}]$$

กรณี revolute joint $_i$ จะเป็นแรงบิดเชิงมุม รอบแกน i-1 จะได้

$$\tau_i = [R_0^i b_{i-1}]^T [R_o^i N_{i-1,i}]$$

ซึ่งสามารถเขียนแรงบิดของ actuator ที่ใช้ขับข้อต่อแขนกล ให้อยู่ในรูปเมตริกส์ 5 x 1 ได้

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$