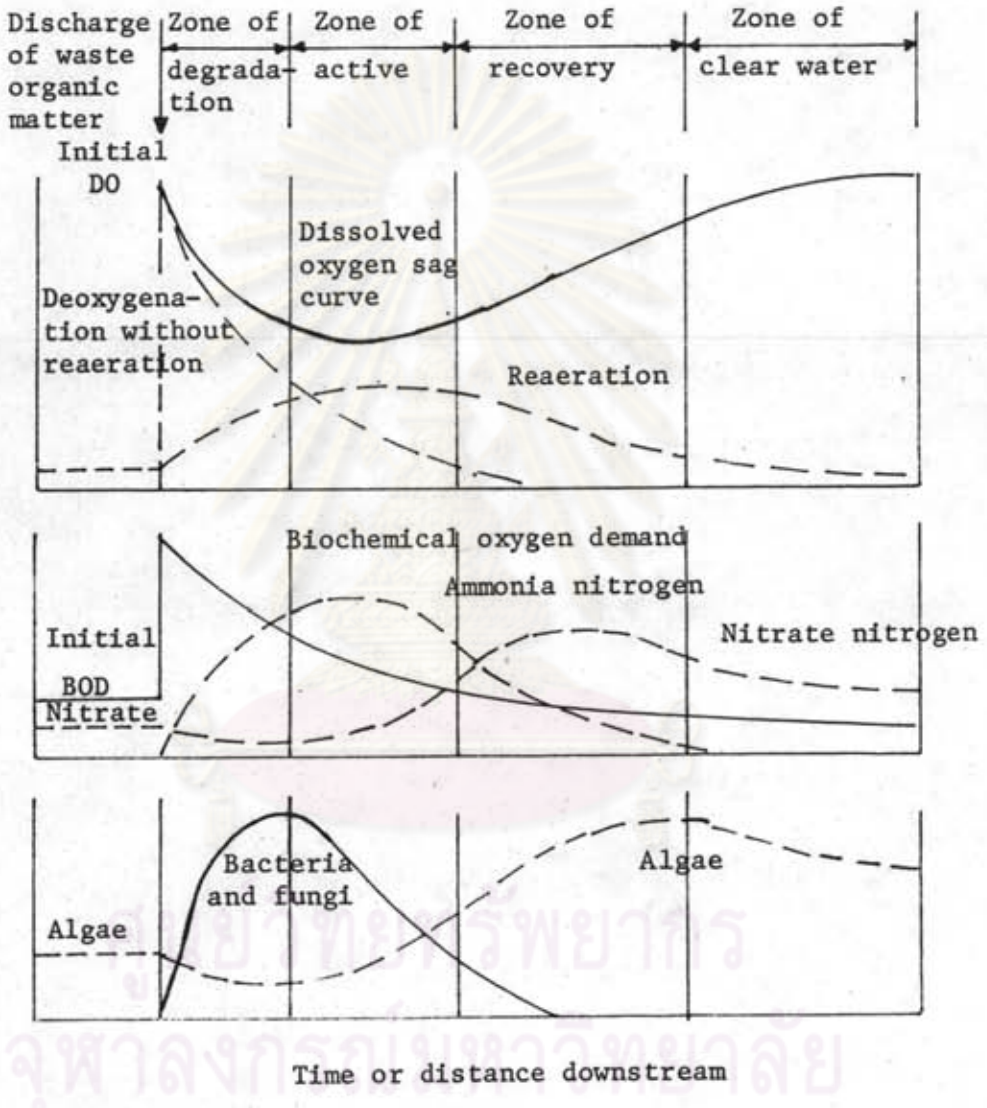
บทที่ 4

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในการประเมินผลของของเสียที่ทิ้งลงสู่แหล่งน้ำและไปมีผลต่อคุณภาพน้ำของแหล่งน้ำ จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างมลสารกับสภาวะแวดล้อมของแหล่งน้ำนั้น ๆ โดยธรรมชาติเมื่อเกิดปัญหามลภาวะในแม่น้ำ แม่น้ำจะมีความสามารถในการทำตัวเองให้สะอาดและกลับมีคุณภาพดีขึ้น ด้วยความสามารถที่เรียกว่า Self-purification หรือ Waste Assimilative Capacity ทั้งนี้ขึ้นอยู่สภาพที่เหมาะสมในสำน้ำด้วย เช่น ปริมาณมลสาร ระยะเวลาที่มลสาร ลงสู่แม่น้ำ เป็นต้น ปริมาณมลสารจะมีผลและความสำคัญต่อสภาวะแวดล้อมของแม่น้ำดังรูปที่ 4.1 เป็นรูปที่แสดงให้ถึงผลของมลสารต่าง ๆ ในสำน้ำ จากรูปสามารถแบ่งสำน้ำได้เป็น 4 เขตคือ เมื่อมีการทิ้งของเสียลงในแม่น้ำจะเข้าสู่ Zone of degradation ปริมาณออกซิเจนในสำน้ำจะถูกนำไปใช้ในการย่อยมลสารต่าง ๆ ที่สามารถย่อยสลายได้โดยจุลินทรีย์ เขตที่ 2 เรียกว่า Zone of active decomposition เป็นบริเวณที่เป็นจุดวิกฤตของการเกิดมลภาวะทางน้ำ ค่าออกซิเจนที่ละลายในน้ำจะอยู่ในระดับที่ต่ำจนอาจเกิดสภาวะไร้ออกซิเจนในแหล่งน้ำได้ ซึ่งจะเป็นอันตรายต่อการดำรงชีวิตของสัตว์น้ำและต่อสภาพแวดล้อมอื่น ๆ ขณะเดียวกันปริมาณแอมโมเนียไนโตรเจนจะเริ่มสูงขึ้น อัตราการย่อยสลายสารอินทรีย์ (BOD) จะลดลง ในเขตที่ 3 เรียกว่า Zone of Recovery จะมีอัตราการละลายออกซิเจนจากอากาศลงสู่แหล่งน้ำ และปริมาณออกซิเจนที่ละลายในน้ำจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้น แอมโมเนียไนโตรเจนจะเปลี่ยนเป็นไนเตรตไนโตรเจน ส่วนในเขตที่ 4 เรียกว่า Zone of clear water แม่น้ำจะกลับเข้าสู่สภาพปกติต่อไป

4.1 ประโยชน์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

และเพื่อที่จะได้ทราบถึงผลกระทบของน้ำทิ้งจากแห่งต่าง ๆ ที่มีต่อคุณภาพน้ำ นอกจากจะใช้วิธีการเปรียบเทียบกับมาตรฐานที่กำหนดไว้แล้ว เครื่องมืออันหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ก็คือ แบบ



รูปที่ 4.1 ผลของสารอินทรีย์ที่ทำให้เกิดมลภาวะในแหล่งน้ำ

จำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้กันอย่างแพร่หลายในการจัดการควบคุมคุณภาพน้ำในหลาย ๆ ประเทศ การนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาใช้ในลำน้ำมีประโยชน์ดังนี้

1. เพื่อใช้คาดการณ์คุณภาพน้ำ เช่น ความเข้มข้นของบีโอดี ออกซิเจนที่ละลายในน้ำหรือปริมาณมลสารต่าง ๆ ว่าจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรบ้างในแต่ละจุดของลำน้ำ เมื่อมีการทิ้งความเน่าเสีย (BOD - loading) หรือสารต่าง ๆ ลงไปมากน้อยแตกต่างกันในแต่ละช่วงของแม่น้ำ หรือเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของปริมาณน้ำตามช่วงเวลาหรือได้รับอิทธิพลจากน้ำขึ้นน้ำลง

2. เพื่อใช้หาปริมาณที่มากที่สุดของความเน่าเสีย หรือของสารต่าง ๆ ที่จะทิ้งลงไปได้ในแต่ละช่วงของลำน้ำ โดยไม่ทำให้คุณภาพน้ำในแม่น้ำต่ำกว่ามาตรฐานที่กำหนด

3. เพื่อใช้หาราคาของการบำบัดน้ำเสียรวมต่ำสุด ซึ่งจะยังทำให้คุณภาพน้ำของแม่น้ำอยู่ในมาตรฐานที่กำหนดซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการที่จะกำหนด ยนกด ยนิด และเปอร์เซนต์ของการบำบัดน้ำเสียว่าต้องทำมากน้อยเพียงไร

4.2 BOD - Oxygen Sag Curve

สมการคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการศึกษาสภาพมลภาวะของแม่น้ำที่มีออกซิเจนที่ละลายในน้ำเป็นดัชนีคุณภาพที่สำคัญนั้น Streeter และ Phelps (1925) ได้ทำการศึกษาพบว่าอัตราสุทธิของการขาดแคลนออกซิเจน (D) ที่เวลาใด ๆ จะเท่ากับผลต่างระหว่างอัตราการใช้ออกซิเจน และการรับออกซิเจนในแหล่งน้ำนั้น ๆ ดังสมการที่ 4.1

$$dD/dt = 2.3\ k_1 l - 2.3\ k_2 D \qquad (4.1)$$

เมื่อ dD/dt = อัตราสุทธิของความขาดแคลนออกซิเจน

$k_1 l$ = จำนวนออกซิเจนที่ถูกใช้ในการย่อยสลายสารอินทรีย์ในรูป

$k_2 D$ = จำนวนออกซิเจนที่ละลายลงสู่แหล่งน้ำ

k_1 = สัมประสิทธิการย่อยสลายสารอินทรีย์BOD, วัน$^{-1}$

k_2 = สัมประสิทธิการถ่ายเทออกซิเจนลงสู่แหล่งน้ำ, วัน$^{-1}$

L = ค่า ultimate BOD ที่จุด ๆ หนึ่งห่างจากจุดระบายน้ำทิ้งเป็นระยะทางหนึ่ง ซึ่งใช้เวลาในการไหล t วัน

D = ความขาดแคลนออกซิเจน ซึ่งมีค่าเท่ากับผลต่างความเข้มข้นอิ่มตัวของออกซิเจน กับความเข้มข้นของออกซิเจนในน้ำ (Cs - C), mg/l

ค่า L ดังกล่าว หาได้จากสมการ

$$L = Lo \cdot 10^{-k_1 t} \qquad (4.2)$$

Lo = ultimateBOD ที่จุดระบายน้ำทิ้ง

Camp (1965) ได้อธิบายถึงขบวนการออกซิไดซ์ทางชีววิทยาที่มีผลต่ออัตราการย่อยสลายสารอินทรีย์ในแม่น้ำ โดยอาศัยสมการของ Phelps ได้เป็นสมการใหม่ดังนี้

$$dD/dt = -2.3 (k_1 + k_3) L + p \qquad (4.3)$$

เมื่อ t = ระยะเวลาในการไหล, วัน

k_3 = สัมประสิทธิการตกตะกอนของสารอินทรีย์, วัน$^{-1}$

p = อัตราการย่อยสลายBOD ทั้งหมดจากบริเวณท้องน้ำถึงชั้น Overlying water, มก/ล/วัน

เมื่ออินทีเกรตสมการ (4.3) ที่ระยะทาง a และ b ของแม่น้ำ จะได้เป็นสมการ

4.4

$$Lb = \left[La - \frac{P}{2.3(k_1+k_3)} \right] 10^{-(k_1 + k_3)t} + \frac{P}{2.3(k_1+k_3)} \qquad (4.4)$$

สมการ (4.4) ถ้าไม่ได้คำนึงถึงค่า BOD ที่ถูกกำจัดไปโดยการตกตะกอนลงสู่ท้องน้ำ และการย่อยสลายบริเวณท้องน้ำแล้ว จะได้สมการใหม่เป็น

$$Lb = La \cdot 10^{-k_1 t} \qquad (4.5)$$

สมการ (4.1) และ (4.2) เมื่อนำมาอินทิเกรตตาม Leibnitz differential equation จะได้ดังนี้

$$Db = \frac{k_1}{k_2-k_1-k_3} \left[La - \frac{P}{2.3(k_1+k_3)} \right] \left[10^{-(k_1+k_3)t} - 10^{-k_2 t} \right] + \frac{k_1}{k_2} \left[\frac{P}{2.3(k_1+k_3)} \right] (1-10^{-k_2 t}) + Da.10^{-k_2 t} \qquad (4.6)$$

ในกรณีที่ออกซิเจนที่ละลายในน้ำมาจากขบวนการสังเคราะห์แสง อัตราการขาดแคลนออกซิเจนที่ละลายในน้ำบริเวณท้ายน้ำที่เวลา t จะหาได้จากสมการที่ (4.7)

$$dD/dt = 2.3 (-k_2 D - k_1 L) - a \qquad (4.7)$$

a = ปริมาณออกซิเจนที่ละลายในน้ำที่ได้จากขบวนการสังเคราะห์แสง ซึ่งให้มีค่าคงที่, มก/ล/วัน และเมื่ออินทิเกรตจะได้ Oxygen Sag Equation ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$Db = \frac{k_1}{k_2-k_1-k_3}\left[La - \frac{P}{2.3(k_1+k_3)}\right]\left[10^{-(k_1+k_3)t} - 10^{-k_2t}\right] + \frac{k_1}{k_2}$$

$$\left[\frac{P}{2.3(k_1+k_3)} - \frac{a}{2.3k_1}\right](1-10^{-k_2t}) + Da.10^{-k_2t} \qquad (4.8)$$

ถ้าไม่คำนึงถึงค่า a, k_3 และ p จะได้ Oxygen Sag curve ซึ่ง Streeter-Phelps equation ดังสมการที่ (4.9)

$$Db = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot La\left[10^{-k_1t} - 10^{-k_2t}\right] + Da.10^{-k_2t} \qquad (4.9)$$

และเวลาที่ออกซิเจนในแม่น้ำต่ำสุด (t_c) หาได้จาก

$$t_c = \frac{1}{k_2 - k_1}\log\frac{k_2}{k_1}\left[1 - \frac{Da.(k_2-k_1)}{k_1La}\right] \qquad (4.10)$$

ต่อมา Dobbins (1961) ได้ศึกษาอัตราการย่อยสลายสารอินทรีย์ (BOD) ในลำน้ำโดยวิเคราะห์ในรูปของ Oxygen Sag เรียกว่า BOD profile Dobbins ดังนี้

$$DL\frac{d^2L}{dx^2} - U\frac{dL}{dx} - (k_1 + k_3)L + La = 0 \qquad (4.11)$$

เมื่อ DL = ล.ป.ล. ของ longitudinal dispersion, ตารางฟุต/วัน

x = ระยะทาง, ฟุต

U = ความเร็วเฉลี่ยของการไหลของน้ำ, ฟุต/วินาที

K_3 = ล.ป.ล. การย่อยสลาย BODโดยการตกตะกอนหรือการ adsorption ของสำน้ำ , วัน$^{-1}$

La = ปริมาณ BOD รวมทั้งหมด, มก/ล/วัน

Dobbins กล่าวว่า ถ้าสำน้ำอยู่ในสภาวะที่คงที่ first order reaction ของการย่อยสลายสารอินทรีย์ (BOD) เกิดเนื่องจากขบวนการออกซิเดชั่นของแบคทีเรีย , การตกตะกอนลงสู่ท้องน้ำ และการ adsorption ของสำน้ำเอง

สำหรับสมการออกซิเจนที่ละลายในน้ำของ Dobbins (Dissoloved Oxygen Profile Dobbins) เป็นดังนี้

$$DL \frac{d^2C}{dx^2} + K_2 (C_s - C) - U \frac{dC}{dx} - k_1 L - D_B = 0 \qquad (4.12)$$

D_B = ปริมาณสุทธิของออกซิเจนที่ถูกใช้ไปโดยพวก benthic organism และพืชน้ำ, มก/ล/วัน

ในปี 1965 Frankel ได้ศึกษาและนำเอา model ดังที่กล่าวมามาใช้โดยเขาเชื่อว่า dynamic model ของ Oxygen Sag Equation จะสามารถนำไปวิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้นในสำน้ำได้ดียิ่งขึ้นโดยการใช้คอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการสร้างโปรแกรมตังสมการที่ (4.13)

$$Lb = \frac{(k_1 + k_r)}{K_2 - (k_1 + k_r + k_3)} \left[La\ (\xi) - \frac{p}{k_1 + k_r + k_3} \right]$$

$$\left[e^{-(k_1 + k_r + k_3)} - e^{-k_2 t} \right] + \frac{(k_1 + k_r)\ p.(1-e^{-k_2 t})}{k_2(k_1+k_r+k_3)}$$

$$\left[Da.F.(\xi) + Cs \left\{ L - F\ (\xi) \right\} \right]\ e^{-k_2 t} \qquad (4.13$$

Da = Oxygen Deficit ที่บริเวณต้นน้ำ, มก/ล

Db = Oxygen deficit ที่บริเวณท้ายน้ำ, มก/ล

k_1 = ล.ป.ล. การย่อยสลายสารอินทรีย์ในห้องทดลอง, วัน$^{-1}$

k_2 = ล.ป.ล. การละลายออกซิเจนจากบรรยากาศลงสู่แหล่งน้ำ, วัน$^{-1}$

k_3 = ล.ป.ล. การตกตะกอนของสารอินทรีย์ลงสู่ท้องน้ำ, วัน$^{-1}$

K_i = 2.303 ki, i = 1,2,3,...,r

p = อัตราการย่อยสลายBOD ทั้งหมดจากบริเวณท้องน้ำถึงชั้นoverlying

k_r = biophysical extraction rate ของแม่น้ำ, วัน$^{-1}$

$f(\xi)$ = composite time dependent bivarent ซึ่งเท่ากับ product of the hourly ratios at the cyclic fluctuations in daily sewage strength/อัตราให้ลของน้ำเฉลี่ย

$F(\xi)$ = time dependent Photosynthesis factor cyclic ratio at the hourly level of DO in the stream/ความเข้มข้นเฉลี่ยของ DO ในแต่ละวัน

Cs = ความเข้มข้นอิ่มตัวของออกซิเจนที่ละลายในลำน้ำที่อุณหภูมิหนึ่ง ๆ

La = ultimate BOD ที่จุดระบายน้ำทิ้ง a, มก/ล

Lb = ultimate BOD ที่จุด b, มก/ล

t = เวลาที่ $La \longrightarrow Lb$

ξ = เวลา, วัน (time of day)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย