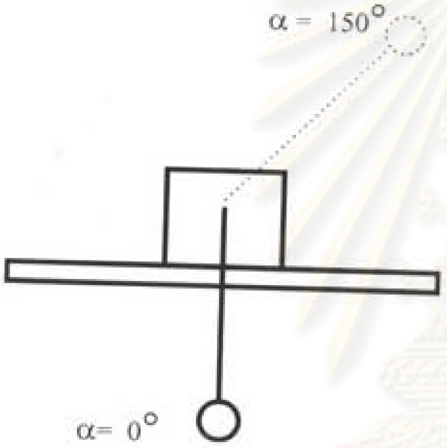
บทที่ 3

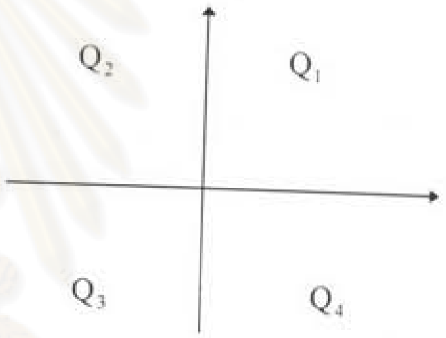
การควบคุมแบบไฮบริด (Hybrid Control)

การควบคุมแบบไฮบริด (Hybrid Control) จะเป็นการควบคุมแบบฟัซซีรวมกับการควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้น ซึ่งจะแบ่งการควบคุมเป็น 2 ส่วน คือ

1) การควบคุมแบบฟัซซี (Fuzzy Control) จะควบคุมในช่วงที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Math Model) เป็นแบบไม่เชิงเส้น (Non Linear) ตั้งแต่ -150 ถึง 150 องศา



รูปที่ 3.1. แบบจำลองของระบบและมุมองศาต่างๆ



รูปที่ 3.2. ตำแหน่ง Quadrant ต่างๆ

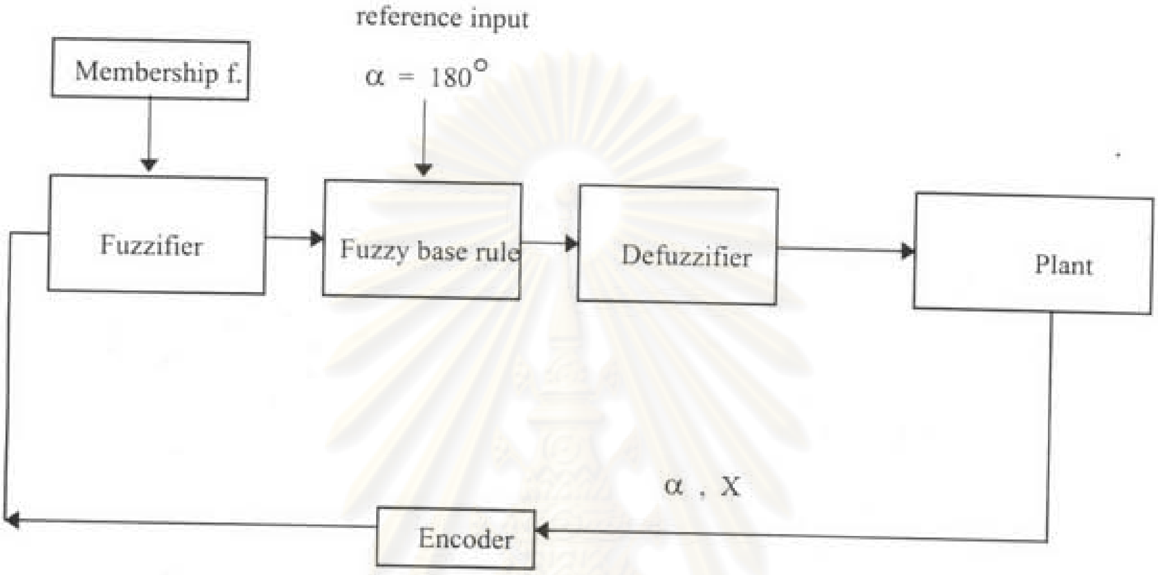
2) การควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้น (Linear State Feedback Control) จะควบคุมในช่วงที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Math Model) เป็นแบบเชิงเส้น (Linear)

ขบวนการควบคุมแบบฟัซซี (Fuzzy Control) จะเป็นจุดเริ่มของการควบคุม และมีโครงสร้างดังรูปที่ 1 ซึ่งจะเห็นว่าในระบบควบคุมจะเริ่มที่ ฟัซซีฟายเออร์ (Fuzzifier) ซึ่งจะเป็นการนำค่าที่รับเข้ามาในระบบแปลงเป็นฟัซซีเซต แต่ก่อนจะพูดถึงฟัซซีฟายเออร์ก็ต้องพูดถึงฟัซซีเซตที่จะใช้ในระบบควบคุมก่อน

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.1 ฟัซซี เซต (Fuzzy set)

ฟัซซี เซต (Fuzzy Set) เป็นเซตของสิ่งใดๆ ที่มีค่าของความเป็นสมาชิกของเซตตั้งแต่ 0 จนถึง 1

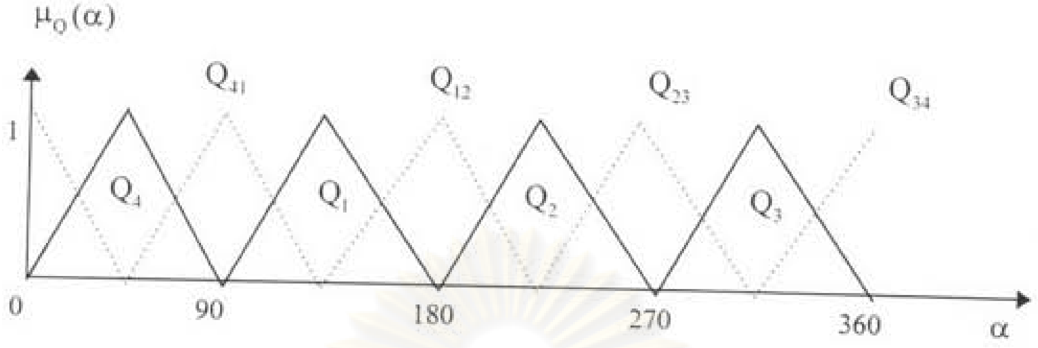


รูปที่ 3.3 ระบบควบคุมแบบฟัซซี ส่วนที่หนึ่ง

คุณสมบัติที่ทำให้ ฟัซซีเซต (Fuzzy Set) แตกต่างจาก เซตในระบบเดิม (Crisp Set) คือ ตรงที่สมาชิกของฟัซซีเซต (Fuzzy Set) จะมีค่าของความเป็นสมาชิกแตกต่างกันตั้งแต่ 0 ถึง 1 ในขณะที่เซตในระบบเดิม (Crisp Set) จะมี ค่าของความเป็นสมาชิกเพียง 0 หรือ 1 คือเป็นสมาชิกหรือไม่เป็นสมาชิกเท่านั้น

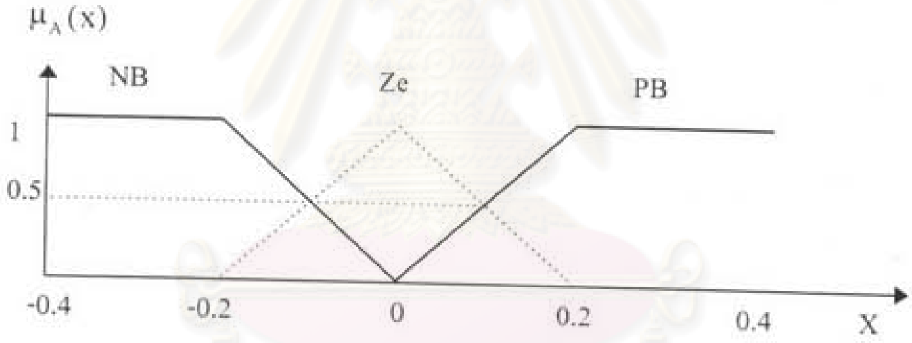
3.2 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก(Membership Function)

เป็นค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซี เซต (Fuzzy Set) A ที่ตำแหน่ง X ต่างๆเขียนแทนด้วยสัญญาลักษณ์ $\mu_A(x)$



รูปที่ 3.4. Membership Function ของ มุมองศาแขน pendulum

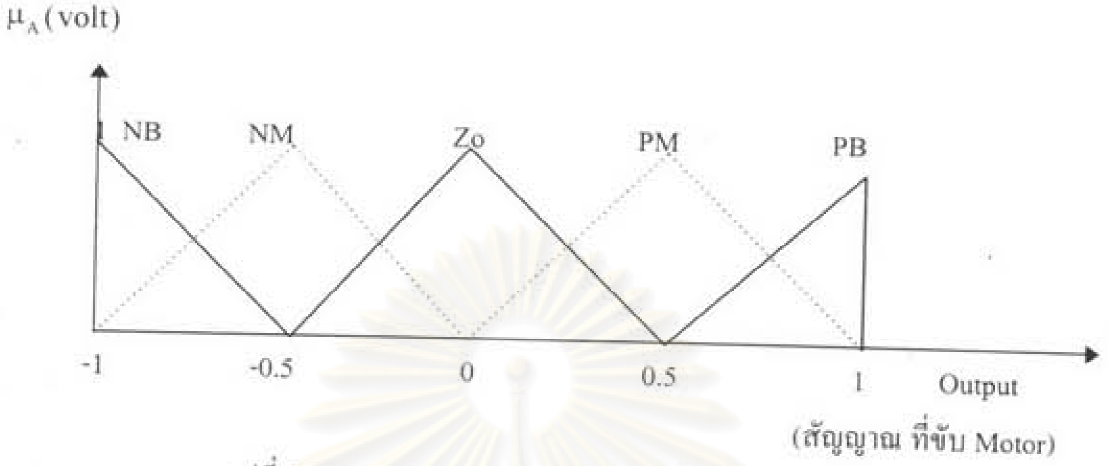
เป็นค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function) ของ α กับฟัซซีเซต (Fuzzy Set) Q_1 .... Q_{41}



รูปที่ 3.5. Membership Function ของ ระยะทาง X

เป็นค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function) ของ X กับฟัซซีเซต (Fuzzy Set) NB, Ze, PB (ย่อมาจาก Negative Big, Zero, Positive Big)

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

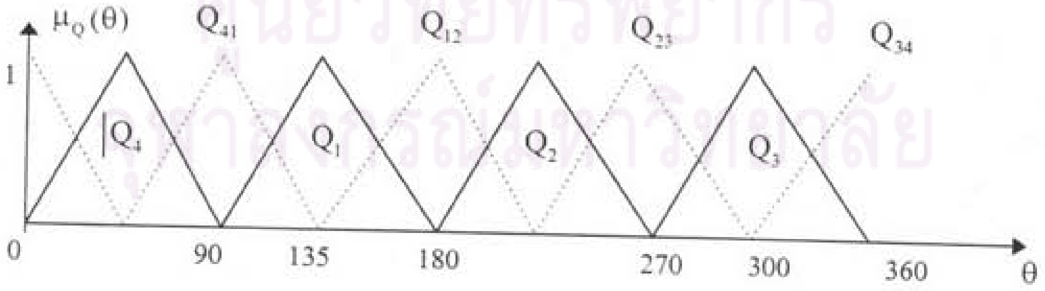


รูปที่ 3.6. Membership Function ของสัญญาณ output

เป็นค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function) ของตัวแปรออก (Output) กับฟัซซีเซต (Fuzzy Set) NB, NM, Zo, PM, PB (Negative Big, Negative Medium, Zero, Positive Medium, Positive Big)

3.3 ฟัซซีฟายเออร์ (Fuzzifier)

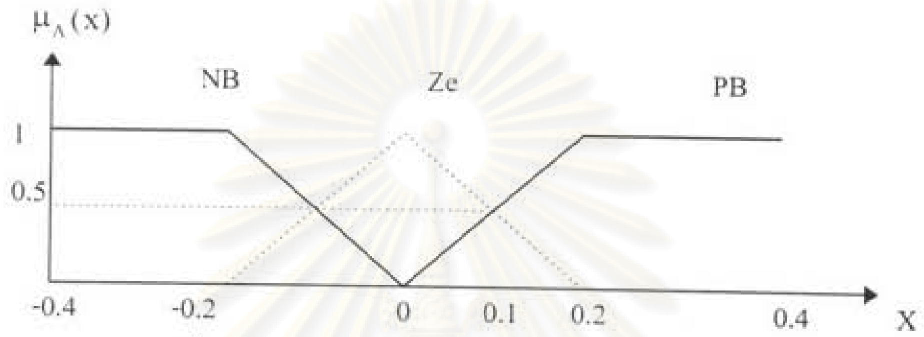
จะเป็นขบวนการแปลงค่าตัวเลขของตัวแปรเข้าที่ได้ เช่นตำแหน่งของรถ หรือมุมองศาของตุ้มน้ำหนักที่แกว่งให้เป็นฟัซซีเซต (Fuzzy Set) โดยจะแบ่งในลักษณะตามฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Function)



รูปที่ 3.7. Membership Function ของมุมองศาแขน pendulum

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

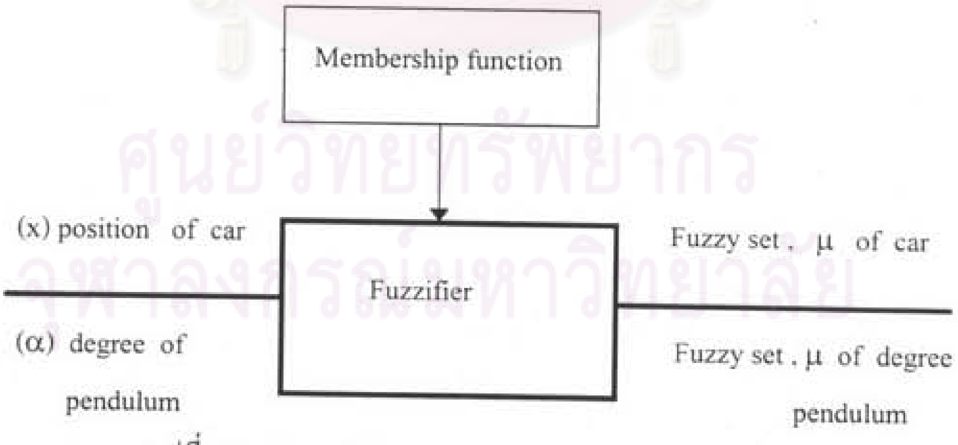
เช่น เมื่อรับค่าจากเอนโคดเดอร์ (Encoder) ที่ตำแหน่ง $\alpha = 135°$ จะอยู่ในฟัซซีเซต (Fuzzy Set) ของ Q_1 โดยมีค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function : μ) = 1 หรือเมื่อรับค่า $\alpha = 300°$ ก็จะอยู่ในฟัซซีเซต (Fuzzy Set) Q_3 (โดยมีค่า $\mu = 0.55$) และอยู่ในฟัซซีเซต (Fuzzy Set) Q_{23} (โดยมี $\mu = 0.45$)



รูปที่ 3.8. Membership Function ของระยะทาง X

หรือเมื่อตำแหน่งของรถ ที่รับเข้ามาอยู่ที่ 0.1 จะแปลงให้อยู่ในฟัซซีเซต (Fuzzy Set) Ze โดยมีค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function : μ) = 0.5 และอยู่ในฟัซซีเซต (Fuzzy Set) PB โดยมีค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function : μ) = 0.5

จะเขียนไดอะแกรม (Block Diagram) ของฟัซซีฟายเออร์ (Fuzzifier) ได้เป็น



รูปที่ 3.9. Block Diagram ของระบบ Fuzzifier

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.4 กฎพื้นฐานทางฟัซซี (Fuzzy Base Rules)

จะเป็นขบวนการในการเชื่อมโยงระหว่างฟัซซีเซตของตัวแปรเข้า (Input Fuzzy Set) ที่ได้มาจากขบวนการฟัซซีฟายเออร์ (Fuzzifier) ไปสู่ฟัซซีเซตของตัวแปรออก (Output Fuzzy Set) เช่น

If (degree of pendulum = Q_1) and (position of car = Ze)

then (swing up voltage = PB)

คือ ถ้าตัวแปรเข้า (Input) α อยู่ในฟัซซีเซต Q_1 และ X อยู่ในฟัซซีเซต Ze แล้วตัวแปรออก (Voltage) ที่จะขับมอเตอร์ (Motor) อยู่ในฟัซซีเซต PB

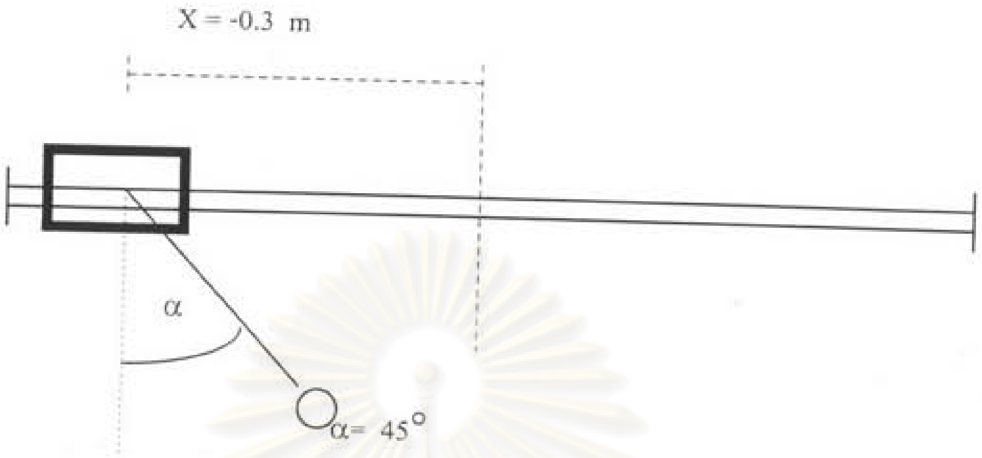
ซึ่งจากกฎที่กล่าว นำมาเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

X \ α	Q_{34}	Q_4	Q_{41}	Q_1	Q_{12}	Q_2	Q_{23}	Q_3
NB	PB	Zo	PB	PB	Zo	Zo	PB	PB
Ze	PM	NM	PM	PB	Zo	NB	NM	PM
PB	NB	NB	NB	Zo	Zo	NB	NB	Zo

รูปที่ 3.10. ตารางกฎพื้นฐานทางฟัซซี

ค่าต่างๆในตารางมีที่มาจากว่า

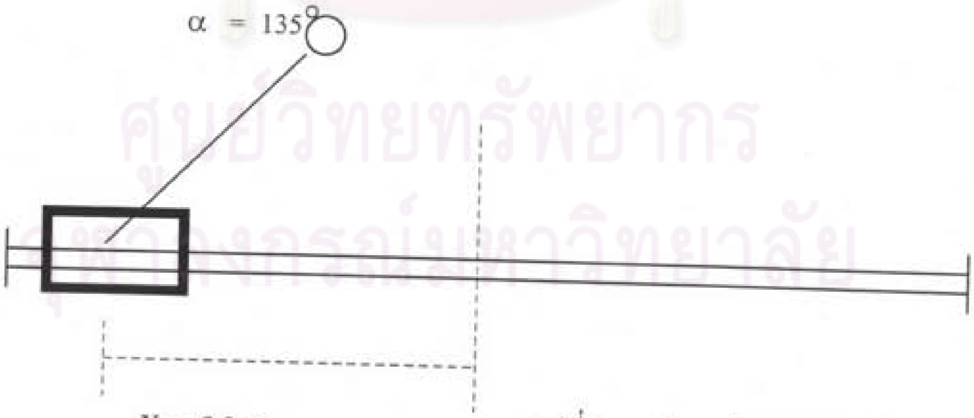
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.11. ตำแหน่งมุมองศาต่างๆตามตาราง

เมื่อพิจารณาในรูปจะเห็นว่า $\alpha = 45^\circ$ จะอยู่ในฟัซซีเซต Q_4 และ X = -0.3 m จะอยู่ใน ฟัซซีเซต NB

เมื่อรถเคลื่อนที่มาอยู่ตามตำแหน่งในรูป จะเห็นว่าในตำแหน่งนี้รถควรจะอยู่นิ่ง เพื่อรอให้ตุ้มน้ำหนักแกว่งกลับไปอีกทาง เพราะฉะนั้นฟัซซี เซต (Fuzzy Set) ของตัวแปรออก (สัญญาณ Volt) ที่ขับมอเตอร์ (Motor) จึงควรเป็นฟัซซี เซต Zo (สัญญาณ Voltage ที่ขับรถ เป็น + รถจะวิ่งไปทางขวา แต่ถ้าเป็น - รถจะวิ่งไปทางซ้าย)



รูปที่ 3.12. ตำแหน่งมุมองศาต่างๆ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แต่ถ้าเปลี่ยนเป็นตำแหน่งในรูป (α อยู่ใน Set Q_1 . X อยู่ใน Set NB) จะเห็นว่าในตำแหน่งนี้รถควรจะเคลื่อนที่ไปทางขวา เพื่อที่จะให้ตุ้มน้ำหนักแกว่งเข้าใกล้ตำแหน่งที่ $\alpha = 180^\circ$ ตามต้องการ เพราะฉะนั้นฟัซซีเซต (Fuzzy Set) ของตัวแปรออก (สัญญาณVoltage ที่ขับรถ) จึงควรจะอยู่ในฟัซซีเซต PB

ซึ่งในที่นี้จะเห็นว่าตัวแปรเข้า (Input α และ X) มีโอกาสเป็นไปได้ เมื่อค่าα และ X ที่ผ่านขบวนการฟัซซีฟายเออร์ (Fuzzifier) ออกมาแล้ว α ที่ผ่านอาจจะถูกเปลี่ยนเป็นฟัซซี เซต 2 เซตหรือมากกว่า (มี μ_A (x) ของแต่ละ Set) และ X ที่ผ่านอาจจะถูกเปลี่ยนเป็นฟัซซี เซต 2 เซตหรือมากกว่า ซึ่งจะทำให้การเชื่อมโยงตัวแปรเข้า (Input α และ X) ไปสู่ตัวแปรออก (Output) จะได้จำนวนฟัซซีเซตของตัวแปรออกที่เป็นไปได้เท่ากับจำนวนฟัซซีเซตของ α คูณกับจำนวนฟัซซีเซตของ X

เช่น	Fuzzy Set ของ α	Fuzzy Set ของ X
	Q_1	Ze
	Q_{41}	NB
เมื่อ Input	$\alpha = 100^\circ$	Input X = -0.1

ซึ่งจากตัวแปรเข้า (Input) ทั้ง 2 จะได้ ฟัซซีเซตของตัวแปรออก (Output) ถึง 4 ค่า

Fuzzy Set α	Fuzzy Set X	Fuzzy Set Output
Q_1	Ze	PB
Q_1	NB	PB
Q_{41}	Ze	PM
Q_{41}	NB	PB

รูปที่ 3.13. ตารางค่าของ output ที่ input ต่างๆกัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถึงตอนนี้ จะได้ฟัซซีเซตของตัวแปรออก 4 เซต ซึ่งจะต้องนำมารวมกันเพื่อหาฟัซซีเซตรวมของตัวแปรออก ซึ่งจะต้องหาค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function) ของแต่ละฟัซซีเซต (Fuzzy Set) ของตัวแปรออกก่อน

ในการหาค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function) ของตัวแปรออก ในแต่ละขบวนการ สามารถหาได้โดย การนำฟัซซีเซตของตัวแปรเข้าที่ได้มา Intersection กันแล้ว ค่าความเป็น สมาชิก (Membership Function) ของฟัซซีเซตที่ Intersection กันก็คือ ค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function) ของตัวแปรออกนั่นเอง ซึ่งจะแสดงในขบวนการต่อไปนี้

จะเห็นว่าใน ขบวนการที่ 1 มี

Input Fuzzy Set Q_1 มี ค่า Membership Function $\mu_{Q_1}(x) = 0.2$

Input Fuzzy Set Ze มี ค่า Membership Function $\mu_{Ze}(x) = 0.5$

ทำให้ได้

Output Fuzzy Set PB ซึ่งจะได้ $\mu_{PB}(x) = \text{Min}(0.2 , 0.5) = 0.2$

ใน ขบวนการที่ 2 มี

Input Fuzzy Set Q_1 มี ค่า Membership Function $\mu_{Q_1}(x) = 0.2$

Input Fuzzy Set NB มี ค่า Membership Function $\mu_{NB}(x) = 0.5$

ทำให้ได้

Output Fuzzy Set PB ซึ่งจะได้ $\mu_{PB}(x) = \text{Min}(0.2 , 0.5) = 0.2$

ใน ขบวนการที่ 3 มี

Input Fuzzy Set Q_{41} มี ค่า Membership Function $\mu_{Q_{41}}(x) = 0.8$

Input Fuzzy Set Ze มี ค่า Membership Function $\mu_{Ze}(x) = 0.5$

ทำให้ได้

Output Fuzzy Set PM ซึ่งจะได้ $\mu_{PM}(x) = \text{Min}(0.8 , 0.5) = 0.5$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ใน ขบวนการที่ 4 มี

Input Fuzzy Set Q_{41} มี ค่า Membership Function $\mu_{Q_{41}}(x) = 0.8$

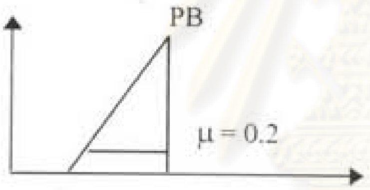
Input Fuzzy Set NB มี ค่า Membership Function $\mu_{NB}(x) = 0.5$

ทำให้ได้

Output Fuzzy Set PB ซึ่งจะได้ $\mu_{PB}(x) = \text{Min}(0.8, 0.5) = 0.5$

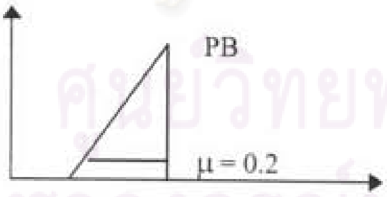
ซึ่งเมื่อได้ค่าฟัซซีเซตของตัวแปรออกทั้ง 4 เซต (พร้อมทั้ง $\mu_A(x)$) แล้วให้ทำการรวมฟัซซีเซตทั้ง 4 เซต โดยการ Union ฟัซซี เซต ทั้ง 4 เซต จะได้

1. process 1 จะได้ว่า $\mu_{PB}(x) = \text{Min}(0.2, 0.5) = 0.2$ เมื่อนำฟัซซีเซตเอาท์พุต PB ในหัวข้อ 3.2 มาเขียนรูปกราฟและค่าความเป็นสมาชิกจะได้ดังรูป



รูปที่ 3.14. Output ของ process 1.

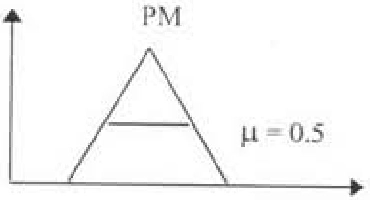
2. process 2 จะได้ว่า $\mu_{PB}(x) = \text{Min}(0.2, 0.5) = 0.2$ เมื่อนำฟัซซีเซตเอาท์พุต PB ในหัวข้อ 3.2 มาเขียนรูปกราฟและค่าความเป็นสมาชิกจะได้ดังรูป



รูปที่ 3.15. Output ของ process 2.

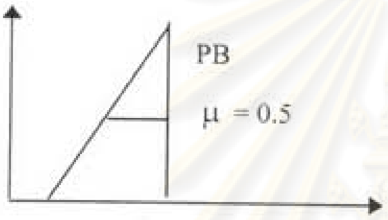
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. process 3 จะได้ว่า $\mu_{PM}(x) = \text{Min}(0.8, 0.5) = 0.5$ เมื่อนำฟัซซีเซตเอาท์พุต PB ในหัวข้อ 3.2 มาเขียนรูปกราฟและค่าความเป็นสมาชิกจะได้ดังรูป



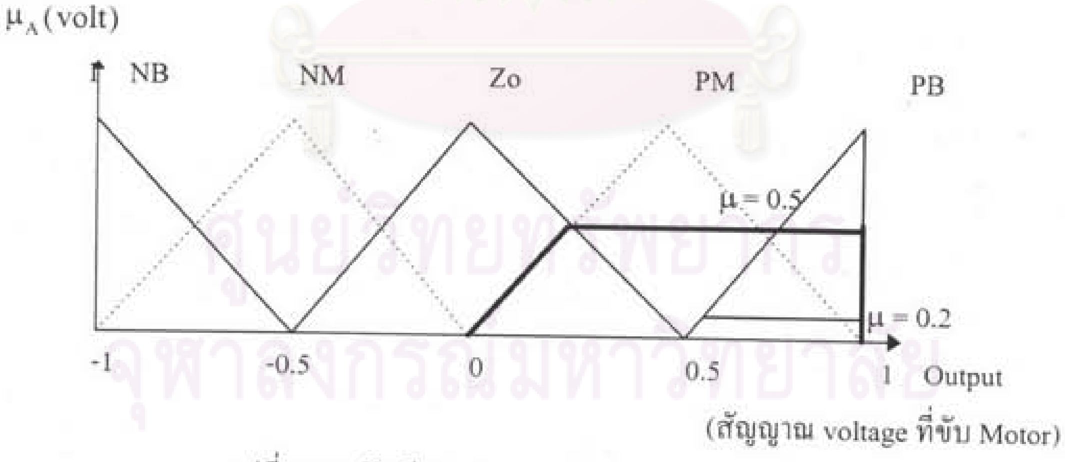
รูปที่ 3.16. Output ของ process 3.

4. process 4 จะได้ว่า $\mu_{PB}(x) = \text{Min}(0.8\ ,\ 0.5) = 0.5$ เมื่อนำฟัซซีเซตเอาท์พุต PB ในหัวข้อ 3.2 มาเขียนรูปกราฟและค่าความเป็นสมาชิกจะได้ดังรูป



รูปที่ 3.17. Output ของ process 4.

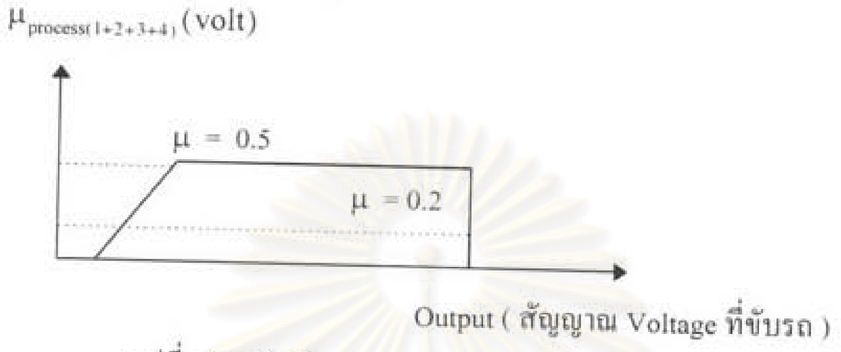
เมื่อทำการรวมฟัซซี เซต ทั้ง 4 เซต (ทำการ Max) จะได้ดังรูป



รูปที่ 3.18. ฟัซซีเซตของ output รวม

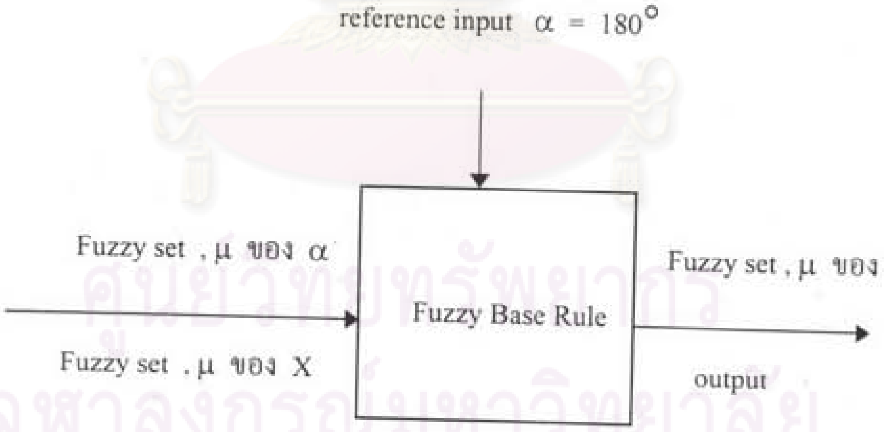
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นำมาเขียนใหม่จะได้



รูปที่ 3.19. ฟัซซีเซตรวมของ output

จะเห็นว่าเมื่อผ่านขบวนการกฎพื้นฐานทางฟัซซี (Fuzzy Base Rule) แล้วจะเหลือเพียงฟัซซีเซตของตัวแปรออก เพียงเซตเดียวเท่านั้นจะเขียนไดอะแกรม (Block Diagram) ของกฎพื้นฐานทางฟัซซี (Fuzzy Base Rule) ได้



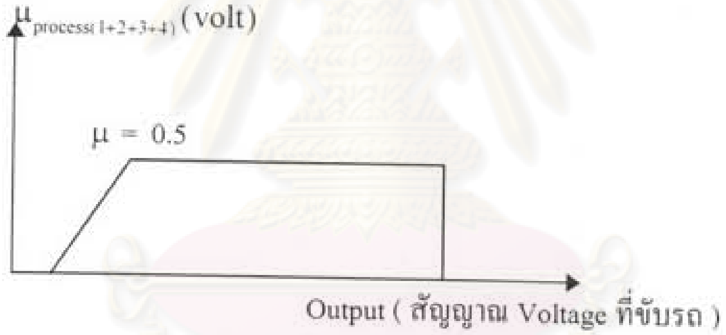
รูปที่ 3.20. Block Diagram ของ fuzzy base rule

3.5 ดีฟัซซีฟายเออร์ (Defuzzifier)

เป็นขบวนการในการแปลงค่าฟัซซีเซตของตัวแปรออก ที่รวมแล้วให้เป็นค่าตัวเลขที่จะส่งไปควบคุมมอเตอร์จริงๆ โดยใช้หลักว่าเป็นการหาเซนทรอย (Centroid) ของพื้นที่

การดีฟัซซีฟายเออร์จะมีอยู่หลายวิธีในทางปฏิบัติ เช่น

1. การใช้ค่าสูงสุดจากหลายๆแบบ
2. ทฤษฎีค่าน้ำหนักเฉลี่ย
3. ทฤษฎีค่าศูนย์กลาง (Centroid of Area) ซึ่งเป็นกรรมวิธีที่ดีที่สุดในวิธีทั้งหมด เพราะจุดศูนย์กลางของพื้นที่น่าจะเป็นตัวแทนที่ดีที่สุดของเซตนั้น และในกรณีที่ต้องกระทำพร้อมกันหลายๆกฎในการกระทำ จะทำให้เกิดพื้นที่ของเซตหลาย ๆ เซตมาซ้อนทับกัน (ดังกรณีที่แสดงอยู่ในรูปที่ 27) การซ้อนทับกันนี้จะส่งผลให้เกิดความต่อเนื่องในเอาท์พุตที่ส่งออกมา



รูปที่ 3.21. ฟัซซีเซตรวมของ output

ซึ่งสมการที่ใช้ในการคำนวณตัวแปรออกที่ส่งไปควบคุม $Y = \dfrac{\int \mu_A(x).Xdx}{\int \mu_A(x)dx}$

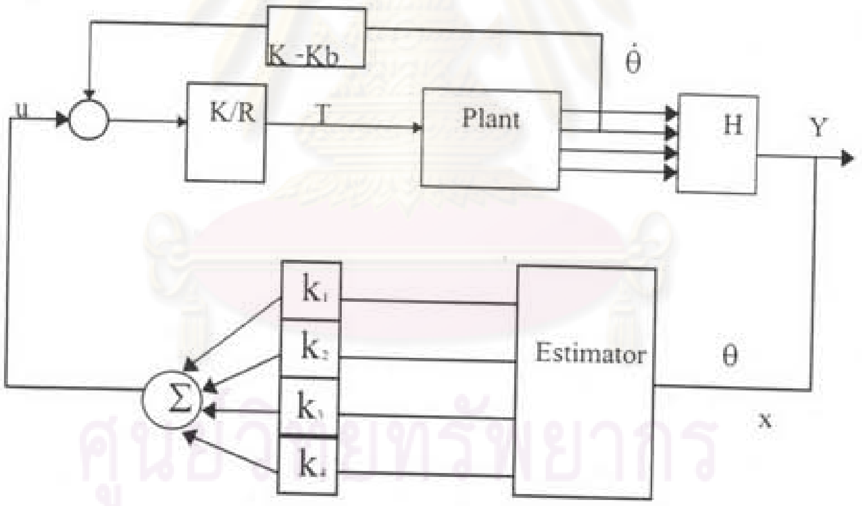
โดยที่ตัวแปรออก (Y) ที่ได้นี้จะมีค่าอยู่ในช่วง -1 ถึง 1 และใช้เป็นสัญญาณส่งต่อไปยังตัวขยายสัญญาณ (Amplifier) เพื่อใช้ขับการเคลื่อนที่ของมอเตอร์ (Motor) ต่อไป

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อถึงเวลาที่ระบบตุ้มน้ำหนักแกว่งขึ้นมาจนถึงตำแหน่ง -150 ถึง 150 องศาของระบบแล้ว ในการควบคุมแบบไฮบริด (Hybrid Control) จะมีส่งการควบคุมจากระบบควบคุมแบบฟัซซี (Fuzzy Control) ไปสู่การควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้น (Linear State Feedback Control)

3.6 การควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้น (Linear State Feedback Control)

ส่วนที่เป็นการควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้น (Linear State Feedback Control) จะใช้การควบคุมแบบวางตำแหน่งโพล (Pole Placement) โดยจะมีการวัดค่าเสตท (state) 4 ค่า คือ θ, $\dot{\theta}$, x, $\dot{x}$ จะมีไดอะแกรม (Block Diagram) ดังรูปที่ 2 ซึ่งการควบคุมแบบวางตำแหน่งโพลจะเป็นต้องมีการหาแบบจำลองก่อนเพื่อคำนวณหาค่าอัตราขยายในระบบสำหรับอินพุตแต่ละตัว โดยเราสามารถเขียนสมการในระบบได้ดังนี้



รูปที่ 3.22ระบบควบคุมแบบ Linear state feedback control (pole placement)

โดยที่ Plant ในที่นี้คือ Motor และ Pendulum Car ทั้งระบบ

โดยมีค่า θ วัดได้จาก Encoder 1

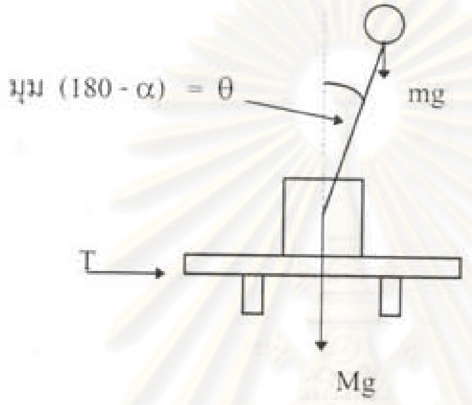
x วัดได้จาก Encoder 2

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\dot{\theta}$ วัดได้จาก Differentiation θ

$\dot{X}$ วัดได้จาก Differentiation X

จากรูปสามารถสร้างสมการได้ดังนี้



รูปที่ 3.23. แรงต่างๆในระบบ pendulum

จาก Car จะได้

$$T = \text{Kinetic Energy} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left\{\frac{d(x + l\sin\theta)}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{d(l\cos\theta)}{dt}\right\}^2\right]$$

$$V = \text{Potential Energy} = V_0 + mgl\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2] - V - mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta)$$

จากสมการ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_i$ จะได้

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F_{pendulum} \qquad \text{.......................(1)}$$

และ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)l\cos\theta + ml^2\dot{\theta}\sin\theta^2 = ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)l\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta$$

$$= -ml\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta + mgl\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta + ml\ddot{\theta}$$

จะได้ $\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0$ ....(2)

การประมาณค่าระบบเชิงเส้นสามารถทำได้โดยการกำหนดการแกว่งอยู่ในช่วงเล็ก ๆ หรือโดยการกำหนดให้มุม θ มีค่าเล็กซึ่งจะได้ว่า

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$\cos\theta \cong 1$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากค่าประมาณนี้ทำให้สมการที่ (1) และ (2) ลดรูปลงและสามารถจัดใหม่ได้เป็น

$$M\ddot{x} = F_{pendulum} - mg\theta \qquad \text{...........................(3)}$$

$$Ml\ddot{\theta} - (M+m)g\theta = -F_{pendulum} \qquad \text{.........................(4)}$$

สมการการเคลื่อนที่ของมอเตอร์ (dynamic equations) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_b = K_b\dot{\theta} \qquad \text{.........................(5)}$$

$$L_a(di_a/dt) + R_a i_a = E_a - E_b \qquad \text{.........................(6)}$$

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = T_{motor} = Ki_a \qquad \text{.........................(7)}$$

สำหรับเซอร์โวมอเตอร์ที่ใช้นั้นมีค่าเวลาคงที่ทางไฟฟ้า (Electrical Time Constant) สั้นเมื่อเทียบกับค่าเวลาคงที่ทางกล (Mechanical Time Constant) ดังนั้นค่า L_a จะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่า R_a ทำให้สมการที่ (6) ลดรูปลงเป็น

$$R_a i_a = E_a - E_b$$

$$= (R_a/K)T_{motor} \qquad \text{.........................(8)}$$

และเนื่องจากมอเตอร์ที่ใช้นี้มีการติดตั้งแทคโคมิเตอร์เพื่อวัดความเร็วการหมุนของมอเตอร์เพื่อชดเชยค่าแรงดันย้อนกลับ ทำให้ค่า $E_b = (K_b - K_{tac})\dot{\theta}$ ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

ที่แกนหมุนของมอเตอร์จะติดตั้งเกียร์ทดรอบอัตราส่วน 5:1 เพื่อต้องการลดความเร็วและเพิ่มค่าแรงบิด (Torque) และปลายเกียร์ทดรอบนี้จะต่อกับจานมูเล่ที่มีลวดสลิงพันอยู่ สำหรับส่งแรงผ่านไปยังตัวรถที่ติดตั้งแขนตุ้มน้ำหนัก แรงบิดที่แกนหมุนของเกียร์ทดรอบสามารถเขียนได้ด้วยสมการดังนี้

$$5(T/R_m) = F_{pendulum} \qquad \text{.........................(9)}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อนำสมการที่ (8), (9) ไปแทนในสมการที่ (3), (4) จะได้สมการการเคลื่อนที่รวมของระบบที่จะทำการควบคุมดังนี้คือ

$$M\ddot{x} = 5KE_a/R_mR_a - mg\theta$$

และ $$Ml\ddot{\theta} - (M+m)g\theta = -5KE_a / R_a R_m$$

จากสมการข้างต้นนี้สามารถนำมาเขียนอยู่ในรูปแบบปริภูมิเสตท (State Space Variable) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (m+M)g/Ml & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg/M & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5K/MlR_m R_a \\ 0 \\ 5K/MR_a R_m \end{bmatrix} E_a$$

เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ของระบบดังนี้

ค่าคงที่ของมอเตอร์ $K/R_a = 0.02128$ N.m/volt

มวลของตัวรถ $M = 2.5$ Kg

มวลของลูกตุ้ม $m = 0.38$ Kg

ความยาวของแขนลูกตุ้ม $l = 0.3$ m

จะได้สมการดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ x \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 37.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.492 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \\ 2.10 \end{bmatrix} E_a \qquad \text{...............(10)}$$

โดยที่สัญญาณควบคุมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_a = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \qquad \text{..................(11)}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I17332631

เนื่องจากระบบมีช่วงเวลาในการควบคุม (Sampling Time) ที่สั้นคือ 4 msec ทำให้แบบจำลองของระบบสามารถใช้แบบจำลองที่ต่อเนื่องได้ (Continuous Model)

สมการของระบบควบคุมแบบวางตำแหน่งโพล (pole placement method) คือ

$$(SI - A + BK) = 0$$

และสมการลักษณะเฉพาะของระบบคือ

$$\det|SI - A + BK| = 0$$

ตำแหน่งโพลของระบบควบคุมแบบปิดที่ต้องการจะมีค่าเท่ากับ $[-2 \quad -2-25i \quad -2+25i \quad -3]^t$ โดยกำหนดขึ้นจากความสมดุลย์ระหว่างเวลาคงที่ของระบบและความถี่ของระบบควบคุมแบบปิดที่ต้องการ จากการทดลองเขียนระบบจำลองในโปรแกรมคำนวณ (MATLAB) แล้วจำลองการทำงานของระบบในโปรแกรมเพื่อหาตำแหน่งโพลของระบบปิดที่ตอบสนองต่อสมการสภาวะเริ่มต้นที่กำหนด (Initial Condition) ที่ดีที่สุด สภาวะเริ่มต้นที่กำหนดคือ $\theta = +/- 30^{\circ}$, $\dot{\theta} = -/+ 4$ rad/s, $x = 0$, $\dot{x} = 0$

จะได้ว่าระบบมีสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation) คือ

$$(s+2)(s+2+25i)(s+2-25i)(s+3) = 0$$

หรือ $$\left(s^4 + 9s^3 + 55s^2 + 169s + 174\right) = 0$$

โดยวิธีการ Undetermine coefficient หรือวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้เมตริกซ์ของค่าเกนดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$K = [115.4421 \;\; 15.1316 \;\; 54.9641 \;\; 46.1529]^t$$

$$E_a = -Kx$$

$$= 115.4421*\theta + 15.1316*\dot{\theta} + 54.9641*x + 46.1529*\dot{x}$$

ค่า E_a นี้จะเป็นค่าที่ใช้ควบคุมระบบได้

ระบบควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้น (Linear State Feedback Control) จะสามารถควบคุมให้ตุ้มน้ำหนักแกว่งไปอยู่ในตำแหน่ง $\theta = 0^\circ$ และ $X = 0$ ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย